V103

Biegung elastischer Stäbe

Justus Weber
justus.weber@tu-dortmund.de

Guy Lochny
guy.lochny@tu-dortmund.de

Durchführung: 12.11.2024

Abgabe: 19.11.2024

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

In diesem Versuch soll der Elastizitätsmodul mithilfe von zwei Stäben bestimmt werden. Jenes soll durch Biegung jener geschehen.

2 Theorie

Wird ein Körper in einem elastischen Maße deformiert, so lässt sich der lineare Zusammenhang der Größen σ (die angreifende Spannung am Objekt) und der Deformation ($\Delta L/L$) mithilfe des Hookeschen Gesetzes. Hinzu kommt der Elastizitätsmodul E, eine Materialkonstante eines Werkstoffes. Alles zusammen wird beschrieben durch

$$\sigma = E\frac{\Delta L}{L}. \tag{1}$$

Die Funktion $D(x)$ setzt sich aus zwei Teilen zusammen; Der Auslenkung ohne Gewicht, eine Nullmessung ($D_0(x)$) und der Messung mit Gewicht ($D_M(x)$). Beides zusammen ergänzt sich zu:

$$D(x) = D_M(x) - D_0(x). \tag{2}$$

2.1 Biegung bei einseitiger Befestigung

Bei den beiden Stäben, unabhängig davon, ob eckig oder rund (von der Grundfläche her), lässt sich die Durchbiedung D durch eine Funktion in Abhängigkeit von x darstellen. Bei einem Stab der Länge L wird für die Funktion eine horizontale Komponente (x), der Querschnitt Q und eine nach unten gerichtete Kraft benötigt.
Durch die diese Kraft F am Stab entsteht ein Trägheitsmoment, welches am Punkt x ansetzt, dieses wird beschrieben durch:

$$M_F = F(L - x). \tag{3}$$

Dieses Drehmoment bewirkt die Streckug und Stauchung an der Ober-und Unterseite des Stabes. Die durch diese Spannungen verursachten Drehmomente sind wiederum von gleicher Größe, jedoch in entgegengesetzte Richtung um die neutrale Faser des Stabes, welcher keine Veränderungen vernimmt. Dieses Drehmoment im Inneren ist definiert durch

$$M_\sigma = \int_Q y\sigma(y)dq. \tag{4}$$

Variable y steht dabei für für den Abstand zum Zentrum des Stabes, dem neutralen Faser, welcher Spannungsfrei ist. σ ist die angreifende Spannung, während dq als Flächenelement von y gedeutet wird. Um die Durchbiegungsfunktion $D(x)$ zu erlangen, muss eine Gleichsetzung der beiden Drehmomente erfolgen: $M_F = M_\sigma$. Damit ergibt sich letztendlich:

$$D(x) = \frac{F}{2EI}(Lx^2 - \frac{x^3}{3}) \tag{5}$$

mit I, dem Flächenträgheitsmoment, gegeben als

$$I = \int_Q y^2 dq(y). \tag{6}$$

2.2 Biegung bei beidseitiger Befestigung

Neben der Bestimmung durch einseitige Bespannung, kann die Auslenkung auch bei beidseitiger Befestigung bestimmt werden. Das Moment im Inneren beträgt auf einer Seite des Stabes:

$$M_F = -\frac{F}{2}x \quad , 0 \leq x \leq L/2 \tag{7}$$

und auf der Anderen:

$$M_F = -\frac{F}{2}(L-x) \quad , L/2 \leq x \leq L \tag{8}$$

Die Bestimmung für $D(x)$ erfolgt analog zu der Vorherigen. Es ergibt sich

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(3L^2 - 4x^3) \tag{9}$$

für die Seite im Bereich $0 \leq x \leq L/2$ und

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(4x^3 - 12Lx^3 + 9L^2x - L^3) \tag{10}$$

folgerlich im Bereich $L/2 \leq x \leq L$. Beides wieder mit dem Flächenträgheitsmoment I. [2]

3 Durchführung

3.1 Aufbau

Der Aufbau dieses Versuchs ist recht simpel; es gibt 2 Stäbe (runder und eckiger Grundfläche), welche horizontal an einer Apparatur befestigt werden, sodass 2 am oberen Teil der Apparatur befestigten Messuhren auf dem Stab aufliegen. Sie dienen dazu, eine vertikale Deformierung im Milimeter-Bereich zu dokumentieren. Zunächst wird ein Stab einseitig befestigt, das geschieht als erstes ohne, dann mit Gewicht. Es ist wichtig, dass eine Nullmessung durchgeführt wird, da die Stäbe selbst ohne explizite Kraftzuführung durch Gravitation ausgelenkt werden. In den folgenden Abbildungen ist der Aufbau für den beschriebenen Versuch jeweils mit Gewicht dargestellt.

