

## Parcial 2

Juan Sebastián Valbuena Bermúdez  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
ELECTRODINÁMICA 2

8 de noviembre de 2016

### Soluciones

Todos los programas, simulaciones (graficas) y gif animados se encuentran en el siguiente repositorio:  
<https://github.com/jusvalbuenabe/Parcial-2-Electro.git>

### Punto 1

Sea una lámina plana de espesor  $d$  cuya permitividad se corresponde con el modelo de plasma para altas frecuencias ( $\omega \gg \omega_o$ ,  $\omega \gg \Gamma$ ), es decir,  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0(1 - \omega_p^2/\omega^2)$ . Dicha lámina está rodeada de vacío. Considere la incidencia de ondas planas que están linealmente polarizadas.

#### 1.a

Escriba la matriz de transferencia de la estructura tomando como planos de referencia dos planos situados por fuera de la lámina pero a una distancia infinitesimal de esta, es decir, en  $z = 0^-$  y  $z = d^+$ .

#### Solución

Se divide el espacio en tres regiones:

- Región 1:  $z < 0$ , con permitividad  $\varepsilon = \varepsilon_0$
- Región 2:  $0 < z < d$ , con permitividad  $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$
- Región 3:  $d < z$ , con permitividad  $\varepsilon = \varepsilon_0$

La matriz de transferencia  $T$  se puede escribir como el producto de tres matrices:

$$T = T_{12}T_2T_{23}$$

donde  $T_{12}$  es la matriz de transferencia correspondiente a la interfaz entre las regiones 1 y 2,  $T_2$  es la matriz de propagación en el plasma y  $T_{23}$  es la matriz de transferencia correspondiente a la interfaz entre las regiones 2 y 3. Estas matrices se escriben como sigue:

$$T_{12} = \frac{1}{2Y_1} \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & Y_1 - Y_2 \\ Y_1 - Y_2 & Y_1 + Y_2 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} e^{-ik(\omega)d} & 0 \\ 0 & e^{ik(\omega)d} \end{bmatrix}$$

$$T_{23} = \frac{1}{2Y_2} \begin{bmatrix} Y_2 + Y_3 & Y_2 - Y_3 \\ Y_2 - Y_3 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix}$$

Se ha usado la convención en la que  $Y_i$  es la admitancia del medio  $i$ . En este caso  $Y_1 = Y_3 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$  y  $Y_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\mu_0}}$ . Adicionalmente  $k(\omega)$  es el número de onda correspondiente a la frecuencia angular  $\omega$ . Para el plasma se tiene la siguiente relación de dispersión:

$$k(\omega) = \frac{\omega n(\omega)}{c} = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon_p \mu_0}}{c^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

Simplificando se tiene que la matriz de transferencia es:

$$T = \frac{1}{4\varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon_r(\omega)}} \begin{bmatrix} \sqrt{\varepsilon_0} + \sqrt{\varepsilon(\omega)} & \sqrt{\varepsilon_0} - \sqrt{\varepsilon(\omega)} \\ \sqrt{\varepsilon_0} - \sqrt{\varepsilon(\omega)} & \sqrt{\varepsilon_0} + \sqrt{\varepsilon(\omega)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-ik(\omega)d} & 0 \\ 0 & e^{ik(\omega)d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\varepsilon(\omega)} + \sqrt{\varepsilon_0} & \sqrt{\varepsilon(\omega)} - \sqrt{\varepsilon_0} \\ \sqrt{\varepsilon(\omega)} - \sqrt{\varepsilon_0} & \sqrt{\varepsilon(\omega)} + \sqrt{\varepsilon_0} \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} & 1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \\ 1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} & 1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-ik(\omega)d} & 0 \\ 0 & e^{ik(\omega)d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} + 1 & \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} - 1 \\ \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} - 1 & \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} + 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}} \begin{bmatrix} e^{-idk} \left( \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} + 1 \right)^2 - e^{idk} \left( \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} - 1 \right)^2 & \frac{\omega_p^2}{\omega^2} (-e^{-idk} + e^{idk}) \\ -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} (-e^{-idk} + e^{idk}) & e^{idk} \left( \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} + 1 \right)^2 - e^{-idk} \left( \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} - 1 \right)^2 \end{bmatrix}$$

### 1.b

Grafique los coeficientes de transmisión,  $t$  y  $t'$ , y de reflexión  $r$  y  $r'$ , mostrando separadamente sus correspondientes módulos y fases en función de la frecuencia  $\omega$ .

Estos coeficientes se calculan a partir de la siguiente relación de los coeficientes con la matriz de transferencia:

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & -\frac{r'}{t} \\ \frac{r}{t} & t' - \frac{rr'}{t} \end{bmatrix}$$

Para los resultados numéricos se tomo  $c = 1$ ,  $\omega_p = 1$  y  $d = 2\lambda_p = 2\frac{2\pi c}{\omega_p}$ .

En las figuras 1, 2, 3 y 4 se muestran las gráficas de los coeficiente  $t$ ,  $r$ ,  $t'$  y  $r'$ , respectivamente.

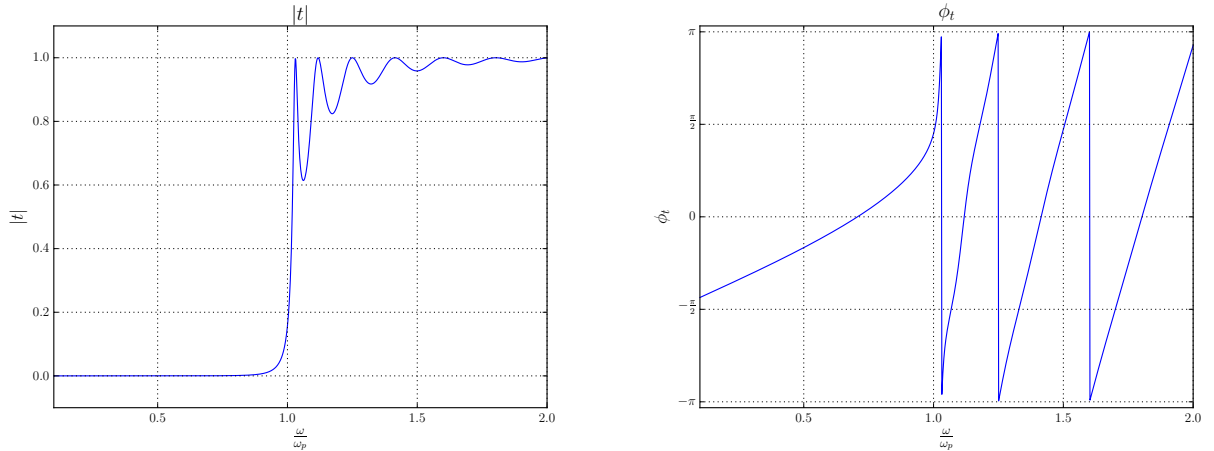


Figura 1: Coeficiente de transmisión  $t$

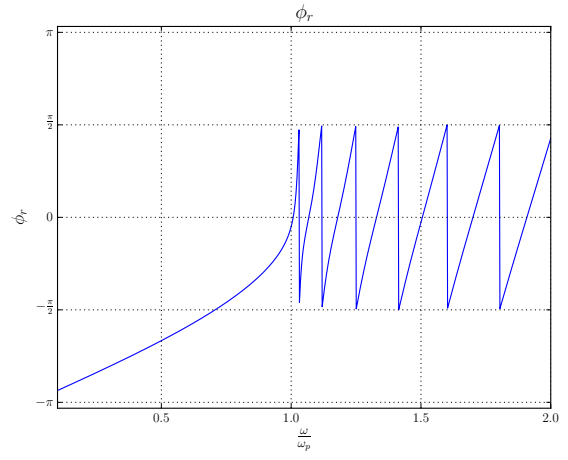
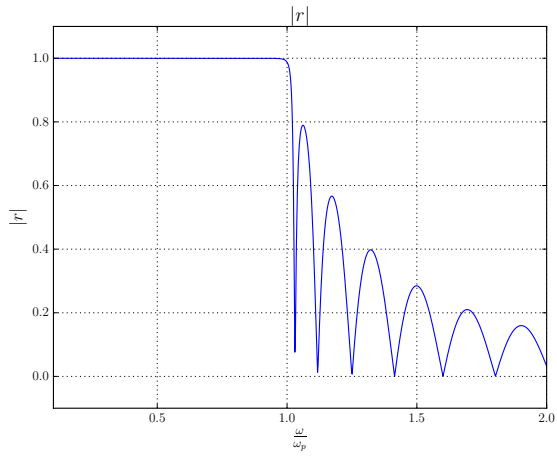


