Билет 1

1. Иррациональность числа $\sqrt{2}$.

Известно доказательство от противного. Пусть √2 представляется в виде рациональной дроби a/b, тогда $a^2 = 2b^2$. Отсюда следует, что a^2 и a четны. Тогда $a = 2c$, $a^2 = 4c^2$, $4c^2 = 2b^2$, $2c^2 = b^2$. Отсюда следует, что b^2 и b четны. Но это противоречит тому, что дробь a/b несократима. Значит, исходное предположение о рациональности √2 неверно.

2. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

Производная функции, заданная параметрически

Зависимость функции y от аргумента x может осуществляться через посредство третьей переменной t, называемой параметром:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} (a \le t \le b)$$

В этом случае говорят, что функция y от x **задана параметрически**. Параметрическое задание функции удобно тем, что оно дает общую запись для прямой и обратной функций.

Предположим, что на некотором промежутке функции $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$ имеют производные, причем $\varphi'(t)\neq 0$. Кроме того, для $x=\varphi(t)$ существует обратная функция $x^{-1} = t(x)$ (производная обратной функции равна обратной величине производной прямой функции).

Тогда $y(x)=\psi(t(x))$ – сложная функция и ее производная: $y'_x = \psi'_t \cdot t'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$. Производную тоже запишем в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \end{cases}$$

Решение онлайн | Видеоинструкция

x = t^2+8*t ?

y = t-sin(t) ?

Получить решение

см. также Производная от неявной функции

Пример 1. Найти производную функции y по x, заданной параметрически: $\begin{cases} x = 2t + t^2, \\ y = t^2 - 2t^3. \end{cases}$

Решение. $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t-6t^2}{2+2t} = \frac{2(t-3t^2)}{2(1+t)} = \frac{t(1-3t)}{1+t}$.

Билет 3

1. Четность и нечетность функции, монотонность, ограниченность. Обратная и сложная функция. Примеры.

Основные свойства функций.

1) Область определения функции и область значений функции.

Область определения функции - это множество всех допустимых действительных значений аргумента **x** (переменной **x**), при которых функция **y = f(x)** определена.
Область значений функции - это множество всех действительных значений **y**, которые принимает функция.

В элементарной математике изучаются функции только на множестве действительных чисел.

2) Нули функции.

Нуль функции – такое значение аргумента, при котором значение функции равно нулю.

3) Промежутки знакопостоянства функции.

Промежутки знакопостоянства функции – такие множества значений аргумента, на которых значения функции только положительны или только отрицательны.

4) Монотонность функции.

Возрастающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.

Убывающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

5) Четность (нечетность) функции.

Четная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого **x** из области определения выполняется равенство **f(-x) = f(x)**. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Нечетная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого **x** из области определения справедливо равенство **f(-x) = - f(x**). График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

6) Ограниченная и неограниченная функции.

Функция называется ограниченной, если существует такое положительное число M, что $|f(x)| \leq M$ для всех значений x . Если такого числа не существует, то функция - неограниченная.

7) Периодическость функции.

Функция f(x) - периодическая, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из области определения функции имеет место: f(x+T) = f(x). Такое наименьшее число называется периодом функции. Все тригонометрические функции являются периодическими. (Тригонометрические формулы).

Изучив данные свойства функции Вы без проблем сможете исследовать функцию и по свойствам функции сможете построить график функции. Также посмотрите материал про таблицу истинности, таблицу умножения, таблицу Менделеева, таблицу производных и таблицу интегралов.

2. Производная сложной функции.

