V351

TITEL

Justus Weber
justus.weber@tu-dortmund.de

Guy Lochny
guy.lochny@tu-dortmund.de

Durchführung: 17.12.2024

Abgabe: 07.01.2024

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

In diesem Experiment sollen verschiedene Schwingugen in die grundlegenden Fourier-Komponenten zerlegt und periodische Schwingungen erstellt werden.

2 Theorie

2.1 Fouriersche Theorem

Unter periodischen Funktionen definiert man jene, welche sich in einem bestimmten Maß wiederholen. So gilt für eine Funktion, welche räumlich periodisch ist die Gleichung

$$f(x + D) = f(x) \tag{1}$$

mit einem Periodenabstand T. Diese Gleichung gilt ebenso für zeitlich periodische Funktionen, dabei wird das x durch die Zeit t ersetzt und der Periodenabstand mit der Periodendauer:

$$f(t + T) = f(t). \tag{2}$$

Die beiden Funktionen, welche physikalisch am relevantesten sind, sind die geometrischen Funktionen Sinus und Cosinus. Mithilfe beider lässt sich das Fouriersche Theorem aufstellen. Darunter ist zu versetehen, dass jede Welle aus einer Reihe an sinusförmigen Komponenten besteht. Allgemein ist die Fourierreihe aus einem konstanten Term und der Summe aus zeit- und frequenzabhängigen Sinus- und Cosinusfunktionen, multipliziert mit deren Amplitude, definiert.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(n\omega t\right) + b_n sin\left(n\omega t\right) \tag{3}$$

Hierbei entspricht ω der Frequenz und ist definiert als $\frac{2\pi}{T}$. Es ist wichtig, dass die Reihe gleichmäßig konvergiert, was der Fall ist, wenn $f(t)$ überall stetig ist. Sobald eine Stelle t_0 existiert, an der die Funktion nicht stetig ist, kann diese nicht mehr mithilfe der Fourierreihe angenähert werden. Es kommt zu einer Abweichung. Diese wird als Gibbsches Phänomen bezeichnet, anschaulich beschreibt dieses Überschwingungen, welche bei der Approximation von Funktionen mit sprunghaften Verhalten durch Fourierreihen auftreten. Diese Überschwingungen sind unabhängig von der Anzahl der Terme, welche die Summe ergibt.

Die Amplituden sowie der konstante Term werden Fourierkoeffizienten genannt und sind definiert als

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt \tag{4}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)cos(k\omega t)dt \tag{5}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)sin(k\omega t)dt \tag{6}$$

Grundsätzlich treten damit im Allgemeinen nur Vielfache der Grundfrequenz $\nu_1 = \frac{1}{T}$ auf, jene sind als harmonische Oberschwingungen zu bezeichnen. Die Ermittlung der Koeffizienten wird als Fourieranalyse bezeichnet, diese kann in einigen Spezialfällen einfacher werden. Ist $f(t)$ eine gerade Funktion, so gilt $b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Im Umkehrschluss folgt $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, sofern $f(t)$ eine ungerade Funktion ist. Werden die Amplituden einer periodischen Funktion gegen die Frequenz aufgetragen, ergibt sich ein Linienspektrum, welches bei der Grundfrequenz am größten ist und darauffolgend exponentiell abnimmt. Bei Funktionen, welche nicht periodisch sind, stellt sich lückenloses Spektrum ein.

2.2 Fourier-Transformation

Während mit der Berechnung der Fourierkoeffizienten die Bestimmung der einzelnen Komponenten einer periodischen Funktion $f(t)$ stattfindet, kann ebenso das ganze Spektrum bestimmt werden. Das fällt unter den Namen der Fourier- Transformation und ist unabhängig von der Periodizität der Funktion. Die Transformation $g(\nu)$ wird gegeben durch

$$g(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\nu t}dt. \tag{7}$$

Sollte $f(t)$ doch periodisch sein, so kommt es zu einem ähnlichen Spektrum wie im Vorherigen geschildert. Analog verfügen nicht-periodische Funktionen über ein kontinuierliches Spektrum.

Die Fourier-Trafo ist umkehrbar, eine Rücktransformation nimmt die Gestalt

$$\tilde{g}(\nu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\nu)e^{-i\nu t}d\nu \tag{8}$$

an.

