Экзаменационный билет № 2

1. Несчетность множества вещественных чисел.

Чтобы показать несчётность всего множества вещественных чисел, достаточно показать несчётность интервала $(0,1)$.[18]

Пусть все числа указанного промежутка уже занумерованы некоторым образом. Тогда их можно выписать в следующем виде:

$x_2 = 0, a_{21}a_{22}\cdots a_{2m}\cdots$
$\cdots$
$x_k = 0, a_{k1}a_{k2}\cdots a_{km}\cdots$
$\cdots$

Здесь a_{ij} — j-я цифра i-ого числа. Очевидно, что все числа указанного вида действительно принадлежат рассматриваемому промежутку, если только в каждом числе не все цифры сразу являются нулями или девятками.

Далее предлагается рассмотреть следующее число:

$x = 0, d_1 d_2 \cdots d_m \cdots$

Пусть каждая цифра d_i этого числа удовлетворяет следующим трём свойствам:

§ $d_i \neq 0$

§ $d_i \neq 9$

§ $d_i \neq a_{ii}$

Такое число действительно существует на указанном промежутке, так как оно является вещественным, не совпадает ни с нулём, ни с единицей, а десятичных цифр достаточно, чтобы третье свойство выполнялось. Кроме этого, x интересно тем фактом, что оно не совпадает ни с одним из чисел x_j, выписанных выше, ведь иначе j-я цифра числа x совпала бы с j-ой цифрой числа x_j. Пришли к противоречию, заключающемуся в том, что как бы числа рассматриваемого промежутка ни были занумерованы, всё равно найдётся число из этого же промежутка, которому не присвоен номер.[18]

Это свидетельствует о том, что *множество вещественных чисел не является счётным*. Его мощность называется ***мощностью континуума***.

2. Логарифмическое дифференцирование.

Логарифмическим дифференцированием называется метод дифференцирования функций, при котором сначала находится логарифм функции, а затем вычисляется производная от него. Такой прием можно использовать для нахождения производных степенных, рациональных и некоторых иррациональных функций.

Рассмотрим этот подход более детально. Пусть дана функция $y = f(x)$. Возьмем натуральные логарифмы от обеих частей:

$$\ln y = \ln f(x) .$$

Теперь продифференцируем это выражение как сложную функцию, имея ввиду, что y - это функция от x.

$$(\ln y)' = (\ln f(x))', \; \Rightarrow \frac{1}{y} y'(x) = (\ln f(x))'.$$

Отсюда видно, что искомая производная равна

$$y' = y(\ln f(x))' = f(x)(\ln f(x))'.$$

Такая производная от логарифма функции называется *логарифмической производной*.

Данный метод позволяет также эффективно вычислять производные *показательно-степенных функций*, то есть функций вида

$$y = u(x)^{v(x)},$$

где $u(x)$ и $v(x)$ − дифференцируемые функции от x.

В приведенных ниже примерах вычислить производную функции $y(x)$, используя логарифмическое дифференцирование.

Пример 1

$$y = x^x, \; x > 0.$$

Решение.
Сначала прологарифмируем левую и правую части уравнения:

$$\ln y = \ln x^x, \; \Rightarrow \ln y = x \ln x.$$

Теперь продифференцируем обе части, имея ввиду, что y − это функция от x:

$$(\ln y)' = (x \ln x)', \; \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = x' \ln x + x(\ln x)', \; \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}, \; \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + 1,$$
$$\Rightarrow y' = y(\ln x + 1), \; \Rightarrow y' = x^x(\ln x + 1), \;\; \text{где} \;\; x > 0.$$

Пример 2

$$y = x^{\ln x}, \; x > 0.$$

Решение.
Применяем логарифмическое дифференцирование:

$$\ln y = \ln\left(x^{\ln x}\right), \; \Rightarrow \ln y = \ln x \ln x = \ln^2 x, \; \Rightarrow (\ln y)' = \left(\ln^2 x\right)', \; \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2 \ln x (\ln x)',$$

Экзаменационный билет № 4

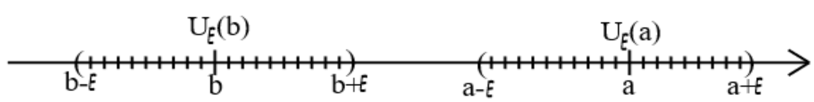
1. Понятие числовой последовательности и ее предела. Теорема об ограниченной сходящейся последовательности.

