

V302

Brückenschaltung

Justus Weber
justus.weber@tu-dortmund.de

Guy Lochny
guy.lochny@tu-dortmund.de

Durchführung: 03.12.2024

Abgabe: 10.12.2024

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Fehlerrechnung	4
3 Durchführung	5
3.1 Wheatstone Brücke	5
3.2 Kapazitätsmessbrücke	6
3.3 Induktivitätsmessbrücke	7
3.4 Wien-Robinson Messbrücke	8
4 Auswertung	9
4.1 Wheatstone Brücke	9
4.2 Kapazitätsmessbrücke	10
4.3 Induktivitätsmessbrücke	11
4.4 Wien-Robinson Messbrücke	11
5 Diskussion	15
6 Anhang	15
Literatur	19

1 Zielsetzung

In diesem Versuch sollen durch elektrische Brückenschaltungen unbekannte Größen wie Widerstand, Kapazität und Induktivität bestimmt werden. Darüber hinaus soll das Filterverhalten (Frequenzabhängigkeit) der Brückenspannung einer Wien-Robinson-Brücke erforscht werden.

2 Theorie

Die Messung von durch Widerstände ausdrückbare Größen kann durch Brückenschaltungen möglich gemacht werden. In diesem Versuch geht es demnach um ohmsche Widerstände und komplexe Widerstände, wie es bei Kondensatoren und Spulen der Fall ist. Um das Prinzip von Brückenschaltungen näherzubringen, ist eine in Abbildung 1 dargestellt.

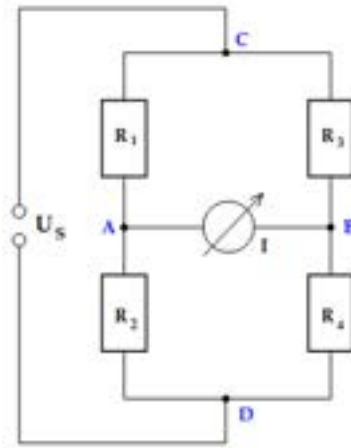


Abbildung 1: Allgemeine Brückenschaltung. [1]

Zwischen den Punkten A und B, welche wiederum zwischen den vier Widerständen R_1 , R_2 , R_3 und R_4 liegen besteht eine Verbindung über ein Messgerät. Diese Verbindung wird als Brücke bezeichnet. Um Fehlströme zu vermeiden und damit die Messung nicht fälschlicherweise beeinflusst werden kann, wird eine erdunsgsfreie Speisespannung genutzt. Es gelten die Kirchhoffschen Gesetze:

1. Die Summe aller Ströme, die an einem Knoten ein- und ausgehen, ist Null.

$$\sum_n^N I_n = 0 \quad (1)$$

2. Die Summe aller Spannungen in einem abgeschlossenen Stromkreis ist Null (unter

Berücksichtigung der Vorzeichen).

$$\sum_n^N U_n = 0 \quad (2)$$

Die Punkte A und B befinden sich im Falle des Nullabgleichs (Das Messgerät dokumentiert keinen Strom, $I=0$) auf gleichem Potential. Es kann eine Abgleichbedingung aufgestellt werden:

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \quad (3)$$

Das gleiche gilt analog für komplexe Widerstände. Ist einer der Widerstände von unbekannter Größe, kann er trivialerweise mithilfe der anderen Komponenten bestimmt werden. Jenes wird als Kompensationsmethode bezeichnet und soll im Folgenden gezeigt werden.

2.1 Fehlerrechnung

Die gemessenen Werte unterliegen Messunsicherheiten und werden demnach im Folgenden nicht als fehlerfrei angesehen. Die Fehler entstehen bei der Bildung der Mittelwerte durch den Fehler des Mittelwerts und bei der Regressionsrechnung sowie der Fehlerfortpflanzung durch Python. Der Fehler des Mittelwerts ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \Delta \bar{x} &= \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}}{\sqrt{N}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Um Fehler einzubeziehen, wird die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung verwendet:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot (\Delta y)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \cdot (\Delta z)^2} \quad (5)$$