2.3 Fehlerrechnung

Die gemessenen Werte unterliegen Messunsicherheiten und werden demnach im Folgenden nicht als fehlerfrei angesehen. Die Fehler entstehen bei der Bildung der Mittelwerte durch den Fehler des Mittelwerts und bei der Regressionsrechnung sowie der Fehlerforpflanzung durch Python. Der Fehler des Mittelwerts ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\Delta\overline{x} &= \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}}{\sqrt{N}}.\end{aligned} \tag{9}$$

Um Fehler einzubeziehen, wird die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung verwendet:

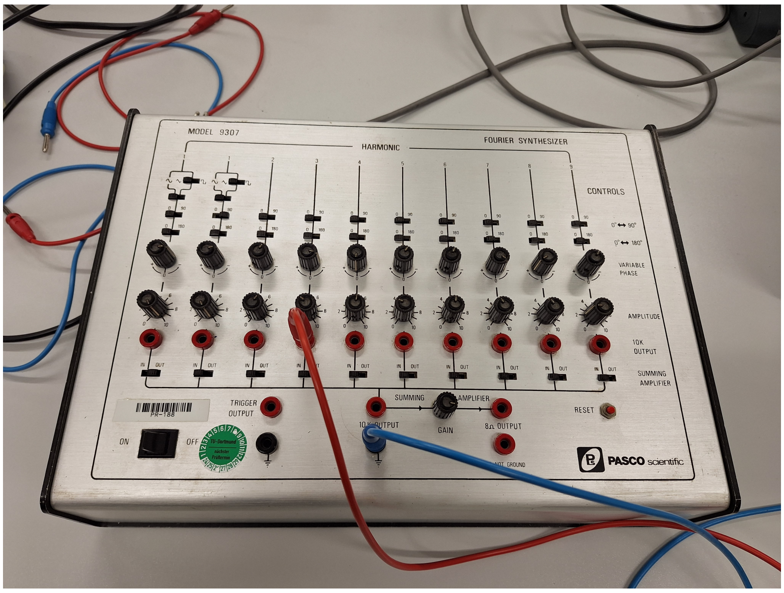
$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot (\Delta y)^2 + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \cdot (\Delta z)^2} \tag{10}$$

3 Durchführung

3.1 Fourier-Synthese

Für diesen Teil des Experiments werden das Oszilloskop, der Oberwellengenerator (siehe Abbildung 1) sowie das Multimeter genutzt. Zu Untersuchen sind die Rechteck-, Sägezahn- und Dreieckspannung. Der Oberwellengenerator wird als erstes mit dem Multimeter verbunden, woraufhin an diesem die höchstmögliche Spannungsamplitude eingestellt wird. Bei Kanal eins befindet sich nun die Spannungsamplitude zu dem Fourierkoeffizienten a_1. Im Folgenden wird dann für die jeweiligen Kanäle bei der Rechteck-und Sägezahnspannung mit der Ordnung n das $\frac{1}{n}$-fache dieser Amplitude eingestellt. Bei der Dreieckspannung werden für die Kanäle allerdings das $\frac{1}{n^2}$-fache eingestellt. Detektiert werden die Amplituden mithilfe des Multimeters. Darauffolgend wird der Oberwellengenerator vom Multimeter getrennt und stattdessen mit dem Oszilloskop verbunden. Die Phasenverhältnisse der Grundschwingung auf Kanal eins werden mit den restlichen Kurven eingestellt, indem auf den X-Eingang des Oszilloskops die Oberwelle des ersten Kanals gesetzt wird. Die n-te Oberwelle des n-ten Kanals befindet sich auf dem Y-Eingang. Auf dem Oszilloskop sind nun die Lissajous-Figuren zu sehen (eine beliebige ist in Abbildung 2 zu sehen). Grundsätzlich entstehen sie durch die Überlagerung zweier orthogonaler harmonischer Schwingungen.

Abbildung 1: Der Oberwellengenerator.



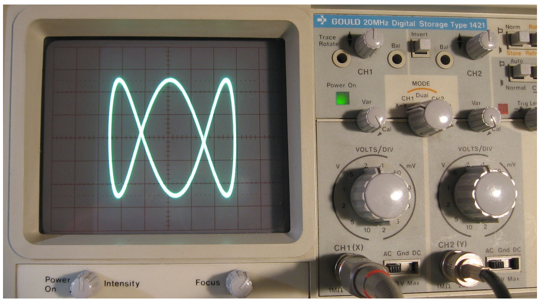


Abbildung 2: Lissajous-Figur [1].

