

V101

Das Trägheitsmoment

Justus Weber

justus.artur.engelbert@gmail.com

Guy Lochny

guy.lochny@tu.dortmund.de

Durchführung: 05.11.2024

Abgabe: 12.11.2024

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Fehlerrechnung	4
3 Durchführung	4
3.1 Aufbau und Realisierung	4
3.2 Bestimmung der Winkelrichtgröße	4
3.3 Bestimmung des Eigenträgheitsmoments der Drillachse	5
3.4 Bestimmung des Trägheitsmoments zweier Körper	5
3.5 Bestimmung des Trägheitsmoments einer Puppe	5
4 Auswertung	6
4.1 Fehlerrechnung	6
4.2 Winkelrichtgröße D	7
4.3 Eigenträgheitsmoment I_D	7
4.4 Trägheitsmoment Kugel und Zylinder	9
4.5 Experimentelles Trägheitsmoment Kugel	10
4.6 Trägheitsmoment von zwei Puppen	10
4.7 Experimentelles Trägheitsmoment von zwei Puppen	12
5 Diskussion	13
5.1 Winkelrichtgröße	13
5.2 Eigenträgheitsmoment	14
5.3 Trägheitsmoment Kugel und Zylinder	14
5.4 Trägheitsmoment Puppe	14
6 Anhang	15
Literatur	17

1 Zielsetzung

Bei diesem Experiment soll das Trägheitsmoment bestimmt werden sowie der Satz von Steiner angewendet werden.

2 Theorie

Das Trägheitsmoment entspricht der Kraft, welche gegen die Änderung der Winkelgeschwindigkeit ω wirkt. Ausgehend von einer punktförmigen Masse m mit einem Radius r (der Abstand zur Drehachse) lässt sich das Trägheitsmoment berechnen durch

$$I = mr^2 \quad , [I] = kg \cdot m^2. \quad (1)$$

Dreht sich ein Körper um eine (beliebige) Achse, so bewegen sich auch alle Elemente dieses Körpers mit identischer Winkelgeschwindigkeit um diese. Das gesamte Trägheitsmoment eines Körpers berechnet sich somit aus der Summe

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (2)$$

der einzelnen Trägheitsmomente der verschiedenen Masseelementen. Für infinitesimale Massen gilt

$$I = \int r^2 dm. \quad (3)$$

Das Trägheitsmoment hängt dabei von Lage und Objekt ab. Sei die Achse, um die sich das Objekt drehe, jeweils in positiver z-Richtung liegend. Dann wären die Trägheitsmomente folgender Objekte folgendermaßen definiert:

Langer, infinitesimal dünner Stab mit Länge l

$$I = \frac{ml^2}{12} \quad (4)$$

Kugel

$$I = \frac{2}{5}mr^2 \quad (5)$$

Zylinder (stehend)

$$I = \frac{1}{2}mr^2 \quad (6)$$

Zylinder (liegend) mit Höhe h

$$I = m \left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) \quad (7)$$

Wenn eine Kraft \vec{F} auf einen sich drehbaren Körper (dieser befindet sich im Abstand \vec{r} zur Drehachse) wirkt, entsteht das Drehmoment. Dieses ist definiert durch:

$$\vec{M} = \vec{M} \times \vec{r} \quad \text{oder betragsmäßig: } M = F \cdot r \quad , [M] = J. \quad (8)$$

Allerdings lässt es sich auch über die Winkelrichtgröße D (rücktreibendes Moment der Feder) darstellen:

$$M = D \cdot \varphi \quad , [D] = \frac{N \cdot m}{rad} \quad (9)$$

Wird der Körper um einen Winkel φ aus seiner Ruhelage ausgelenkt, so wirkt ein rücktreibendes Drehmoment, durch eine Feder verursacht, entgegen. Es kommt zur harmonischen Schwingung, dessen Schwingungsdauer sich als

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \quad , [T] = s. \quad (10)$$

beschreibt. [1]