3 Durchführung

3.1 Wheatstone Brücke

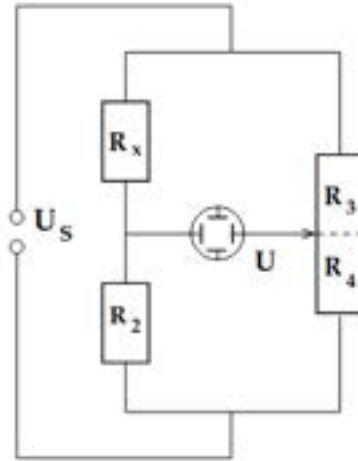


Abbildung 2: Wheatstone Brücke. [1]

Bei der Wheatstone Brücke befinden sich nur Ohmsche Widerstände in dem Schaltkreis. Dabei sind R_3 und R_4 am Potentiometer (Spannungsteiler, an dem ein Schleifkontakt über den Widerstandsdraht gelegt wird, was es ermöglicht, den Widerstand kontinuierlich einzustellen). Um nun den unbekannten Widerstand R_x durch die Kompensationsmethode zu bestimmen, gilt

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4}. \quad (6)$$

Als Einstellungen werden folgende Werte genommen:

Spannungsteiler R_3 und $R_4 = 1\text{ k}\Omega$

Frequenz $\nu = 1\text{ kHz}$

Amplitude $U_s = 1\text{ V}$

Widerstand $R_2 = 332; 664; 1000\ \Omega$

3.2 Kapazitätsmessbrücke

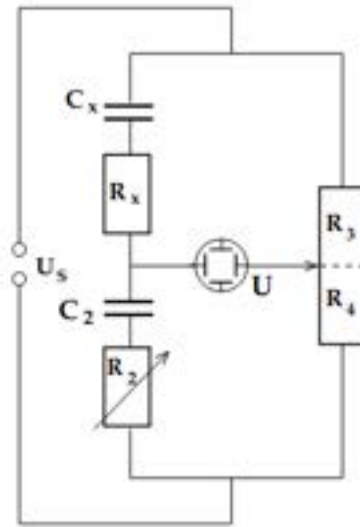


Abbildung 3: Kapazitätsmessbrücke. [1]

Da in diesem Bereich des Experiments Kapazitäten bestimmt werden sollen, muss der Wechselstrom verwendet werden. Nun werden zwei Potentiometer verwendet, das erste wird wie gehabt als Spannungsteiler für R_3 und R_4 verwendet. Das zweite Poti wird als Spannungsteiler für die unbekannten Komponenten C_x mit R_x und der bekannten Kapazität C_2 genutzt.

Die Brücke wird nun abgeglichen, indem alternierend an dem Poti ein Minimum eingestellt wird und an dem Anderen die Spannung am Oszilloskop minimiert wird. Dieses Verfahren wird so häufig wiederholt, bis die Brücke abgeglichen ist. Für den Widerstand gilt weiterhin

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4}. \quad (7)$$

Für die zu bestimmende Kapazität dann:

$$C_x = C_2 \frac{R_4}{R_3}. \quad (8)$$

Als Einstellungen werden folgende Werte genommen:

Kapazität $C_2 = 450; 597; 992 \text{ nF}$

Frequenz $\nu = 1 \text{ kHz}$

Amplitude $U_S = 1 \text{ V}$

3.3 Induktivitätsmessbrücke

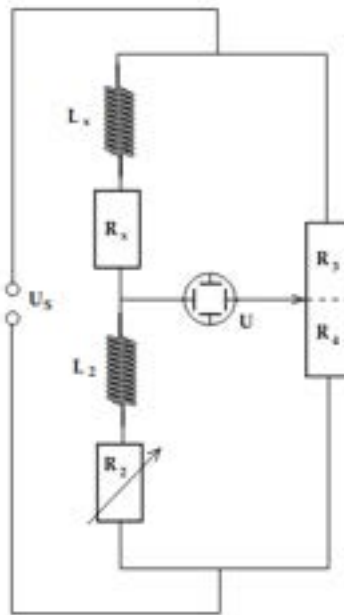


Abbildung 4: Induktivitätsmessbrücke. [1]