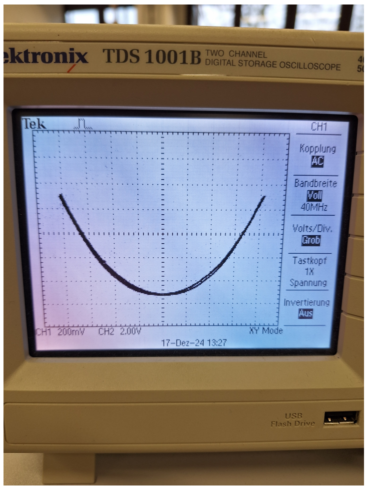


Abbildung 3: Variierte Lissajous-Figur.

Diese werden abgeglichen, indem das virtuelle Bilder dermaßen geändert wird, dass sich die Kurven überlagern wie in Abbildung 3 dargestellt. Für die Sägezahnspannung muss jede Oberwelle ausgegeben gleichzeitig ausgegeben und auf dem Oszilloskop angezeigt werden. Für die Rechteck-und Dreieckspannung reicht es, jede zweite Oberwelle derartig zu detektieren.

3.2 Fourier-Analyse

Für den zweiten Teil des Experiments werden der Funktionsgenerator und das Oszilloskop genutzt. Am Generator wird jeweils eine Dreiecks-, Sägezahn- oder Rechteckschwingung eingestellt, am Oszilloskop wird überprüft ob die Schwingung übermittelt wird. Im Anschluss wird Fouriertransformation am Oszilloskop durchgeführt. Am Oszilloskop wird das Frequenzspektrum der Transformation abgebildet, welches wie in Unterabschnitt 2.1 einer exponentiell abfallenden Funktion gleicht. Dabei ist anzumerken, dass die Spektren jeweils ein Rauschen beinhalten, welche vernachlässigt werden können.
Die Peaks werden in dB aufgenommen und mithilfe des integrierten Navigators am Oszilloskop abgelesen.

4 Auswertung

4.1 Fourier-Synthese

Bei der Fourier-Synthese wurde versucht eine Sägezahnspannung, eine Rechteckspannung und eine Dreiecksspannung darzustelllen. Wenn die Spannungen an den Vielfachen der Grundfrequenz mithilfe des Oberwellengenerators so eingestellt werden, ergeben sich die folgenden Fourier-Reihen.

Abbildung 4: Fourier-Reihe Sägezahnspannung.

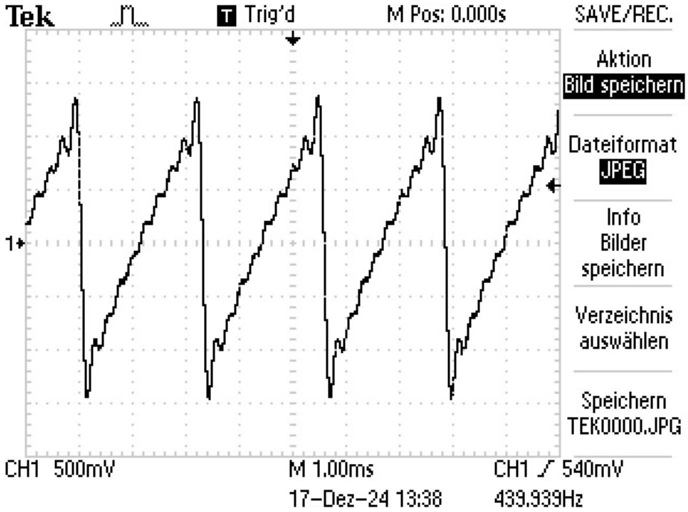


Abbildung 5: Fourier-Reihe Rechteckspannung.