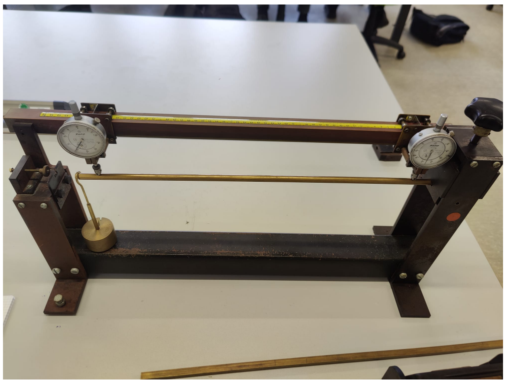

Abbildung 1: Einseitige Einspannung des runden Stabs mit Gewicht

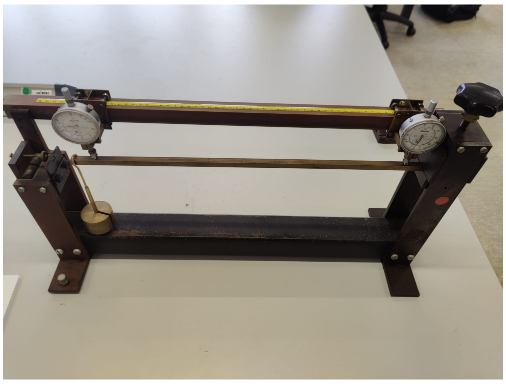

Abbildung 2: Einseitige Einspannung des eckigen Stabs mit Gewicht

Analog erfolgt der Versuch für eine beidseitige Befestigung; Der Stab mit und ohne Gewicht wird an der Apparatur befestigt, sodass die Uhren aufliegen. Das Gewicht sollte genau mittig sein, so bleiben die Fehler bei Messungen gering.

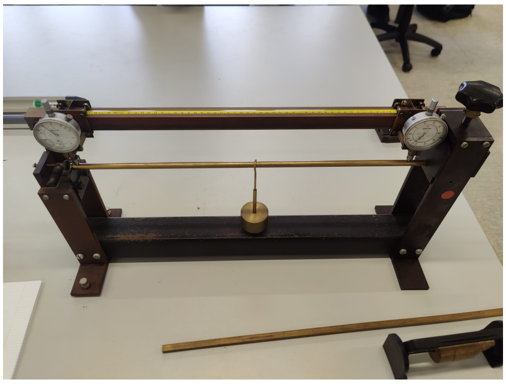

Abbildung 3: Beidseitige Einspannung des runden Stabs mit Gewicht

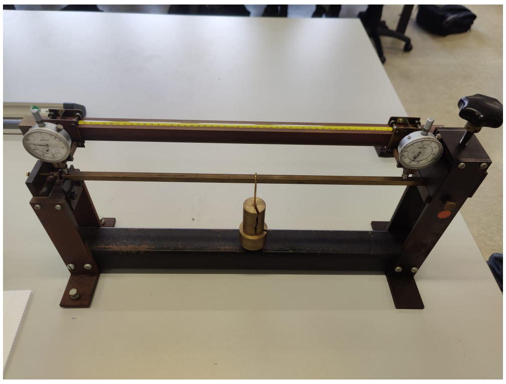

Abbildung 4: Beidseitige Einspannung des eckigen Stabs mit Gewicht

3.2 Messung

Bei der Messung werden jeweils 10 Werte aufgenommen. Dabei wird in regelmäßigen Abständen die Uhr verschoben, sodass eine Auslenkung D über ein breites Intervall festgehalten werden kann. Dabei besteht die Messung jeweils aus 2 Teilen, ein Mal mit und ein Mal ohne Gewicht.

4 Auswertung

4.1 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung

Da es in Experimenten zu unumgänglichen Messunsicherheiten kommt, ist eine Fehlerkalkulation obligatorisch. In der folgenden Auswertung wird eine Fehlerrechnung mithilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung durchgeführt, welche lautet:

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_f \right)^2}. \tag{11}$$

5 Fehlerfortpflanzung

Für die Fehlerfortpflanzung nach Gauß ergibt sich für die Linearisierung $f_e(x) = Lx^2 - \frac{x^3}{3}$ der einsitigen Einspannung dann folgender Term:

$$\Delta f_e(x) = \sqrt{(2Lx - x^2)^2 (\Delta x)^2}. \tag{12}$$

Des Weiteren ist die Fehlerfortpflanzung für die beidseitige Einspannung mit Linearisierung $f_b(x) = 3L^2 x - 4x^3$ gegeben durch:

$$\Delta f_b(x) = \sqrt{(3L^2 - 12x^2)^2 (\Delta x)^2}. \tag{13}$$

5.1 Runder Stab-einseitige Einspannung

Hier wird das Elastizitätsmodul für einen einseitig eingespanten Runden Stab der Länge $L = 0,59m$ und Radius $r = 0,005m$ sowie einer Masse $m = 0,39kg$ ermittelt. Dazu sind folgende Formeln gegeben:

$$\boldsymbol{D}(x) = \frac{F}{2E\boldsymbol{I}} \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \tag{14}$$

und

$$\boldsymbol{I_r} = \int_0^{2\pi} \int_0^r r'^3 dr' d\varphi = \frac{r^4 \pi}{2}. \tag{15}$$

Darin ist L die Stablänge, E das Elastizitätsmodul, F die angreifende Kraft und $\boldsymbol{I}$ das Flächenträgheitsmoment. Nun wird die Auslenkung gegen $\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right)$ aufgetragen. Es wird eine Ausgleichsrechnung mit Python durchgeführt und mit dem gewonnenen Parameter a, welcher die Steigung der Ausgleichsgeraden Abbildung 5 angibt, kann das Elastizitätsmodul bestimmt werden durch Gleichsetzung der Steigung a mit dem Vorfaktor aus Gleichung 14 und umgestellt zu:

$$\boldsymbol{E} = \frac{F}{2a\boldsymbol{I}}.$$

Die Ausgleichsrechnung zu den Werten aus Tabelle 1 ergibt die Werte

$$a = 0.0100 \pm 0.0005 \quad \text{und} \quad b = 0.0005 \pm 0.0001.$$

Es ergibt sich der folgender Graph:

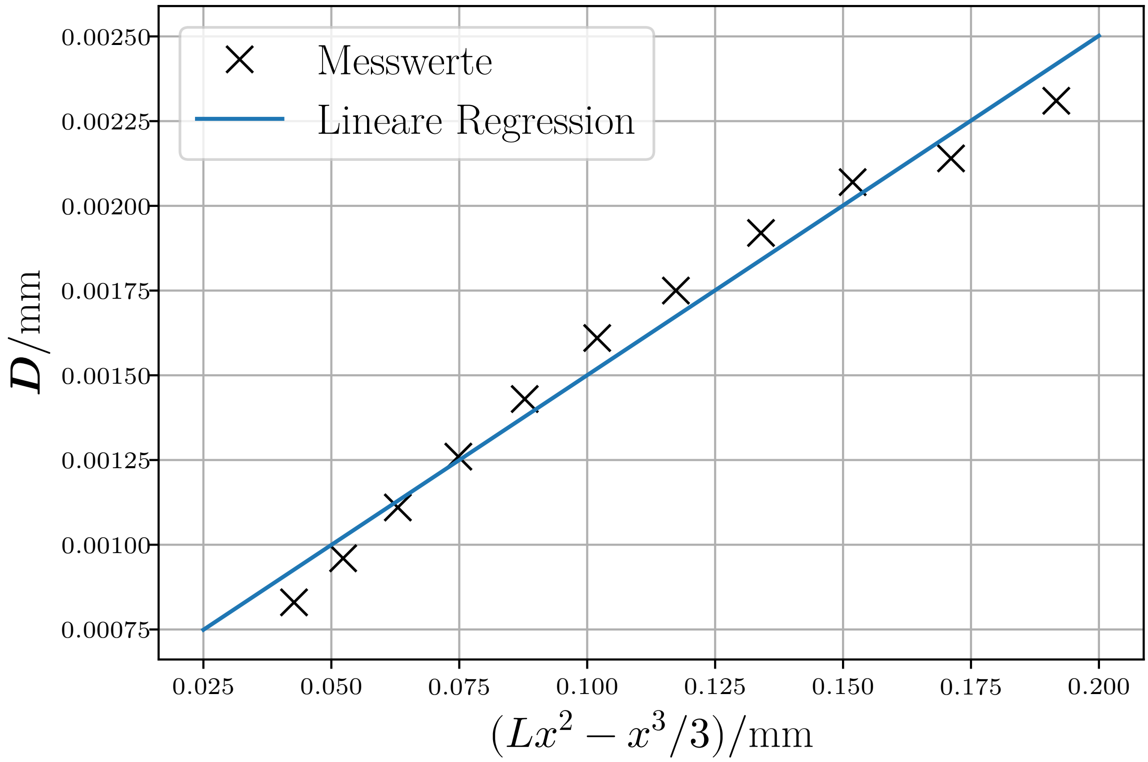

Abbildung 5: Einseitiger Aufhang-runder Stab.