2.1 Fehlerrechnung

Die gemessenen Werte für Längen, Periodendauern und Massen werden im folgenden als nicht fehlerbehaftet angesehen. Die Fehler entstehen bei der Bildung der Mittelwerte durch den Fehler des Mittelwertes und bei der Regressionsrechnung sowie der Fehlerfortpflanzung durch Python.

der Fehler des Mittelwertes beträgt

$$\sqrt{\bar{x}^2 - \overline{x^2}} \quad (11)$$

Die Formel für die Fehlerfortpflanzung lautet

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot (\Delta y)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \cdot (\Delta z)^2} \quad (12)$$

3 Durchführung

3.1 Aufbau und Realisierung

Für diesen Versuch ist die Verwendung einer Drillachse Hauptbestandteil. Mithilfe dieser und einer Scheibe mit aufgetragenen Winkeln soll das Trägheitsmoment verschiedenster Körper bestimmt werden. Dazu werden diese auf der drehbaren Achse befestigt, welche mit einer Feder versehen ist. Diese sorgt bei einer Auslenkung des an die Drehachse gebundenen Körpers für eine entgegenwirkende Kraft.

3.2 Bestimmung der Winkelrichtgröße

Um die Winkelrichtgröße D zu bestimmen, wird ein Hebelarm an der Apparatur befestigt und um den Winkel φ ausgelenkt. Mit einer orthogonalen Ausrichtung der Federwaage zum Hebelarm wird die Kraft der Feder gemessen.



Abbildung 1: Stativ von vorne



Abbildung 2: Stativ von oben

3.3 Bestimmung des Eigenträgheitsmoments der Drillachse

Für I_D werden zwei identische Körper (*hier*: liegende Zylinder) an den beiden Enden des Hebelarms befestigt. Nun erfolgt die Auslenkung und die Messung der Schwingungsdauer T.

3.4 Bestimmung des Trägheitsmoments zweier Körper

Die Bestimmung der Trägheitsmomente zweier verschiedener Körper (*hier*: stehender Zylinder und Kugel) erfolgt analog zur Bestimmung des liegenden Zylinders. Das System wird ausgelenkt und Schwingungsdauer T dokumentiert.

3.5 Bestimmung des Trägheitsmoments einer Puppe

Die sich auf einem Stab befindende Puppe wird um den Winkel φ ausgelenkt. Dabei wird analog wieder die Schwingungsdauer T gemessen. Dieses Verfahren wird für 2 Posen ausgeführt (siehe Abbildungen). Der Kopf wird hier als Vollkugel angenommen, die restlichen Bestandteile werden als Zylinder betrachtet.



Abbildung 3: Position 1

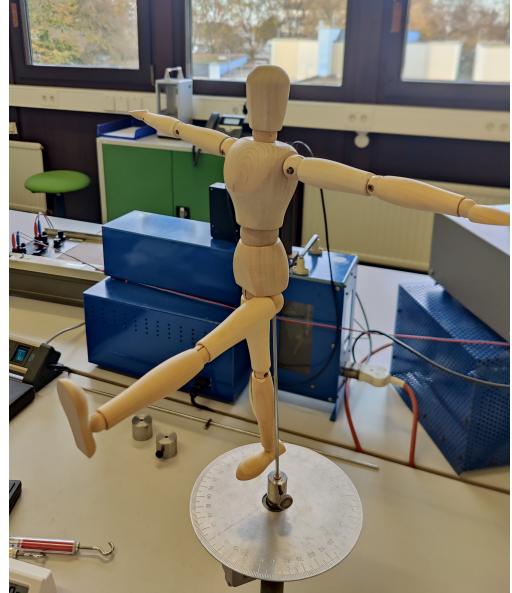


Abbildung 4: Position 2

4 Auswertung

4.1 Fehlerrechnung

Die gemessenen Werte für Längen, Periodendauern und Massen werden im Folgenden als nicht- fehlerbehaftet angesehen. Die Fehler entstehen bei der Bildung der Mittelwerte durch den Fehler des Mittelwertes und bei der Regressionsrechnung sowie der Fehlerfortpflanzung durch Python.