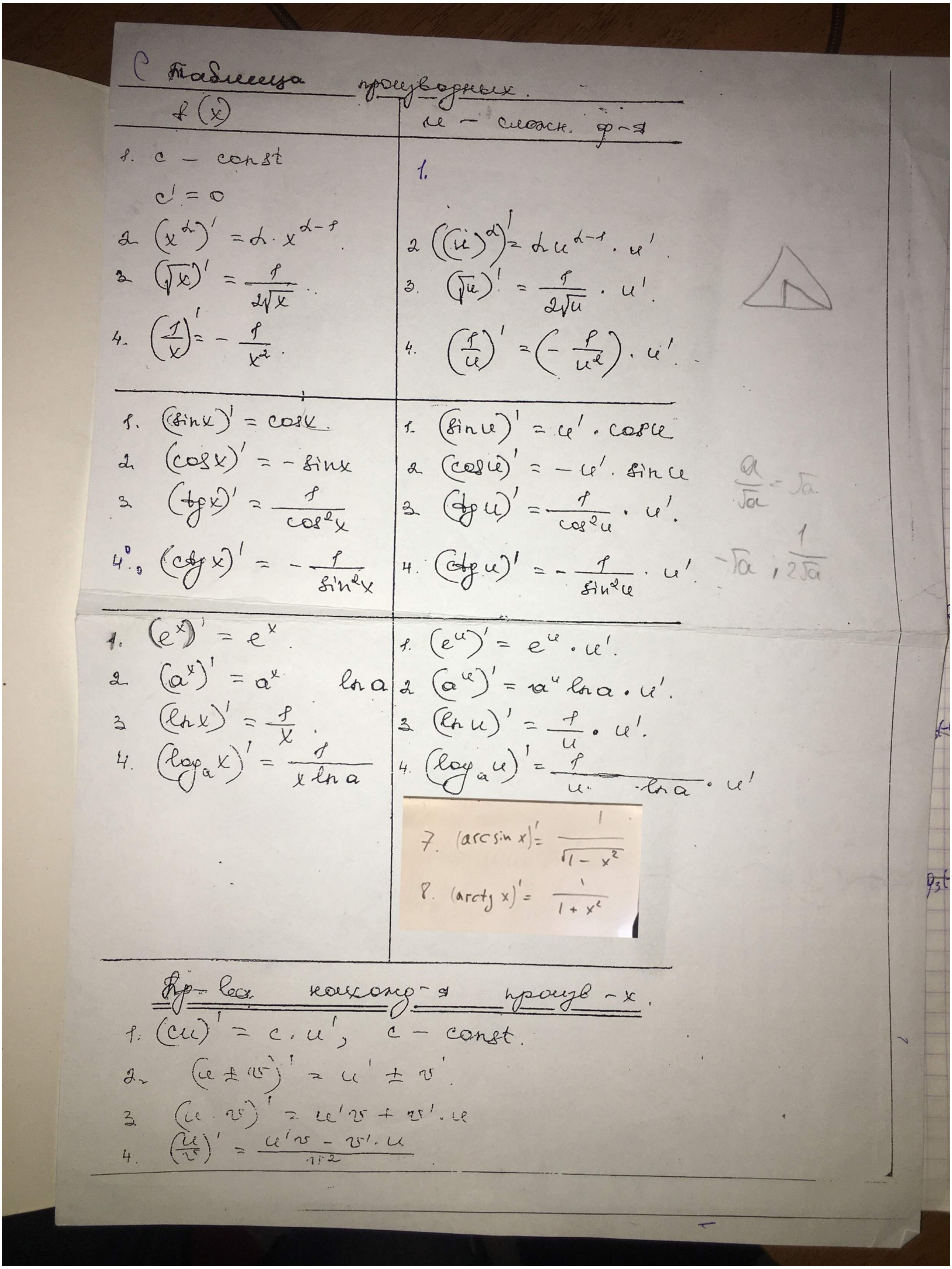


Таблица производных.

$f(x)$	u — сложн. ф-я
1. c — const $c' = 0$	1.
2. $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	2. $((u)^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$
3. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	3. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
4. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	4. $\left(\frac{1}{u}\right)' = \left(-\frac{1}{u^2}\right) \cdot u'$
1. $(\sin x)' = \cos x$	1. $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
2. $(\cos x)' = -\sin x$	2. $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
3. $(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	3. $(tg\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
4. $(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	4. $(ctg\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
1. $(e^x)' = e^x$	1. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
2. $(a^x)' = a^x \ln a$	2. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
3. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	3. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
	7. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 8. $(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$

$\sqrt{a}$, $\frac{1}{2\sqrt{a}}$

Пр-ла нахожд-я произв-х.

1. $(cu)' = c \cdot u'$, c — const.
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
3. $(u \cdot v)' = u'v + v' \cdot u$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v' \cdot u}{v^2}$

Билет 5

1. Теорема о предельном переходе в неравенстве, теорема о двух милиционерах.

Предельный переход в неравенствах

Теорема

Пусть заданы две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и, начиная с некоторого номера, $x_n \le y_n$, то выполняется неравенство: $a \le b$

Теорема

(Принцип двустороннего ограничения, теорема о двух милиционерах, теорема сжатия, правило сэндвича, теорема о трех струнах).

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ и существует номер $n_0 \in N$, что для любого $n \ge n_0$ выполняется неравенство $x_n \le z_n \le y_n$, то последовательность $\{z_n\}$ сходится, причем $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$

Пример

Задание. Найти предел последовательности $\{z_n\} = \left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}$

Решение. С одной стороны $z_n = \frac{n}{n^2+1} > 0 = x_n, \forall n \in N$. С другой стороны:

$$z_n = \frac{n}{n^2+1} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} = y_n$$

То есть, имеем: $0 < \frac{n}{n^2+1} < \frac{1}{n}$ и из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, то по теореме про двустороннее ограничение и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$:

$$0 < \frac{n}{n^2+1} < \frac{1}{n}$$

$$0$$

Теорема о двух милиционерах

ТЕОРЕМА

Теорема о двух милиционерах (для последовательностей). Если последовательность $\{x_n\}$ такая, что для любого натурального значения n, $y_n \le x_n \le z_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

ТЕОРЕМА

Теорема о двух милиционерах (для функций). Если функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки $x = a$ заключена между двумя функциями $\phi(x)$ и $\psi(x)$, то есть имеет место неравенство $\phi(x) \le f(x) \le \psi(x)$, причем эти функции имеют одинаковый предел при $x \to a$: $\lim\limits_{x\to a} \phi(x) = \lim\limits_{x\to a} \psi(x) = A$, то существует предел функции и $f(x)$ при $x \to a$, равный этому же значению:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

Доказательство теоремы

По определению последовательности, для произвольного числа $\varepsilon > 0$, найдется такой номер N_1, что при $n > N_1$

$$A - \varepsilon < y_n < A + \varepsilon$$

И найдется такой номер N_2, что при $n > N_2$

$$A - \varepsilon < z_n < A + \varepsilon$$

Рассмотрим так же номер N больший, чем числа N_1 и N_2. Тогда при $n > N$ выполняются оба предшествующих двойных неравенства, и поэтому

$$A - \varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < A + \varepsilon$$

$$A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon \quad \text{или} \quad |x_n - A| < \varepsilon$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

Теорема доказана.

Теорема Лагранжа

Теорема Лагранжа о среднем значении утверждает, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), то в этом интервале существует хотя бы одна точка $x = \xi$, такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Данная теорема называется также *формулой конечных приращений*, поскольку она выражает приращение функции на отрезке через значение производной в промежуточной точке этого отрезка.

Доказательство.
Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) + \lambda x.$$

Выберем число λ таким, чтобы выполнялось условие $F(a) = F(b)$. Тогда

$$f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b, \;\Rightarrow f(b) - f(a) = \lambda(a - b), \;\Rightarrow \lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

В результате получаем

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x.$$

Функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и принимает одинаковые значения на концах интервала. Следовательно, для нее выполнены все условия теоремы Ролля. Тогда в интервале (a, b) существует точка ξ, такая, что

$$F'(\xi) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

или

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Теорема Лагранжа имеет простой *геометрический смысл*. Хорда, проходящая через точки графика, соответствующие концам отрезка a и b, имеет угловой коэффициент, равный

$$k = \tan\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Тогда внутри отрезка $[a, b]$ существует точка $x = \xi$, в которой касательная к графику функции параллельна хорде (рисунок 1).

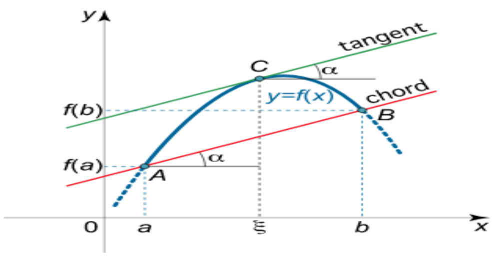


Рис.1

Рис.2 Жозеф Луи Лагранж (1736-1813)

Теорема Лагранжа имеет также наглядную *физическую интерпретацию*. Если считать, что $f(t)$ описывает координату тела при перемещении вдоль прямой в зависимости от времени t, то отношение

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

представляет собой среднюю скорость тела в промежутке времени $b - a$. Поскольку $f'(t)$ – это мгновенная скорость, то данная теорема означает, что существует момент времени ξ, в который мгновенная скорость равна средней скорости.