<u>Теорема:</u> (о единственности предела последовательности)

Числовая последовательность может иметь только один предел.

<u>Доказтельство:</u>

Предположим, что последовательность X_n имеет два различных предела $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}$, причем $b < a$.



Выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы ε-окрестности точек b и a не пересекались (не имели общих точек). Возьмем, например, $\varepsilon = \frac{(a-b)}{3}$. Так как число b — предел последовательности X_n, то по заданному $\varepsilon > 0$ можно найти номер N такой, что $X_n \in U_\varepsilon(b)$ для всех $n \geq N$. Поэтому вне интервала $U_\varepsilon(b)$ может оказаться лишь конечное число членов последовательности. В частности, интервал $U_\varepsilon(a)$ может содержать лишь конечное число членов последовательности. Это противоречит тому, что a — предел последовательности (любая окрестность точки a должна содержать бесконечное число членов последовательности). Полученное противоречие показывает, что последовательность не может иметь два различных предела. Итак, сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Последовательность X_n называется **ограниченной снизу**, если существует такое число C_1, что все члены последовательности удовлетворяют условию $X_n \geq C_1$, т. е.:

$$\exists C_1 : \forall n \in N \to X_n \geq C_1$$

Последовательность X_n называется **ограниченной сверху**, если:

$$\exists C_2 : \forall n \in N \to X_n \leq C_2$$

Последовательность, ограниченную как снизу, так и сверху, называют *ограниченной*, т. е. последовательность X_n называется **ограниченной**, если:

$$\exists C_1, \exists C_2 : \forall n \in N \to C_1 \leq X_n \leq C_2$$

это можно записать и так:

$$\exists C > 0 : \forall n \in N \to |X_n| \leq C$$

Таким образом, последовательность называют ограниченной, если множество ее значений ограничено.

Примеры.

Теорема: (об ограниченности сходящейся последовательности)

Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

Доказательство:

Пусть последовательность X_n имеет предел, равный ***a***. По определению предела для $\varepsilon = 1$ найдем номер N такой, что при всех $n \geq N$ имеет место неравенство $|X_n - a| < 1$. Так как модуль суммы не превосходит суммы модулей, то:

$$|X_n| = |X_n - a + a| \leq |X_n - a| + |a|.$$

Поэтому при всех $n \geq N$ выполняется неравенство:

$$|X_n| < 1 + |a|.$$

Положим $c = max\,(1 + |a|\,, |X_1|\,, \ldots, |X_{N-1}|)$, тогда $|X_n| \leq C$ при всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. последовательность X_n ограничена.

Замечание: В силу предыдущей теоремы всякая сходящаяся последовательность является ограниченной. Обратное неверно: не всякая ограниченная последовательность является сходящейся! *Например*, последовательность $\{(-1)^n\}$ ограничена, но не является сходящейся.

Замечание: Если условие $\exists C > 0 : \forall n \in N \to |X_n| \leq C$ не выполняется, т. е.

$$\forall C > 0 : \exists n_C \in \mathbb{N} : |X_{n_C}| > C,$$

то говорят, что последовательность X_n не ограничена.

Пример: Доказать, что последовательность $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ является ограниченной, если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, $b \neq 0$ и $y_n \neq 0$, для всех $n \in \mathbb{N}$.

Решение

Так как $b \neq 0$, то $|b| > 0$. По заданному числу $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ в силу определения предела последовательности найдется номер N_0 такой, что:

$$\forall n \geq N_0 \to |y_n - b| < \tfrac{|b|}{2}.$$

Используя неравенство для модуля разности

$$|b| - |y_n| \leq |y_n - b|$$

и неравенство $\forall n \geq N_0 \to |y_n - b| < \frac{|b|}{2}$, получаем $|b| - |y_n| < \frac{|b|}{2}$, откуда $|y_n| > \frac{|b|}{2}$. И поэтому для всех $n \geq N_0$ справедливо неравенство $\left|\frac{1}{y_n}\right| < \frac{2}{|b|}$.

Пусть C = max $\left(\left|\frac{1}{y_1}\right|, \ldots, \left|\frac{1}{y_{N_0-1}}\right|, \frac{2}{|b|}\right)$, для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\left|\frac{1}{y_n}\right| \leq C$, т. е. $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ — ограниченная последовательность.