Der Fehler des Mittelwertes beträgt:

$$\sqrt{\bar{x}^2 - \overline{x^2}} \quad (13)$$

Die Formel für die Fehlerfortpflanzung lautet:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot (\Delta y)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \cdot (\Delta z)^2} \quad (14)$$

4.2 Winkelrichtgröße D

Im Folgenden wird zunächst die Winkelrichtgröße D und das Eigenträgheitsmoment der Drehachse bestimmt. Dazu wird die rücktreibende Kraft F der Spiralfeder für verschiedene Auslenkungen φ gemessen.

Tabelle 1: Messwerte zur Bestimmung von D .

$\varphi(^{\circ})$	$F(N)$
22,5	0
45,0	0,04
67,5	0,068
90,0	0,09
112,5	0,126
135,0	0,164
157,5	0,172
180,0	0,18
202,5	0,2
225,0	0,28

Mithilfe von (9) und $r = 29,2\text{cm}$ kann die Winkelrichtgröße der Spiralfeder als Mittelwert von den errechneten Größen für die einzelnen Messwerte zu $0.00002790 \pm 0.000003259 \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{rad}}$ bestimmt werden.

4.3 Eigenträgheitsmoment I_D

Als nächstes wird das Eigenträgheitsmoment I_D der Drillachse bestimmt.

$$I_{ges} = I_D + I_s + 2 \cdot (I_z + m_z \cdot a^2) \quad (15)$$

$$I_{ges} = I_D + \frac{ml^2}{12} + 2 \cdot m_z \cdot \left(\left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) + a^2 \right) \quad (16)$$

Durch Einsetzen in Gleichung 10 und aus der umgestellten Geradengleichung

$$b = y - m \cdot x \quad (17)$$

ergibt sich die Gleichung für das Eigenträgheitsmoment I_D

$$I_D = \frac{bD}{4\pi^2} - \left(2 \cdot m_z \cdot \left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) + \frac{m_s \cdot l_s}{12} \right) \quad (18)$$

Tabelle 2: Messwerte T/a.

$a(cm)$	$T(s)$
10	3,28
11,5	3,71
13	4,28
14,5	4,75
16	5,25
17,5	5,90
19	6,28
20,5	6,78
22	7,28
23,5	7,97
\bar{T}	\bar{a}

Tabelle 3: Messwerte zur Berechnung von I_D

$m_{Zylinder}(kg)$	$r_{Zylinder}(m)$	$h_{Zylinder}(m)$	$m_{Stab}(kg)$	$l_{Stab}(m)$
0.219	0.017	0.03	0.1	0.6

Als Masse des Stabes wird 0.1 kg angenommen, da diese nicht bestimmt wurde.