Tabelle 1: Werte zur bestimmung von E(Runder Stab)

$m_{gewicht}$kg	g_{erde}m/s^2	rm	I	a
0.2	9.81	0.0025	$3{,}06 \cdot 10^{-11}$	$0{,}0100 \pm 0{,}0005$

Die Werte aus Tabelle 1 sind jene, welche zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls des runden Stabes bei einseitiger Aufhängung nötig sind. Das Elastizitätsmodul ergibt sich als

$$E = (1{,}00 \pm 0{,}01) \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}.$$

Tabelle 2: Messwerte x, D_{0x}, D(x)

$x(mm)$	$D_{0x}(mm)$	$D(x)(mm)$
500	4,31	2
475	4,69	2,55
450	5,07	3
425	5,48	3,56
400	5,85	4,1
375	6,22	4,61
350	6,59	5,16
325	6,9	5,64
300	7,23	6,12
275	7,55	6,59
250	7,87	7,04

5.2 Eckiger Stab-einseitige Einspannung

Die Berrechnung des Elastizitätsmoduls des eckigen, einseitig eingespannten Stabs wird analog zu der inUnterabschnitt 5.1 durchgeführten Berechnung bestimmt. Es wird ein Stab mit einer Kantenlänge von $a = 0,01m$, einer Länge von $L = 0,6m$ und einer Masse von $m = 0,5025kg$ betrachtet. Das Flächenträgheitsmoment eines eckigen Stabes ist ergibt sich mit einer quadratischen Grundfläche als:

$$\boldsymbol{I_e} = \int_0^1 \int_0^1 a^2 dada = \int_0^1 \frac{1}{3} a^3 da = \frac{h^4}{12}. \tag{16}$$

Aus der Ausgleichsrechnung mit den Werte aus Tabelle 4 folgern die Werte:

$$a = 0.0059 \pm 0.0003 \quad \text{und} \quad b = 0.0002 \pm 0.0000.$$

Daraus kommt die Ausgleichsgerade zustande:

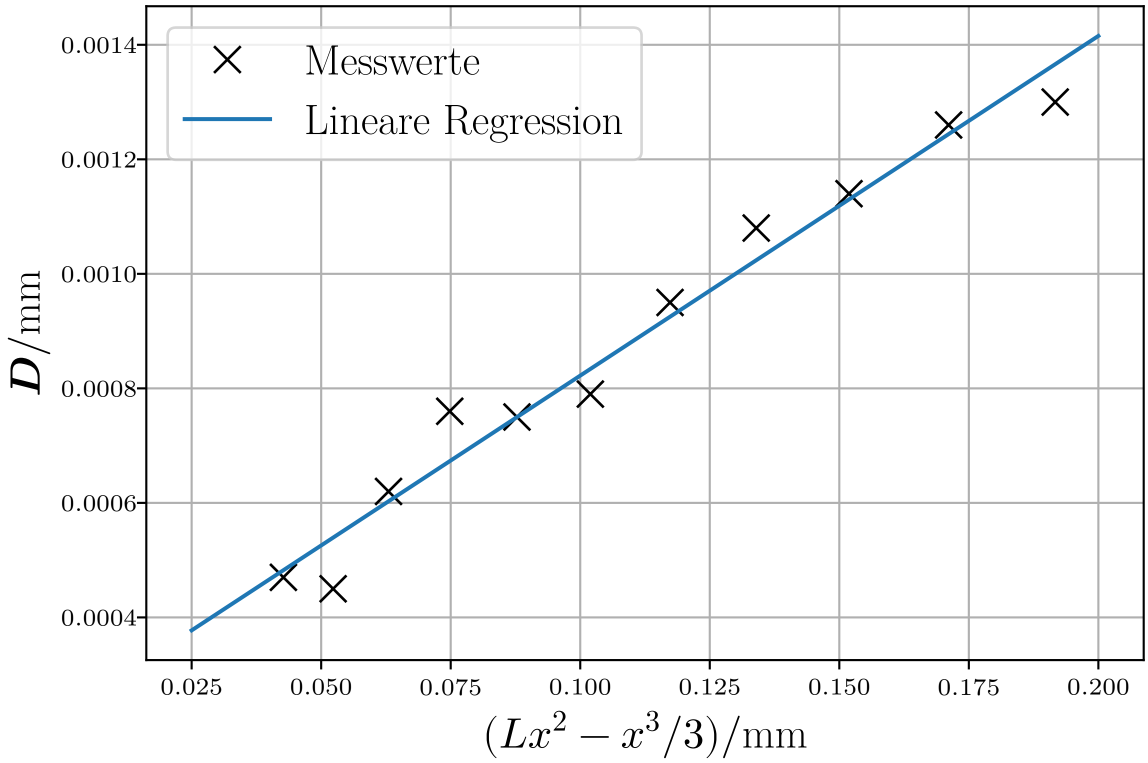

Abbildung 6: Einseitiger Aufhang-eckiger Stab.