2.Теорема Ролля:

Теорема Ролля утверждает, что любая действительная дифференцируемая функция, принимающая одинаковые значения на концах интервала, должна иметь в этом интервале хотя бы одну стационарную точку, т.е. точку, в которой первая производная равна нулю. Геометрически это означает, что касательная к графику функции в этой точке горизонтальна (рисунок 1).

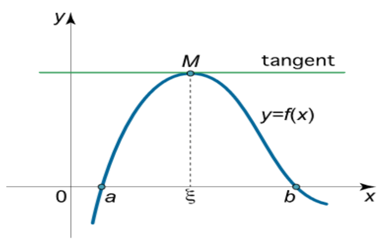


Рис.1

Рис.2 Мишель Ролль (1652-1719)

Данное свойство было известно еще в 12 веке в древней Индии. Выдающийся индийский астроном и математик *Бхаскара II* $(1114 - 1185)$ упоминает о нем в своих сочинениях. В строгом виде эта теорема была доказана в 1691 году французским математиком *Мишелем Роллем* $(1652 - 1719)$ (рисунок 2).

В современной математике доказательство теоремы Ролля основывается на двух других теоремах – второй теореме Вейерштрасса и *теореме Ферма*. Они формулируются таким образом:

Вторая теорема Вейерштрасса
Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на нем своей точной верхней и нижней грани (т.е. наибольшего и наименьшего значения).

Теорема Ферма
Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и дифференцируема в этой точке. Тогда, если функция $f(x)$ имеет локальный экстремум в точке x_0, то

$$f'(x_0) = 0.$$

Рассмотрим теперь теорему Ролля (или теорему о нуле производной) в более строгом изложении. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и принимает одинаковые значения на концах данного отрезка:

$$f(a) = f(b).$$

Тогда на интервале (a, b) существует по крайней мере одна точка $\xi \in (a, b)$, в которой производная функции $f(x)$ равна нулю:

$$f'(\xi) = 0.$$

Доказательство.
Если функция $f(x)$ постоянна на отрезке $[a, b]$, то производная равна нулю в любой точке интервала (a, b), т.е. в этом случае утверждение справедливо.

Если функция $f(x)$ не является постоянной на отрезке $[a, b]$, то по теореме Вейерштрасса она достигает своего наибольшего или наименьшего значения в некоторой точке ξ интервала (a, b), т.е. в точке ξ существует локальный экстремум. Тогда по теореме Ферма производная в этой точке равна нулю:

$$f'(\xi) = 0.$$

Теорема Ролля имеет наглядный физический смысл. Предположим, что тело движется вдоль прямой и через некоторый промежуток времени возвращается в исходную точку. Тогда в данном промежутке времени существует момент, в котором мгновенная скорость тела была равна нулю.

Пример 1

Доказать, что если уравнение

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x = 0$$

имеет положительный корень $x = x_0$, то уравнение

$$na_0x^{n-1} + (n-1)\,a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0$$

также имеет положительный корень $x = \xi$, причем $\xi < x_0$.

Решение.
Первое уравнение помимо $x = x_0$ имеет еще один корень $x = 0$. Следовательно, для функции $f(x)$ выполняются условия теоремы Ролля:

$$f(0) = f(x_0) = 0.$$

Второе уравнение получается путем дифференцирования первого уравнения:

$$f'(x) = \left(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x\right)' = na_0x^{n-1} + (n-1)\,a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0.$$

Согласно теореме Ролля, на отрезке $[0, x_0]$ существует внутренняя точка $x = \xi$, в которой производная равна нулю. Следовательно, точка $x = \xi$ является решением второго уравнения, причем $0 < \xi < x_0$.

Экзаменационный билет № 6

1. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если для любого числа $A>0$ существует такой номер n_0, начиная с которого (то есть для всех $n \geq n_0$) выполняется соотношение $|x_n|>A$.

Замечание 1. Различие между бесконечно большой и неограниченной последовательностью в том, что в случае бесконечно большой последовательности соотношение $|x_n|>A$ должно выполняться для всех $n \geq n_0$, а для неограниченности последовательности достаточно, чтобы существовал хотя бы один элемент последовательности, для которого выполняется $|x_n|>A$.

Следствие. Любая бесконечно большая последовательность является неограниченной.