Figura 2: Coeficiente de reflexión  $r$

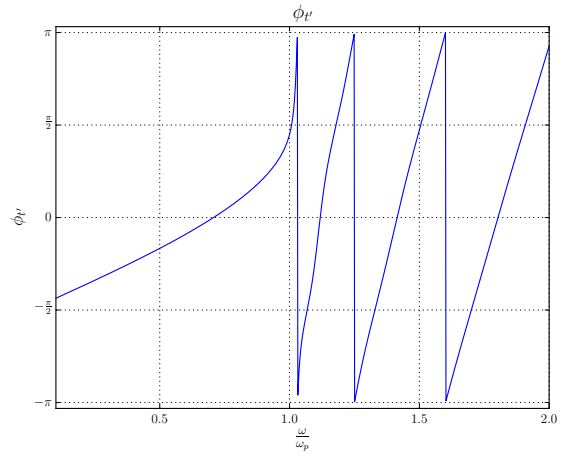
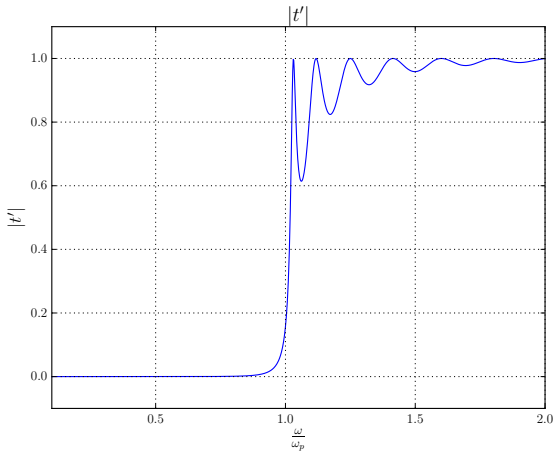


Figura 3: Coeficiente de transmisión  $t'$

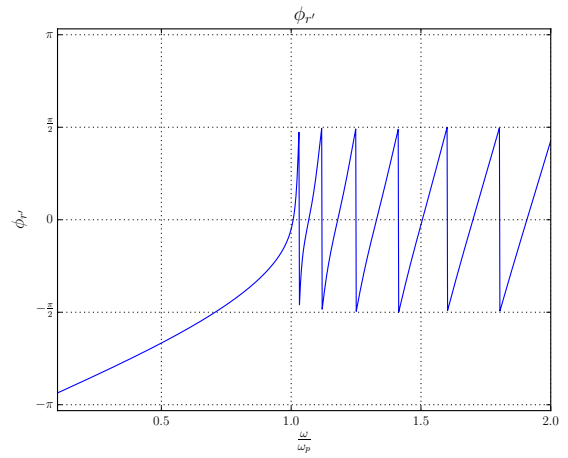
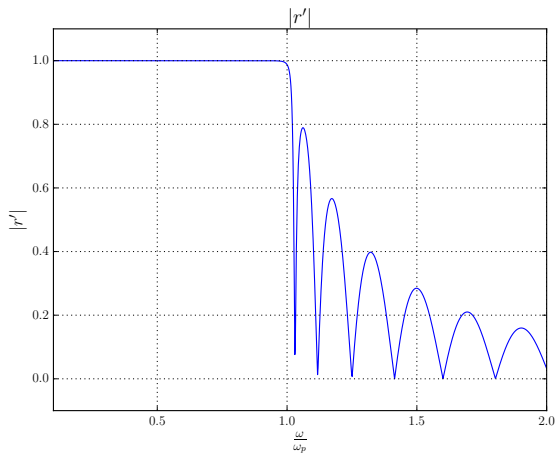


Figura 4: Coeficiente de reflexión  $r'$

### 1.c

Grafique las transmitancias,  $T$  y  $T'$ , y las reflectancias  $R$  y  $R'$ , en función de  $\omega$ . De Paso, compruebe si  $T + R = 1$  y  $T' + R' = 1$ . Las transmitancias y reflectancias se pueden calcular a partir de los coeficientes de transmisión y reflexión como sigue:

$$T = \frac{Y_{out}}{Y_{in}} |t|^2$$

$$R = |r|^2$$

En las figura 5 y 6 se muestra las gráficas de las transmitancias y las reflectancias respectivamente. En la figura 7 se muestran las gráficas de  $R + T$  y  $R' + T'$ .