Tabelle 3: Werte zur bestimmung von E(Eckiger Stab)

$m_{gewicht}$kg	g_{erde}m/s^2	hm	I	a
0.2	9.81	0.01	$8{,}33 \cdot 10^{10}$	$0{,}0059 \pm 0{,}0003$

Mit dem Parameter a der Ausgleichsrechnung in Abbildung 6 und den Werten aus Tabelle 3 ergibt sich der Elastizitätsmodul

$$E = (2{,}00 \pm 0{,}01) \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

Tabelle 4: Messwerte x, D_{0x}, D(x)

$x(mm)$	$D_{0x}(mm)$	$D(x)(mm)$
500	6,01	4,71
475	6,26	5,00
450	6,41	5,27
425	6,65	5,57
400	6,83	5,88
375	7,00	6,21
350	7,22	6,47
325	7,55	6,79
300	7,75	7,13
275	7,89	7,44
250	8,14	7,67

5.3 Beidseitige Aufhängung

Bei der Bestimmung des Elastizitätsmoduls bei beidseitiger Aufhängung werden die Ausgleichsrechnungen in eine Rechnung für die linke Seite und eine für die rechte Seite (von dem Þunkt aus, an dem das Gewicht hängt) aufgeteilt. Das resultiert aus den unterschiedlichen Ausdrücken für $D(x)$, wie man es Gleichung 9 und Gleichung 10 entnehmen kann. Für den Bereich ($x \leq \frac{L}{2}$) wird die x Achse mit dem Term

$$3L^2 - 4x^3$$

linearisiert, sowie im bereich ($\frac{L}{2} \leq x \leq L$) mit dem Term

$$4x^3 - 12Lx^3 + 9L^2x - L^3 \tag{17}$$

Für den Teil, welcher links des Gewichts liegt, ergaben sich die Messwerte für den runden sowie den eckigen Stab wie in Tabelle 5 dokumentiert.
Die Werte der Ausgleichsrechnung belaufen sich auf

$$a = 0.00243 \pm 0.00018 \quad \text{und} \quad b = 0.00008 \pm 0.00003$$

für den runden Stab sowie

$$a = 0.00189 \pm 0.00006 \quad \text{und} \quad b = 0.00005 \pm 0.00001$$

für den eckigen Stab.

Die Regressionen dazu sehen wie folgt aus:

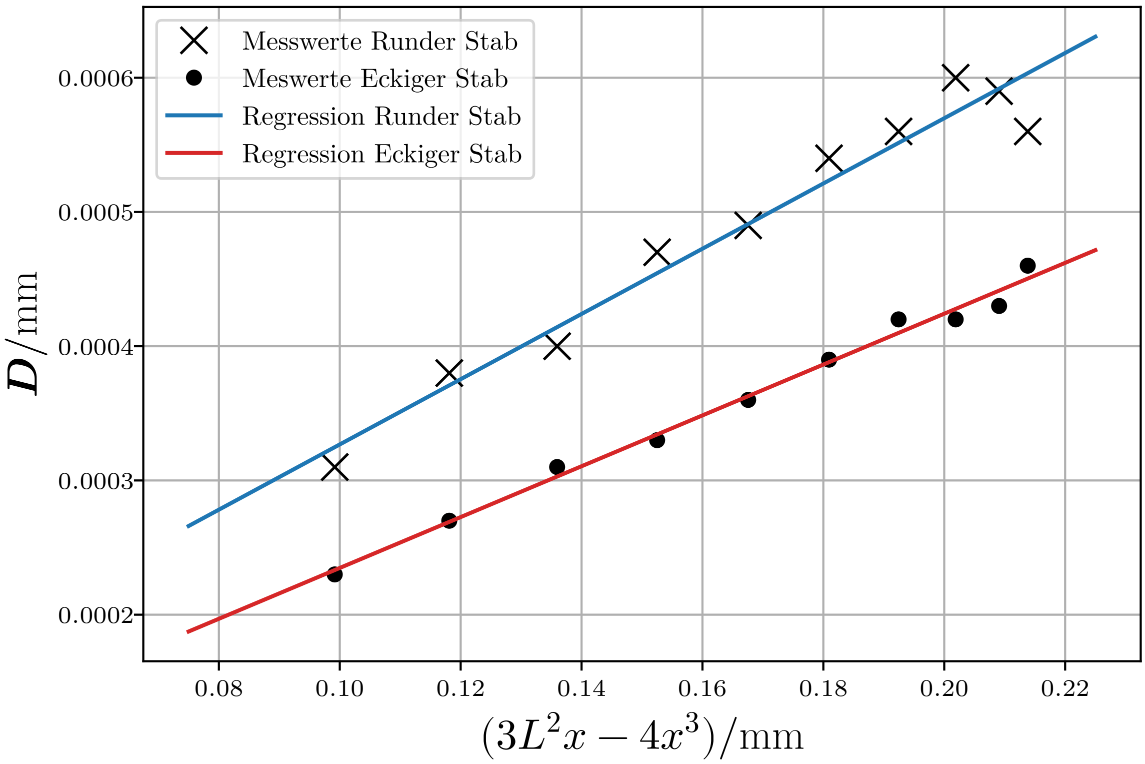

Abbildung 7: Beidseitige aufhängung-linke Seite.

Für die linke Seite Ergeben sich die Elastizitätsmodule zu

$$E_{links,rund} = (8{,}6 \pm 0{,}6) \cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

und

$$E_{links,eckig} = (1{,}30 \pm 0{,}04) \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}.$$

Der rechte Teil vom Gewicht ergibt sich ähnlich analog. Die Messwerte befinden sich in Tabelle 6. Es ergeben sich für die Parameter

$$a = 0.00374 \pm 0.00014 \quad \text{und} \quad b = -0.00020 \pm 0.00003$$

für den runden Stab sowie

$$a = 0.00272 \pm 0.00008 \quad \text{und} \quad b = -0.00021 \pm 0.00001$$

für den eckigen Stab.

Ebenso sehen die Graphen dazu ähnlich aus.

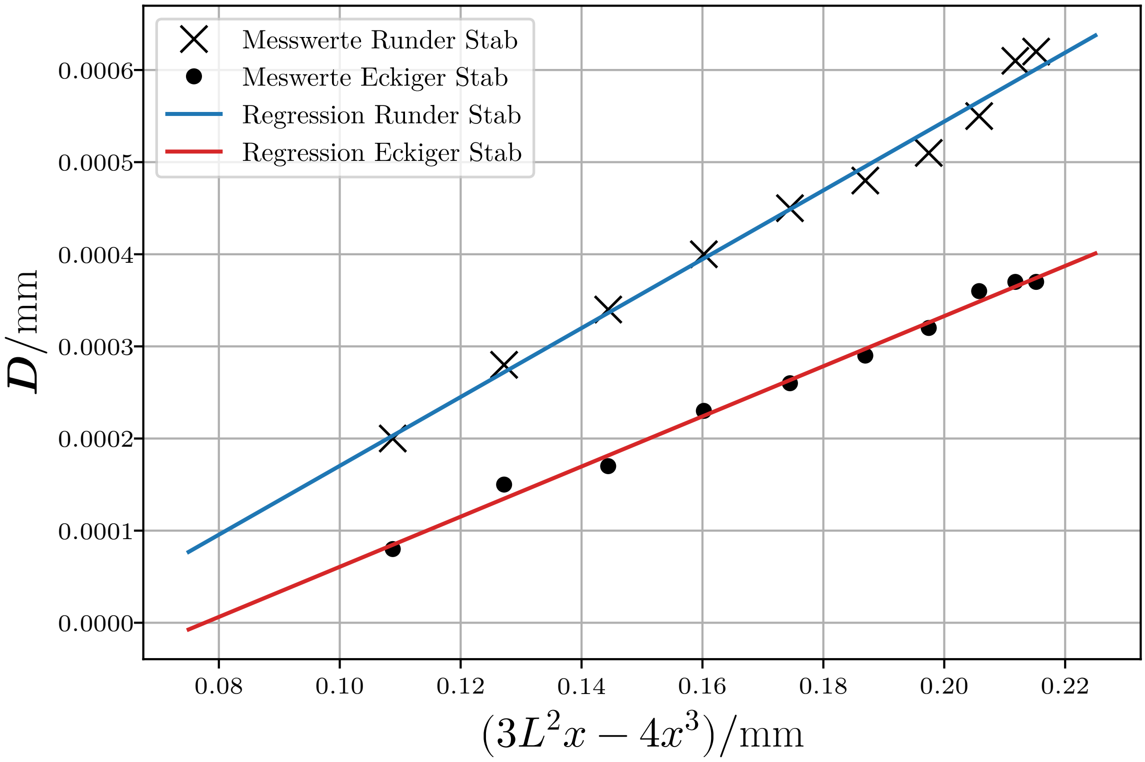

Abbildung 8: Beidseitige aufhängung-rechte Seite.