Замечание 2. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Например, последовательность

$$x_n=\{1,\ 0,\ 3,\ 0,\ 5,\ 0,\ 7,\ 0 \ldots\}=\left\{\left\{\begin{array}{l} n,\ n=2k+1, \\ 0,\ n=2k, \end{array} \quad k \in N\right\}\right.$$

является неограниченной, но не является бесконечно большой. Покажем это.

Действительно, для любого $A>0$ существует номер $n=2[A]+1$ ($[A]$ – целая часть числа A), что $x_n>A$ (знак модуля опущен, так как все члены заданной последовательности являются неотрицательными). Номер $n=2[A]+1$ является нечетным, следовательно, в этом случае $x_n=x_{2[A]+1}=2[A]+1>A$. А это означает, что рассматривая последовательность неограниченна.

Так как члены последовательности чередуются и среди них есть значения 0, то нельзя указать для любого числа $A>0$ такой номер n_0, начиная с которого все члены последовательности удовлетворяют условию $x_n>A$, что соответствует тому, что последовательность $\{x_n\}$ не является бесконечно большой.

Бесконечно малые последовательности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой**, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такой номер $n_0=n_0(\varepsilon)$, начиная с которого ($n \geq n_0$) выполняется соотношение $|x_n|<\varepsilon$.

Замечание 3. Любая бесконечно малая последовательность является ограниченной, но не наоборот.

Примеры решения задач

ПРИМЕР

Задание Доказать, что последовательность $\left\{x_n=\frac{1}{n}\right\}$ является бесконечно малой.

Доказательство Зададим произвольное положительное число ε и найдем такой номер n_0 элемента этой последовательности, что для всех $n \geq n_0$ выполняется соотношение

$$|x_n|=\left|\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

Запишем последнее неравенство в виде $n>\frac{1}{\varepsilon}$, тогда в качестве n_0 можно выбрать $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$. Что и означает что рассматриваемая последовательность является бесконечно малой.

Что и требовалось доказать.

2.Теорема Коши

Теорема Коши

Теорема Коши о среднем значении обобщает формулу конечных приращений Лагранжа. В этой теореме устанавливается связь между производными двух функций и изменением этих функций на конечном отрезке.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемы на интервале (a,b), причем $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a,b)$. Тогда в этом интервале существует точка $x = \xi$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Доказательство.
Прежде всего, заметим, что знаменатель в левой части формулы Коши не равен нулю: $g(b) - g(a) \neq 0$. Действительно, если $g(b) = g(a)$, то по теореме Ролля найдется точка $\eta \in (a,b)$, в которой $g'(\eta) = 0$. Это, однако, противоречит условию, где указано, что $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a,b)$.

Введем вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) + \lambda g(x).$$

Выберем число λ таким образом, чтобы выполнялось условие $F(a) = F(b)$. В этом случае получаем

$$f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b), \ \Rightarrow f(b) - f(a) = \lambda [g(a) - g(b)], \ \Rightarrow \lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

и функция $F(x)$ принимает вид

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x).$$

Эта функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на открытом интервале (a,b), и при найденном значении λ принимает одинаковые значения на границах интервала. Тогда по теореме Ролля в интервале (a,b) существует точка ξ такая, что

$$F'(\xi) = 0.$$

Следовательно,

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) = 0$$

или

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Полагая $g(x) = x$, из формулы Коши можно получить формулу Лагранжа:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

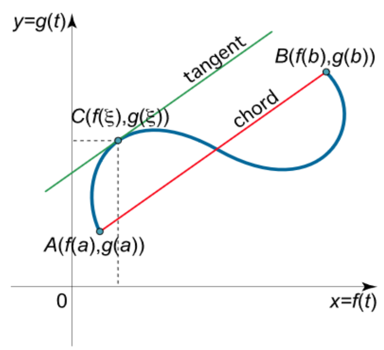


Рис.1

Рис.2 Огюстен Луи Коши (1789-1857)

Формула Коши имеет следующий геометрический смысл. Пусть плоская кривая γ описывается параметрическими уравнениями $x = f(t)$, $y = g(t)$, где параметр t изменяется в промежутке $[a,b]$. При изменении параметра t точка кривой на рисунке 1 пробегает от $A(f(a), g(a))$ до $B(f(b), g(b))$. В соответствии с теоремой Коши на кривой γ найдется точка $(f(\xi), g(\xi))$, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей концы A и B данной кривой.