Теорема Лагранжа имеет множество приложений в математическом анализе, вычислительной математике и других областях. Укажем далее два замечательных *следствия*.

Следствие 1.
В частном случае, когда значения функции $f(x)$ на концах отрезка $[a, b]$ равны, т.е. $f(a) = f(b)$, из теоремы Лагранжа вытекает, что найдется точка $\xi \in (a, b)$, такая, что

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

т.е. мы получаем теорему Ролля, которую можно рассматривать как частный случай теоремы Лагранжа.

Следствие 2.
Если производная $f'(x)$ равна нулю во всех точках отрезка $[a, b]$, то функция $f(x)$ является постоянной на этом отрезке. Действительно, для любых двух точек x_1 и x_2 из промежутка $[a, b]$ существует точка $\xi \in (a, b)$, такая, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0.$$

Следовательно,

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Пример 1

Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции

$$f(x) = x^2 - 3x + 5$$

на отрезке $[1, 4]$. Если теорема соблюдается, найти точку ξ, удовлетворяющую условиям теоремы.

Решение.
Заданная квадратичная функция непрерывна и дифференцируема на всем множестве действительных чисел. Следовательно, к ней применима теорема Лагранжа. Производная функции имеет вид

$$f'(x) = (x^2 - 3x + 5)' = 2x - 3.$$

Найдем координаты точки ξ:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \;\Rightarrow 2\xi - 3 = \frac{(4^2 - 3\cdot 4 + 5) - (1^2 - 3\cdot 1 + 5)}{4 - 1},$$

$$\Rightarrow 2\xi - 3 = \frac{9 - 3}{3} = 2, \;\Rightarrow 2\xi = 5, \;\Rightarrow \xi = 2,5.$$

Видно, что точка $\xi = 2,5$ находится в интервале $(1, 4)$.

Билет 7

1. Основные свойства бесконечно малых. (Свойства бесконечно малых функций)

Свойство 1. Произведение бесконечно малой функции $\alpha(x)$ при $x \to a$ и функции $f(x)$, ограниченной в некоторой δ_1-окрестности точки a, есть функция бесконечно малая.

Доказательство. Функция $f(x)$ является ограниченной в некоторой окрестности точки a и, следовательно, существует такое число $B > 0$, что

$$|f(x)| < B \tag{4}$$

для всех x, удовлетворяющих условию

$$|x - a| < \delta_1. \tag{5}$$

Поскольку функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$, то для любого произвольно малого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число δ_2, что неравенство

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6}$$

выполняется для всех x, удовлетворяющих условию

$$|x - a| < \delta_2 \tag{7}$$

Выберем из чисел δ_1 и δ_2 наименьшее и обозначим его символом δ. Тогда условие

$$|x - a| < \delta \tag{8}$$

является более сильным, чем условия (5) и (7) и поэтому влечет неравенства (4) и (6).

Таким образом, для любого произвольно малого числа $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$|\alpha(x) \cdot f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < \frac{\varepsilon}{B} B = \varepsilon$$

для всех x из δ-окрестности точки a.

Свойство 2. Сумма двух бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольно малое число; $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$.. Тогда существуют такие положительные числа δ_1 и δ_2, что условия

$$|x - a| < \delta_1 \tag{9}$$

и

$$|x - a| < \delta_2 \tag{10}$$

влекут за собой соответствующие неравенства

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, то условие $|x - a| < \delta$ перекрывает оба условия (9) и (10) и, следовательно,

$$|\alpha(x) + \beta(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следствие. Сумма любого конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.

Действительно, объединяя элементы такой суммы в группы по два слагаемых и заменяя сумму двух бесконечно малых одной бесконечно малой, получим сумму меньшего числа членов. В конечном итоге сумма любого конечного числа бесконечно малых будет сведена к одной бесконечно малой.

---

2. Теорема Ферма.

Ма́лая теоре́ма Ферма́ — теорема теории чисел, которая утверждает, что[1]:

> Если p — простое число и a — целое число, не делящееся на p, то $a^{p-1} - 1$ делится на p.

Великая

Теорема утверждает[1], что для любого натурального числа $n > 2$ уравнение:

$$a^n + b^n = c^n$$

не имеет решений в целых ненулевых числах a, b, c.

включает комментарий Ферма, в частности его «последнюю теорему» (*Observatio Domini Petri de Fermat*)

Встречается более узкий вариант формулировки, утверждающий, что это уравнение не имеет натуральных решений. Однако очевидно, что если существует решение для целых чисел, то существует и решение в натуральных числах. В самом деле, пусть a, b, c — целые числа, дающие решение уравнения Ферма. Если n чётно, то $|a|, |b|, |c|$ тоже будут решением, а если нечётно, то перенесём все степени отрицательных значений в другую часть уравнения, изменив знак. Например, если бы существовало решение уравнения $a^3 + b^3 = c^3$ и при этом a отрицательно, а прочие положительны, то $b^3 = c^3 + |a|^3$, и получаем натуральные решения $c, |a|, b$. Поэтому обе формулировки эквивалентны.

Обобщениями утверждения теоремы Ферма являются опровергнутая гипотеза Эйлера и открытая гипотеза Ландера — Паркина — Селфриджа.

Билет 9

1. Алгебраические операции над сходящимися последовательностями.

§ 7. Арифметические операции над сходящимися последовательностями

Теорема 5. *Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то сходится и последовательность $\{a_n + b_n\}$, причем*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n. \qquad (1)$$

◄ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N_1 такой, что для всех $n > N_1$ будет верно неравенство

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

Аналогично найдется номер N_2 такой, что для всех $n > N_2$ будем иметь

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (3)$$

Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда для всякого $n > N$ будут одновременно выполняться неравенства (2) и (3). Поэтому для всех $n > N$ будем иметь

$$\big|(a_n + b_n) - (A + B)\big| = \big|(a_n - A) + (b_n - B)\big| \leqslant |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Согласно определению, это означает, что последовательность $\{a_n + b_n\}$ сходится и имеет место равенство (1). ►

Теорема остается справедливой для суммы любого конечного числа сходящихся последовательностей.

Похожими рассуждениями доказываются следующие утверждения.