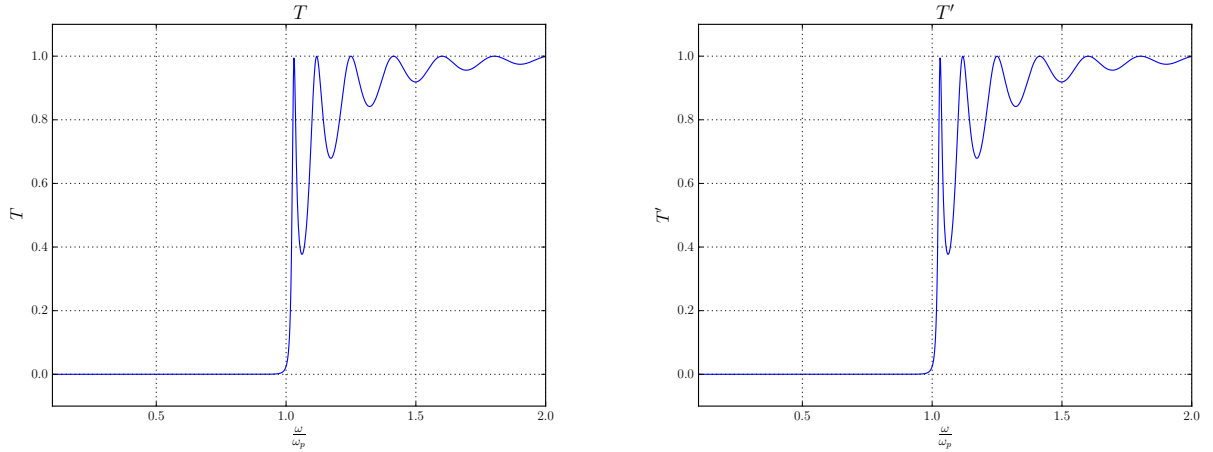


Figura 5: Transmitancias  $T$  y  $T'$

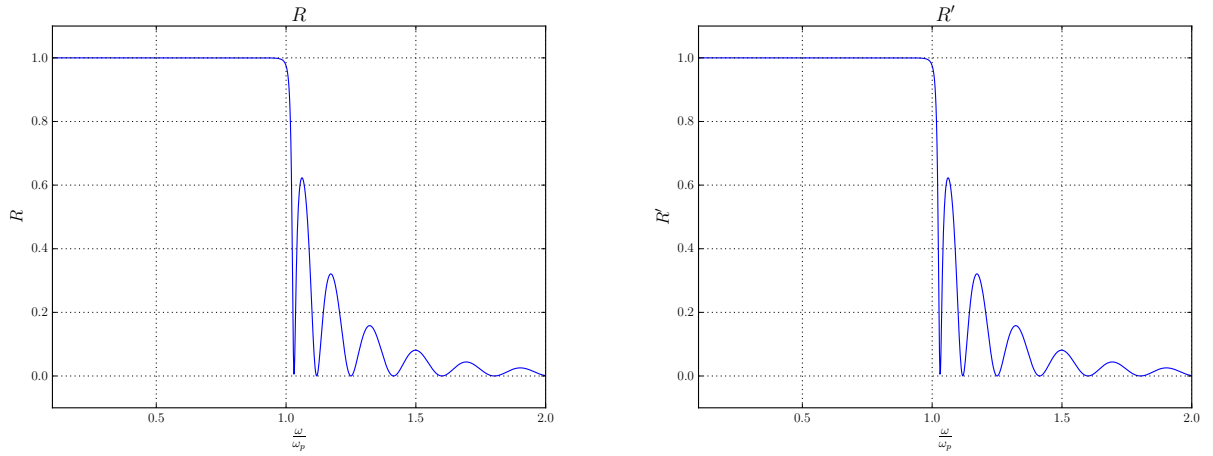


Figura 6: Reflectancias  $R$  y  $R'$

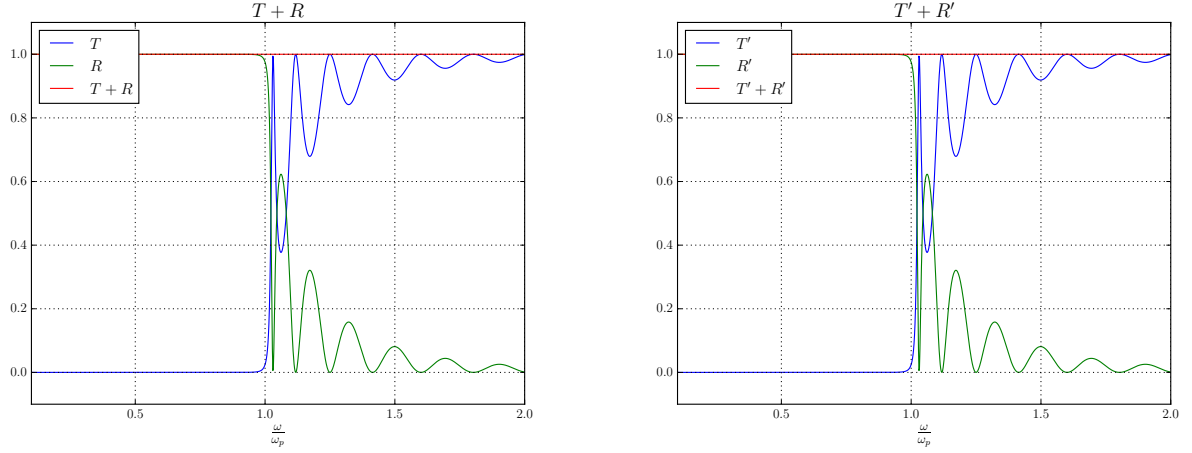


Figura 7: Suma de la reflectancia y la transmitancia. Con estas gráficas se confirma que  $R + T = 1$

### 1.d

Asumiendo que la onda incide desde la izquierda, grafique el campo eléctrico en función de la coordenada  $z$ , desde  $z = -d$  hasta  $z = 2d$ .

Al asumir que la onda incide desde la izquierda se tiene que el campo en la  $z = d$  es

$$\begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2^+ \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con esta condición se calcula y se gráfica el campo como función de la coordenada  $z$ . Se obtuvo el campo eléctrico para distintas frecuencias  $\omega$  menores y mayores que  $\omega_p$ . Las figuras 8, 9, 10, 11 y 12 muestran las gráficas del campo eléctrico total  $E_T$  y las componentes  $E_1^+$  y  $E_1^-$  para  $\omega/\omega_p = 0,5$ ,  $0,95$ ,  $0,999$ ,  $1,05$  y  $1,5$ , respectivamente.

