Stabilitätsanalyse - Tipps

Malte Thumann

May 15, 2021

1 Diskretisierung der anal. Lösung

Um die analytische Lösung

$$n(t) = \frac{n_0\, \mathrm{e}^{r_0\, t}}{1 + K\, n_0\, (\mathrm{e}^{r_0\, t} - 1)} \tag{1.1}$$

der ODE (Gl. 1, s. Übungsblatt) mit der num. Lösung aufzutragen, müsst ihr Gl. (1.1) zeitlich diskretisieren mit

$$t \to i \cdot \Delta t \;, \tag{1.2}$$

$$n(t) \to n_i(\Delta t) \;. \tag{1.3}$$

Mit der Reskalierung von $n_i \sim x_i,\ n_0 \sim x_0$ und mithilfe der Beziehung $\Delta t\, r_0 = 4\,\mu - 1$ erhaltet ihr einen Ausdruck für x_i, der unabhängig von K, r_0 und iterierbar über i ist.

2 Analytische Stabilitätsanalyse

Nach VL4 ist das analytische Stabilitätskriterium

$$|T'(y_i)| \leq 1 \;, \tag{2.1}$$

wobei y_i die exakte Lösung der DGL $y' = f(y, x)$ und T der Propagator der DGL ist. Bezogen auf das Pearl-Verhulst-Modell lautet der Propagator

$$T(x_i) = 4\,\mu\, x_i\, (1 - x_i) \;, \tag{2.2}$$

dessen Ableitung $T'(x_i)$ weiterhin von x_i abhängt. Nun braucht ihr nur noch den reskalierten Grenzwert der anal. Lösung $x_i \to ???$ für $t \to \infty$ in $T'(x_i)$ einsetzen und ihr erhaltet durch Gl. (2.1) die Vorschrift $\mu \leq 3/4$.