Теорема 6. *Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то сходится и последовательность $\{a_n - b_n\}$, причем*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Теорема 7. *Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то сходится и последовательность $\{a_n \cdot b_n\}$, причем*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Теорема 8. *Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, причем $b_n \neq 0$ $\forall n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, то последовательность $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ также сходится и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

2. Производные от некоторых простейших функций (x^n).

. $y = x^n$. Если n – целое положительное число, то, используя формулу бинома Ньютона:

$$(a + b)^n = a^n + n \cdot a^{n-1} \cdot b + 1/2 \cdot n(n-1)a^{n-2} \cdot b^2 + 1/(2 \cdot 3) \cdot n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3 + \ldots + b^n,$$

можно доказать, что

$$y' = nx^{n-1}$$

Итак, если x получает приращение Δx, то $f(x+\Delta x) = (x + \Delta x)^n$, и, следовательно,

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n = n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + 1/2 \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n.$$

Заметим, что в каждом из пропущенных слагаемых есть множитель Δx в степени выше 3.

Найдем предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x + \ldots + \Delta x^{n-1}\right) = n \cdot x^{n-1}$$

Мы доказали эту формулу для n Î N. Далее увидим, что она справедлива и при любом n Î R.

Билет 11

1. Функция, понятие предела функции в точке (2 опр.).

Определение предела функции

Определение предела по Коши и Гейне

Пусть функция $f\left(x\right)$ определена на некотором открытом интервале X, содержащем точку $x=a$. (При этом не требуется, чтобы значение $f\left(a\right)$ было обязательно определено.)

Число L называется *пределом* функции $f\left(x\right)$ при $x\to a$, если для каждого $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что

$$\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon,$$

при условии

$$0<\left|x-a\right|<\delta.$$

Данное определение предела известно как $\varepsilon-\delta-$ определение или определение *Коши*.

Существует также определение предела функции по *Гейне*, согласно которому функция $f\left(x\right)$ имеет предел L в точке $x=a$, если для каждой последовательности $\left\{x_n\right\}$, сходящейся к точке a, последовательность $f\left(x_n\right)$ сходится к L. Определения предела функции по Коши и Гейне эквивалентны.

Односторонние пределы

Символом $\lim\limits_{x\to a-0}$ обозначается левосторонний предел, в котором переменная x, приближаясь к a, принимает значения $x<a$. Соответствующий предел $\lim\limits_{x\to a-0}f\left(x\right)$ называется *левосторонним пределом функции* $f\left(x\right)$ в точке $x=a$.

Аналогично, символом $\lim\limits_{x\to a+0}$ обозначается правосторонний предел, в котором переменная x, приближаясь к a, принимает значения $x>a$. Соответствующий предел $\lim\limits_{x\to a+0}f\left(x\right)$ называется *правосторонним пределом функции* $f\left(x\right)$ в точке $x=a$.

Отметим, что двусторонний предел $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)$ существуют лишь тогда, когда существуют оба односторонних предела, которые равны друг другу, то есть $\lim\limits_{x\to a-0}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to a+0}f\left(x\right)$. В этом случае

$$\lim_{x\to a}f\left(x\right)=\lim_{x\to a-0}f\left(x\right)=\lim_{x\to a+0}f\left(x\right).$$

Производные высшего порядка

Производные высшего порядка явно заданной функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в некотором интервале (a, b) , т.е. производная $f'(x)$ также является функцией в этом интервале. Если эта функция дифференцируема, то мы можем найти *второю производную* исходной функции $f(x)$, которая обозначается в виде

$$f'' = f' = \left(\frac{dy}{dx}\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Аналогично, если f'' существует и дифференцируема, мы можем вычислить *третью производную* функции $f(x)$:

$$f''' = \frac{d^3y}{dx^3} = y'''.$$

Производные более высокого порядка (если они существуют) определяются как

$$f^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4} = y^{(4)} = \left(f^{(3)}\right)', \ldots, f^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

Таким образом, понятие производной n-го порядка вводится индуктивно путем последовательного вычисления n производных, начиная с производной первого порядка. Переход к производной следующего, более высокого порядка производится с помощью рекуррентной формулы

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

В ряде случаев можно вывести общую формулу для производной произвольного n-го порядка без вычисления промежуточных производных. Некоторые такие примеры рассмотрены ниже.

Отметим, что для нахождения производных высшего порядка можно использовать следующие линейные соотношения:

$$(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}, \quad (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}, \ C = \text{const}.$$

Производные высшего порядка неявно заданной функции

Производная n-го порядка *неявно заданной функции* находится последовательным (n раз) дифференцированием уравнения $F(x, y) = 0$.. На каждом шаге, после соответствующих подстановок и преобразований, можно получить явное выражение для производной, зависящее лишь от переменных x, y, т.е. производные имеют вид

$$y' = f_1(x, y), \ \ y'' = f_2(x, y), \ldots, \ \ y^{(n)} = f_n(x, y).$$

Производные высшего порядка функции, заданной параметрически

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную *параметрически* с помощью двух уравнений

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}.$$

Первая производная данной функции выражается формулой

$$y' = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Дифференцируя еще раз по x, находим производную второго порядка:

$$y'' = y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Аналогично определяются производные третьего и более высокого порядка:

$$y''' = y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \ldots, y^{(n)} = y^{(n)}_{\underbrace{xx\ldots x}_{n}} = \frac{\left(y^{(n-1)}_{\underbrace{xx\ldots x}_{n-1}}\right)'_t}{x'_t}.$$

Пример 1

Найти y'', если $y = x \ln x$.

Решение.

Вычислим первую производную, дифференцируя функцию как произведение:

$$y' = (x \ln x)' = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Теперь найдем производную второго порядка:

$$y'' = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}.$$

Формула Лейбница

Формула Лейбница выражает производную n-го порядка от произведения двух функций. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные до n-го порядка включительно. Рассмотрим производные от произведения данных функций.

Первая производная описывается известной формулой

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Дифференцируя это выражение еще раз, получим *вторую производную*:

$$(uv)'' = [(uv)']' = (u'v + uv')' = (u'v)' + (uv')'$$
$$= u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv''.$$

Таким же образом находится *третья производная* от произведения uv :

$$(uv)''' = [(uv)'']' = (u''v + 2u'v' + uv'')' = (u''v)' + (2u'v')' + (uv'')'$$
$$= u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

Легко заметить, что данные формулы похожи на разложение бинома Ньютона в соответствующей степени. Считая, что нулевые степени u^0 и v^0 соответствуют самим функциям u и v, можно записать общую формулу производной n-го порядка от произведения функций uv в следующем виде:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)} v^{(i)},$$

где C_n^i обозначает число сочетаний из n элементов по i.