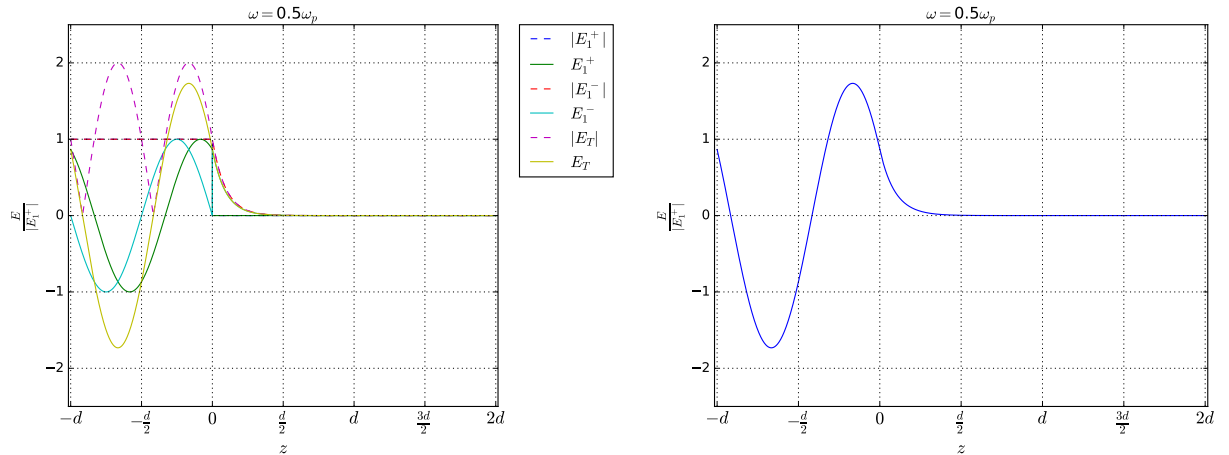


Figura 8: Campo eléctrico para  $\omega = 0,5\omega_p$

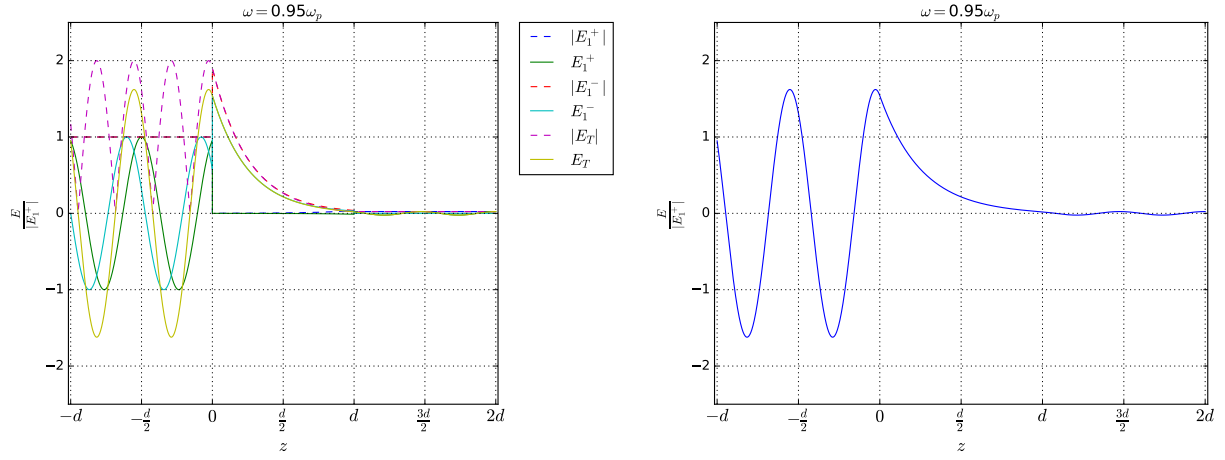


Figura 9: Campo eléctrico para  $\omega = 0,95\omega_p$

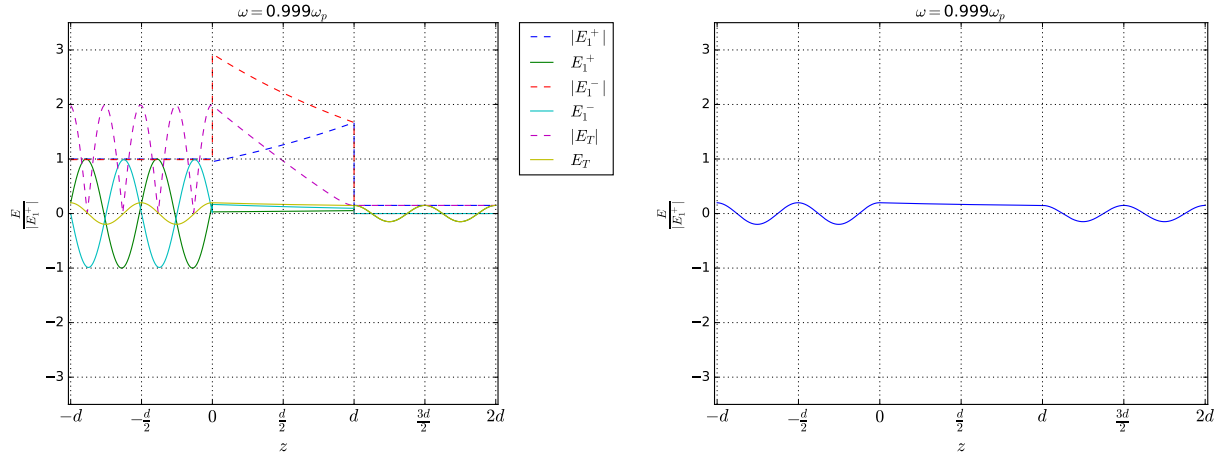


Figura 10: Campo eléctrico para  $\omega = 0,999\omega_p$

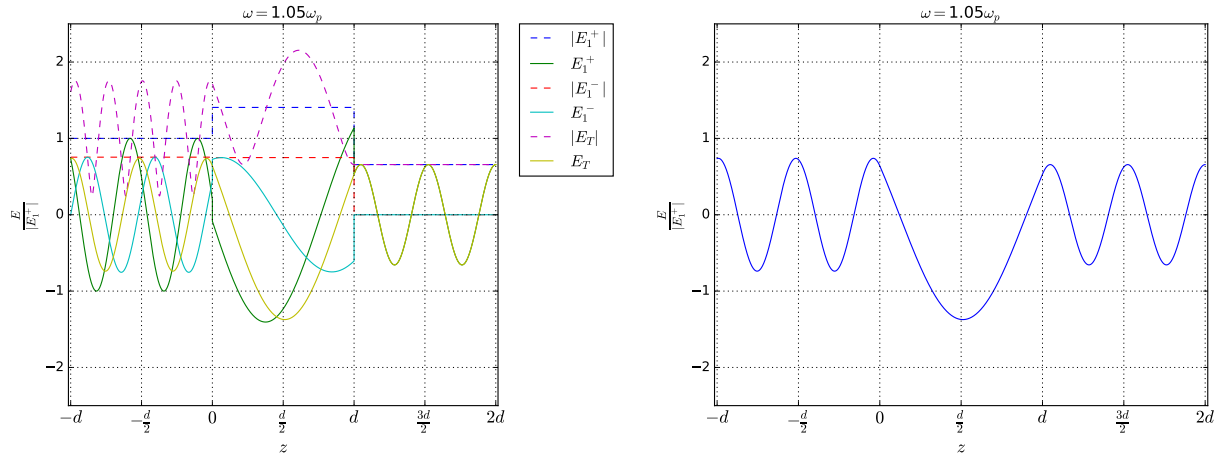


Figura 11: Campo eléctrico para  $\omega = 1,05\omega_p$

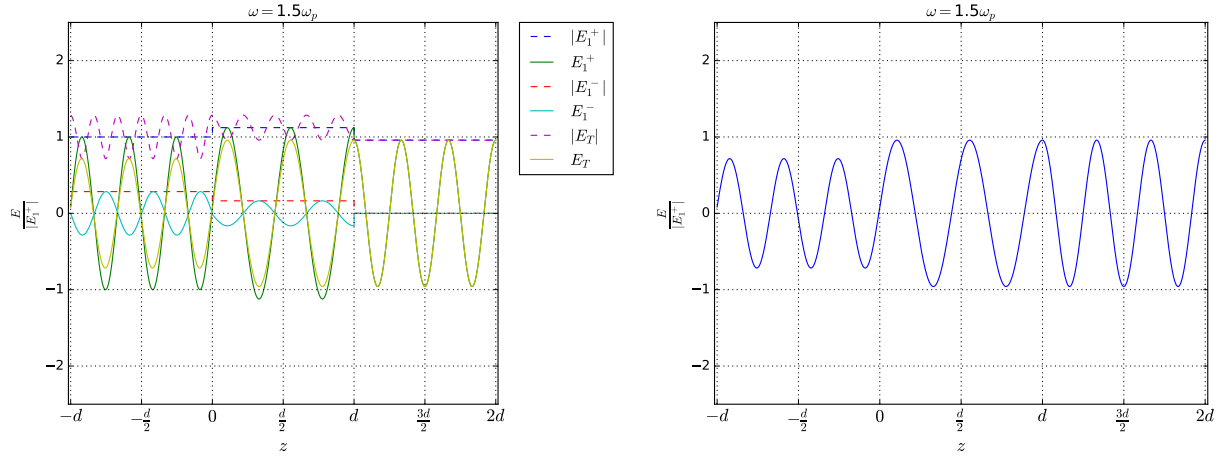


Figura 12: Campo eléctrico para  $\omega = 1,5\omega_p$

## Punto 2

Sea una geometría similar a la del problema 1, pero ahora asuma que el medio que se coloca a la derecha la lamina es un dieléctrico de permitividad  $2\varepsilon$ . Dar respuesta nuevamente a las mismas preguntas del problema 1.

### 2.a

Con esta nueva geometría, la matriz de transferencia se modifica como sigue:

$$T = \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} & 1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \\ 1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} & 1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-ik(\omega)d} & 0 \\ 0 & e^{ik(\omega)d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} + \sqrt{2} & \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} - \sqrt{2} \\ \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} - \sqrt{2} & \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} + \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

### 2.b

En las figuras 13, 14, 15 y 16 se muestran las gráficas de los coeficiente  $t$ ,  $r$ ,  $t'$  y  $r'$ , respectivamente.

