

V204

Wärmeleitung von Metallen

Justus Weber

justus.weber@tu-dortmund.de

Guy Lochny

guy.lochny@tu-dortmund.de

Durchführung: 26.11.2024

Abgabe: 3.12.2024

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Fehlerrechnung	4
3 Durchführung	4
3.1 Statische Methode	5
3.2 Dynamische Methode	5
4 Auswertung	5
4.1 statische Methode	5
4.1.1 Temperaturverläufe und Wärmeleitung	6
4.1.2 Temperaturdifferenz	8
4.2 Dynamische Methode	9
4.2.1 Wärmeleitfähigkeit Messing	9
4.2.2 Wärmeleitfähigkeit Aluminium	12
4.2.3 Wärmeleitfähigkeit Edelstahl	13
4.3 fehlerrechnung	15
5 Diskussion	15
6 Anhang	15
Literatur	15

1 Zielsetzung

In diesem soll die Wärmeleitfähigkeit von Aluminium, Messing und Edelstahl auf dynamische und statische Weise bestimmt werden.

2 Theorie

Wird ein Körper aus seinem Temperaturgleichgewicht gebracht, so wird die Energie in Form von Wärme zum kühleren Teil transportiert. In diesem Versuch geht es um den Wärmetransport durch Wärmeleitung in einem Stab. Dieser habe die Länge L , Querschnitt A , Dichte ρ und jeweils spezifische Wärme c . Kommt es nun zu einem Wärmetransport, fließt die Wärmemenge dQ durch die Querschnittsfläche A . Diese Wärmemenge lässt sich beschreiben durch:

$$dQ = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x} dt. \quad (1)$$

Das κ ist die materialabhängige Wärmeleitfähigkeit. Mithilfe der Kontinuitätsgleichung folgt daraus eine Differentialgleichung, welche als Wärmeleitungsgleichung bezeichnet wird:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2)$$

Diese Gleichung gibt Aufschluss darüber, wie sich die Temperaturverteilung über Raum und Zeit hinweg entwickelt. Der unabhängige Faktor $\frac{\kappa}{\rho c}$ steht für die Temperaturleitfähigkeit, sie wiederum gibt Aufschluss darüber, wie schnell ein Temperaturungleichgewicht ausgeglichen wird. Die Lösung dieser DGL für einen langen Stab, welcher abwechselnd erhitzt und abgekühlt wird, ist eine Temperaturwelle, gegeben durch die Gleichung

$$T(x, t) = T_{max} e^{-\sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x} \cos(\omega t - \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x). \quad (3)$$

T_{max} ist die Maximalamplitude und ω die Kreisfrequenz. Nach der Dispersionsrelation

$$\omega = v|k| \quad (4)$$

ergibt sich für die Phasengeschwindigkeit

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{2\kappa\omega}{\rho c}}. \quad (5)$$

Die Wärmeleitfähigkeit ist gegeben durch

$$\kappa = \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2\Delta t \ln\left(\frac{A_{nah}}{A_{fern}}\right)} \quad (6)$$

mit $\Delta = x_{fern} - x_{nah}$ und den Amplituden an diesen Stellen, sowie Δt , der Phasendifferenz.

2.1 Fehlerrechnung

Die gemessenen Werte für die Temperatur unterliegen Messunsicherheiten und werden demnach im Folgenden nicht als fehlerfrei angesehen. Die Fehler entstehen bei der Bildung der Mittelwerte durch den Fehler des Mittelwerts und bei der Regressionsrechnung sowie der Fehlerfortpflanzung durch Python. Der Fehler des Mittelwerts ist gegeben durch

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (7)$$

Um Fehler einzubeziehen, wird die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung verwendet:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot (\Delta y)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \cdot (\Delta z)^2} \quad (8)$$

3 Durchführung

Bei der Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit werden zwar unterschiedliche Methoden verwendet, allerdings bleibt der Aufbau gleich und ist in Abbildung 1 zu sehen. Die Me-