Пример 1

Функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$, где $ab>0$. Показать, что для этой функции выполняется равенство

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$

где $\xi \in (a,b)$ (Б.П.Демидович, задача 1253).

Решение.
Заметим, что в силу условия $ab>0$ отрезок $[a,b]$ не содержит точку $x=0$. Рассмотрим две функции $F(x)$ и $G(x)$, имеющие вид:

$$F(x) = \frac{f(x)}{x}, \quad G(x) = \frac{1}{x}.$$

Для этих функций формула Коши записывается в таком виде:

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)},$$

где точка $x=\xi$ лежит в интервале (a,b).

Найдем производные:

$$F'(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}, \quad G'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Подставляя это в формулу Коши, получаем:

$$\frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{\frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}, \Rightarrow \frac{\frac{af(b)-bf(a)}{ab}}{\frac{a-b}{ab}} = -\frac{\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{\frac{1}{\xi^2}}, \Rightarrow \frac{af(b)-bf(a)}{a-b} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

Левую часть этого равенства можно записать через определитель. Тогда

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

Экзаменационный билет № 8

1. Замечательные пределы ($\frac{\sin(x)}{x}$).
http://www.mathprofi.ru/zamechatelnye_predely.html

2. Левые и Правые пределы

Левая и правая производные, необходимое и достаточное условия существования производной.

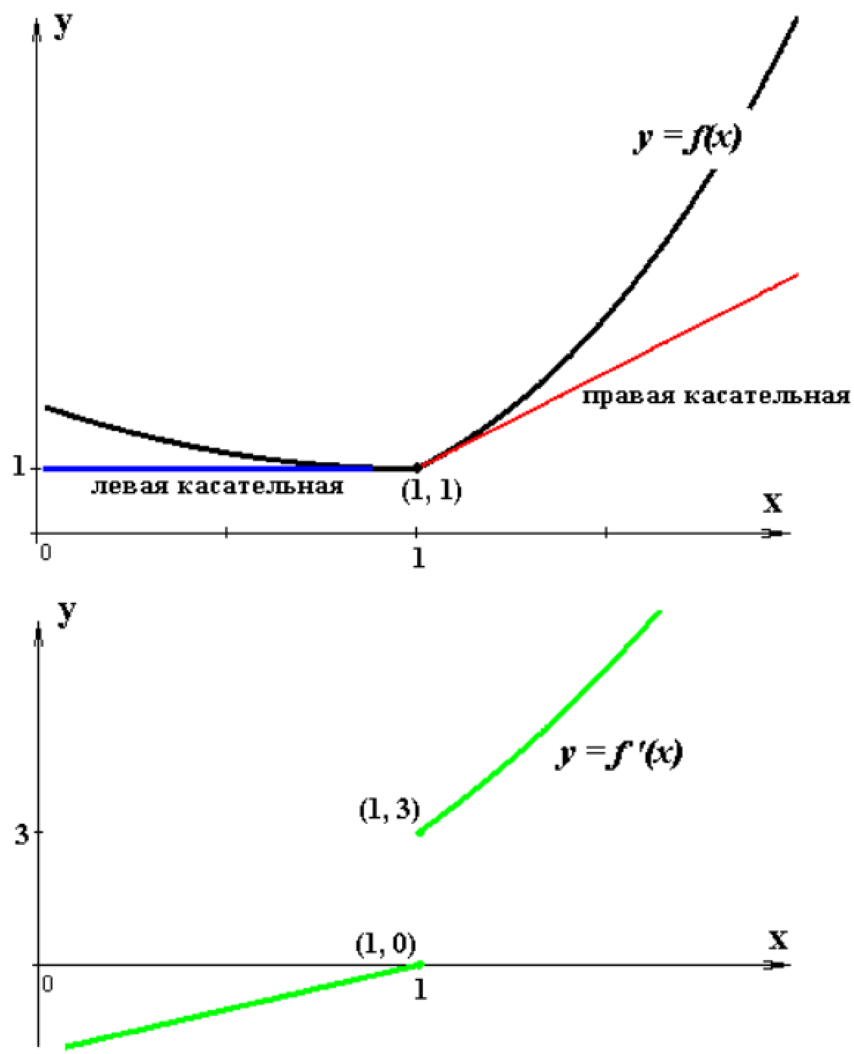
Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности x_0.

