VL4

- Fragen ? ✓
- $\boxed{\text{Start Recording}}$ ✓
- Übungen vorbereiten vor Tutorium

Recap: Euler-Verfahren

$$\boxed{y' = f(y,x)} \qquad y = y(x)$$

Diskretisieren:

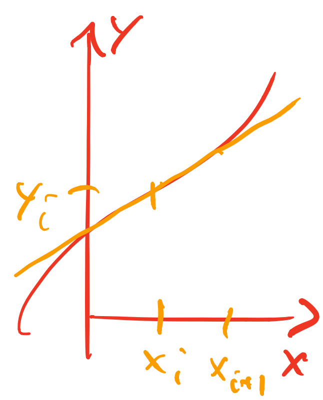
$$x_i = i\,\Delta x \quad ; \; i = 0, \dots, N \qquad x_{max} = N \cdot \Delta x$$

$$y_i = y(x_i) \quad \rightarrow \quad (x_i, y_i)$$

$$y' \approx \frac{y(x_i + \Delta x) - y(x_i)}{\Delta x} = f(y_i, x_i)$$

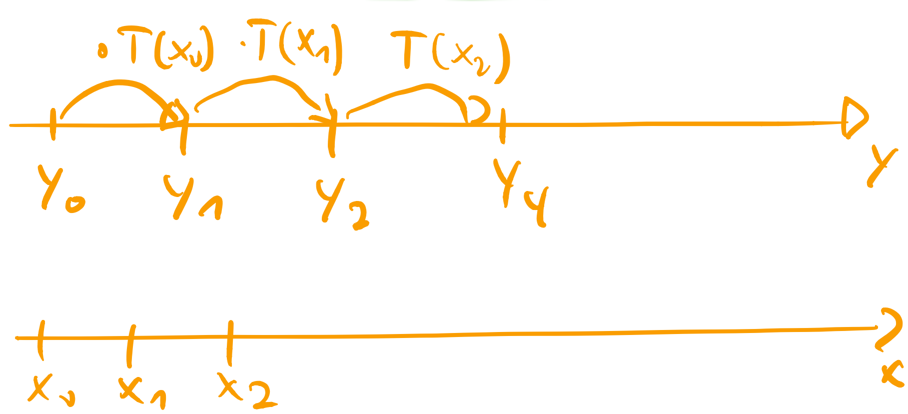
Steigung

$$\Rightarrow \boxed{y_{i+1} = y_i + \Delta x \, f(y_i, x_i)}$$



Lineare DGL $y' = f(x)\,y$

$$\boxed{y_{i+1} = \left(1 + f(x_i)\Delta x\right) y_i = T(x_i)\, y_i}$$



• Analog für Systeme 1. Ordnung

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(\vec{y}, x)$$

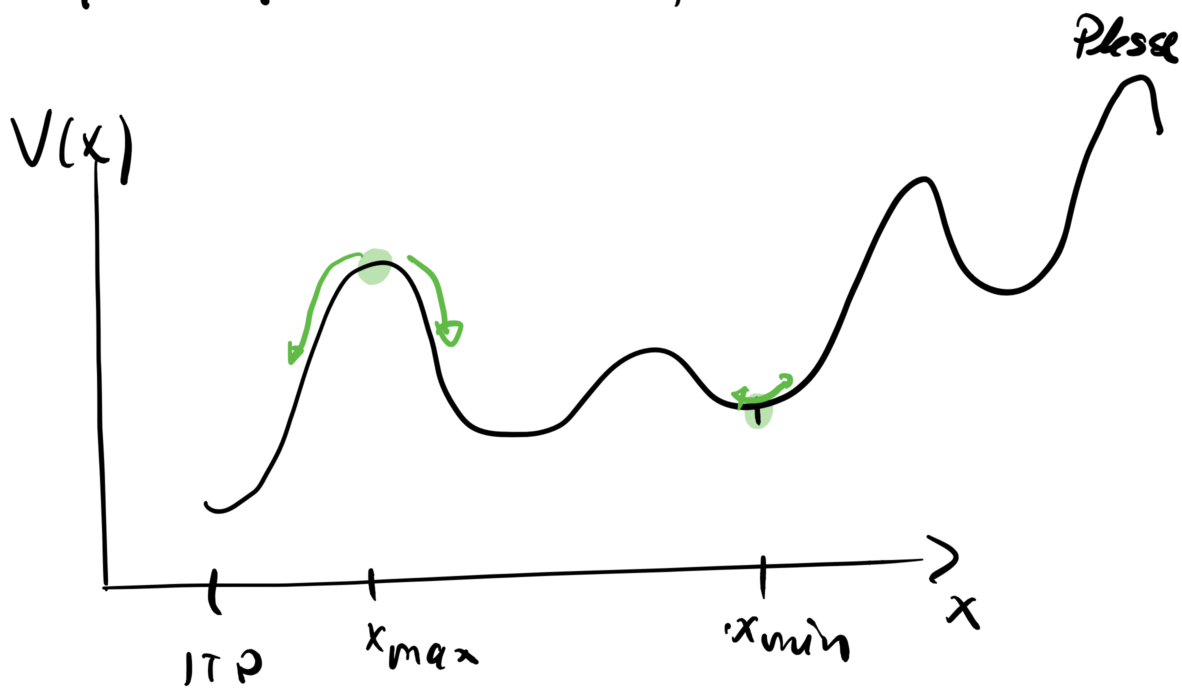
• DGL n-ter Ordnung : $y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, \dots, y, x)$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d\vec{y}}{dx} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ f \end{pmatrix} = \vec{g}(\vec{y}, x)$$

3.3) Stabilität numerischer Verfahren

Stabilität als physikalisches Problem

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \ddot{\vec{r}} \quad ; \quad \vec{F} = -\nabla V(\vec{r})$$



- Extremalstellen, genauer: $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$

- Linearisieren:

$$V(x) = V_{ext} + \frac{1}{2} V''(x)(x - x_{ext})^2 + \dots$$