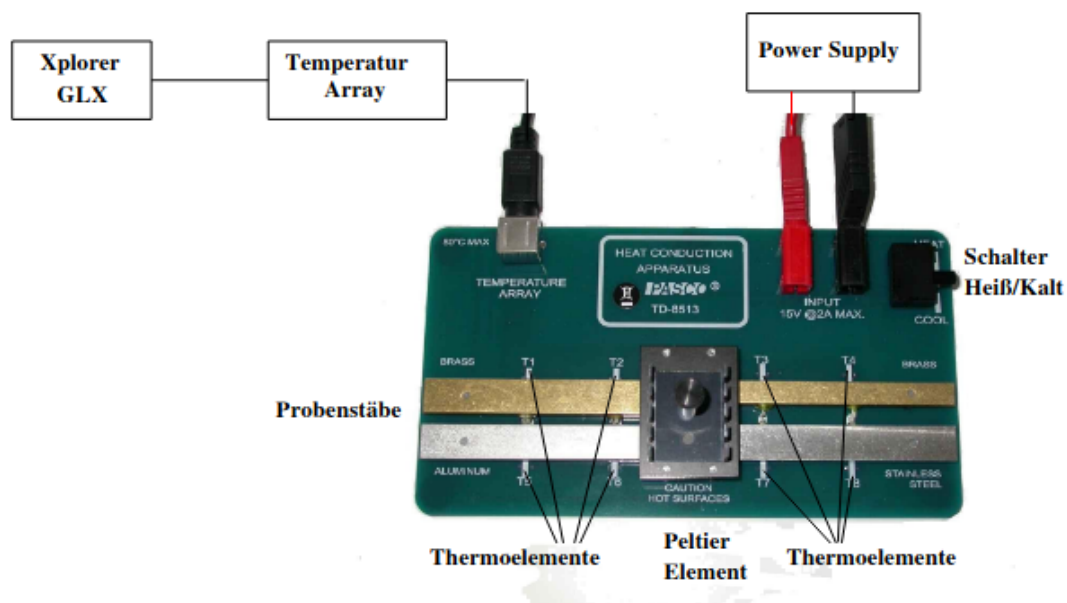


Abbildung 1: Aufbau zur Bestimmung der Leitfähigkeit. [1]

tallstreifen links und rechts des Peltier-Elements, bestehen aus Messing (oberer Streifen), Aluminium (unten links) und Edelstahl (unten rechts). Das Peltier-Element ist mit einer Spannungsquelle verbunden und wandelt die zugeführte Energie in Wärme um, sodass die Stäbe erhitzt werden. Die Temperatur wird mithilfe eines Thermoelements gemessen, welches über ein Temperatur Array an einen Datenlogger angeschlossen ist, an dem die

Abtastraten noch verändert werden (siehe unten). Um Wärmeverluste zu vermeiden wird eine Wärmeisolierung auf die Stäbe gelegt, dann wird der obere rechte Schalter auf "HEAT" geschaltet, sodass die Energie-Wärme-Umwandlung im Peltier-Element beginnt. Nach jeder Messung werden diese Isolierungen wieder abgenommen und der obere Schalter auf "COOL" gestellt, sodass die Stäbe langsam wieder abkühlen.

3.1 Statische Methode

Hierbei wird zunächst die Abtastrate Δt_{GLX} des Datenloggers auf 10s eingestellt und die Ausgangsspannung der Spannungsquelle auf $U_0 = 5V$ eingestellt. Der Heizvorgang findet statt bis eine Temperatur von 45°C erreicht ist. Im späteren Verlauf wird bestimmt, welcher Stab die beste Wärmeleitfähigkeit hat, dazu werden die Temperaturen der Thermoelemente T1, T4, T5 und T8 nach 700s festgehalten und verglichen.

3.2 Dynamische Methode

Bei der dynamischen Methode wird das Angström-Messverfahren verwendet, bei der der Probenstab periodisch erhitzt wird. Zunächst wird Δt_{GLX} von 10 auf 2s gesetzt. An der Spannungsquelle werden $U_P = 8V$ angelegt. Sobald alle Stäbe auf 30°C heruntergekühlt, kann die Messung losgehen, diese sieht wie folgt aus: Für 40s wird geheizt, dann wird 40s gekühlt. Diese 80s Perioden werden 11 mal wiederholt.

Genau das Gleiche wird jetzt für eine Periodendauer mit 200s wiederholt. Die Messung wird beendet, sobald eines der Thermoelemente eine Temperatur von 80°C erreicht.

4 Auswertung

4.1 statische Methode

In diesem Kapitel werden die Unterschiede und Gemeinsamkeiten der vier Temperaturverläufe $T1$, $T4$, $T5$, $T8$ zu den unterschiedlichen Materialien ausgewertet. Weiterhin wird der Stab mit der besten Wärmeleitung bestimmt und der Wärmestrom zu jeder Messzeit. Letztlich werden noch die Temperaturdifferenzen $\Delta T_{ST} = T7 - T8$ und $T_{ST} = T2 - T1$ als Funktionen der Messzeit t dargestellt.

