



Projektarbeit zur Vorlesung Computergestütztes Wissenschaftliches Rechnen

Abgabedatum: 27.08.2021

Betreuung: Tristan Großkopf

Projekt 19: Resonanzkurve eines stark nichtlinearen Duffing-Oszillators

Einleitung

Der Duffing-Oszillator ist eine Modifikation des getriebenen und gedämpften harmonischen Oszillators mit einer nichtlinearen Rückstellkraft:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \beta x + \alpha x^3 = \gamma \cos(\omega t). \quad (1)$$

Das Antwortverhalten eines Oszillators auf äußere Anregung wird durch seine Resonanzkurve beschrieben. Die Resonanzkurve gibt die Amplitude als Funktion der Anregungsfrequenz ω an. Die Bestimmung der Resonanzkurve des Duffing-Oszillators ist Ziel dieses Projekts.

Setzen Sie im Folgenden $\gamma = 1.0$, $\beta = 2.0$ und $\delta = 0.25$, und variieren Sie die Anregungsfrequenz ω für die Bestimmung von Resonanzkurven so, dass der Resonanzbereich gut abgedeckt ist.

Aufgaben

1. **(30 P)** Schreiben Sie die Differentialgleichung zweiter Ordnung in zwei Differentialgleichungen erster Ordnung um und implementieren Sie zur Integration der Bewegungsgleichung Runge-Kutta-Algorithmen zweiter und vierter Ordnung, sowie die Euler Methode. Vergleichen Sie im Folgenden die mit den verschiedenen Algorithmen erhaltenen Ergebnisse und diskutieren Sie die Unterschiede.
2. **(20 P)** Test der Implementation für $\alpha = 0$: Bestimmen und plotten Sie die Resonanzkurve und vergleichen Sie sie mit der analytischen Lösung für den getriebenen harmonischen Oszillator:

$$x_{\max} = \frac{\gamma}{\sqrt{(\beta - \omega^2)^2 + \delta^2 \omega^2}}. \quad (2)$$

3. **(30 P)** Bestimmen Sie nun die Resonanzkurve für $\alpha = 1.0$ auf zwei verschiedene Weisen: Einmal mit ansteigender und einmal mit abfallender Anregungsfrequenz (siehe Tipps unten). Was fällt Ihnen auf?

Tipps zur Aufnahme der Resonanzkurve

Warten Sie eine gewisse Einschwingzeit ab. Die Amplitude lässt sich dann einfach als maximaler Wert des Ortes x bestimmen. Erhöhen Sie dann die Anregungsfrequenz und bestimmen die nächste Amplitude. Sinnvolle Werte zur Initialisierung von Ort x und die Geschwindigkeit \dot{x} bei der ersten Anregungsfrequenz sind beispielsweise $x = 2, \dot{x} = 0$. Die Endwerte von Ort und Geschwindigkeit der vorherigen Berechnung sollen als Anfangsbedingung für die nächste Anregungsfrequenz verwendet werden. Stellen Sie dabei sicher, dass die Anregung dabei keinen Phasensprung macht. Dies kann beispielsweise erreicht werden in dem man die Zeit zurücksetzt ($t_{\text{neu}} = 0$) und als Anregungsterm $\gamma \cos(\omega_{\text{neu}} t_{\text{neu}} + \phi_{\text{neu}})$ mit $\phi_{\text{neu}} = (\omega_{\text{alt}} t_{\text{alt}} + \phi_{\text{alt}}) \bmod 2\pi$ verwendet. Eine Modulo-Operation für Fließkommazahlen bietet die Funktion `fmod` aus der Standardbibliothek `<math.h>`.