- M? bei $(x_{ext}, V(x_{ext}))$

$\rightsquigarrow$ kleine Störung

$x \to x_{ext} + \varepsilon$; ε klein

$\rightsquigarrow$ Amplitude $|x(t) - x_{ext}| < C$ $\forall t$

$\rightsquigarrow$ stabil

$\rightsquigarrow \exists C>0 \ t>0 \ |x(t) - x_{ext}| > C$

$\rightsquigarrow$ instabil

Struktur der linearisierten Lsg:

$$x_{lin}(t) \propto e^{\lambda t}; \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

$\mathrm{Re}\,\lambda > 0$: instabil

$\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$: stabil

Übertragen auf Euler:

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \Delta x \, f(y_i, x_i)} \qquad y' = f(y,x)$$

Def: y_i exakte Lsg.

$$\tilde{y}_i = y_i + e_i$$

Abweichung von exakter Lsg. durch numerische Ungenauigkeiten → in Abh. von Δx

$$\tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i + f(\tilde{y}_i, x_i)\,\Delta x$$

$$= y_i + e_i + f(\tilde{y}_i, x_i)\,\Delta x = T(y_i, e_i)$$

$$= T(y_i + e_i)$$

Linearisieren

$$\approx T(y_i) + T'(y_i)\,e_i$$

$$\tilde{y}_{i+1} = y_{i+1} + e_{i+1} = T(y_i) + T'(y_i)e_i$$

Gleichung für die Entwicklung des Fehlers:

$$\boxed{e_{i+1} \approx T'(y_i)\, e_i}$$

hängt von exakter Lsg. ab

<u>Stabilitätskriterium:</u>

$$e_{i+N} = \prod_{j=1}^{N} T'(y_{i-1+j})\, e_{i-1+j}$$

$$\boxed{|T'(y_i)| \le 1} \quad *$$

Wichtig: T hängt von Δx ab!

$* \Rightarrow$ obere Schranke für Δx!

