

CWR VL S

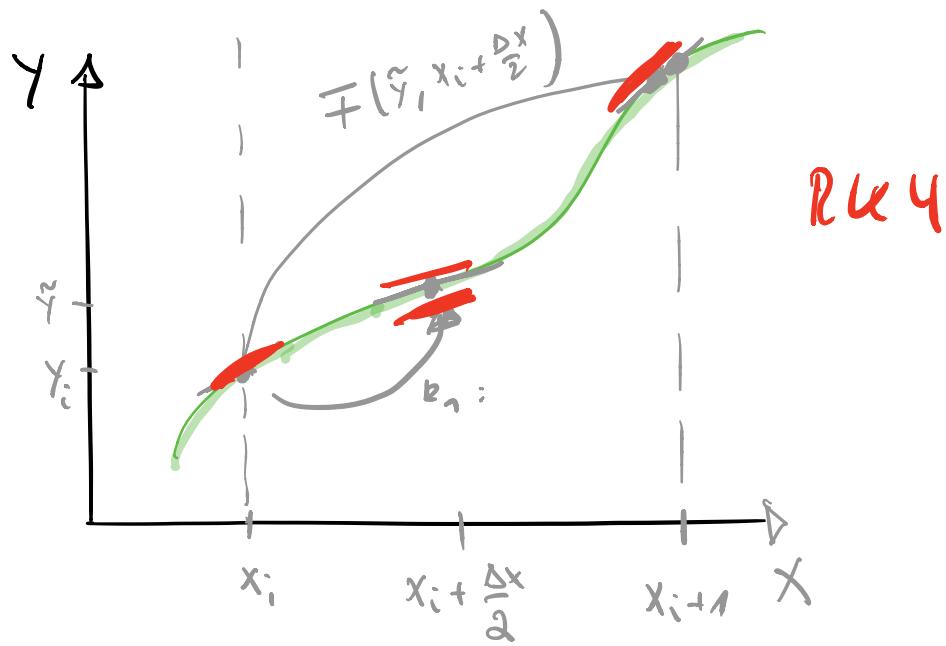
- Start recording
- Fragen?
- Hybridbetrieb VL ab 27.5.2021
 - zwei Hörsaalgruppen A, B
 - synchron mit QM, Exphjs IV
- Hygiene maßnahmen:
 - Eingang HS1 auf entfernt
 - Maskenpflicht, auch beim Warten und während der VL (med. Maske)
 - Abstände: beim Warten, im Hörsaal
 - Registrierung über QR-CODE am Sitzplatz
 - Empfohlen: Corona-Screening Programm!

- Nach Verkessen: "Vom Winde verweht"

Für alle im Home-Office:

- alles wie gehabt
- , Fragen über Chat oder einfach losreden
- Fragen aus HS1 wiederhole ich

Wdh : Runge Kutta



Runge-Kutta 2. Ordnung .

Verallgemeinerungen mit mehr Abschätzungen und besserer Ordnung möglich:

Standardmethode: RK4

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(\Delta x^5)$$

$$k_1 = \Delta x \bar{F}(y_i, x_i)$$

$$k_2 = \Delta x \bar{F}\left(y_i + \frac{k_1}{2}; x_i + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$k_3 = \Delta x \bar{F}\left(y_i + \frac{k_2}{2}; x_i + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$k_4 = \Delta x \bar{F}\left(y_i + k_3; x_i + \Delta x\right)$$

→ Steigung bei x_i : $(1x)$; $x_i + \frac{\Delta x}{2}$ (2.Wert, Gewicht 2)