Allgemeine Hinweise zur Abgabe

• Code

- Der C-Code, den Sie abgeben, muss zuverlässig die (ebenfalls abzugebenden) Daten generieren. Insbesondere muss er auf dem im CIP-Pool der Physik installierten Linux-System kompilierbar sein und ohne Laufzeitfehler durchlaufen. Die Kompilation des C-Programms muss durch ein Makefile automatisiert sein.
- Auch die im Bericht gezeigten Plots müssen mit ebenfalls abzugebendem Python-Code reproduzierbar sein. Auch dieser muss im CIP-Pool lauffähig sein. Die eigentliche Berechnung/Simulation soll im C-Code stattfinden, der Python-Code soll also wirklich nur zum Plotten und ggf. zur vorbereitenden Strukturierung der Daten verwendet werden.
- Der abgegebene Code muss gut lesbar und sinnvoll strukturiert sein. Kompliziertere Code-Blöcke sollen dabei mit Code-Kommentaren erläutert werden.

• Bericht

Der Umfang des abgegebenen Berichts darf *höchstens* 10 Seiten betragen. Stellen Sie den im Folgenden dargestellten Inhalt darin knapp auf deutsch oder englisch dar. Beachten Sie, dass ein Bericht ein zusammenhängender Text ist; eine Sammlung von Stichworten ist kein Bericht. Der Bericht ist außerdem ein wissenschaftlicher Text, d.h. im Prinzip muss es möglich sein, die beschriebene Simulation anhand des Berichts nachzuprogrammieren und auf dieselben Ergebnisse zu kommen. Das heißt insbesondere, dass Sie *eigene* Parameterwahlen dokumentieren müssen. (Sie dürfen aber davon ausgehen, dass dem/der Leser/in das Aufgabenblatt vorliegt, Sie müssen also nicht unbedingt alle darin gegebenen Parameterwahlen, physikalische Größen usw. wiederholen, es kann jedoch für die Lesbarkeit vorteilhaft sein)

1. **Einleitung:** Kurze Einführung in das Thema bzw. das zu simulierende Modellsystem, sowie Nennung der untersuchten Fragestellung(en) und der verwendeten Methodik.
2. **Theorie:** Ggf. in der Aufgabenstellung geforderte analytische Rechnungen und Herleitungen, Diskretisieren von Differenzialgleichungen usw.

3. **Methodik:** Kurze Darstellung der verwendeten Algorithmen und wofür sie im Projekt eingesetzt wurden (jeweils 1–2 Absätze).
4. **Implementation:** Kurze Beschreibung des C-Programms (Struktur und Programmflow, Verwendung von Bibliotheken, Besonderheiten). Falls die typische Laufzeit Ihres Programms länger als etwa eine Minute dauert, sollten Sie dies hier ebenfalls erwähnen.
5. **Ergebnisse und Diskussion:** Der wichtigste Teil sind natürlich die Darstellung der in der Aufgabenstellung geforderten Ergebnisse, Plots und Diskussionen bzw. Antworten auf die gestellten Fragen. Plots müssen korrekte Achsenbeschriftungen tragen und alle darin dargestellten Datensätze müssen z.B. durch eine Legende und/oder in der Bildunterschrift eindeutig identifizierbar sein. Alle Plots müssen im Haupttext eingeführt und die darin dargestellten Ergebnisse diskutiert werden.

- **Bewertung**

Die maximale Punktzahl ist **100**, die Projektarbeit gilt als bestanden, wenn mindestens **50 Punkte** erreicht werden. 80 Punkte entfallen auf die projektspezifischen Aufgabenstellungen. Jeweils 10 Punkte werden für Lesbarkeit des Programmcodes und für die allgemeine Qualität der Darstellung von Daten in Plots vergeben.

- **Abgabe**

Abzugeben sind der Programmcode mit Makefile, der Bericht als PDF, generierte Datensätze und der Plotting-Code. (Plots müssen nicht einzeln abgegeben werden, sondern sind Teil des Berichts; eventuelle \TeX -Quelldateien müssen auch nicht mit abgegeben werden.) Laden Sie alle abzugebenden Dateien in Ihren jeweiligen Gruppen-Dateiordner auf Stud.IP hoch. Das Abgabedatum finden Sie am Anfang dieses Dokuments.