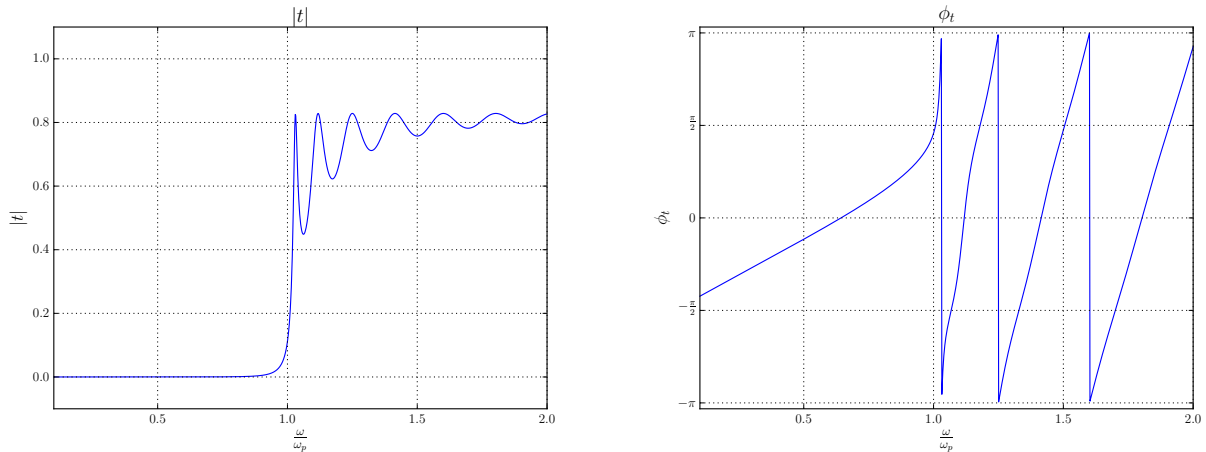


Figura 13: Coeficiente de transmisión  $t$

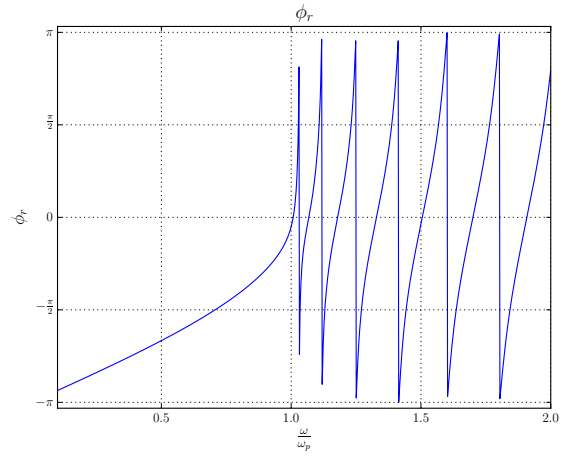
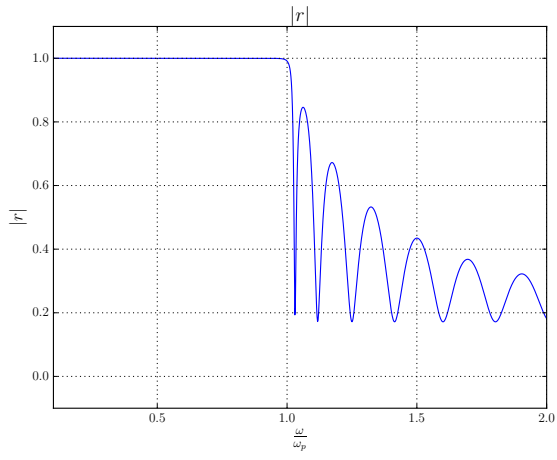


Figura 14: Coeficiente de reflexión  $r$

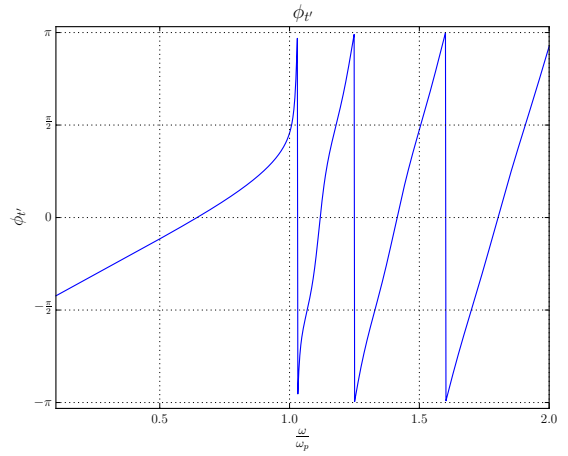
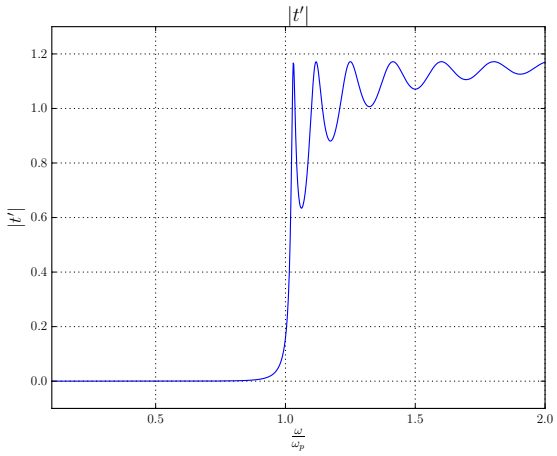


Figura 15: Coeficiente de transmisión  $t'$

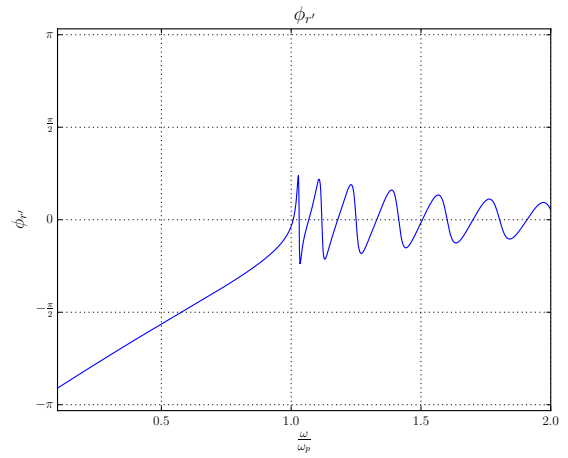
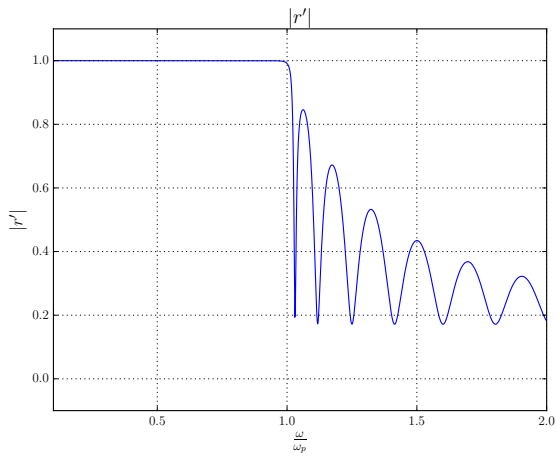


Figura 16: Coeficiente de reflexión  $r'$



## 2.c

En las figura 25 y 26 se muestra las gráficas de las transmitancias y las reflectancias respectivamente. En la figura 27 se muestran las gráficas de  $R + T$  y  $R' + T'$ .