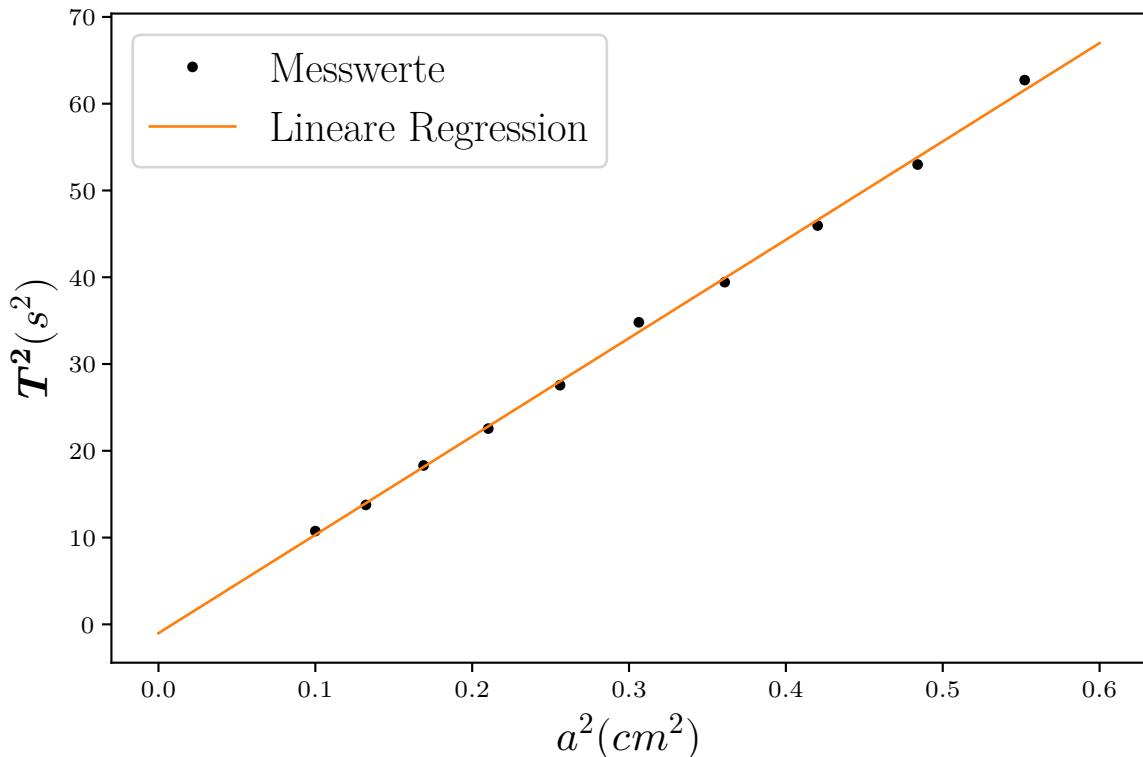


Abbildung 5: Lineare Regression zur bestimmung von I_D .

Die Messwerte der Periodendauer in Abhängigkeit von dem Abstand der Gewichte sind der Tabelle 2 zu entnehmen. Daraus ergibt sich die lineare Regression Abbildung 5. Die Parameter der Ausgleichsgeraden sind $m = 113.343 \pm 1.623$ und $b = -1.019 \pm 0.540$. Daraus folgt durch Einsetzen des Parameters b und den Messwerten aus Tabelle 3 in Gleichung 18:

$$I_D = -0.005072 \pm 0.000004 \quad kg \cdot m^2. \quad (19)$$

4.4 Trägheitsmoment Kugel und Zylinder

Tabelle 4: Abmessungen Holzkugel.

$r(m)$	$m(kg)$
$0,0605 \pm 0,0001$	$0,638 \pm 0,001$

Tabelle 5: Abmessungen Holzzyylinder.

$r(m)$	$h(m)$	$m(kg)$
$0,0493 \pm 0,0001$	$0,0995 \pm 0,0001$	$0,366 \pm 0,001$

Hier soll das Trägheitsmoment einer Kugel und eines Zylinders berechnet werden. Mit den Maßen aus Tabelle 4 und Gleichung 5 berechnet sich $I_{Holzkugel} = 0.0009350 \pm 0.0000034 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ sowie das Trägheitsmoment des Zylinders mit den Abmessungen Tabelle 5 eingesetzt in Gleichung 6 berechnet zu $I_{Holzzylinder} = 0.000444 \pm 0.0000022 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

4.5 Experimentelles Trägheitsmoment Kugel

Wie in Unterabschnitt 3.4 das System zum Schwingen gebracht und die Periodendauer dokumentiert. Daraus ergibt sich mithilfe der Gleichung 10 nach dem Trägheitsmoment I umgestellt für das experimentelle Trägheitsmoment der Kugel:

$$\frac{T^2}{4\pi^2} D = I. \quad (20)$$

Identische Vorgehensweise ebenfalls beim Zylinder.