Beispiel 1:

a) $y' = \lambda y \; ; \; y = y(x) \; ; \; \lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad T(y) = y + \lambda \Delta x y$$
$$= (1 + \lambda \Delta x) y$$

$$\Rightarrow \quad T'(y) = 1 + \lambda \Delta x$$

Stabil für

$$\boxed{|1 + \lambda \Delta x| \leq 1}$$

$\lambda > 0$: Lsg. nie stabil

$$\rightsquigarrow \quad y(x) = y_0 e^{\lambda x}$$

(genau das erwartete Verhalten)

$\lambda < 0$: $\quad y(x) = y_0 e^{-|\lambda| x}$ (immer stabil)

$$|1-|\lambda|\Delta x| \leq 1$$

Gleichheit

$$\boxed{\Delta x_c = \frac{2}{|\lambda|}}$$

$\Delta x > \Delta x_c$: instabil

$\Downarrow$

Diskretisierung + Approx. von y'

qualitativ falsches produziert

für $\Delta x > \Delta x_c$

b) gedämpfter harmonischer Oszillator

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad x = x(t)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{x}} = A\vec{x} \ ; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad T(\vec{x}) = (\mathbb{1} + A\,\Delta t)\,\vec{x} \;:\; \underline{\text{Matrix}}$$

$$\Rightarrow \quad T'(\vec{x}) = \mathbb{1} + A \cdot \Delta t$$

$$|T'(\vec{x})| \leq 1 \qquad \text{st}$$

$$\Leftarrow$$

$$\vec{e}_{i+1} = T\,\vec{e}_i$$

$$\vec{e}_{i+N} = \underbrace{T^N}_{=f(T)}\,\vec{e}_i$$

$\leadsto$ Eigenbasis:

$$T_D = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}$$

$$T_D^N = \begin{pmatrix} t_1^N & 0 \\ 0 & t_2^N \end{pmatrix}$$

T diagonalisieren $\Rightarrow$ EW t_i

stabil $\Leftrightarrow$ $\forall_i \quad |t_i| \leq 1$ (i.a. $t_i \in \mathbb{C}$)

$\left(\quad |\mathrm{Re}\, t_i| \leq 1 \quad \right)$

UE: Eigenwerte am Beispiel diskutieren.

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$\gamma < \omega_0$: $\quad x(t) \sim e^{-\gamma t} e^{\pm i \omega t}$

Pause 9:16.

SIR Modell

S: Susceptible
E: Exposed
I: infections
R: Removed

$$\boxed{\alpha, \gamma, \beta}$$

$$(*) \quad \frac{dS}{dt} = -\underline{\beta} \frac{I\,S}{N}$$

$$\frac{dE}{dt} = \underline{\beta} \frac{I \cdot S}{N} - \alpha \underline{E}$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha \underline{E} - \gamma \underline{I}$$

Nicht-lineare DGL.

$$\vec{Y}(t) = \begin{pmatrix} S \\ E \\ I \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{Y}(t) = \begin{pmatrix} S' \\ E' \\ I' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \frac{IS}{N} \\ \beta \frac{IS}{N} - \alpha E \\ \alpha E - \gamma I \end{pmatrix}$$

$$= \vec{g}(I, S, E)$$

$$\Rightarrow \vec{y}(t_{i+1}) = \vec{y}(t_i) + \Delta t \, \vec{g}(\vec{y}_i)$$

$\cancel{*}$

$$S_{i+1} = g_1(S_i, I_i) \qquad y = y + \Delta x \, f.$$

$$E_{i+1} = g_2(S_i, I_i, E_i)$$

3.4) Runge-Kutta Verfahren

Praxis: Goldstandard für ODEs

RKn: RK n-ter Ordnungen

Illustration: RK2 (Praxis: RK4)

$$y_{i+1} = RK_2(y_i, x_i)$$

Euler Schritt

$$x_i \to x_i + \Delta x$$

ersetzt durch

$$0 < \alpha < 1$$

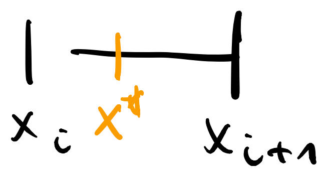
$$x_i \to \underbrace{x_i + \alpha \Delta x}_{\Downarrow \text{ berechne Steigung!}} \to x_i + \Delta x$$