Der Aufbau erfolgt analog zu dem der zuvor angesprochenen Kapazitätsmessbrücke. Es werden lediglich Kondensatoren mit Spulen ausgewechselt. Folglich wird wieder der Aufbau mit Wechselstrom betrieben. Für den Serienwiderstand gilt erneut Gleichung 6. Eine Gleichung für die Induktivität ergibt sich analog zu Gleichung 8:

$$L_x = L_2 \frac{R_4}{R_3}. \quad (9)$$

3.4 Wien-Robinson Messbrücke

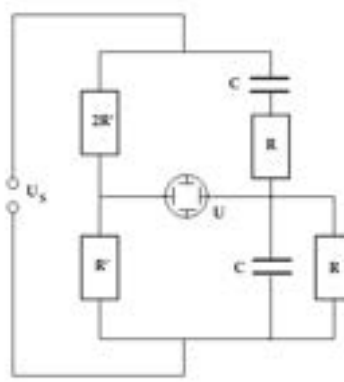


Abbildung 5: Wien-Robinson Messbrücke. [1]

Bei dieser Brücke, dessen Aufbau in Abbildung 5 dargestellt ist, soll der Frequenzgang und der Klirrfaktor der Speisespannung ermittelt werden. Letzteres ist als Maß für die Qualität einer Spannungsquelle, insbesondere in Bezug auf die Reinheit der ausgegebenen Sinusspannung, zu verstehen; er gibt an, wie stark die erzeugte Spannung von einer Sinuskurve abweicht. Gegenätzlich zu den vorherigen Versuchen wird diese Brücke nicht zur Messung von Komponenten genutzt, alle Komponenten verfügen über bekannte Werte. Die Brücke dient als elektronischer Filter für die Frequenz. Für das Verhältnis von Brückenspannung U_{Br} zu der Speisespannung U_S gilt:

$$\left| \frac{U_{Br}}{U_S} \right|^2 = \frac{(\omega^2 R^2 C^2 - 1)^2}{9((1 - R^2 C^2)^2 + 9 \omega^2 R^2 C^2)} \quad (10)$$

Bei Abgleichung der Brückenspannung (links) und der normierten Frequenz (rechts)

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (11)$$

reduziert sich das Verhältnis auf

$$\left| \frac{U_{Br}}{U_S} \right|^2 = \frac{9(\Omega^2 - 1)^2}{9(1 - \Omega^2)^2 + 81 \omega^2 \Omega^2}. \quad (12)$$

Bei dieser Gleichung handelt es sich um einen Filter, welcher bei der Frequenz $\omega = \omega_0$ sperrt, sodass keine Brückenspannung mehr dokumentiert werden kann. Sollte dieser Idealfall nicht eintreten, so kommt der Klirrfaktor ins Spiel, die Oberwellen der Speisespannung führen zu einer detektierbaren Brückenspannung. Der Anteil dieser Wellen wird durch eben diesen Klirrfaktor k bestimmt. Dieser lautet

$$k = \frac{\sqrt{\sum_{i=2}^N U_i^2}}{U_1} \quad (13)$$

mit der Amplitude der Grundwelle U_1 und den Amplituden der i -ten Oberwellen U_i . Je näher der Klirrfaktor an dem Wert Null ist, desto weniger Oberwellen werden erzeugt.

4 Auswertung

4.1 Wheatstone Brücke

Mithilfe der Wheatstone Brücke wird ausgehend von drei bekannten Widerständen R_2 , R_3 und R_4 und einer ausgeglichenen Brückenspannung Der Widerstand R_x mithilfe von Gleichung 6 berechnet.

Tabelle 1: Werte der Widerstände zur Wheatstone Brücke.

	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω
Wert11	1000	330	670
	664	426	574
	332	597	403
Wert14	1000	474	526
	664	574	426
	332	732	268
Wert12	1000	281	719
	664	370	630
	332	541	459

Für die Bestimmung eines Widerstands R_x werden R_3 und R_4 bei ausgeglichener Brückenspannung für drei unterschiedliche R_2 bestimmt. Daraus werden die drei Widerstände er- und anschließend gemittelt. Als baubedingte Fehler für die gegebenen Widerstände werden 2% angenommen.