4.1.1 Temperaturverläufe und Wärmeleitung

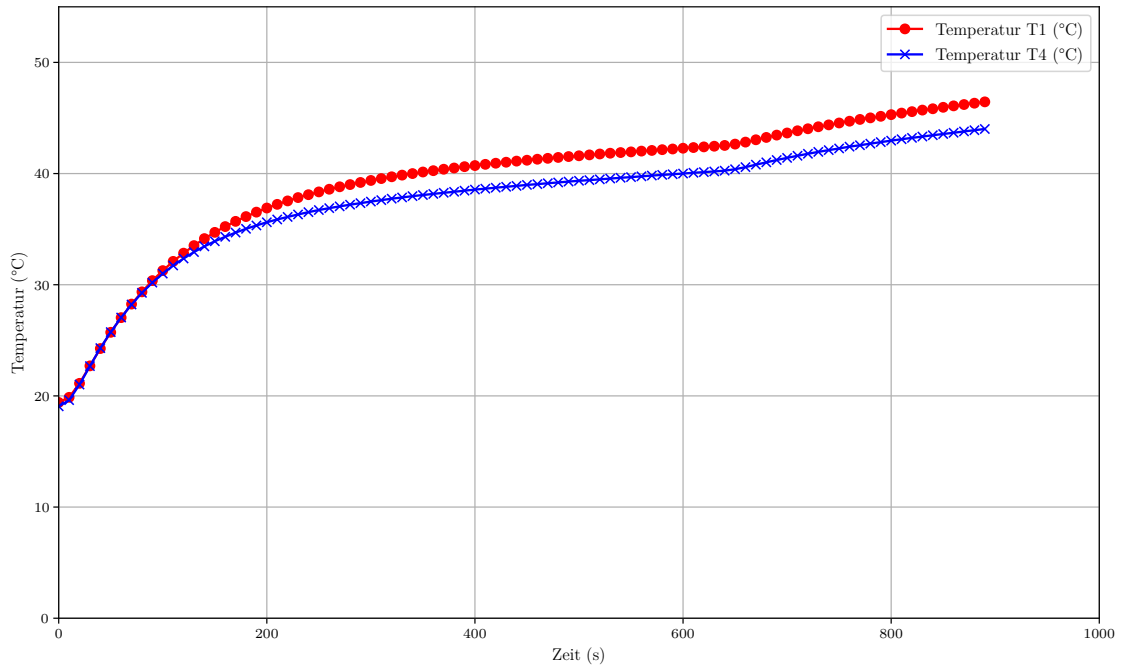


Abbildung 2: Temperaturverläufe von T_1 und T_4 .

Bei den beiden Stäben aus Abbildung 2 handelt es sich um Messingstäbe. Der Temperaturverlauf verhält sich demnach ziemlich ähnlich. Die Abweichung zwischen beiden Verläufen ist mit dem Flächenunterschied zu begründen; die Stäbe von T_1 und T_4 sind unterschiedlicher Größe und da nach Gleichung 1 die Fläche A proportional zu der Wärmemenge dQ ist, weist T_1 eine etwas höhere Temperatur auf. Die Abweichung nach oben ist mit einem Messfehler verbunden, welcher noch zu diskutieren ist.

In Abbildung 3 befindet sich der Temperaturverlauf des Aluminiumstabs(T_5) und des Edelstahlstabs(T_8).

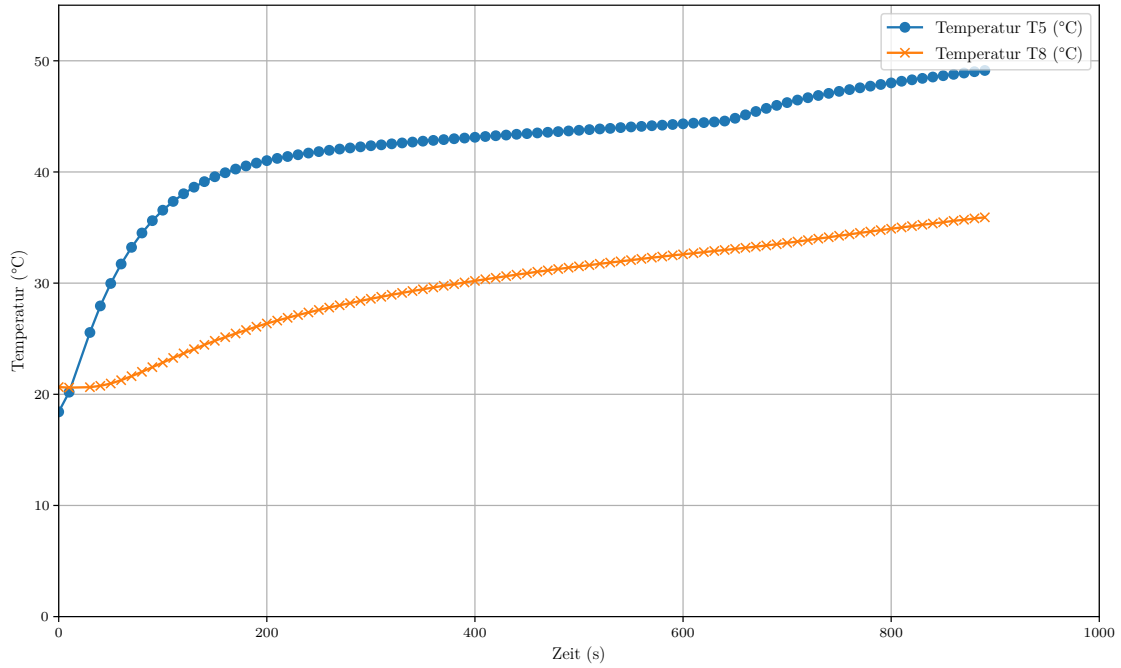


Abbildung 3: Temperaturverläufe von T_5 und T_8 .