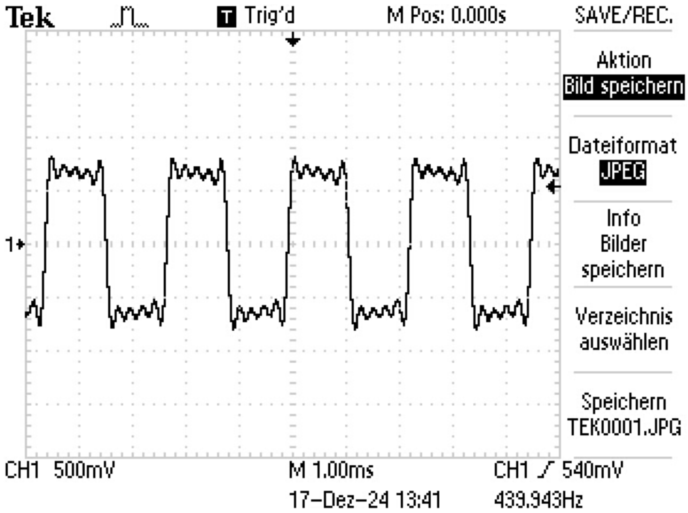
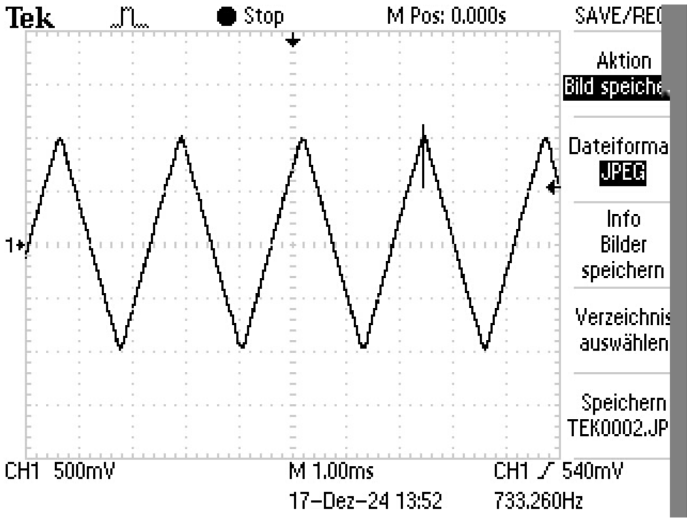


Abbildung 6: Fourier-Reihe Dreieckspannung.



4.2 Fourier-Analyse

Bei der Fourier-Analyse werden am Oberwellengeneratur die Rechteckfunktion, die Dreiecksfunktion und die Sägezahnfunktion generiert. Am Amperemeter werden die Amplituden bei den jeweiligen Frequenzen der Oberwelle abgelesen, um so auf die Abhängigkeit der Spannung der n-ten Oberwelle schließen zu können.

4.2.1 Rechteckspannung

Tabelle 1: Amplituden der Oberschwingungen Rechteckfunktion.

f(Hz)	A(dB)
10	17,8
30	9,01
50	4,61
70	1,81
90	−0,19
110	−1,79
130	−3,39
150	−4,59
170	−6,19
190	−8,19

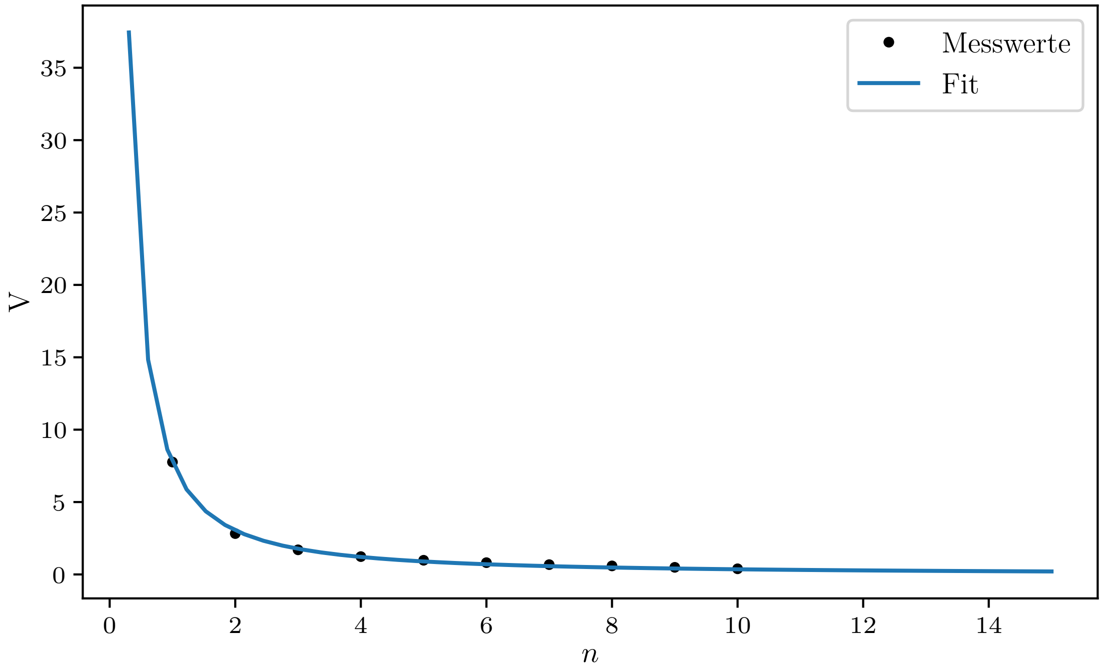
Die Oberwellen sind n Vielfache der Grundfrequenz. Um auf die Abhängigkeit von n schließen zu können, werden die in Volt umgerechnenten Spannungswerte (welche gegen die Ordnung der jeweiligen Oberwelle aufgetragen sind) an eine Funktion der Form