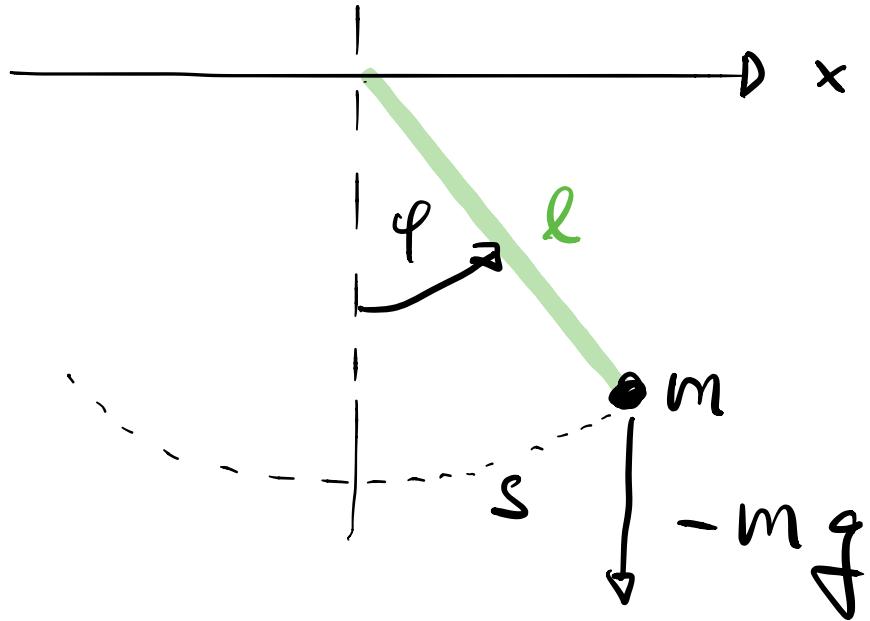
$x_i + \Delta x$ (Skizze)

gelernt ein.

Ferienklausur: Übung

Beispiele: ÜE + Projekte.

3.5) Beispiel: Pendel



- $\varphi \ll 1$: Harmonisch-Oszillatoren
- φ beliebig : Nicht-lineares System
 $(q_i, p_i \sim \mathcal{O}(q_i^3), \mathcal{O}(p_i^3))$
- Chaotische Dynamik

$$\ddot{\varphi}(t) + q \dot{\varphi} + \sin \varphi = b \cos(\omega_0 t)$$

↗ ext. Antrieb
 ↗ $\ddot{\varphi}$
 ↗ $\dot{\varphi}$
 ↗ $\sin \varphi$

Newton II Reibung Rückstellkraft

$q \approx \mu$ Reibungskonst.

$b \approx f_0$: Amplitude der ext.
Kraft.

System 1. Ordnung

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi \\ y_2 &= \dot{\varphi} \end{aligned} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -q y_2 - \sin(y_1) + b \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}$$

UE: Euler
RK2
Euler

} freiwillige Übung

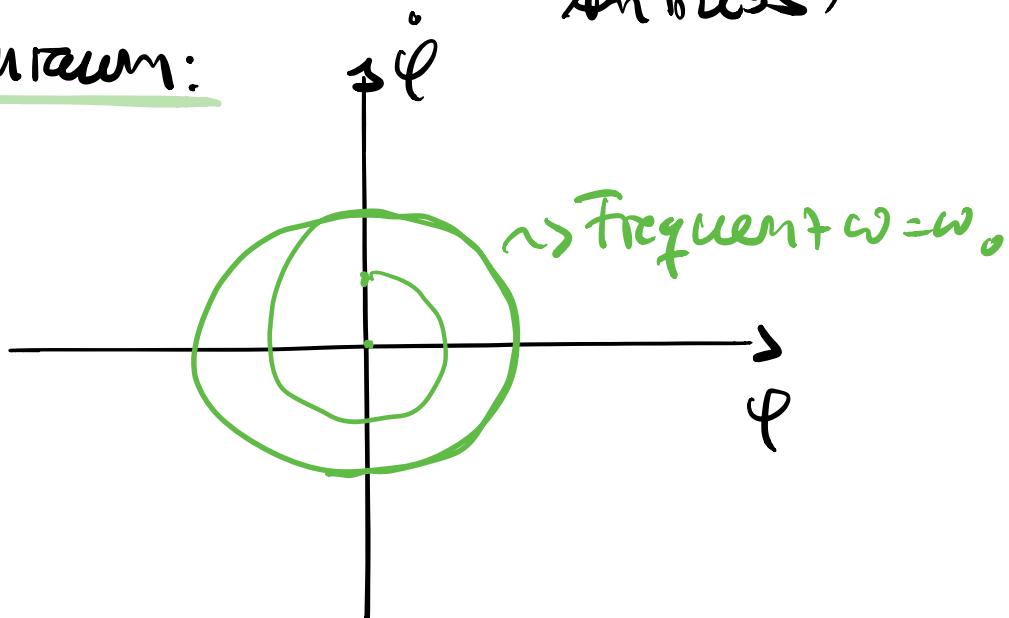
φ periodisch $\varphi \in [-\pi, \pi)$; $\dot{\varphi}$