Es ist zunächst zu erkennen, dass der Temperaturverlauf des Aluminiumstabs recht stark von dem des Edelstahlstabs abweicht. Dieser Verlauf lässt sich mit der höheren Wärmeleitfähigkeit des Aluminiums erklären. Im Vergleich mit den anderen Werten zum Zeitpunkt $t = 700\text{s}$:

$$T_1 = 43,65^\circ\text{C}$$

$$T_4 = 41,41^\circ\text{C}$$

$$T_5 = 46,24^\circ\text{C}$$

$$T_8 = 33,62^\circ\text{C}$$

Der Aluminiumstab verfügt demnach offenbar über die stärkste Wärmeleitfähigkeit. Nun lässt sich der Wärmestrom berechnen, indem Gleichung 1 umgeformt wird nach:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x} \quad (9)$$

Dabei ist $\partial T = T_i - T_j$ und ∂x die ausgemessene Größe von $0,03\text{m}$.

In folgender Tabelle wird der Wärmestrom zu 5 unterschiedlichen Zeiten dargestellt. $\Delta Q_{T_1-T_2}$ steht für den Wärmestrom zwischen T_1 und T_2 , analog ergibt sich der Wärmestrom $\Delta Q_{T_8-T_7}$ zwischen den Thermoelementen T_7 und T_8 .

Tabelle 1: Wärmestrom für 5 Zeiten

t/s	$\Delta Q_{T1-T2}/\Delta t$	$\Delta Q_{T8-T7}/\Delta t$
100	1	2
200	1	2
400	1	2
600	1	2
800	1	2

4.1.2 Temperaturdifferenz

In Abbildung 4 ist die Temperaturdifferenz der ersten beiden Thermoelemente zu sehen.

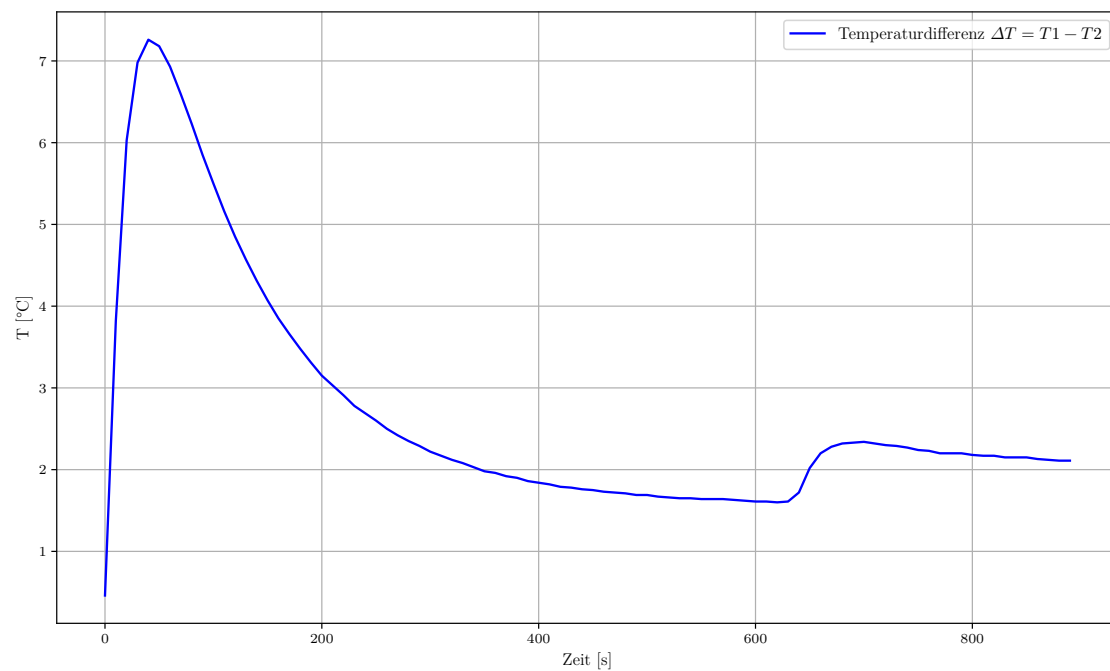


Abbildung 4: Temperaturdifferenz T_1 und T_2 .

In folgender Abbildung befindet sich die Differenz der letzten beiden Thermoelemente. Dabei fällt auf, dass sich die zeitlichen Entwicklungen ähneln; nach Erreichen einer Maximaltemperatur fällt der Graph asymptotisch, wobei der Graph aus Abbildung 5 temperaturmäßig weiter oben liegt und nicht so stark sinkt, wie der Graph aus Abbildung 4, was durch die bessere Wärmeleitfähigkeit des Messings im Gegensatz zum Edelstahl zu begründen ist. Die erste maximale Temperaturdifferenz liegt dabei bei etwa 7,3°C und beim Zweiten Graphen bei knapp 12,1°C. Auffällig bei beiden Graphen ist wieder der Messfehler am rechten Ende des Graphen. Dieser wird in der Diskussion behandelt.