Für die rechte Seite Ergeben sich die Elastizitätsmodule zu

$$E_{Rechts,rund} = (5{,}57 \pm 0{,}21) \cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

und

$$E_{Rechts,eckig} = (9{,}02 \pm 0{,}27) \cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}.$$

Tabelle 5: Messwerte a, $D_{0,r}$, $D_{x,r}$, $D_{0,e}$, $D_{x,e}$

$a(mm)$	$D_{0,r}(mm)$	$D_{x,r}(mm)$	$D_{0,e}(mm)$	$D_{x,e}(mm)$
20	8,44	7,88	9,51	8,89
40	8,34	7,75	9,66	9,05
60	8,21	7,61	9,80	9,25
80	8,08	7,52	9,96	9,45
100	7,98	7,44	10,11	9,63
120	7,86	7,37	10,26	9,81
140	7,76	7,29	10,40	10,00
160	7,63	7,23	10,55	10,21
180	7,54	7,16	10,68	10,40
200	7,43	7,12	10,81	10,61

Tabelle 6: Messwerte a, $D_{0,r}$, $D_{x,r}$, $D_{0,e}$, $D_{x,e}$

$a(mm)$	$D_{0,r}(mm)$	$D_{x,r}(mm)$	$D_{0,e}(mm)$	$D_{x,e}(mm)$
20	9,51	8,89	10,52	10,15
40	9,66	9,05	10,56	10,19
60	9,80	9,25	10,55	10,19
80	9,96	9,45	10,53	10,21
100	10,11	9,63	10,54	10,25
120	10,26	9,81	10,55	10,29
140	10,40	10,00	10,57	10,34
160	10,55	10,21	10,58	10,41
180	10,68	10,40	10,65	10,50
200	10,81	10,61	10,68	10,60

6 Diskussion

Hier werden die ermittelten werte für Elastizitätsmodule diskutiert und mit Literaturwerten verglichen. Für die einseitige Aufhängung ergab sich:

$$E_{rund,einseitig} = (1{,}00 \pm 0{,}05) \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

$$E_{eckig,einseitig} = (2{,}00 \pm 0{,}01) \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

Für die beidseitige Aufhängung kamen die Werte zustande:

$$E_{links,rund} = (8{,}6 \pm 0{,}6) \cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

$$E_{rechts,rund} = (1{,}30 \pm 0{,}04) \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

$$E_{links,eckig} = (5{,}57 \pm 0{,}21) \cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

$$E_{rechts,eckig} = (9{,}02 \pm 0{,}27) \cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

Als Mittelwerte ergeben sich für den runden und eckigen Stab:

$$\overline{E_{rund}} = (1{,}053 \pm 0{,}029) \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = (105{,}30 \pm 2{,}90)\,\mathrm{GPa}$$

$$\overline{E_{eckig}} = (1{,}153 \pm 0{,}012) \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = (115{,}30 \pm 1{,}20)\,\mathrm{GPa}$$

Damit kann angenommen werden, dass die beiden Stäbe aus gleichem Material sind. Verglichen mit Literaturwerten kommen den experimentellen Werten den Materialien Messing (mit einem Elastizitätsmodul von ca. 100 GPa) und Kupfer (mit ca. 115 GPa) nahe. Es wird davon ausgegangen, dass es sich um Messing handelt. Die Dichte führt zu dem Schluss, dass es sich um Messing handeln könnte, die Dichten der beiden Stäbe ($\rho_{rund} = 8{,}27\,\mathrm{g/cm^3}$ $\rho_{eckig} = 8{,}33\,\mathrm{g/cm^3}$) kommen dem Literaturwert mit $\rho_{Messing} = 8{,}73\,\mathrm{g/cm^3}$ nahe. Jedoch ist zu beachten, dass diese Näherung Schwächen aufweist, da die Dichte von Messing der von Kupfer nahe kommt. Die Farbe der Stäbe bestätigt allerdings den Verdacht, dass es sich um das Material Messing handelt. Für die Elastizitätsmodule ergeben sich folgende Abweichungen von den Messergebnissen zu den Literaturwerten [1]:

$$\boldsymbol{\Delta} E_{rund} = 5.3\%$$
$$\boldsymbol{\Delta} E_{eckig} = 15.3\%$$