Nach Einsetzen der Messwerte und der zugehörigen Fehler in Gleichung 6 und Mittelung der Ergebnisse ergeben sich für die unbekannten Widerstände die Werte:

$$R_{x,11} = (629,0 \pm 13,0) \Omega$$

$$R_{x,14} = (901,0 \pm 18,0) \Omega$$

$$R_{x,12} = (391,0 \pm 8,0) \Omega$$

4.2 Kapazitätsmessbrücke

Tabelle 2: Werte der Widerstände zur Kapazitätsmessbrücke.

	C_2 / nF	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω
Wert8	992	164	772	228
	450	369	603	397
	597	728	670	330
Wert15	992	285	620	380
	450	654	413	587
	597	542	471	529
Wert9	992	204	693	307
	450	443	510	490
	597	334	580	420

Hier werden die Werte für drei unbekannte Kapazitäten ähnlich wie im letzten Abschnitt bestimmt. Analog wird der Wert für die Kapazität mit drei unterschiedlichen Widerständen für R_2 über Gleichung 8 berechnet und Ergebnisse gemittelt. Mit den Werten aus Tabelle 2 ergeben sich einerseits für die Widerstände nach Gleichung 6 die Werte

$$R_{x,8} = (865,0 \pm 19,0) \Omega$$

$$R_{x,15} = (469,0 \pm 9,0) \Omega$$

$$R_{x,9} = (461,0 \pm 9,0) \Omega$$

und nach Gleichung 8 für die Kapazität

$$C_{x,8} = (294,0 \pm 6,0) \text{nF}$$

$$C_{x,15} = (639,0 \pm 13,0) \text{nF}$$

$$C_{x,9} = (435,0 \pm 9,0) \text{nF}.$$

4.3 Induktivitätsmessbrücke

Tabelle 3: Werte der Widerstände zur Induktivitätsmessbrücke.

	L_2 / mH	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω
Wert19	14.6	58	647	353
	27.5	108	496	504
	20.1	75	572	428
Wert16	14.6	51	901	99
	27.5	86	831	169
	20.1	59	870	130
Wert18	14.6	103	773	227
	27.5	194	645	355
	20.1	138	713	287

Zusammen mit den Werten aus Tabelle 3 können die Werte die für erneut 3 unterschiedliche Widerstände analog zu Unterabschnitt 4.2 errechnet werden. An Widerständen ergibt sich inklusive Fehlern

$$R_{x,19} = (104,3 \pm 2,1) \Omega$$

$$R_{x,16} = (427,0 \pm 9,0) \Omega$$

$$R_{x,18} = (349,0 \pm 7,0) \Omega$$

und nach Gleichung 9 für die Induktivität

$$L_{x,19} = (26,9 \pm 0,5) \text{mH}$$

$$L_{x,16} = (134,2 \pm 2,7) \text{mH}$$

$$L_{x,18} = (49,9 \pm 1,0) \text{mH}.$$

4.4 Wien-Robinson Messbrücke

Tabelle 4: Wien-Robinson Messbrücke.

ν / Hz	U / mV
50	300
70	260

Weiter auf der nächsten Seite

Tabelle 4: Wien-
Robinson
Messbrücke.
(Fortset-
zung)

90	230
110	190
130	150
150	115
170	80
190	55
210	35
230	10
250	10
270	27
290	44
310	60
330	70
350	85
370	100
390	110
410	120
430	130
450	140
470	150
490	160
510	170
530	175
550	180
570	185
590	195
610	200
630	210