Tabelle 6: Schwingungsdauer Kugel

$T_k(s) \text{Kugel}$	$T_Z(s) \text{Zylinder}$
1,13	0,78
1,22	0,65
1,15	0,78
1,16	0,78
1,16	0,78
1,22	0,75
1,22	0,72
1,25	0,79
1,16	0,75
1,19	0,78
$\overline{T_k}$	$\overline{T_z}$
$1,1860 \pm 0,0124$	$0,7560 \pm 0,0135$

Bei Berücksichtigung der Mittelwerte und dem zugehörigen Standardfehler des Mittelwerts beläuft sich das Trägheitsmoment für die Kugel auf $I_k = (0.00097 \pm 0.00011)$ und das Trägheitsmoment des Zylinders auf $I_z = (0.00039 \pm 0.00005)$.

4.6 Trägheitsmoment von zwei Puppen

Um das theoretische Trägheitsmoment einer Puppe in ihrer eingenommenen Position zu berechnen, werden die Abmessungen der einzelnen Körperteile, sowie deren Masse,

Ausrichting und die Entfernung von der Rotationsachse benötigt. Zunächst erfolgt die Bestimmung der Volumina der Einzelkörperteile der Puppe. Werden die Teilvolumina durch das Gesamtvolumen der Puppe geteilt, so ergeben sich der Anteil der Masse des betrachteten Puppenteils an der Gesamtmasse. So können alle Größen vereinfacht angeben und zur theoretischen Berechnung genutzt werden.

Tabelle 7: Abmessungen Puppe

$R_{Arme}(cm)$	$R_{Beine}(cm)$	$R_{Torsos}(cm)$	$R_{Kopf}(cm)$
0,985	0,875	1,25	1,885
0,925	0,905	1,305	2,415
1,045	0,95	1,19	2,195
1,055	0,91	1	2,03
1,05	0,81	0,95	3,67
0,995	0,775	1,010	2,14
0,88	0,71	1,075	2,485
0,8	0,655	0,97	2,495
0,795	0,8	0,825	2,36
0,79	1,95	0,78	1,925
$\overline{R_A}$	$\overline{R_B}$	$\overline{R_T}$	$\overline{R_K}$
$0,93 \pm 0,06$	$1,04 \pm 0,05$	$3,93 \pm 0,16$	$1,61 \pm 0,05$
h_A (cm)	h_B (cm)	h_T (cm)	h_K (cm)
11,81	16,0	11,47	5,02

In Tabelle 7 sind die gemittelten Radien und die Höhen der Körperteile aufgeführt. Einfachheitshalber wird die Puppe in ihre sechs Körperteile eingeteilt, welche alle als Zylinder genähert werden. Demnach können die Volumina der Puppe einzeln durch

$$V = h\pi r^2 \quad (21)$$

errechnet werden.

Tabelle 8: Volumina Körperteile

$V_{Arme}(cm^3)$	$V_{Beine}(cm^3)$	$V_{Torsos}(cm^3)$	$V_{Kopf}(cm^3)$
54 ± 6	54 ± 6	$557,48 \pm 45,82$	$41,1 \pm 2,3$

Mithilfe dieser Daten und der Formel

$$m_i = m_{gesamt} \frac{V_i}{V_g} \quad (22)$$

wird die Masse der einzelnen Körperteile bestimmt.

Tabelle 9: Massen Körperteile

$m_{Arme}(g)$	$m_{Beine}(g)$	$m_{Torso}(g)$	$m_{Kopf}(g)$
$25,2 \pm 2,8$	$25,2 \pm 2,8$	261 ± 6	$19,2 \pm 1,6$

Mit den Massen der einzelnen Körperteile, Gleichung 6 und Gleichung 7 werden die Teilträgheitsmomente um ihre eigene Drehachse berechnet.

Tabelle 10: Teilträgheitsmomente

$I_A(g \cdot cm^2)$	$I_{A,horizontal}(g \cdot cm^2)$	$I_B(g \cdot cm^2)$	$I_{B,horizontal}(g \cdot cm^2)$	$I_T(g \cdot cm^2)$	$I_K(g \cdot cm^2)$
8.8 ± 1.5	299 ± 33	10.8 ± 2.2	545 ± 60	1615 ± 162	20.1 ± 2.6

Damit sind alle Größen gegeben, um das theoretische Trägheitsmoment der Puppen in Position 1 (siehe Abbildung 3) und Position 2 (siehe Abbildung 4) zu bestimmen.