$$U(n) = \frac{a}{n^b} \tag{11}$$

gefittet. Die Umrechnung in Volt wird auf Grundlage der Proportionalität $V\tilde{e}^{\frac{\mathrm{dB}}{20}}$ ausgeführt.

4.2.2 Rechteckfunktion

Abbildung 7: Curve fit und Messwerte der Rechteckspannung.



Aus dem Curve fit (erstellt mithilfe der Python Bibiliothek ”Pyplot”) ergeben sich für die Rechtecksspannung die Parameter

$$a = 7{,}7 \pm 1{,}0$$
$$b = 1{,}34 \pm 0{,}26$$

Der Ausgleichsparameter b gibt den Grad der Abhängigkeit von n an.

4.2.3 Dreieckspannung

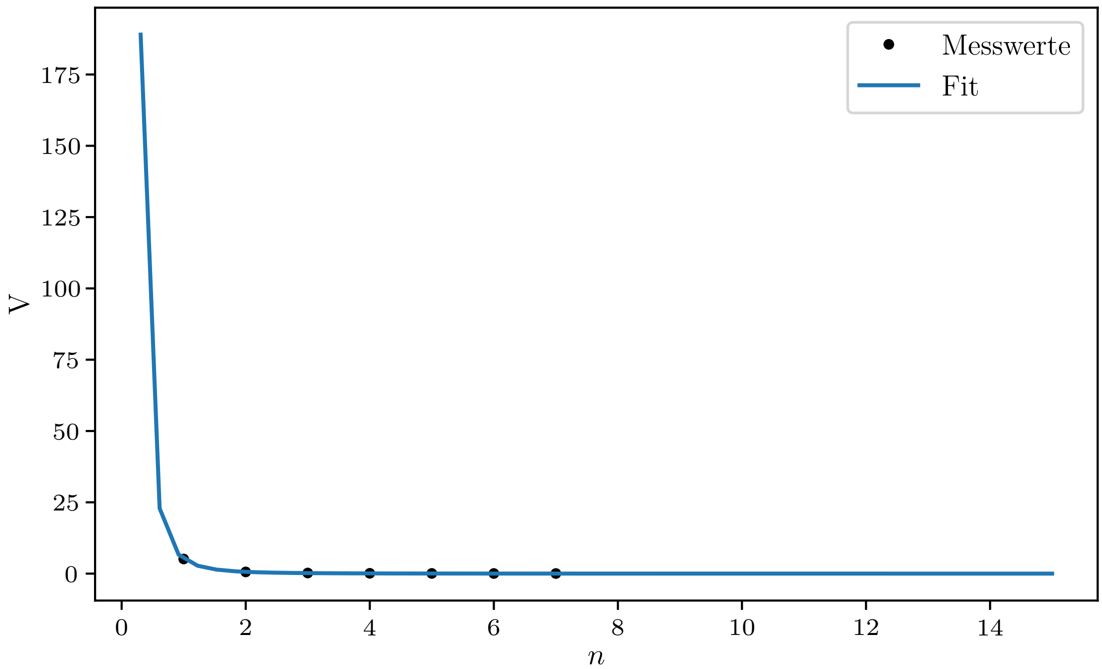
Tabelle 2: Amplituden der Oberschwingungen Dreiecksfunktion.

f(Hz)	A(dB)
10	14,2
30	−4,59
50	−13,4
70	−19,4
90	−23,4
110	−27,0
130	−29,4

Auch bei der Dreiecksspannung wird ein Curve fit durch eine Funktion der Form aus Gleichung 11 auf die Messdaten angewendet.