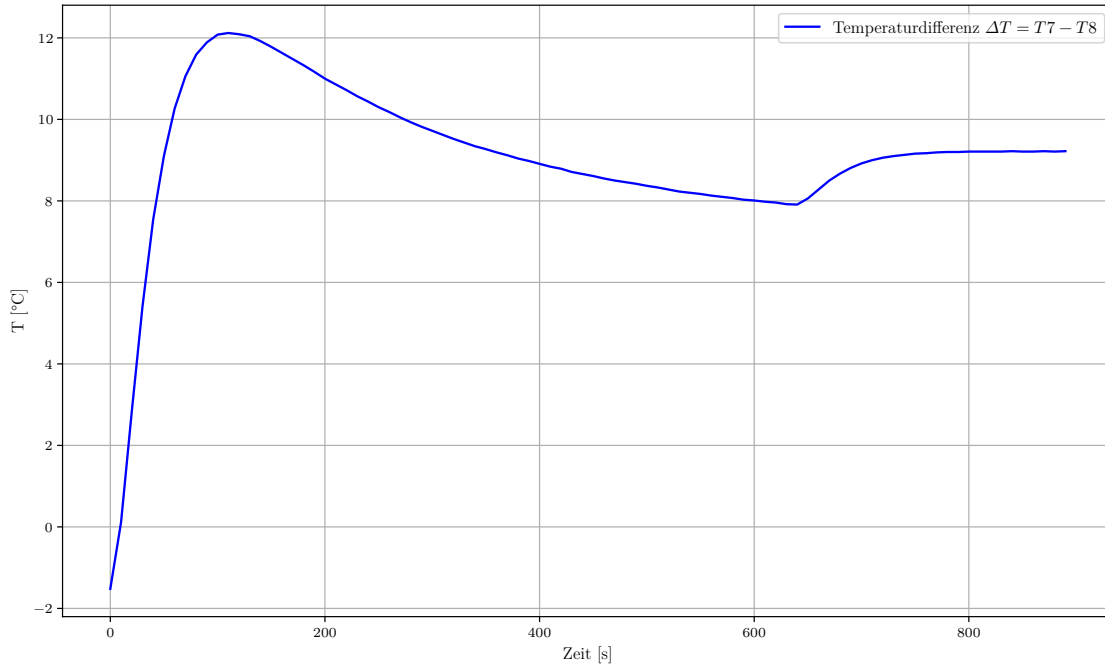


Abbildung 5: Temperaturdifferenz T_7 und T_8 .

4.2 Dynamische Methode

Hier wird die Wärmeleitfähigkeit für den Breiten Messingstab, den Aluminiumstab und den Edelstahlstab mithilfe der in der Abschnitt 4 erwähnten Dynamischen methode ermittelt.