Für die Arme und Beine wird der Satz von Steiner verwendet (siehe Gleichung 23) um die Drehachse der Trägheitsmomente von den einzelnen Körperteile in die Drehachse der Puppe zu legen und dort zu bestimmen. In der 1. Position wird der Abstand der Eigendrehachse der Beine zur Drehachse der Puppe mit dem Radius der Beine genähert, sowie der Abstand der Arme zur Drehachse der Puppe mit dem Radius der Arme und dem Radius des Torso. Der Abstand vom Arm zur Achse ist der Radius des Torso und zusätzlich die Hälfte der Armlänge. Der Abstand der Drehachse des ausgestreckten Beins zur Drehachse der gesamten Puppe ist die halbe Beinlänge.

$$I_{neu} = I + m * r^2 \quad (23)$$

Damit ergeben sich die theoretischen Trägheitsmomente zu

$$I_{pos1} = 0.000292 \pm 0.000018 kg \cdot m^2$$

$$I_{pos2} = 0.001090 \pm 0.000085 kg \cdot m^2$$

4.7 Experimentelles Trägheitsmoment von zwei Puppen

In diesem Abschnitt werden die Trägheitsmomente noch einmal experimentell bestimmt.

Tabelle 11: Schwingungsdauer der Puppe

$T_k(s)pos1$	$T_Z(s)pos2$
0,75	1,59
0,82	1,63
0,78	1,75
0,84	1,69
0,72	1,65
0,78	1,78
0,78	1,72
0,88	1,61
0,78	1,62
0,85	1,55
$\overline{T_{pos1}}$	$\overline{T_{pos2}}$
$0,797 \pm 0,015$	$1,659 \pm 0,023$

Aus den Mittelwerten ergibt sich nach Gleichung 20 :

$$I_{expPos1} = 0.00044 \pm 0.00005 \quad kg \cdot m^2$$

$$I_{expPos1} = 0.00189 \pm 0.00023 \quad kg \cdot m^2$$

5 Diskussion

Im Folgenden wird eine Diskussion des gesamten Versuchs durchgeführt. Dabei ist nicht bekannt, ob es sich um zwangsläufig signifikante Werte handelt, was größtenteils auf die Tatsache zurückgeht, dass keine Literaturwerte zum Vergleich herangezogen werden können.

5.1 Winkelrichtgröße

Die experimentelle Messung der Winkelrichtgröße D gibt einen Wert von

$$D = 0.00002790 \pm 0.000003259 \frac{N \cdot m}{rad}. \quad (24)$$

Dieser Wert ist fehlerbehaftet, was auf einige Fehlerquellen zurückzuführen ist. So ist eine präzise Auslenkung der Federwaage nur sehr erschwerlich realisierbar. Das liegt daran, dass zum Einen die Platte mit den Winkeln nicht mit der Apparatur befestigt ist, sie liegt eben auf. Demnach kann es dazu kommen, dass diese selbst ausgelenkt wird oder sogar abrutscht. Genau so anspruchsvoll ist das genaue Ablesen eines Winkels auf der

Kreisscheibe. Da der ausgelenkte Hebelarm einen Radius von mehreren Millimetern hat und somit einen verhältnismäßig großen Teil der Scheibe abdeckt, ist eine genaue Angabe eines Ausrichtungswinkels aus der Draufsicht kaum möglich. Ein ähnliches Problem ergibt sich bei der Kraftmessung; die Bestimmung durch Augenmaß erzeugt bereits Fehler. Da die Federwaage selbst dem statistischen Fehler unterliegt, ergeben sich noch größere Fehler. Darüber hinaus erschwert sich das Messen der Kraft durch die Ausrichtung der Federwaage. Zum Einen kann die senkrechte Ausrichtung (zur Drillachse) nur ungefähr erfolgen, da mit Augenmaß gearbeitet wird. Andererseits verändert sich die Kraft, je nach Winkel auf horizontaler Ebene. Jenes ist umso komplizierter zu berücksichtigen, da eine horizontale Auslenkung bei einer Draufsicht kaum zu identifizieren ist.