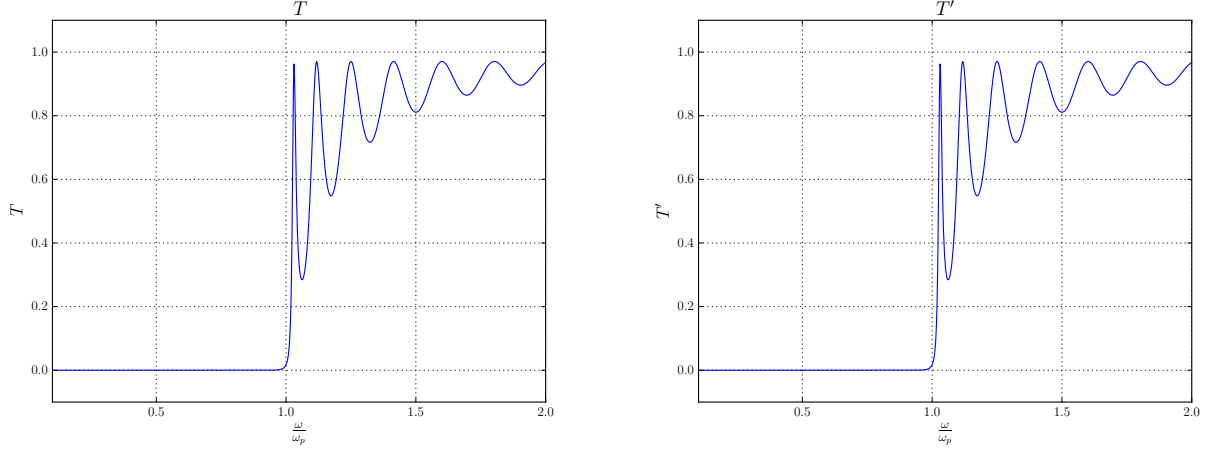


Figura 17: Transmitancias  $T$  y  $T'$

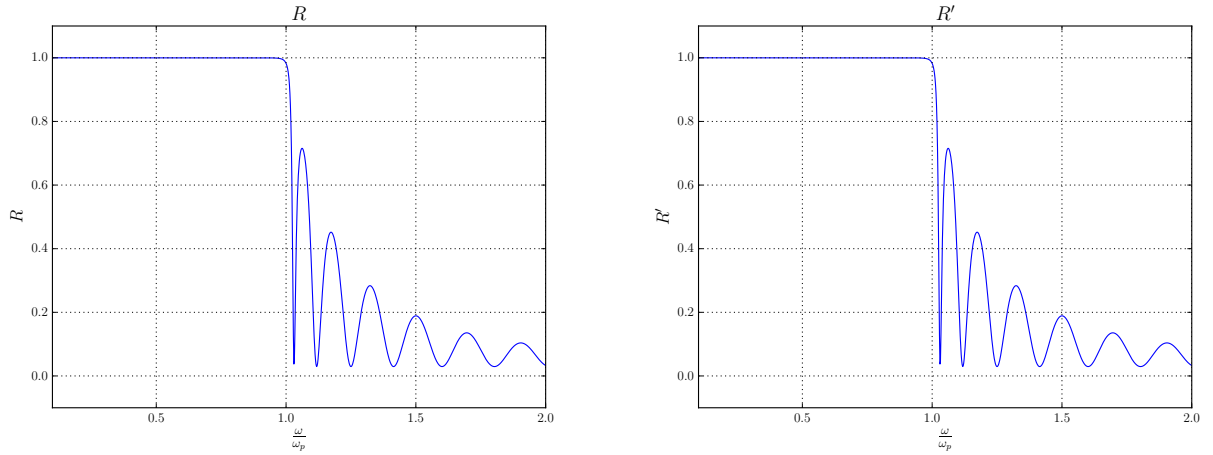


Figura 18: Reflectancias  $R$  y  $R'$

## 2.d

Al igual que en el punto 1.d se calculo el campo para distintos frecuencias  $\omega$ . Los resultados de la simulación se pueden encontrar en el repositorio junto a un gif animado que muestra la propagación respecto al tiempo para cada frecuencia. La figuras 20, muestran las gráficas del campo eléctrico total  $E_T$  para  $\omega/\omega_p = 0,5$ ,  $0,95$ ,  $1,05$  y  $1,5$ .

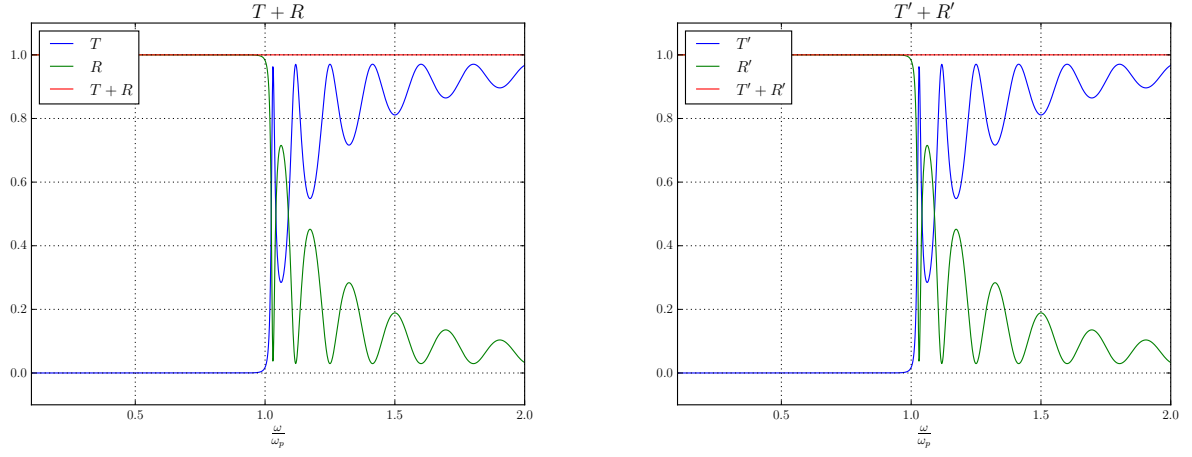


Figura 19: Suma de la reflectancia y la transmitancia. Con estas gráficas se confirma que  $R + T = 1$