4.2.1 Wärmeleitfähigkeit Messing

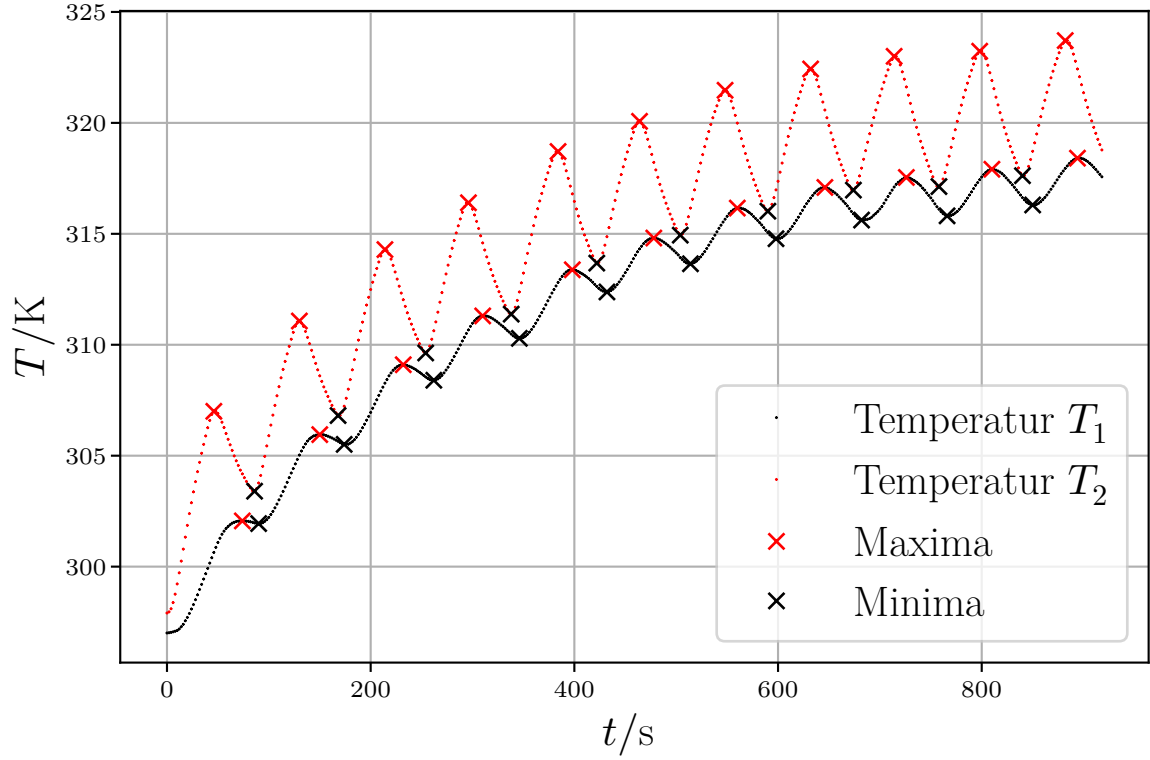
Zur berechnung der Wärmeleitfähigkeit von Messing werden Die messwerte des dicken Messingstabes mit den Temperaturmeselementen T_1 und T_2 benutzt. Jene Wärmeleitfähigkeit lässt sich mit Gleichung 6 bestimmen. Darin sind $\Delta x = 0.03/\text{m}$ der Abstand der Temperaturmeselemente, c die Materialabhängige Wärmekapazität, ρ die Dichte des Stabes, Δt die Phasendifferenz zwischen der Temperaturwelle am Ersten und zweiten Temperaturelement und $A_{nah(fern)}$ die Amplitude der Jewailigen Temperaturwelle. Die Ampituden werden durch die funktion "find_peaks" aus der bibiliothek SciPy, angewendet auf die Messdaten, bereitgestellt.

Tabelle 2: Ermittelte Amplituden und Phasendifferenz für Messing

A_{fern}	A_{nah}	$\ln \frac{A_{nah}}{A_{fern}}$	Δts
1,00	1,91	0,648	28
0,89	1,87	0,734	20
0,72	1,69	0,847	18
0,77	1,83	0,863	14
0,60	1,59	0,966	14
0,62	1,63	0,956	14
0,57	1,60	1,020	12
0,48	1,50	1,144	14
0,52	1,52	1,066	12
0,52	1,52	1,059	12

in Tabelle 2 sind die nach ?? ermittelten Amplituden, sowie der Logarythmus der Amplituden und die Phasendifferenz Δt aufgeführt. Des weiteren sind in Abbildung ?? die Messwerte, sowie die ermittelten Hoch und Tiefpunkte Grafisch dargestellt.

Abbildung 6: Graphische Darstellung der gemessenen Temperaturen T_1 und T_2 pro vergangenen zwei Sekunden



Mit den folgenden Materialeigenschaften ρ und c , dem Abstand Δx , sowie den gemittelten Größen Δt und $\ln \frac{A_n ah}{A_{fern}}$ aus den im vorherigen ermittelten Größen, lässt sich die Wärmeleitfähigkeit von Messing über Gleichung 6 bestimmen. Die Mittelwerte und der zugehörige Fehler wurden nach Gleichung 7 bestimmt.

$$\rho_{Messing} = 8520 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\Delta x = 0,03 \text{ m}$$

$$c_{Messing} = 385 \frac{\text{J K}}{\text{kg}}$$

$$\overline{\ln \frac{A_n ah}{A_{fern}}} = (0,93 \pm 0,04)$$

$$\overline{\Delta t} = (15,45 \pm 0,14) \text{ s}$$

Die Berechnung der Wärmekapazität ergibt nach einsetzen der Werte

$$\kappa_{Messing} = (103 \pm 11) \frac{\text{W K}}{\text{m}}. \quad (10)$$

4.2.2 Wärmeleitfähigkeit Aluminium

Auch für Aluminium wird die Wärmeleitfähigkeit anhand von Gleichung 6 bei einer Heiß- und kühlperiodendauer von 80 sekunden ermittelt. In Abbildung ?? ist der Verlauf der gemessenen Temperaturelemente an T_5 und T_6 mit den zugehörigen Extrema zu entnehmen.