5.2 Eigenträgheitsmoment

Im Versuch wurde für das Eigenträgheitsmoment ein Wert von

$$I_D = -0.005072 \pm 0.000004 \quad kg \cdot m^2$$

bestimmt, was keinen physikalischen Sinn ergibt und demnach auf einen Fehler in der Messung hinweist. Um I_D zu bestimmen, ist vor Allem die gemessene Zeit T sowie die Winkelrichtgröße D ausschlaggebend. Die Messung von T unterliegt dem statistischen Fehler, da sich die Reaktionszeit des Messers nicht eliminieren lässt. Andererseits ist Komponente D wie oben beschrieben mit Fehlern behaftet.

5.3 Trägheitsmoment Kugel und Zylinder

Die Bestimmung des Trägheitsmoments der Kugel beläuft sich auf

$$I_K = 0.0009350 \pm 0.0000034 \quad kg \cdot m^2$$

und für den Zylinder auf

$$I_Z = 0.000444 \pm 0.0000022 \quad kg \cdot m^2.$$

Die Fehler bei der Bestimmung des Moments entstehen durch ähnliche Gründe wie 5.1 ; Das Bestimmen von φ ist unpräzise, was eine Auslenkung ebenso ungenau macht. Hinzu kommt eine Ungenauigkeit durch die fehlerbehaftete Zeitmessung T wie in 5.2 erläutert.

5.4 Trägheitsmoment Puppe

Für die Puppe ergibt sich nach theoretischer Berechnung das Trägheitsmoment in Position 1 zu

$$I_{pos1} = 0.000292 \pm 0.000018 \quad kg \cdot m^2$$

und in Position 2 zu

$$I_{pos2} = 0.001090 \pm 0.000085 \quad kg \cdot m^2.$$

Währenddessen ergibt sich für das Trägheitsmoment nach experimenteller Bestimmung in Position 1 der Wert

$$I_{pos1} = 0.00044 \pm 0.00005 \quad kg \cdot m^2$$

und für Position 2

$$I_{pos2} = 0.00189 \pm 0.00023 \quad kg \cdot m^2.$$

Das bedeutet eine Abweichung um 50,68% des theoretischen Werts zum experimentellen Wert in Position 1 und eine 73,39%-ige Abweichung zwischen dem experimentellen und theoretischen Wert in Position 2. Diese Abweichungen sind von erheblichem Ausmaß, jedoch zu erwarten. Einerseits ist die Berechnung der theoretischen Werte schwierig zu realisieren. Da jedes Körperteil als Zylinder oder Kugel angenommen werden soll, entstehen dezente Abweichungen. Bei zunehmender Komplexität der Pose verschlimmert sich der Fehler folglich. In Anbetracht dessen und der größeren prozentualen Abweichung von experimentellem und theoretischem Messwert ist der Fehler bei Pose 2 größer als bei Pose 1. Ähnlich wie bei 5.1, 5.2 und 5.3 ergibt sich ein Fehler für T. Im Gegensatz dazu ist der Fehler hier größer, das liegt daran, dass bei der Puppe das Gewicht ungleich verteilt ist, wodurch die Schwingung beeinflusst und eine Messung von genauen Zeiten erschwert wird.