Правой производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to +0$, т.е. $\Delta x \to 0$, $\Delta x > 0$, и обозначается символом $f'(x_0+0)$:

$$f'(x_0+0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Левой производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения Δy к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to -0$, т.е. $\Delta x \to 0$, $\Delta x < 0$, и обозначается символом $f'(x_0-0)$:

$$f'(x_0-0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$



Экзаменационный билет № 10

1.Производные от некоторых простейших функций ($\ln(x)$).

§ 5. ПРОИЗВОДНЫЕ ПРОСТЕЙШИХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Из вводной главы и из гл. 4 нам уже известно, что простейшими элементарными функциями принято называть следующие функции: показательную функцию $y=a^x$ и логарифмическую функцию $y=\log_a x$, рассматриваемые для любого фиксированного значения a такого, что $0<a\neq 1$, степенную функцию $y=x^\alpha$, где α — фиксированное вещественное число, четыре тригонометрические функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ и четыре обратные тригонометрические функции $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$ и $y=\operatorname{arcctg} x$.

В настоящем параграфе мы вычислим и систематизируем в таблицу производные всех простейших элементарных функций, уже выписанные нами в гл. 1.

2. Производная логарифмической функции. Пусть $y=\log_a x$, где $0<a\neq 1$, $x>0$ — фиксированная точка. Тогда для любого достаточно малого $\Delta x\neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=$$

$$=\frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_a\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right].$$

По определению производной

$$(\log_a x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]. \qquad (5.36)$$

В силу второго замечательного предела и элементарной замены переменной $t=\frac{\Delta x}{x}$ *

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]=\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]=e. \qquad (5.37)$$

---

* Так как $x>0$ фиксировано, то $t=\frac{\Delta x}{x}\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Из существования предела (5.37) и из непрерывности функции $y=\log_a x$ в точке $x=e$ * вытекает, что предел в правой части (5.36) существует и равен $\frac{1}{x}\log_a e$.

Итак,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e \tag{5.38}$$

(для любых $0<a\neq 1$ и $x>0$).

В частности, при $a=e$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ (для любого } x>0).$$

2. Дифференцирование суммы, произведения, частного.

§ 4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СУММЫ, РАЗНОСТИ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЧАСТНОГО ФУНКЦИЙ

Теорема 5.5. *Если каждая из функций $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируема в данной точке x, то сумма, разность, произведение и частное этих функций (частное при условии, что значение $v(x)\neq 0$) также дифференцируемы в этой точке, причем имеют место формулы*

$$\begin{cases} [u(x)\pm v(x)]' = u'(x)\pm v'(x), \\ [u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x), \\ \left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}. \end{cases} \tag{5.24}$$

$$\begin{cases} d(u\pm v) = du \pm dv, \\ d(u\cdot v) = vdu + udv, \\ d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}. \end{cases} \tag{5.28}$$

Для установления соотношений (5.28) достаточно умножить равенство (5.24) на dx и воспользоваться универсальным представлением (5.12) дифференциала произвольной функции $y=f(x)$.

Экзаменационный билет № 12

1. Теорема о переходе к пределу в неравенствах.

Теорема 4

Функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ такие, что

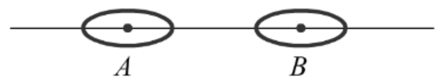
1) $f(x) \le g(x)\ \forall x \in U_\theta(a)$

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A\ \ \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Тогда $A \le B$.

Доказательство

Противное: $A > B.\ \forall\varepsilon : 0 < \varepsilon < 0{,}5|A - B|\ \ \exists\delta = \delta_\varepsilon : \forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a) \Rightarrow$

$g(x) < B + \varepsilon < A - \varepsilon < f(x), \forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a) \Rightarrow g(x) < f(x)$ **противоречие** с 1)



2. Условие возрастания дифференцируемой функции на отрезке.

Определение 1

Функция $y = f(x)$ будет возрастать на интервале x, когда при любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$, $x_2 > x_1$неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ будет выполнимо. Иначе говоря, большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Определение 2

Функция $y = f(x)$ считается убывающей на интервале x, когда при любых $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, $x_2 > x_1$ равенство $f(x_2) > f(x_1)$ считается выполнимым. Иначе говоря, большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента. Рассмотрим рисунок, приведенный ниже.