Alle den Tabellen zu entnehmenden Messwerte sind fehlerbehaftet, was zum Einendarauf zurückzufürhen ist, dass die Messuhren für die Auslenkung sehr leicht beeinflussbar waren. Ein einfacher Stoß an den Tisch mit der Messapparatur genügt, damit sich die Messuhr verstellt. Demnach wird dies eine Hauptquelle für mögliche Fehler sein. Des Weiteren ist allerdings auch das Augenmaß als Fehlerpotential heranzuziehen, sowohl das Einstellen der Uhr auf dem Messband als auch das Befestigen des Gewichts in der exakten Mitte des Stabes erfolgt durch optische Abschätzung. Das Anbringen des Gewichtes in der Mitte des Stabes ist vor Allem problematisch, da der Stab über keine Markierung der Mitte verfügt. Anders als bei der einseitigen Aufhängung, bei der der Haken, welcher das Gewicht hält, in eine Einkerbung gehängt wird. Darüber hinaus ist eine potentielle

Fehlerquelle die Präzision der Messuhr; die beiden Messuhren waren nicht exakt identisch, sodass die Messungen voneinander abwichen, obwohl beide Uhren das gleiche Ergebnis liefern sollten. Letztendlich ist anzumerken, dass die Länge der Stäbe, mit der gerechnet wurde, nicht die effektive Länge ist; in den Rechnungen handelt es sich um eine Länge von $L = 0,6m$ bzw. $L = 0,59m$, dabei handelt es sich jedoch um die exakte Länge des Stabes, der Bereich, welcher eingeklemmt ist, wird hier nicht abgerechnet.

7 Anhang

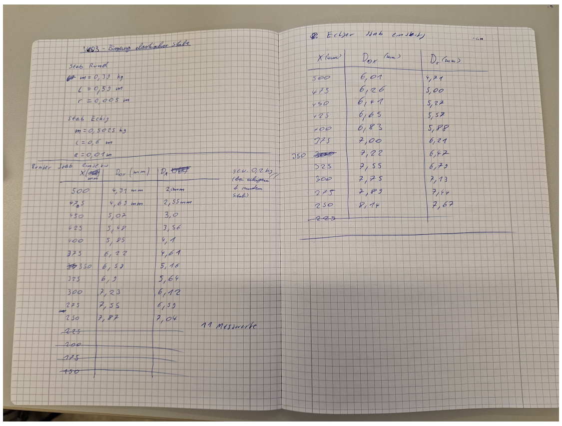

Abbildung 9: Messwerte - einseitige Aufhängung

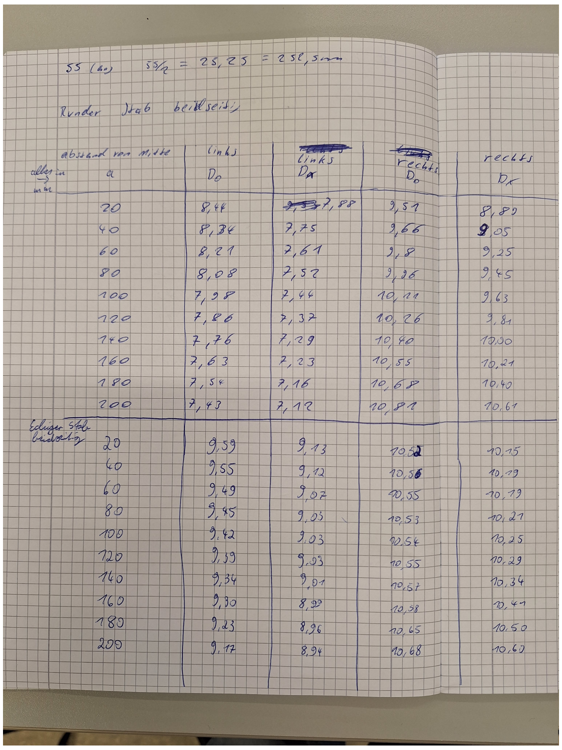

Abbildung 10: Messwerte - beidseitige Aufhängung

Literatur

[1] calculand-Autorenschaft. *calculand - Elastizitätsmodul (E), E-Modul*. Abgerufen am 19. November 2024. 2024. URL: `https://www.calculand.com/einheiten-umrechnen/stoffe-liste.php?gruppe=Elastizit%C3%A4tsmodul+%28E%29%2C+E-Modul` (besucht am 19. 11. 2024).

[2] *Versuch zum Literaturverzeichnis*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2023.