Abbildung 7: Graphische Darstellung der gemessenen Temperaturen T_5 und T_6 pro vergangenen zwei Sekunden

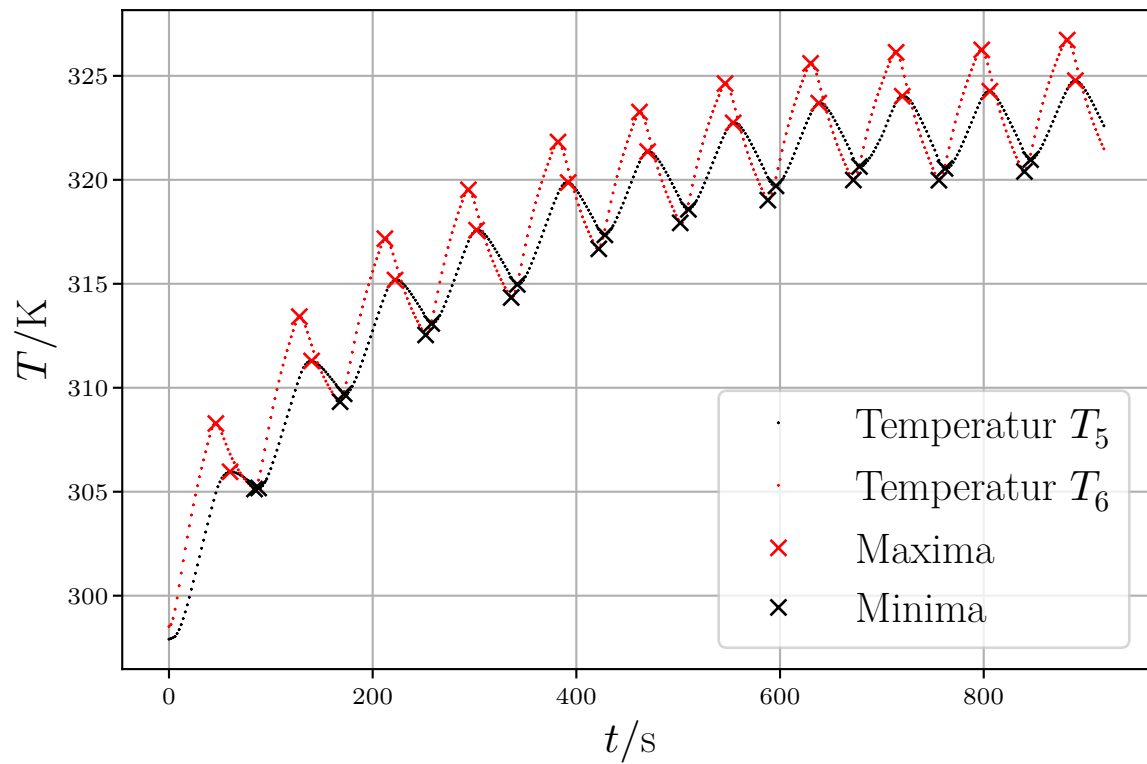


Tabelle 3: Ermittelte Amplituden und Phasendifferenz für Aluminium

A_{nah}	A_{fern}	$\ln \frac{A_{nah}}{A_{fern}}$	Δt
1,5275	2,0725	0,305 123 2	14
1,3675	1,96	0,359 960 22	12
1,1225	1,745	0,441 196 22	10
1,225	1,87	0,422 997 59	8
1,0025	1,645	0,495 243 5	10
1,04	1,675	0,476 592 45	8
0,995	1,645	0,502 752 93	8
0,845	1,535	0,596 949 03	6
0,9275	1,5675	0,524 744 48	8
0,95	1,58	0,508 718 14	8

Nun lassen sich wieder unter Berücksichtigung der Materialspezifischen Werte ρ und c und den gemittelten Größen aus Tabelle 4

Mit den folgenden Materialeigenschaften ρ und c , dem Abstand Δx , sowie den gemittelten Größen Δt und $\ln \frac{A_{nah}}{A_{fern}}$ aus den im vorherigen ermittelten Größen, lässt sich die Wärmeleitfähigkeit von Messing über κ bestimmen. Die Mittelwerte und der zugehörige Fehler wurden nach Δ bestimmt.

$$\begin{aligned}\rho_{Aluminium} &= 2800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ \Delta x &= 0,03 \text{ m} \\ c_{Aluminium} &= 380 \frac{\text{J K}}{\text{kg}} \\ \overline{\ln \frac{A_{nah}}{A_{fern}}} &= (0,46 \pm 0,02) \\ \overline{\Delta t} &= (9,09 \pm 0,06) \text{ s}\end{aligned}$$