4.2.4 Dreiecksfunktion

Abbildung 8: Curve Fit und Messwerte Dreiecksspannung



Die Parameter a und b ergeben sich zu

$$
\begin{aligned}
a =& 5{,}1 \pm 1{,}0 \\
b =& 3{,}0 \pm 2{,}1
\end{aligned}
$$

Dabei gibt b wieder den Grad der Abhängigkeit an.

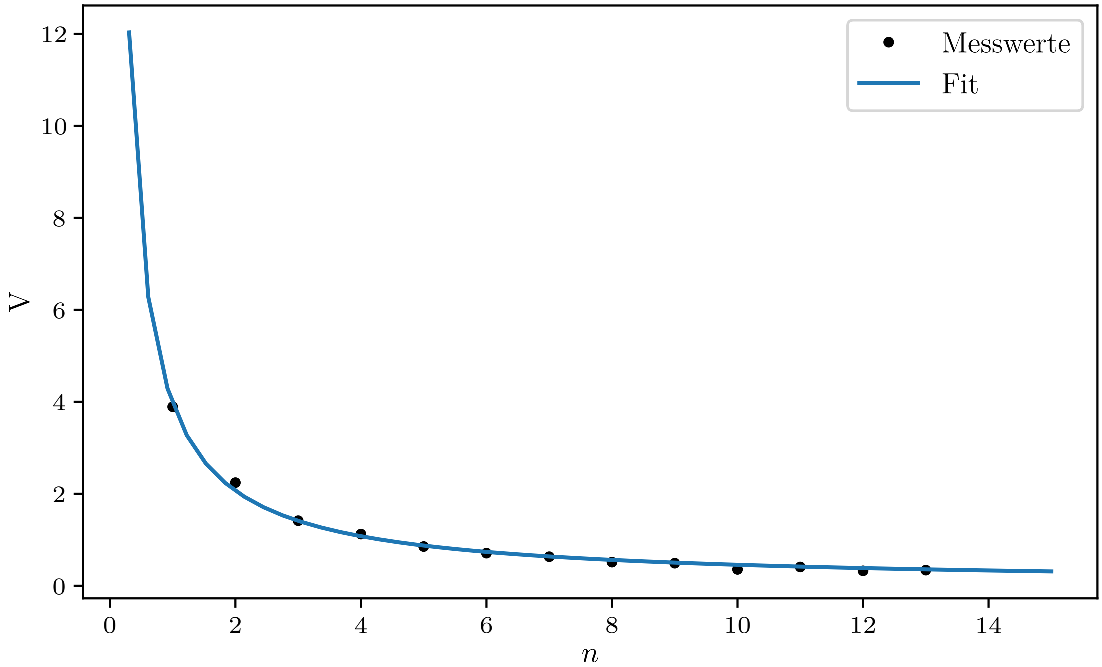
4.2.5 Sägezahnspannung

Tabelle 3: Amplituden der Oberschwingungen Sägezahnfunktion.

f(Hz)	A(dB)
10	11,8
20	7,01
30	3,01
40	1,01
50	−1,39
60	−2,99
70	−4,00
80	−5,79
90	−6,19
100	−8,99
110	−7,79
120	−9,79
130	−9,39

4.2.6 Sägezahnfunktion

Abbildung 9: Curve fit und Messwerte Sägezahnspannung.



Die Ausgleichsparameter für die Sägezahnspannung lauten:

$$a = 4{,}0 \pm 0{,}9$$
$$b = 0{,}94 \pm 0{,}28$$

5 Diskussion

5.1 Fourier-Synthese

Grundsätzlich kann in diesem Bereich von einem gelungen Versuch gesprochen werden. Die erzielten Funktionen sehen den gewünschten Funktionen (Sägezahn, Rechteck, Dreieck) sehr ähnllich. Deutlich zu erkennen sind die starken Abweichungen der Funktion nahe der Unstetigkeiten. So ist etwa die Rechteckfunktion an den Rechteckrändern immer sehr hoch. Jenes ist auf das in der Theorie angesprochene Gibbsche Phänomen zurückzuführen.