Euler:

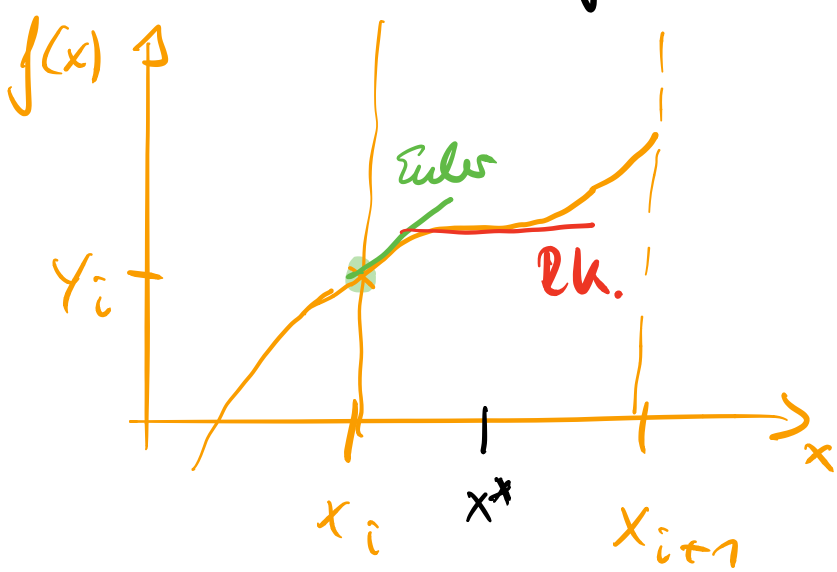
$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \Delta x \, f(y_i, x_i)}$$

verbesserte Abschätzung der Steigung.

Warum gilt das?



$\rightsquigarrow$ Freiheit, wo wir f ausrechnen



Formaler Ansatz

$$k_1 = \Delta x \; f(y_i, x_i) \quad (\overset{\text{wie}}{\text{Euler}})$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x \Big[w_1 f(y_i, x_i)$$

$$(\#) \qquad + w_2 f\big(y_i + \alpha k_1, x_i + \alpha \Delta x\big)\Big]$$

Drei Parameter:

α: definiert x^*: zusätzliche Stützstelle

$$x_i < x^* < x_{i+1}$$

w_1, w_2: Gewichte von $f_{Euler} = f(y_i, x_i)$

und $f(y_i + \alpha k_1, x_i + \alpha \Delta x)$

a, w_1, w_2 aus Taylorentwicklung:

um x_i bis $(\Delta x)^2$: RK2

$$y(x_i+\Delta x)-y(x_i) = \Delta x \frac{dy}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + O(\Delta^3 x)$$

DGL: $y' = f(y,x)$

$$= \Delta x\, f + \frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{df}{dx} + \dots$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot f$$

Taylorentw. des Ansatzes (#)

$$y_{i+1}-y_i = w_1 \Delta x\, f + w_2 \Delta x\, f(\Delta x=0) + w_2 (\Delta x)^2 \alpha\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f\right) + O(\Delta x^3)$$

Koeffizientenvergleich:

$\mathcal{O}(\Delta x)$: $\boxed{w_1 + w_2 = 1}$

$\mathcal{O}(\Delta^2 x)$: $\boxed{w_2 \alpha = \frac{1}{2}}$

2 Glg. für 3 Parameter, Lsg. schon führt zu einem Verfahren $\mathcal{O}(\Delta^2 x)$ genau ist.

$\boxed{\text{RK2: } w_1 = 0 \,;\; w_2 = 1 \,;\; \alpha = \frac{1}{2}}$

- x^*: Mittelpunkt Intervall
- nur eine Abschätzung für Steigung geht ein.

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= \Delta x\, f(y_i, x_i) \\ y_{i+1} &= y_i + \Delta x\, \underline{f\left(y_i + \frac{k_1}{2};\, x_i + \frac{\Delta x}{2}\right)} \end{aligned}}$$

Verbesserte Abschätzung der Steigung