Durch einsetzen aller Werte in Gleichung 6 ergibt die Wärmekapazität

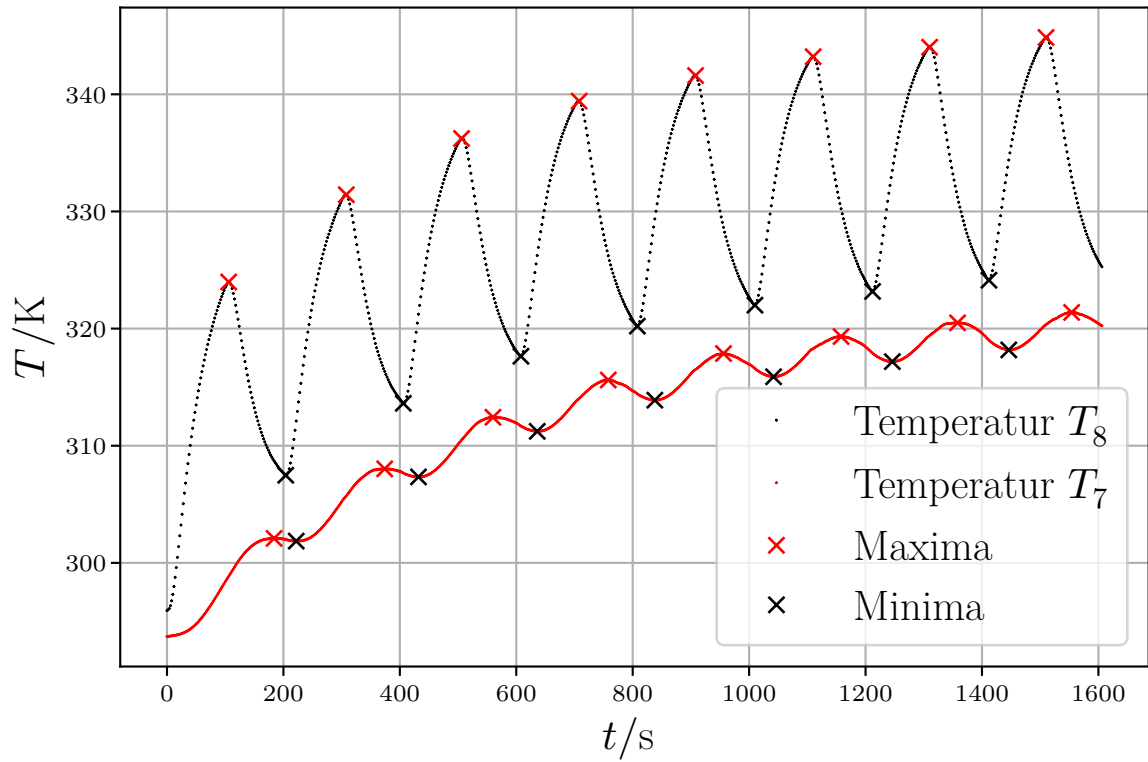
$$\kappa_{Aluminium} = (248 \pm 23) \frac{\text{W K}}{\text{m}}. \quad (11)$$

4.2.3 Wärmeleitfähigkeit Edelstahl

Da für Edelstahl eine sehr viel geringere Wärmeleitfähigkeit erwartet wird, werden zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit von Edelstahl eine Heiz- und Kühlperiode von 200s gewählt, da sonst am äußeren Temperaturelement nahezu keine Welle mehr

ankommen würde. Ansonsten ist der ablauf identisch zu dem bei der Bestimmung von Messing und Aluminium.

Abbildung 8: Graphische Darstellung der gemessenen Temperaturen T_8 und T_7 pro vergangenen zwei Sekunden



iIn Abbildung ?? sind die Temperaturen pro vergangener zeit t [second] aufgetragen, dort ist auch schon erkennbar, dass die Amplituden für T_8 , trotz großer Periodendauer, immernoch ziemlich gering sind. Dies deutet schon auf eine niedrige Wärmeleitfähigkeit.

Tabelle 4: Ermittelte Amplituden und Phasendifferenz für Edelstahl

A_{fern}	A_{nah}	$\ln \frac{A_{nah}}{A_{fern}}$	Δt
1,5425	5,9875	1,356 269 49	78
1,2725	5,6525	1,491 114 46	66
1,095	5,445	1,603 943 39	54
0,995	5,3475	1,681 641 7	50
0,8575	5,3025	1,821 912 51	48
0,8275	5,2125	1,840 405 76	48
0,8	5,18	1,867 948 61	44

Als nächstes werden wieder die Materialspezifischen werte und die Mittelwerte eingesetzt.

$$\rho_{Edelstahl} = 8000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\Delta x = 0,03 \text{ m}$$

$$c_{Edelstahl} = 400 \frac{\text{J K}}{\text{kg}}$$

$$\overline{\ln \frac{A_{nah}}{A_{fern}}} = (1,67 \pm 0,07)$$

$$\overline{\Delta t} = (54,5 \pm 4,1) \text{ s}$$

Daraus resultiert nach einsetzen in Gleichung 6

$$\kappa_{Edelstahl} = (15,9 \pm 1,4) \frac{\text{W K}}{\text{m}}. \quad (12)$$

4.3 fehlerrechnung

Bei einsetzen von fehlerbehafteten Größen in eine Formel wird der resultierende Fehler nach Gleichung 8 (Fehlerfortpflanzung) ermittelt. Dies übernimmt die Bibliothek `uncertainties` beim rechnen mit fehlerbehafteten Größen in Python.

5 Diskussion

6 Anhang

Literatur

- [1] *Aufbau zur Bestimmung der Leitfähigkeit.* TU Dortmund. 2024.