$$\varphi \sim 4.7 \quad -2\pi$$

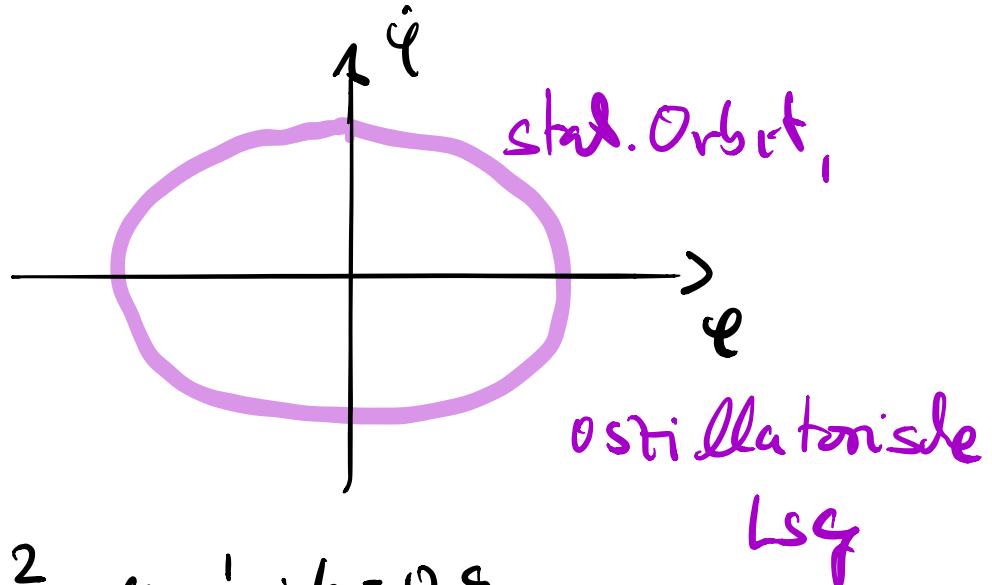
a) $\varphi < 1$: oszillatorische Lsg.
 $(r < 1)$

$\omega = \omega_0$ (Frequenz
 des ext.
 Antriebs)

Phasenraum:



b) φ beliebig, Amplitude $\neq 0$ des Antriebs nicht klein



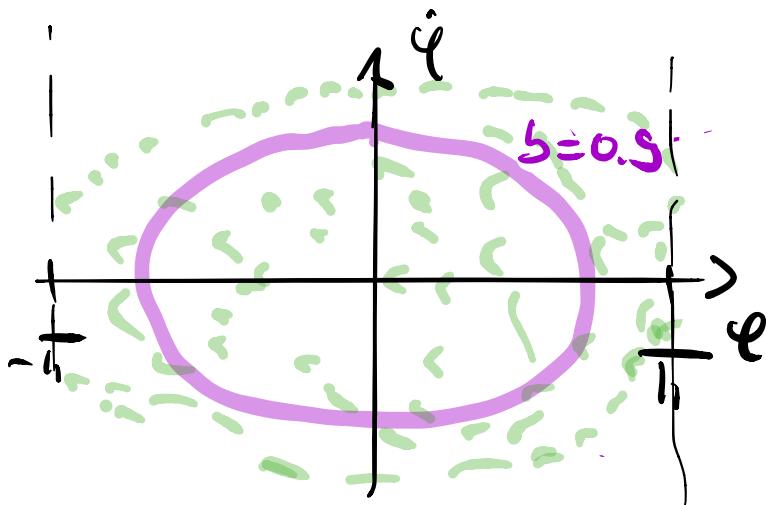
Periodenverdopplung

$$T = 2T_0$$

→ Periodenänderung aufgrund
von nicht-Linearität
(nicht-lineare Optik)