Замечание: Когда функция определенная и непрерывная в концах интервала возрастания и убывания, то есть $(a; b)$, где $x = a,\ \ x = b$, точки включены в промежуток возрастания и убывания. Определению это не противоречит, значит, имеет место быть на промежутке x.

Основные свойства элементарных функций типа $y = \sin x$ – определенность и непрерывность при действительных значениях аргументах. Отсюда получаем, что возрастание синуса происходит на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, тогда возрастание на отрезке имеет вид $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Экзаменационный билет №14

1. Теоремы о пределах суммы, произведения, частного**.**

Теоремы:

1)Предел суммы двух функций равен сумме их пределов: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$.

Доказательство:

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B$. Тогда по теореме о связи функции, её предела и бесконечно малой функции можно записать: $f(x)=A+\alpha(x)$ и $\varphi(x)=B+\beta(x)$. Следовательно, $f(x)+\varphi(x)=A+B+(\alpha(x)+\beta(x))$, где $(\alpha(x)+\beta(x))$ - бесконечно малая функция (по свойству бесконечно малых функций). Тогда по теореме о связи функции, её предела и бесконечно малой функции можно записать $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x))=A+B$, или $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$.

2)*Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:* $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$.

Доказательство:

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B$. Тогда $f(x)=A+\alpha(x)$ и $\varphi(x)=B+\beta(x)$. Следовательно

$f(x)\cdot\varphi(x)=(A+\alpha(x)\cdot(B+\beta(x))$,

$f(x)\cdot\varphi(x)=AB+(A\cdot\beta(x)+B\cdot\alpha(x)+\beta(x)\cdot\alpha(x))$.

Выражения в скобках, по свойствам бесконечно малых функций, - бесконечно малая функция. Тогда $\lim f(x)\cdot\varphi(x)=AB$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$.

2)*Предел частного двух функций равен пределу делимого, деленного на предел делителя, если предел делителя не равен:* $\lim\limits_{x\to x_0}(\frac{f(x)}{\varphi(x)})=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}$ $(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0)$.

Доказательство:

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B\neq 0$. Тогда $f(x)=A+\alpha(x)$ и $\varphi(x)=B+\beta(x)$. Тогда $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}=\frac{A}{B}+(\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}-\frac{A}{B})=\frac{A}{B}+(\frac{B\cdot\alpha(x)-A\cdot\beta(x)}{B^2+B\beta(x)})$. По свойствам бесконечно малых функций, второе слагаемое – бесконечно малая функция.

Поэтому $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{B}$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}(\frac{f(x)}{\varphi(x)})=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}$.

2.Теорема Ферма(смотри 7 экзам.билет)

Экзаменационный билет №16

1. Непрерывность элементарных функций.

Непрерывность элементарных функций

Все *элементарные функции* являются непрерывными в любой точке свой области определения.

Функция называется *элементарной*, если она построена из конечного числа композиций и комбинаций (с использованием 4 действий - сложение, вычитание, умножение и деление) *основных элементарных функций*. Множество *основных элементарных функций* включает в себя:

1. Алгебраические многочлены $Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+Kx+L$;
2. Рациональные дроби $\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+Kx+L}{Mx^m+Nx^{m-1}+\ldots+Tx+U}$;
3. Степенные функции x^p;
4. Показательные функции a^x;
5. Логарифмические функции $\log_a x$;
6. Тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$;
7. Обратные тригонометрические функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$, $\operatorname{arcsec} x$, $\operatorname{arccsc} x$;
8. Гиперболические функции $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, $\coth x$, $\operatorname{sech} x$, $\operatorname{csch} x$;
9. Обратные гиперболические функции $\operatorname{arcsinh} x$, $\operatorname{arccosh} x$, $\operatorname{arctanh} x$, $\operatorname{arccoth} x$, $\operatorname{arcsech} x$, $\operatorname{arccsch} x$.

2. Производные от некоторых простейших функций ($\sin(x)$).

1. Производные тригонометрических функций.

1°. Производная функции $y=\sin x$. Так как для этой функции

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

то при любом $\Delta x\neq 0$ разностное отношение имеет вид

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

По определению производной

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}\right\}. \qquad (5.29)$$

В силу непрерывности функции $y=\cos x$ в любой точке x бесконечной прямой

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x. \qquad (5.30)$$

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак,

$$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x \qquad (5.34)$$

$\left(\text{в любой точке } x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi, \text{ где } n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots\right)$.