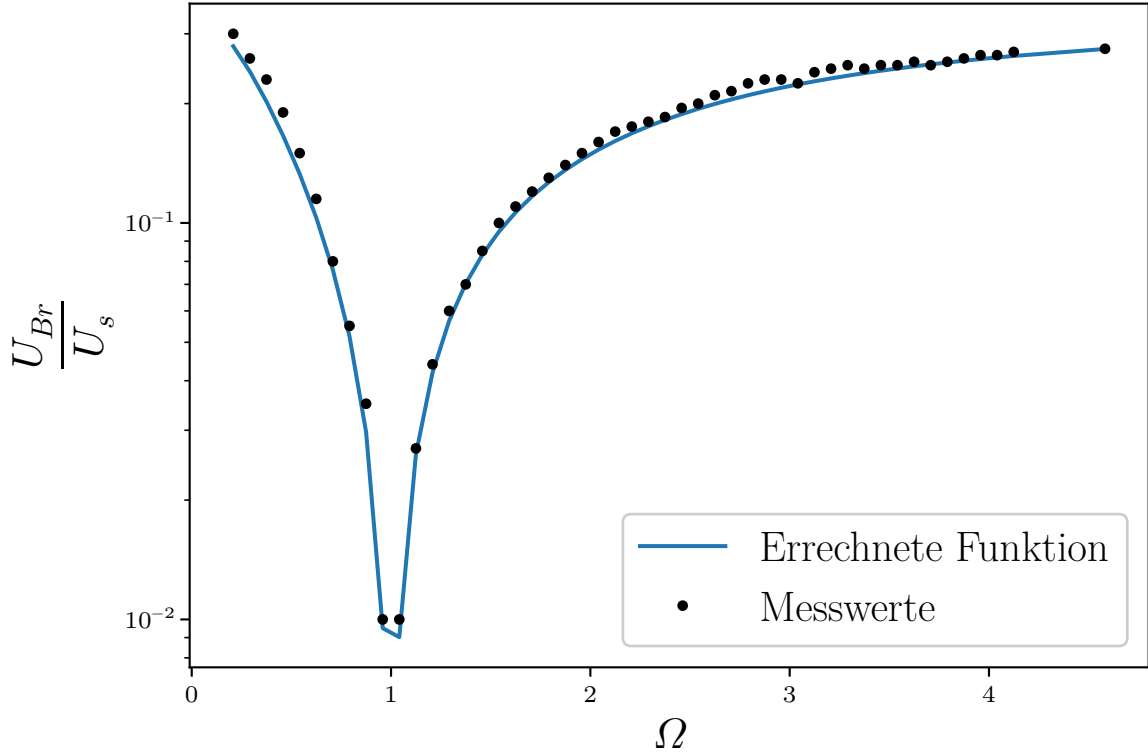
Weiter auf der
nächsten Seite

Tabelle 4: Wien-
Robinson
Messbrücke.
(Fortset-
zung)

650	215
670	225
690	230
710	230
730	225
750	240
770	245
790	250
810	245
830	250
850	250
870	255
890	250
910	255
930	260
950	265
970	265
990	270
1100	275

Mithilfe der Wien-Robinson Messbrücke kann der Klirrfaktor der Speisespannung ermittelt werden. Dazu wird in einem halblogarithmischen Diagramm das Verhältnis der Brückenspannung zur Speisespannung ($\frac{U_{Br}}{U_s}$) in Abhängigkeit von der normierten Frequenz Ω aufgetragen.

Abbildung 6: Verhältnis Brückenspannung zu Speisespannung, abhängig von der Frequenz und errechnete Funktion



Die Messwerte für $\frac{U_{Br}}{U_s}(\omega)$ sind in Abbildung 6 zusammen mit einer Theoriefunktion, bestimmt aus Gleichung 12, abgebildet.

Aus diesen Messwerten soll der Klirrfaktor der Speisespannung ermittelt werden. Dies geschieht durch das Ermitteln der Restspannung U_{Rest} . Diese Restspannung wird mit dem Koeffizienten $g(2)$ multipliziert, welcher dem Verhältnis $\frac{U_{Br}}{U_s}$ aus Gleichung 6 bei $\Omega = 2$ entspricht, um so einen Wert für die Amplitude der zweiten Oberwelle U_2 zu erhalten. Daraus lässt sich durch Gleichung 13 der Klirrfaktor berechnen, wenn die Annahme getroffen wird, dass nur die zweite Oberwelle wesentlich zum Klirrfaktor beiträgt. Des Weiteren wird angenommen, dass der Klirrfaktor klein ist. Es wird $U_1 = U_s$ genähert. Die Restspannung bei $\Omega = 0$ entspricht

$$U_{rest} = 240V,$$

was zu einem Klirrfaktor von

$$k = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_{rest} \cdot \frac{U_{Br}}{U_s}(\Omega = 2)}{U_s} = 3,57 \cdot 10^{-2}$$

führt.