Приведенная формула называется *формулой Лейбница* и доказывается методом математической индукции.

Доказательство.
Предположим, что для функций u и v существуют также производные $(n+1)$-го порядка. Используя рекуррентное соотношение, запишем выражение для производной $(n+1)$-го порядка в следующем виде:

$$y^{(n+1)} = \left[y^{(n)}\right]' = \left[(uv)^{(n)}\right]' = \left[\sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)} v^{(i)}\right]'.$$

В результате дифференцирования получаем:

$$y^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i+1)} v^{(i)} + \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)} v^{(i+1)}.$$

Обе суммы в правой части можно объединить в одну сумму. Действительно, возьмем некоторый промежуточный индекс $1 \le m \le n$. Первое слагаемое при $i = m$ записывается как

$$C_n^m u^{(n-m+1)} v^{(m)},$$

а второе слагаемое при $i = m - 1$ имеет такой вид:

$$C_n^{m-1} u^{(n-(m-1))} v^{((m-1)+1)} = C_n^{m-1} u^{(n-m+1)} v^{(m)}.$$

Сумма этих двух слагаемых равна

$$C_n^m u^{(n-m+1)} v^{(m)} + C_n^{m-1} u^{(n-m+1)} v^{(m)} = \left(C_n^m + C_n^{m-1}\right) u^{(n-m+1)} v^{(m)}.$$

Из комбинаторики известно, что

$$C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m.$$

Поэтому, сумма двух указанных членов записывается в виде

$$\left(C_n^m + C_n^{m-1}\right) u^{(n-m+1)} v^{(m)} = C_{n+1}^m u^{(n+1-m)} v^{(m)}.$$

Ясно, что при изменении m от 1 до n такое объединение слагаемых будет охватывать все члены обеих сумм, кроме члена $i = 0$ в первой сумме, равного

$$C_n^0 u^{(n-0+1)} v^{(0)} = u^{(n+1)} v^{(0)},$$

и члена $i = n$ во второй сумме, равного

$$C_n^n u^{(n-n)} v^{(n+1)} = u^{(0)} v^{(n+1)}.$$

В итоге производная $(n+1)$-го порядка от произведения функций uv представляется в виде

$$y^{(n+1)} = u^{(n+1)} v^{(0)} + \sum_{m=1}^{n} C_{n+1}^m u^{(n+1-m)} v^{(m)} + u^{(0)} v^{(n+1)} = \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m u^{(n+1-m)} v^{(m)}.$$

Как видно, выражение для $y^{(n+1)}$ имеет аналогичный вид, как и для производной $y^{(n)}$. Только теперь верхний предел суммирования вместо n равен $n+1$. Таким образом, формула Лейбница доказана для произвольного натурального числа n.

Пример 1

Найти третью производную функции $y = e^{2x} \ln x$.

Решение.
Полагаем $u = e^{2x}$, $v = \ln x$. Производные функций u и v равны:

$$u' = \left(e^{2x}\right)' = 2e^{2x}, \quad u'' = \left(2e^{2x}\right)' = 4e^{2x}, \quad u''' = \left(4e^{2x}\right)' = 8e^{2x},$$

$$v' = (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad v'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad v''' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = -\left(x^{-2}\right)' = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}.$$

Производная 3-го порядка от исходной функции находится по формуле Лейбница:

$$y''' = \left(e^{2x} \ln x\right)''' = \sum_{i=0}^{3} C_3^i u^{(3-i)} v^{(i)} = \sum_{i=0}^{3} C_3^i \left(e^{2x}\right)^{(3-i)} (\ln x)^{(i)}$$
$$= C_3^0 \cdot 8e^{2x} \ln x + C_3^1 \cdot 4e^{2x} \cdot \frac{1}{x} + C_3^2 \cdot 2e^{2x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + C_3^3 e^{2x} \cdot \frac{2}{x^3}$$
$$= 1 \cdot 8e^{2x} \ln x + 3 \cdot \frac{4e^{2x}}{x} - 3 \cdot \frac{2e^{2x}}{x^2} + 1 \cdot \frac{2e^{2x}}{x^3} = 8e^{2x} \ln x + \frac{12e^{2x}}{x} - \frac{6e^{2x}}{x^2} + \frac{2e^{2x}}{x^3}$$
$$= 2e^{2x} \left(4 \ln x + \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right).$$

Билет 13

1. Теорема о двух милиционерах для функций.

См билет 5

2. Производная обратной функции.

Производная обратной функции

Рассмотрим функцию $f(x)$, которая является строго монотонной на некотором интервале (a, b). Если в этом интервале существует точка x_0, такая, что $f'(x_0) \neq 0$, то функция $x = \varphi(y)$, *обратная* к функции $y = f(x)$, также дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и ее производная равна

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Докажем приведенную *теорему о производной обратной функции*.

Пусть переменная y получает в точке y_0 приращение $\Delta y \neq 0$. Соответствующее ему приращение переменной x в точке x_0 обозначим как Δx, причем $\Delta x \neq 0$ в силу строгой монотонности функции $y = f(x)$. Запишем отношение приращений в виде

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Допустим, что $\Delta y \to 0$. Тогда $\Delta x \to 0$, поскольку обратная функция $x = \varphi(y)$ является непрерывной в точке y_0. В пределе, при $\Delta x \to 0$, правая часть записанного соотношения становится равной

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

В таком случае левая часть также стремится к пределу, который по определению равен производной обратной функции:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \varphi'(y_0).$$

Таким образом,

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)},$$

то есть производная обратной функции равна обратной величине производной исходной функции.

В приведенных ниже примерах найти производную заданной функции $y = f(x)$ с помощью производной обратной функции $x = \varphi(y)$.

Пример 1

$$y = \sqrt[n]{x}$$

Решение.
Определим сначала обратную функцию для заданной функции $y = \sqrt[n]{x}$. Для этого выразим переменную x через y:

$$y = f(x) = \sqrt[n]{x}, \ \Rightarrow y^n = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n, \ \Rightarrow x = \varphi(y) = y^n.$$

По теореме о производной обратной функции можно записать:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{(y^n)'} = \frac{1}{ny^{n-1}}.$$

Теперь вместо y подставляем $y = \sqrt[n]{x}$. В результате получаем выражение для производной заданной функции:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \quad (x > 0).$$

Билет 15

1. Понятие непрерывности функции в точке в промежутке.