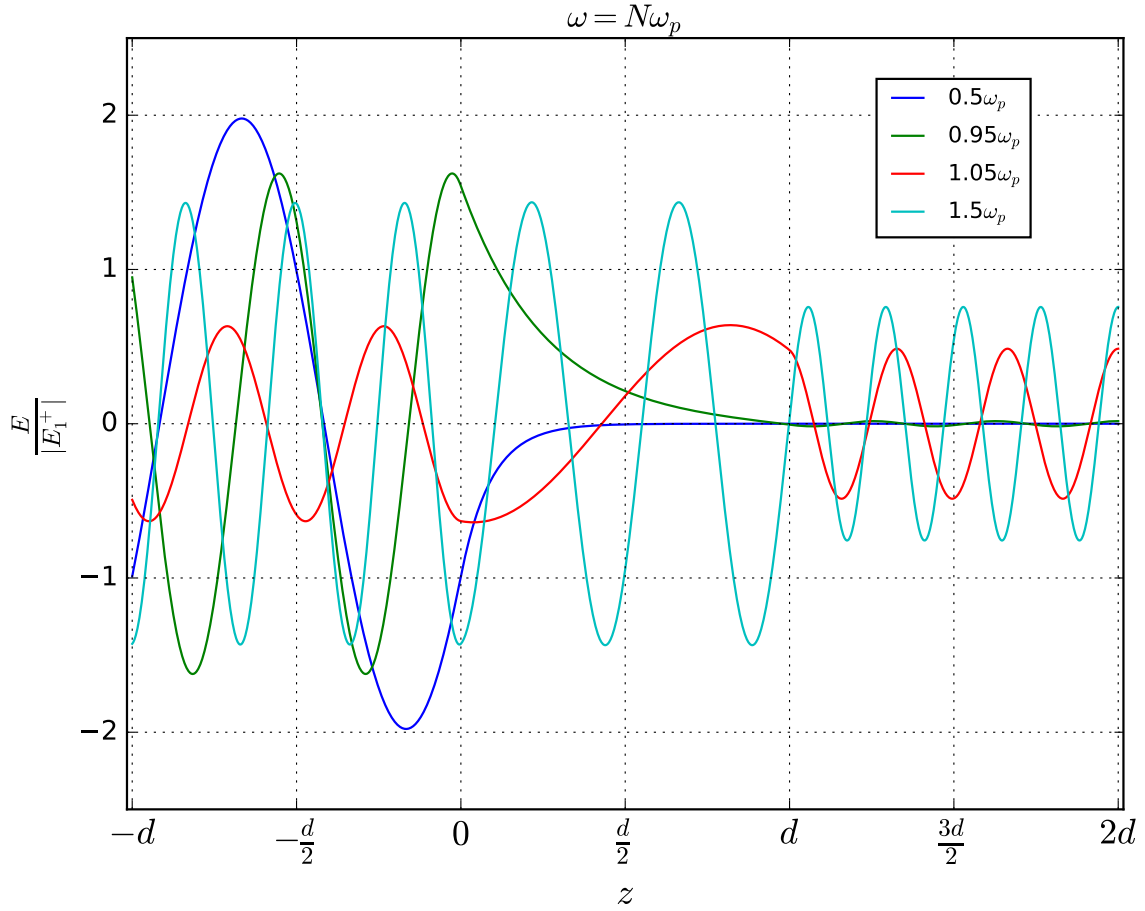


Figura 20: Campo electrico total para distintas frecuencias  $\omega$

## Punto 3

### 3.a

Con esta nueva geometría, la matriz de transferencia se modifica como sigue:

$$T = \frac{1}{8\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} & 1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \\ 1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} & 1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-ik(\omega)d} & 0 \\ 0 & e^{ik(\omega)d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} + \sqrt{2} & \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} - \sqrt{2} \\ \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} - \sqrt{2} & \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} + \sqrt{2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} e^{-ik_2d} & 0 \\ 0 & e^{ik_2d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} + 1 & \sqrt{2} - 1 \\ \sqrt{2} - 1 & \sqrt{2} + 1 \end{bmatrix}$$

### 3.b

En las figuras 21, 22, 23 y 24 se muestran las gráficas de los coeficiente  $t$ ,  $r$ ,  $t'$  y  $r'$ , respectivamente.

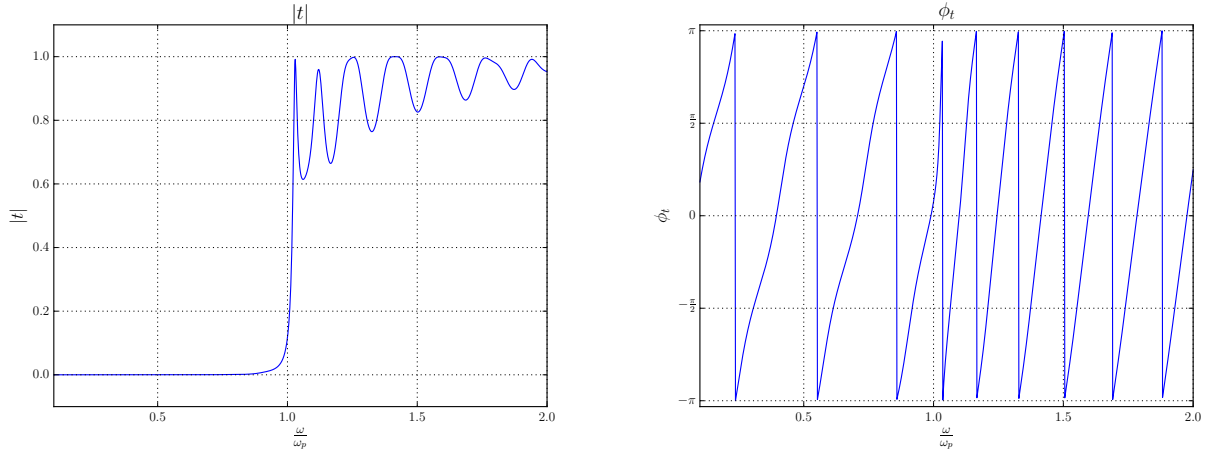


Figura 21: Coeficiente de transmisión  $t$

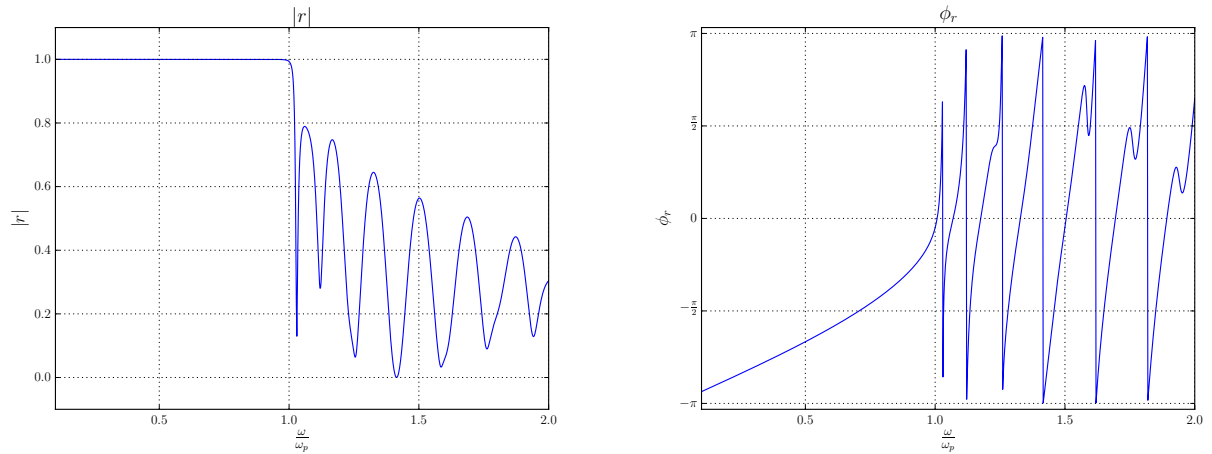


Figura 22: Coeficiente de reflexión  $r$

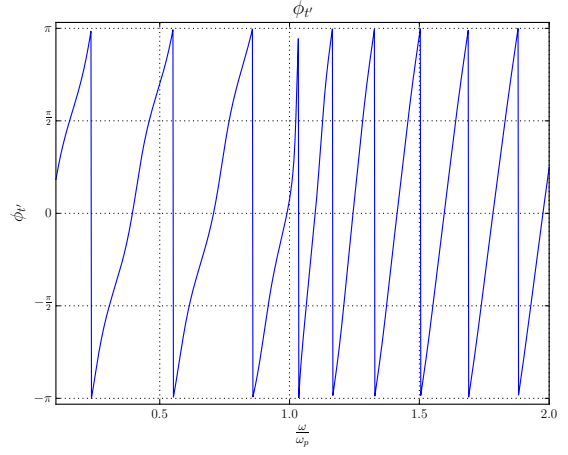
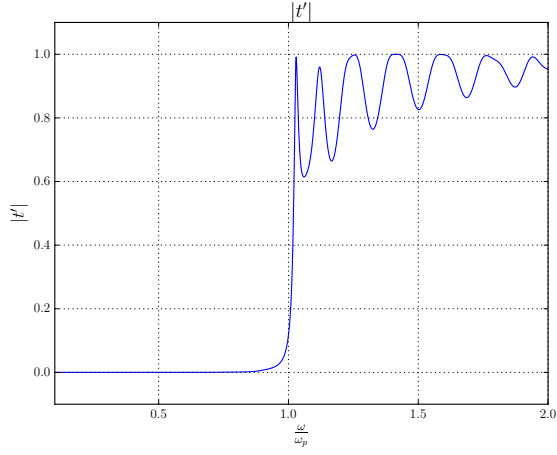