b) Chaotische Dynamik

$$\omega = \frac{2}{3}; q \sim \frac{1}{2}; b = 1.15$$



- ~> jeder Punkt (q, p) erreichbar
- ~> Struktur: Selbst-Ähnlichkeit

Pause: 9:07 h

3.6) Verletzt Verfahren

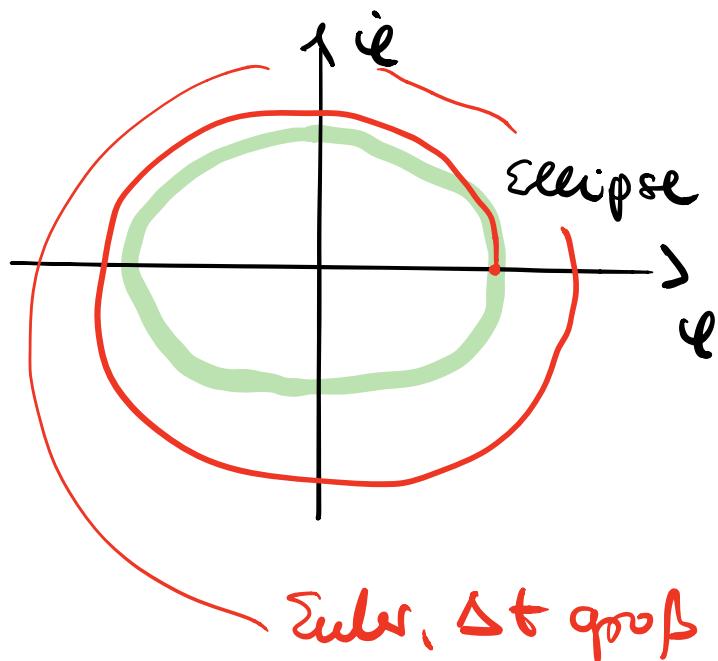
Nachteil Euler, RK:

Zeilenumkehr invariant gebrochen?

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} \neq 0 \quad (\text{Noether})$$

Im Beispiel:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$$



Warum Ellipse?

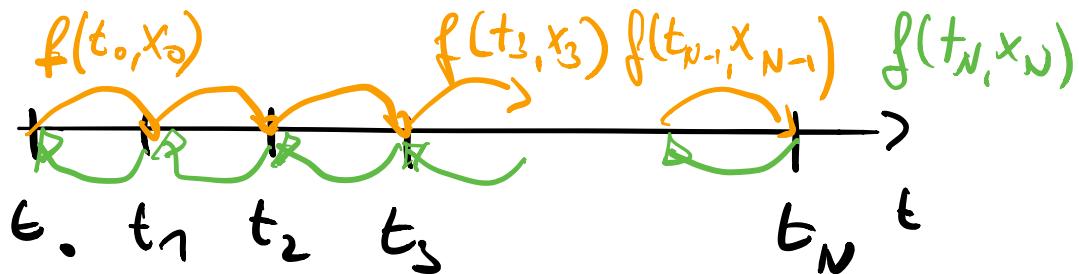
$$H(p, q) = \boxed{a p^2 + b q^2 \stackrel{!}{=} E_0} = E(t=0)$$

$a, b > 0$

Ellipsegleichung

Warum wird Zeitschreiterverfahren
genutzt?

Euler: $x = x(t)$ $\dot{x} = f(x)$



Euler: verwendet Information vom
linken Startpunkt je des
Intervalls.

Vorwärts: N Schritte mit Δt |

Rückwärts: N Schritte mit $-\Delta t$ |

Verlet Methode: VERLET

- $a = \ddot{x} \stackrel{!}{=} \ddot{x}(x)$

- keine Rückwärts

$$\bar{F} = m \ddot{x}$$

$$\bar{F} = -Kx \Rightarrow \bar{F} = \bar{F}(x)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{\bar{F}(x)}{m}$$

Taylor $v = \dot{x}; a = \ddot{x}$

$$x(t \pm \Delta t) = x(t) \pm v(t) \Delta t + \frac{1}{2} a(t) \Delta t^2 + \dots$$

Addieren mit \pm :

$$\Rightarrow x(t + \Delta t) + x(t - \Delta t) = 2x(t) + a(t) \Delta^2 t + O(\Delta t^3)$$

$$\Rightarrow x(t + \Delta t) = 2x(t) - x(t - \Delta t) + a(t) \Delta^2 t$$

$$v(t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t - \Delta t)}{2 \Delta t} + O(\Delta t^2)$$

$$a(t) = \frac{F(x(t))}{m} \quad (\text{Physik})$$

phys. invariant unter

$$\Delta t \rightarrow -\Delta t$$

$$t = t_0: x(t_0); v(t_0); a(t_0)$$

$$x(t_0 - \Delta t) = x(t_0) - v(t_0) \Delta t + \frac{1}{2} a(t_0) \Delta t^2$$

VERLET:

- genauer als Euler
- zeitumkehr invariant
- weniger genau als RK4
 - ↳ Abwägung # Rechenschritte vs Genauigkeit

Anwendung:

- Vielteilchensysteme $N \gg 1$

aber kein thermisches GG

- Molekulardynamik

Bem: Alternativ: Geschwindigkeits -

VERLET

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t) \Delta t + \frac{1}{2} a(t) \Delta t^2$$

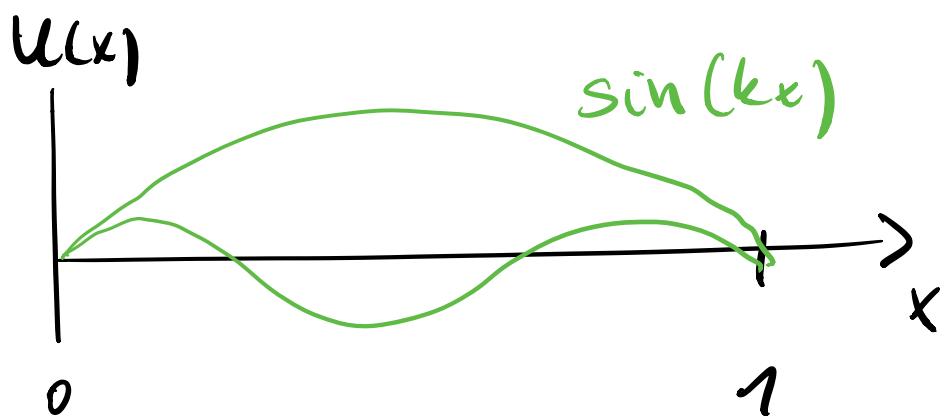
$$v(t + \Delta t) = v(t) + [a(t + \Delta t) + a(t)] \Delta t$$

Berechnung

3.7) Randwertprobleme

1D Wellengleichung, QM: TL in Box

~ Schwingung eines Seils



$$u(0) = u(1) = 0$$

$$u''(x) + a^2 u(x) = 0$$

Shooting Methode:

Büshenige Verfahren (DGL 2. Ordnung)

$$\begin{array}{ccc} u(0) & \xrightarrow{\quad} & u(\Delta x) \\ u'(0) & \xrightarrow{\Delta x} & u'(\Delta x) \rightarrow \dots \end{array}$$

Rate:

$$u'(0) = v_i$$

→ Vorwärts propagation mit Euler, RK,
Verlet,.. bei $x=1$

$$\Rightarrow u_i(x=1) = s(v_i)$$

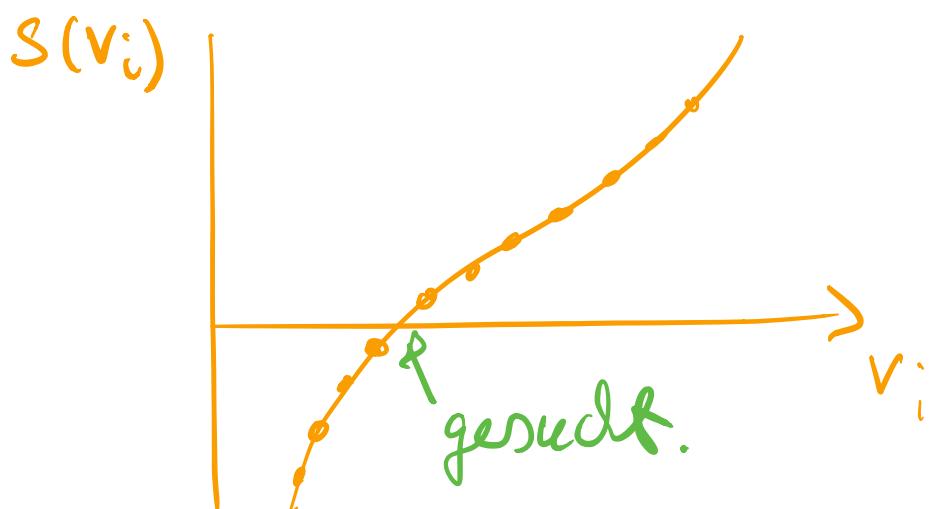
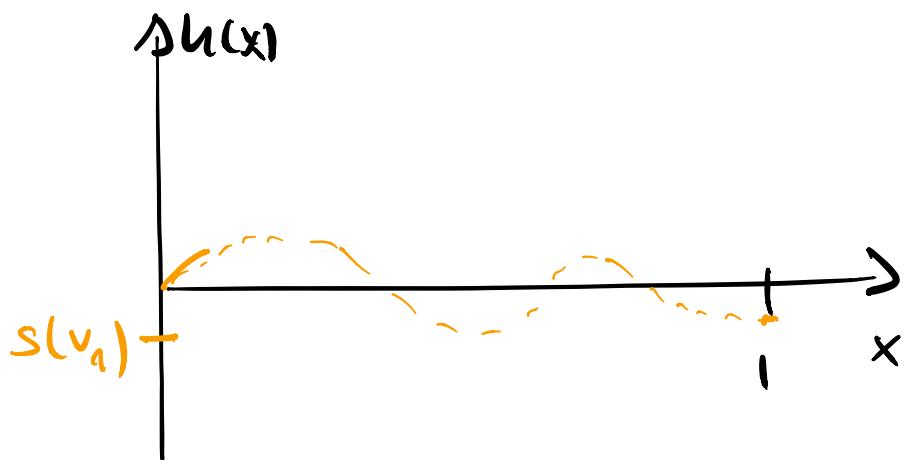
Mehrfach: Generieren $s(v_i) = u_r(x=1)$

RB

$$\mu(x=1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{s(v_i) = 0}$$

Nullstellen suche



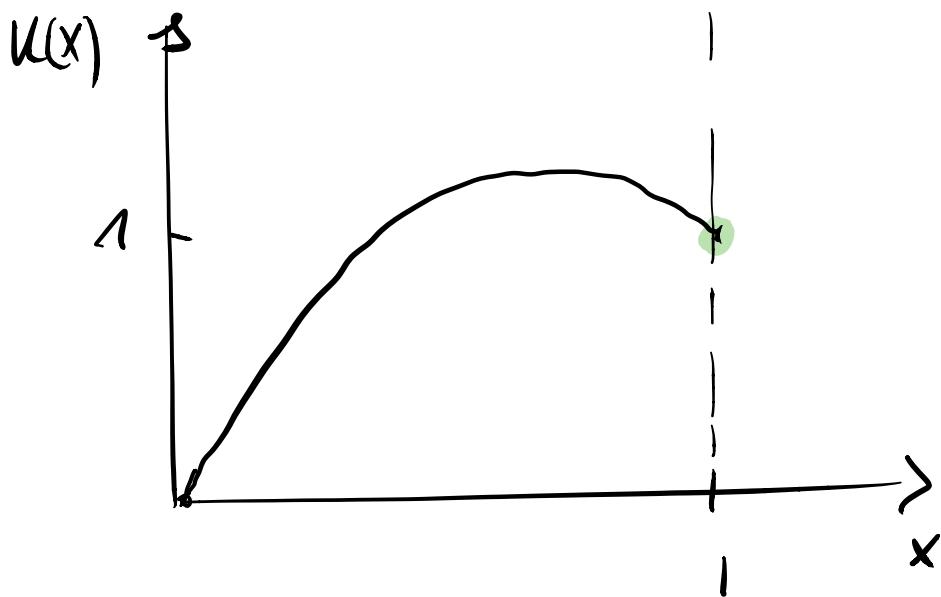
Nullstellen suche z.B. über Intervallschachtung

v

Beispiel:

$$u'' = -\frac{1}{4}(u+1)^2$$

$$u(0) = 0 ; u(1) = 1$$



Setze:

$$y_1 = u \quad y_1(0) = 0$$

$$y_2 = u' \quad y_2(0) = x_i$$

$$\rightarrow \boxed{S(x_i) - u(1) \stackrel{!}{=} 0}$$

Frage zu: Warum ist ein Feld ein

$$\left| \varepsilon \propto B^2 + E^2 \right\}$$

Ensemble von
harmonischen
Oszillatoren?