Непрерывность функции на промежутке

Определение

Функция, непрерывная во всех точках некоторой области, называется **непрерывной в этой области**.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной справа в точке** a, если $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной слева в точке** a, если $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=f(a)$.

Функция $y=f(x)$ называется **непрерывной в интервале** $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $y=f(x)$ называется **непрерывной на отрезке** $[a;b]$, если она является непрерывной в интервале $(a;b)$, непрерывной справа в точке a, то есть $f(a+0)=f(a)$ и непрерывной слева в точке b, то есть $f(b-0)=f(b)$.

Свойства функций непрерывных на отрезке:

. 1. **Теорема Вейерштрасса.** Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке свои наибольшее и наименьшее значения.

. 2. Непрерывная на отрезке $[a;b]$ **функция является ограниченной на этом отрезке**.

. 3. **Теорема Больцано-Коши.** Если функция $y=f(x)$ является непрерывной на отрезке $[a;b]$ и принимает на концах этого отрезка неравные между собой значения, то есть $f(a)=a_0$, $f(b)=b_0$, то на этом отрезке функция принимает и все промежуточные значения между a_0 и b_0 .

. 4. Если функция $y=f(x)$, которая непрерывна на некотором отрезке $[a;b]$, принимает на концах отрезка значения разных знаков, то существует такая точка $c\in[a;b]$ такая, что $f(c)=0$.

Понятие непрерывности функции в точке

Основные понятия и определения

Определение

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** a, если:

. 1. функция $f(x)$ определена в точке a и ее окрестности;

. 2. существует конечный предел функции $f(x)$ в точке a;

. 3. это предел равен значению функции в точке a, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

Замечание

При нахождении предела функции $y=f(x)$, которая является непрерывной, можно переходить к пределу под знаком функции, то есть

$$\lim_{x\to a} f(x)=f\left(\lim_{x\to a} x\right)=f(a)$$

Пример

Задание. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{x^2+1}{x^2-3}$

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{x^2+1}{x^2-3}=\ln\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-3}\right)=\ln 1=0$

Ответ. $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{x^2+1}{x^2-3}=0$

2. Производные от некоторых простейших функций (a^x).

см выше

Билет 17

1. Понятие функции, ограниченной в окрестности точки. Теорема об ограниченности функции, имеющей предел.

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется **ограниченной сверху**, если множество её значений ограниченно сверху. Иначе говоря, функция f ограничена сверху, если существует такая постоянная M, что для каждого $x \in X$ выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant M.$$

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется ограниченной снизу, если множество её значений **ограниченно снизу**, то есть, если существует такая постоянная m, что для каждого $x \in X$ выполняется неравенство

Теорема об ограниченности функции, имеющей предел

Если функция f(x) имеет предел в точке a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, *то она ограниченна в некоторой окрестности точки a.*

Доказательство:

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, тогда $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)| - |b| < \varepsilon$, отсюда получаем $f(x) < \underbrace{\varepsilon + |b|}_{M}$.

Обратное неверно.

Контрольный пример:

$y = \sin\frac{1}{x}$ в окрестности точки 0.

$\lim\limits_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$ – не существует.

Бесконечно малой величиной при $x \to a$ называется функция, предел которой в точке a равен 0.

$\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ $\alpha(x)$ – бесконечно малая величина (б.м.в.).

- $\alpha(x) = x$ – бесконечно малая величина при $x \to 0$
- $\alpha(x) = \frac{1}{x}$ – бесконечно малая величина при $x \to \infty$

s

Бесконечно большой величиной при $x \to a$ называется функция неограниченно возрастающая.

$\lim\limits_{x \to a} \beta(x) = \infty$ $\beta(x)$ – бесконечно большая величина (б.б.в.)

Любая бесконечно большая величина неограниченна.

2. Раскрытие неопределенности. Правило Лопиталя.

Раскрытие неопределенностей

Неопределенность типа $\frac{0}{0}$

Пусть заданы две функции $f(x)$ и $g(x)$, такие, что

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \;\; \text{и} \;\; \lim_{x\to a} g(x) = 0.$$

В этом случае говорят, что функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеет неопределенность типа $\frac{0}{0}$ в точке $x = a$. Чтобы найти предел при $x = a$, когда функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ содержит неопределенность $\frac{0}{0}$, нужно разложить на множители числитель и/или знаменатель и затем сократить члены, стремящиеся к нулю.

Примечание: В данном разделе при вычислении пределов не используется правило Лопиталя.

Неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$

Пусть две функции $f(x)$ и $g(x)$ обладают свойством

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \;\; \text{и} \;\; \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty.$$

где a является действительным числом, либо стремится к $+\infty$ или $-\infty$. Говорят, что в этом случае функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеет в точке a неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$. Для вычисления предела в этой точке необходимо разделить числитель и знаменатель на x в наивысшей степени.

Неопределенности типа $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞^0, 1^∞

Неопределенности этих типов сводятся к рассмотренным выше неопределенностям типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 1

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{20}-1}{x^{10}-1}$.

Решение.

Подставив напрямую значение $x = 1$, убеждаемся, что данная функция имеет неопределенность $\frac{0}{0}$ в точке $x = 1$. Разложив числитель на множители, получаем

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{20}-1}{x^{10}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{\left(x^{10}\right)^2 - 1}{x^{10}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{\left(x^{10}-1\right)}\left(x^{10}+1\right)}{\cancel{x^{10}-1}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \left(x^{10}+1\right) = 1^{10} + 1 = 2.$$

Правило Лопиталя — метод нахождения пределов функций, раскрывающий неопределённости вида $0/0$ и ∞/∞. **Суть правила**: предел отношения функций равен пределу отношения их производных.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Билет 19

1. Формула Тейлора для многочленов, примеры.

Формула Тейлора для многочленов

Рассмотрим многочлен $P_n(x)$ целой степени n:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k.$$

Покажем, что коэффициенты этого многочлена можно представить в виде

$$a_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!} \qquad (0 \le k \le n),$$

где $P_n^{(k)}(x_0)$ – производные k-го порядка от $P_n(x)$ в точке x_0. (Напомним, что $P_n^{(0)}(x_0) = P_n(x_0)$ – по определению.)