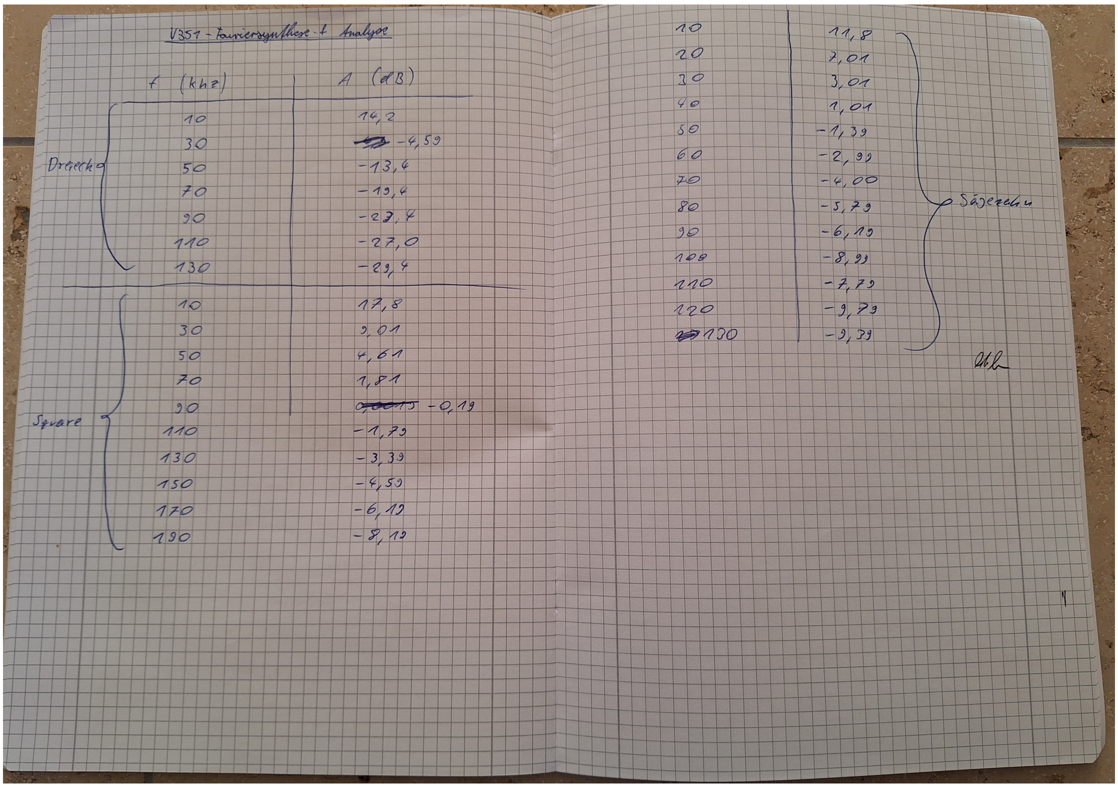
5.2 Fourier-Analyse

Bei der Fourier Analyse liegt vor Allem der Wert b, welcher den Grad der Abhängigkeit von n angibt, für die Sägezahnspannung mit $b_s = 0{,}94 \pm 0{,}28$ sehr nah am theoretischen Wert

$b_{sT} = 1$. Dieser Theroriewert liegt im Fehlerintervall von b_s. Auch für die Dreiecksspannung liegt der theoretische Wert $b_{dT} = 2$ im Fehlerintervall von dem experimentell bestimmten Wert $b_d = 3{,}0 \pm 2{,}1$. Auffällig ist das ziemlich große Fehlerintervall von b_d für die Rechteckspannung. Der experimentelle Wert $b_r = 1{,}34 \pm 0{,}26$ weicht um 34% von dem theoretischen Wert $b_{rT} = 1$ ab und fällt nicht mehr in dem 1σ Toleranzintervall, was auf ein Rauschen am Messgerät zurückzuführen sein könnte. Vor Allem bei niedrigen Frequenzen haben sich die Amplituden verändert.

6 Anhang

Abbildung 10: Messwerte.



Literatur

[1] Volkers Elektronik-Bastelseiten. *Lissajous-Figur, Frequenzverhältnis 1 zu 3*. Abgerufen am 27. Dezember 2024. 2024. URL: `https://shorturl.at/5lISG` (besucht am 27. 12. 2024).