5 Diskussion

Zunächst ist festzuhalten, dass jegliche bestimmte Größen nicht mit Literaturwerten zu vergleichen sind. Die tatsächlichen Werte der Widerstände sind unbekannt. Jedoch liegen die Werte der Mittelwertbildung größtenteils verhältnismäßig nah beieinander, was auf eine gute Genauigkeit bei den Messungen hindeutet. Lediglich bei der Berechnung der Induktivität des "Wert16" wichen die berechneten Werte des Widerstands R_x mit $R_{x1} = 464$, $R_{x2} = 422$ und $R_{x3} = 394$ entsprechend stark voneinander ab. Es ist anzunehmen, dass diese Abweichung durch eine Ungenauigkeit am Widerstand zurückzuführen ist, da auch bei mehrfacher Durchführung des Versuches mit dem erwähnten Widerstand große Abweichungen zustande kamen. Als Fehler für die Bauelemente wurde bei Widerständen, Kapazitäten, sowie Induktivitäten jeweils ein Fehler von 2% angenommen. Dieser Fehler wurde auf Grundlage vorhergegangener Berechnungen abgeschätzt, sodass dieser annähernd mit den Abweichungen zusammenpasst.

6 Anhang

Abbildung 7: Messwerte Seite 1.

V302 - Brückenhaltung

Wheatstone Brücke:

$U_0 = 2 \text{ mV}$

Werte $\pm 1 \Omega$	R_2	R_3	R_4	R_x	$(\pm \Omega)$	
1000	330	670	492,54	} Wert 11		
664	426	576	492,79			
332	397	403	497,82			
1000	474	526	907,44	} Wert 14		
664	576	426	894,69			
332	232	268	904,81			
1000	281	219	390,82	} Wert 12		
664	320	630	389,37			
332	547	453	397,37			

Kapazitätsmessbrücke:

C_2	R_2	R_3	R_4	R_x	C_x	$C \text{ in nF}$ $R \text{ in } \Omega$	$C_x = C_2 \frac{R_3}{R_2}$ $R_x = R_4 \frac{R_3}{R_2}$
992	164	722	228	555,3	293,97	} Wert 8	
450	369	603	397	560,47	296,37		
592	278	620	330	564,42	294,04		
992	285	620	380	465	608	} Wert 10	
450	654	473	587	460	639,90		
592	542	477	529	462,32	610,50		
992	207	693	307	460,6	432,66	} Wert 9	
450	443	570	490	461,08	452,55		
592	334	580	420	461,24	432,37		

Abbildung 8: Messwerte Seite 2.

Induktivitätsdarmkreis						L in mH R in Ω		$L = L_1 \frac{R_2}{R_1}$ $R = R_1 \frac{R_2}{R_1}$	
L_1	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	L_2			
14,6	39	642	583	10431	2626				
27,5	100	996	504	10620	27,06				
20,1	75	572	428	10023	26,86				
14,6	57	907	99	64,15	132,87				
27,5	86	831	167	422,86	135,22				
20,1	59	820	130	301,85	134,52				
14,6	103	273	227	350,74	49,12				
27,5	194	645	355	352,48	49,96				
20,1	138	713	287	342,84	49,93				

Wien - Robinson Hochkreis						Wert 1: 663,86 nF	
U_1 (V)	f (Hz)	$\pm 5\%$	f (Hz)	U_2 (mV)	f (Hz)	U_2 (mV)	
300	50		50	300	290	44	
280	60		70	260	310	60	
270	70		90	230	330	70	
260	80		110	190	350	85	
250	90		130	180	370	100	
240	100		150	145	390	110	
230	110		170	80	410	120	
			190	55	430	130	
			210	35	450	140	
			230	10	470	150	
			250	10	490	160	
			270	27	510	170	

Abbildung 9: Messwerte Seite 3.

$f(\text{Hz})$	$U(\text{mV})$	
570	180	
580	190	125
550	175	180
520	165	185
590	200	195
610	200	200
630	210	210
650	210	215
620	215	225
690	215	230
710	220	230
730	225	
750	240	
770	245	
790	250	
810	245	
830	250	
850	250	
870	255	
890	250	
910	255	
930	260	
950	265	
970	265	
990	270	
1010	225	

Skir

Literatur

- [1] *V302: Brückenschaltungen*. TU Dortmund. 2024.