Очевидно, что $P_n(x_0) = a_0$.. Найдем производную k-го порядка от многочлена $P_n(x)$ в точке $x = x_0$. Заметим, что

$$\frac{d^k}{dx^k}(x - x_0)^m = \begin{cases} k!, & \text{если } m = k, \\ 0, & \text{если } m < k, \\ \text{const} \cdot (x - x_0)^{m-k}, & \text{если } m > k. \end{cases}$$

В точке $x = x_0$ единственной отличной от нуля производной k-го порядка является производная от $(x - x_0)^k$. При этом $P_n^{(k)}(x_0) = a_k k!$ и, таким образом,

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots +$$
$$+ \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Эта формула называется **формулой Тейлора для многочленов**. При $x_0 = 0$ она принимает вид

$$P_n(x) = P_n(0) + \frac{P_n'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!}x^n$$

и называется **формулой Маклорена для многочленов**.

Если оценивать формулу Тейлора для многочленов с позиций ее непосредственного применения для решения практических задач, то результат не покажется особенно впечатляющим. С ее помощью можно, например, преобразовать многочлен целой степени от одного вида к другому. Однако главное значение этой формулы заключается в том, что она устанавливает взаимосвязь между коэффициентами многочлена $P_n(x)$ и значениями его производных в точке x_0.

Пример 1. Представить многочлен

$$P(x) = 1 + 8(x - 2) + 6(x - 2)^2 + (x - 2)^3$$

в виде разложения по степеням x.

Решение. Согласно формуле Маклорена

$$P(x) = P(0) + P'(0)x + \frac{P''(0)}{2}x^2 + \frac{P'''(0)}{6}x^3.$$

Очевидно, что

$$P(x) = 1 + 8(x - 2) + 6(x - 2)^2 + (x - 2)^3 \quad \Rightarrow \quad P(0) = 1,$$
$$P'(x) = 8 + 12(x - 2) + 3(x - 2)^2 \quad \Rightarrow \quad P'(0) = -4,$$
$$P''(x) = 12 + 6(x - 2) \quad \Rightarrow \quad P''(0) = 0,$$
$$P'''(x) = 6 \quad \Rightarrow \quad P'''(0) = 6.$$

Таким образом,

$$P(x) = 1 - 4x + x^3.$$

Чтобы проверить полученный результат, достаточно раскрыть скобки в исходном выражении и привести подобные члены:

$$1 + 8(x - 2) + 6(x - 2)^2 + (x - 2)^3 =$$
$$= (1 - 16 + 24 - 8) + (8 - 24 + 12)x + (6 - 6)x^2 + x^3 =$$
$$= 1 - 4x + x^3.$$

2. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема

Теорема Больцано-Вейерштрасса (или **лемма Больцано-Вейерштрасса о предельной точке**).

Из всякой ограниченной последовательности точек пространства R^n можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Так как последовательность ограничена, то она имеет хотя бы одну предельную точку x. В таком случае из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке x .

Замечание 1

Из любой ограниченной последовательности можно выделить монотонную подпоследовательность.

Доказательство. Действительно, согласно теореме Больцано-Вейерштрасса, из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность, а из этой подпоследовательности можно выделить монотонную подпоследовательность.

Замечание 2

Пусть $\{x_n\}$ - ограниченная последовательность, элементы которой принадлежат промежутку $[a;b]$. Тогда предел c любой сходящейся подпоследовательности $\{x_{k_n}\}$ этой последовательности также находится на сегменте $[a;b]$.

Доказательство. Действительно, так как для любого номера k_n имеет место соотношение $a \leq x_{k_n} \leq b$, то в силу утверждения, что если все элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$ находятся на сегменте $[a;b]$, то и ее предел c также находится на этом сегменте, выполняются неравенства $a \leq c \leq b$. То есть $c \in [a;b]$.

Отметим, что в отдельных случаях и из неограниченной последовательности также можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Например, последовательность $\left\{1;\ \frac{1}{2};\ 2;\ \frac{1}{3};\ldots;\ n;\ \frac{1}{n+1};\ldots\right\}$ - неограниченная, однако подпоследовательность $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ldots;\ \frac{1}{n};\ldots\right\}$ ее элементов с четными номерами сходится.

Но не из каждой неограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Например, любая подпоследовательность неограниченной последовательности $\{x_n\} = \{n\} = \{1;\ 2;\ldots;\ n;\ldots\}$ расходится. Поэтому теорему Больцано-Вейерштрасса, вообще говоря, нельзя распространить на неограниченные последовательности.

Билет 21

1. Понятие числовой последовательности и ее предела. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.

Числовая последовательность и ее предел

Определения числовых последовательностей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Числовой последовательностью называется бесконечное множество чисел $x_1, \ x_2, \ldots, \ x_n$, следующих одно за другим в определенном порядке и построенных по определенному закону, с помощью которого x_n задается как функция целочисленного аргумента n, то есть $x_n = f(n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Число a называется **пределом последовательности** $\{x_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что при $n \geq n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Если число a – это предел последовательности $\{x_n\}$, то это обозначают как $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a = \lim\limits_{n} x_n = a$, или $x_n \to a$ при $n \to \infty$, или $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$

3.3. Ограниченность сходящейся последовательности. Теорема о единственности предела

Теорема 3.1. Если последовательность $x_n, n \in N$ сходится, то она ограничена.

Доказательство. Пусть число a является пределом последовательности $\{x_n\}$. Для $\varepsilon = 1$ можно указать номер n_1, начиная с которого все члены последовательности удовлетворяют неравенству $a - 1 < x_n < a + 1$. Так как множество членов последовательности, не удовлетворяющих данному неравенству, конечно, то выберем

$$m = \min\{x_1, \ldots, x_{n_1 - 1}; a - 1\}, \ M = \max\{x_1, \ldots, x_{n_1 - 1}; a + 1\}.$$

Легко убедиться в том, что все члены последовательности удовлетворяют неравенству $m < x_n < M$. *Теорема доказана.*

Из теоремы 3.1 непосредственно вытекает, что если последовательность $x_n, n \in N$, не является ограниченной, то она и не является сходящейся. Следует, однако, заметить, что теорема не может быть обращена, то есть не любая ограниченная последовательность имеет предел. Рассмотрим примеры.