6 Anhang

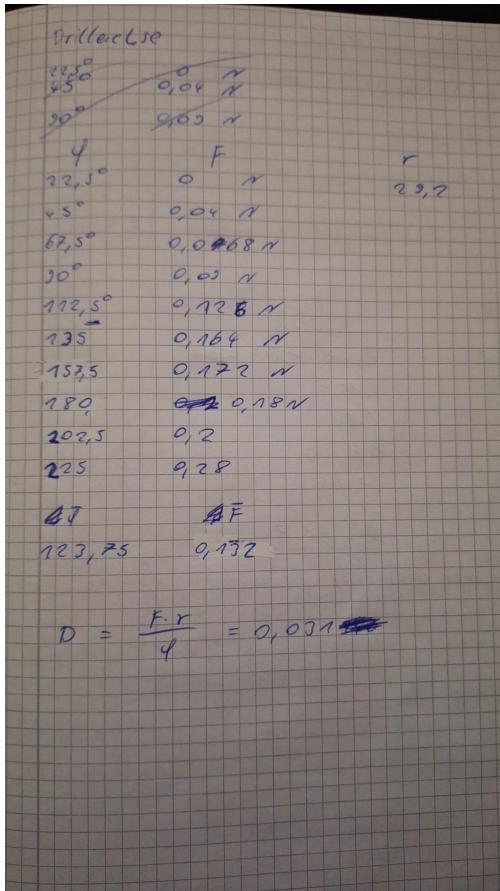


Abbildung 6: Messwerte zur bestimmung von D

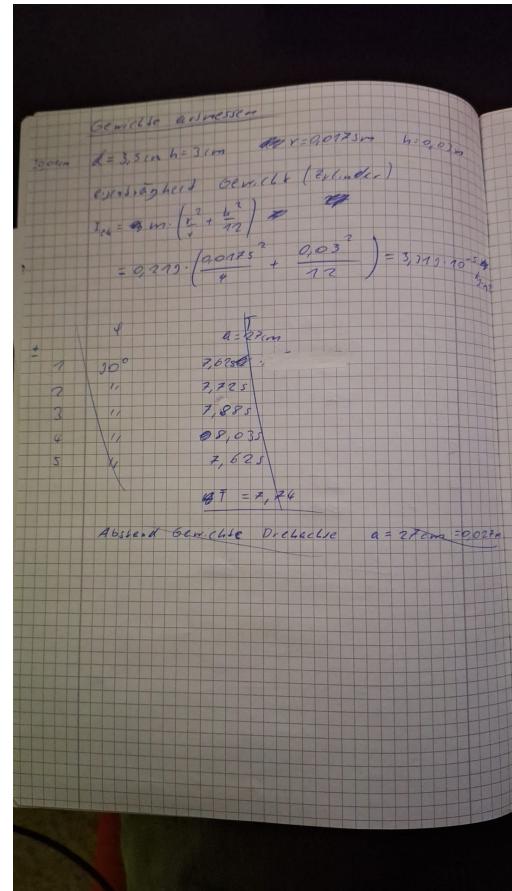
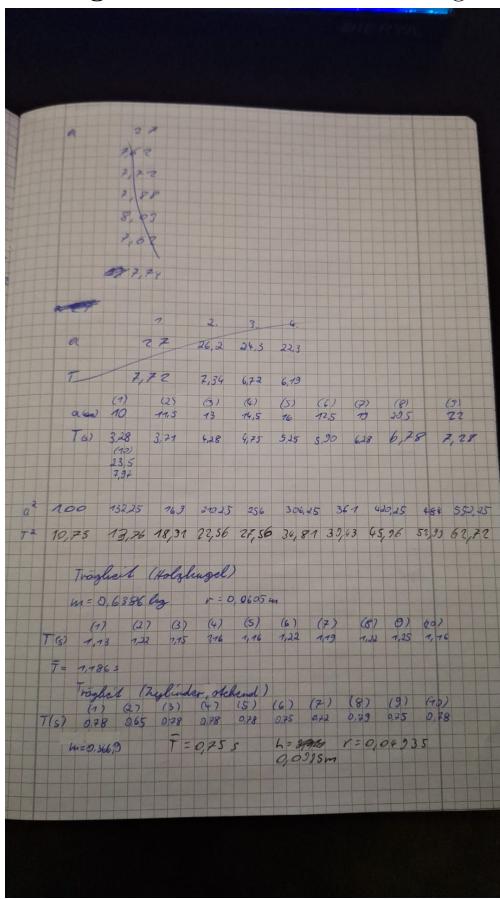


Abbildung 7: Abmessungen Gewichte



Literatur

[1] *Versuch zum Literaturverzeichnis.* TU Dortmund, Fakultät Physik. 2023.