4°. Производная функции $y=\operatorname{ctg} x$. Так как $\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$, то в силу правила дифференцирования частного и соотношений (5.32) и (5.33) в любой точке x, в которой $\sin x\neq 0$,

$$(\operatorname{ctg} x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Итак,

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x) \qquad (5.35)$$

(в любой точке $x \neq \pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$).

Экзаменационный билет № 18

1. Непрерывность суммы, произведений, частного.

Если функции f(x) и g(x) непрерывны в точке x_0, то их сумма, произведение и частное(если $g(x_0) \neq 0$) являются функциями, непрерывными в точке x_0.

Доказательство:

Покажем непрерывность частного. Пусть f(x),g(x) непрерывны в точке x_0 , т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$, причем $g(x_0) \neq 0$.

По теореме об арифметических действиях с пределами существует $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, и этот предел равен

$\frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$, что означает непрерывность функции $\frac{f(x)}{g(x)}$ в точке x_0.

2. Логарифмическое дифференцирование

Логарифмическим дифференцированием называется метод дифференцирования функций, при котором сначала находится логарифм функции, а затем вычисляется производная от него. Такой прием можно использовать для нахождения производных степенных, рациональных и некоторых иррациональных функций.

Рассмотрим этот подход более детально. Пусть дана функция $y = f(x)$. Возьмем натуральные логарифмы от обеих частей:

$$\ln y = \ln f(x).$$

Теперь продифференцируем это выражение как сложную функцию, имея ввиду, что y - это функция от x.

$$(\ln y)' = (\ln f(x))', \;\Rightarrow \frac{1}{y} y'(x) = (\ln f(x))'.$$

Отсюда видно, что искомая производная равна

$$y' = y(\ln f(x))' = f(x)(\ln f(x))'.$$

Такая производная от логарифма функции называется *логарифмической производной*.

Данный метод позволяет также эффективно вычислять производные *показательно-степенных функций*, то есть функций вида

$$y = u(x)^{v(x)},$$

где $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции от x.

В приведенных ниже примерах вычислить производную функции $y(x)$, используя логарифмическое дифференцирование.

Экзаменационный билет № 20

1. Первообразная и неопределенный интеграл.
http://www.cleverstudents.ru/integral/indefinite_integral_properties.html

2. Формула Тейлора.

§ 7. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

В этом параграфе мы установим одну из важнейших формул математического анализа, имеющую многочисленные приложения как в математике, так и в смежных дисциплинах.

Теорема 6.10 (теорема Тейлора*). *Пусть функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки a производную порядка** $n+1$ (n — любой фиксированный номер). Пусть, далее, x — любое значение аргумента из указанной окрестности, p — произвольное положительное число. Тогда между точками a и x найдется точка ξ такая, что справедлива следующая формула:*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x), \qquad (6.33)$$

где

$$R_{n+1}(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}(\xi). \tag{6.34}$$

Замечание. Так как точка ξ лежит между x и a, то дробь $\frac{x-a}{x-\xi}$ всегда положительна, а поэтому для любого $p>0$ определена степень $\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p$.

Формула (6.33) называется формулой Тейлора (с центром в точке a), а выражение $R_{n+1}(x)$ называется остаточным членом. Как мы увидим ниже, остаточный член может быть записан не только в виде (6.34), но и в других видах. Принято называть остаточный член, записанный в виде (6.34), остаточным членом в общей форме***.

Доказательство. Обозначим символом $\varphi(x, a)$ многочлен относительно x порядка n, фигурирующий в правой части (6.33), т. е. положим

$$\varphi(x,a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{6.35}$$

Далее обозначим символом $R_{n+1}(x)$ разность

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \varphi(x, a). \tag{6.36}$$

Экзаменационный билет № 22

1. Производная неявно заданной функции

http://www.mathprofi.ru/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii.html

2. Понятие производной. Геометрический смысл производной, физический смысл производной.(смотри другие билеты)

Экзаменационный билет № 24

1. Теоремы о пределах суммы, произведения, частного.
(смотри другие билеты)
***2.* .** Наклонные асимптоты.
http://www.mathprofi.ru/asimptoty_grafika_funkcii.html