Пример 3.9. $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in N$. Последовательность сходится к нулю и принимает значения из отрезка $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$.

Пример 3.10. $x_n = \frac{1}{n}, n \in N$. Последовательность сходится к нулю и принимает значения из полуинтервала $(0, 1]$.

Пример 3.11. $x_n = 2n - 3, n \in N$. Последовательность не является ограниченной, так как для произвольного положительного числа C и для любого натурального n, большего $\frac{C+3}{2}$, выполняется $2n - 3 > 2 \cdot \frac{C+3}{2} - 3 = C$. Следовательно, $x_n, n \in N$, не является сходящейся.

2. Односторонние пределы. Односторонние производные.

Односторонние пределы

Определение

Односторонний предел — предел числовой функции, подразумевающий «приближение» к предельной точке с одной стороны. Такие пределы называют соответственно левым и правым пределами.

Левый и правый пределы функции

Определение

Число b называется **правым пределом функции** $f(x)$ **в точке** a, если для $\forall\epsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ такое, что для любого $x \in D[f]$ и $a < x < a + \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \epsilon$ (рис. 1). Правый предел обозначается $\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = f(a+0) = b$

Число b называется **левым пределом функции** $f(x)$ **в точке** a, если для $\forall\epsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ такое, что для любого $x \in D[f]$ и $a - \delta < x < a$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \epsilon$ (рис. 2). Левый предел обозначается $\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = f(a-0) = b$

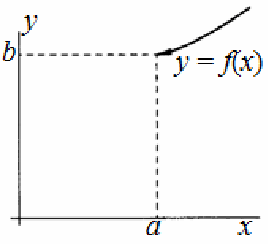


Рис. 1

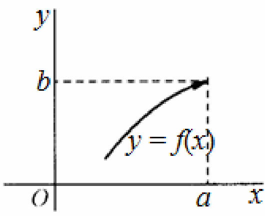


Рис. 2

Левый и правый пределы функции называются **односторонними пределами**.

Теорема

Если существуют $f(a-0)$ и $f(a+0)$, причем $f(a-0) = f(a+0) = b$, то существует и $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Обратное утверждение также верно.

В случае, если $f(a-0) \neq f(a+0)$, то предел $\lim_{x\to a} f(x)$ не существует.

Пример

Задание. Найти односторонние пределы функции $f(x) = \frac{1}{x}$ при $x \to 0$

Решение. Правый предел: $\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = f(0+0) = \frac{1}{0+0} = \frac{1}{0} = +\infty$

Левый предел: $\lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = f(0-0) = \frac{1}{0-0} = \frac{1}{-0} = -\infty$

Односторонние производные

Определение **Правой производной** y'_+ функции $y = f(x)$ в данной точке x_0 называется величина:

$$y'_+ = f'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

а **левой производной** - величина:

$$y'_- = f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

если эти пределы существуют.

Теорема Для того чтобы в точке x существовала производная $f'(x)$, необходимо и достаточно, чтобы в точке x функция $y = f(x)$ имела правую и левую производные, и эти производные были равны между собой: $y'(x) = y'_+(x) = y'_-(x)$.

Билет 23

1. Остаточные члены в формуле Тейлора (в форме Лагранжа и Пеано).

Остаточный член формулы Тейлора

В форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

В форме Коши:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta_1(x-a))}{n!}(1-\theta_1)^n (x-a)^{n+1}, \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

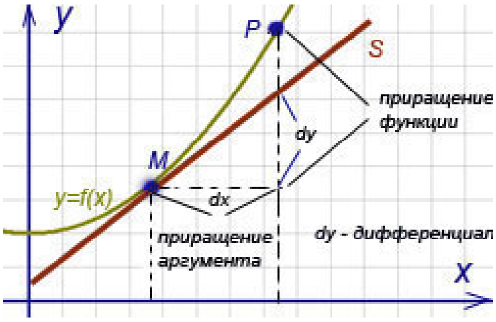
В форме Пеано:

$$R_n(x) = o\left((x-a)^n\right) \text{ при } x \to a.$$

2. Понятие дифференциала. Связь дифференциала с производной.

Понятие и геометрический смысл дифференциала

Определение. Дифференциалом функции в некоторой точке *x* называется главная, линейная часть приращения функции.



Дифференциал функции *y* = *f*(*x*) равен произведению её производной на приращение независимой переменной *x* (аргумента).

Это записывается так:

$$dy = y'\Delta x$$

или

$$df(x) = f'(x)\Delta x$$

или же

$$df(x) = f'(x)dx$$

Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал функции *y* = *f*(*x*) равен приращению ординаты касательной S, проведённой к графику этой функции в точке M(*x*; *y*), при изменении *x* (аргумента) на величину $\Delta x = dx$ (см. рисунок).

Почему дифференциал можно использовать в приближенных вычислениях?

Дифференциал, $dy = y'\Delta x$ является главной, линейной относительно Δx частью приращения функции; чем меньше Δx, тем большую долю приращения составляет эта часть. В этом можно убедиться, мысленно передвигая перпендикуляр, опущенный из точки *P* (см. рисунок) к оси *Ox*, ближе к началу координат. Поэтому при малых значениях Δx (и при $y' \neq 0$) **приращение функции можно приближенно заменить его главной частью** $y'\Delta x$, т.е.

$$\Delta y \approx y'\Delta x$$

Связь между производной и дифференциалом

Теорема 1. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке она имеет дифференциал.

Доказательство. Функция $y = f(x)$ - дифференцируема в точке x_0,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

По теореме о связи предела и б.м. функции:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ - б.м. функция при $\Delta x \to 0$.

Умножим обе части на D*x*:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

$\alpha(\Delta x)\Delta x$ - б.м. функция более высокого порядка, чем *Dx*.

$$dy = f'(x_0)\Delta x.$$

Следовательно, функция имеет дифференциал и $k = f'(x_0)$.

Теорема 2. Если функция имеет дифференциал в некоторой точке, то она имеет производную в этой точке.

Доказательство. Пусть функция имеет дифференциал $dy = k\Delta x$. Тогда

$$\Delta y = k\Delta x + \alpha(\Delta x).$$

Разделим обе части на D*x*:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k + \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$k = f'(x_0).$$

Таким образом, функция имеет производную и $k = f'(x_0)$.

Из этих теорем следует, что $dy = f'(x_0)\Delta x$.