Figura 23: Coeficiente de transmisión  $t'$

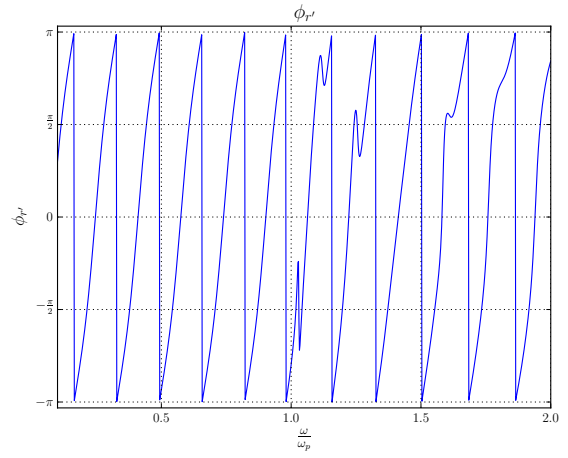
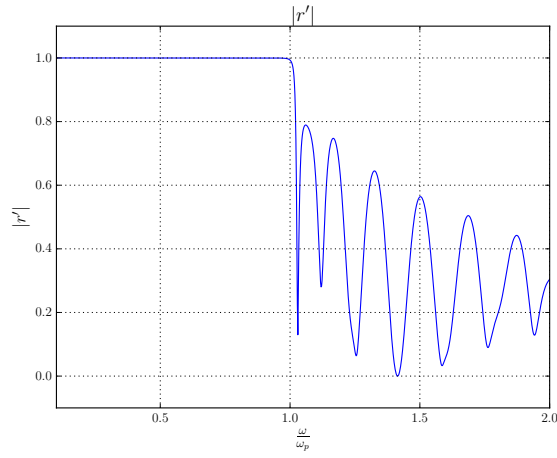


Figura 24: Coeficiente de reflexión  $r'$

### 3.c

En las figura 25 y 26 se muestra las gráficas de las transmitancias y las reflectancias respectivamente. En la figura 27 se muestran las gráficas de  $R + T$  y  $R' + T'$ .

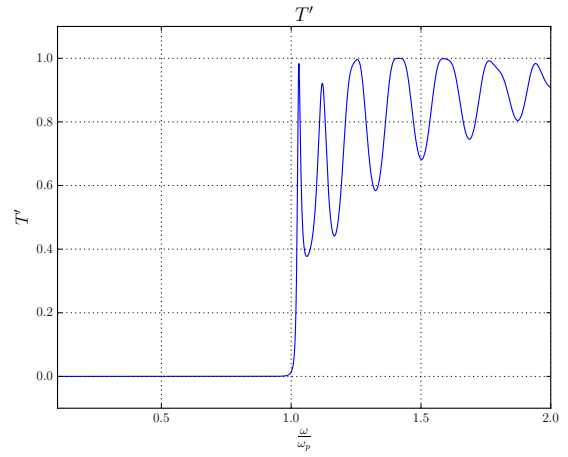
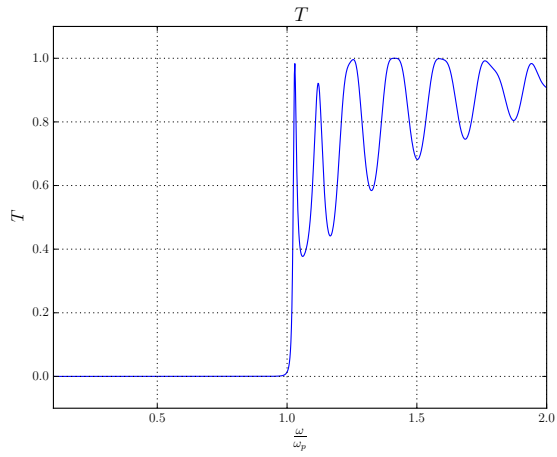


Figura 25: Transmitancias  $T$  y  $T'$

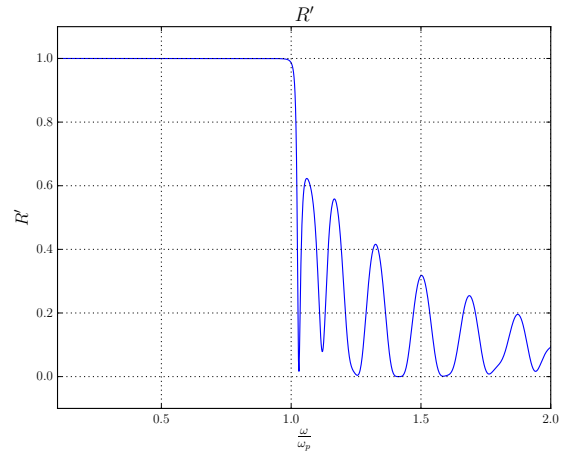
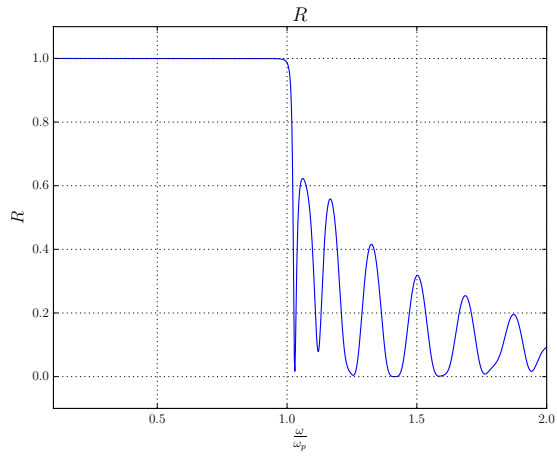


Figura 26: Reflectancias  $R$  y  $R'$

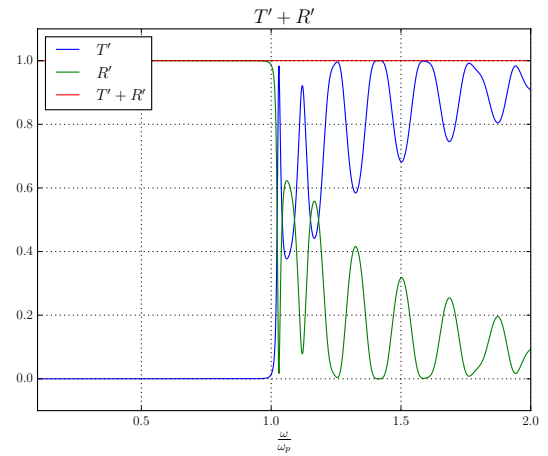
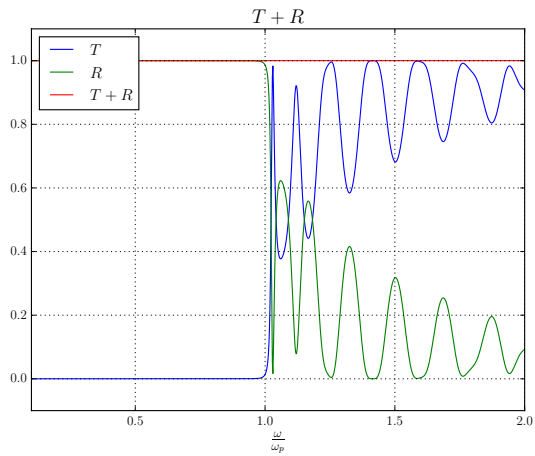


Figura 27: Suma de la reflectancia y la transmitancia. Con estas gráficas se confirma que  $R + T = 1$

### 3.d

Al igual que en el punto 1.d se calculo el campo para distintos frecuencias  $\omega$ . Los resultados de la simulación se pueden encontrar en el repositorio junto a un gif animado que muestra la propagación respecto al tiempo para cada frecuencia. La figuras 28, muestra las gráficas del campo eléctrico total  $E_T$  para  $\omega/\omega_p = 0,5, 0,95, 1,05$  y  $1,5$ .

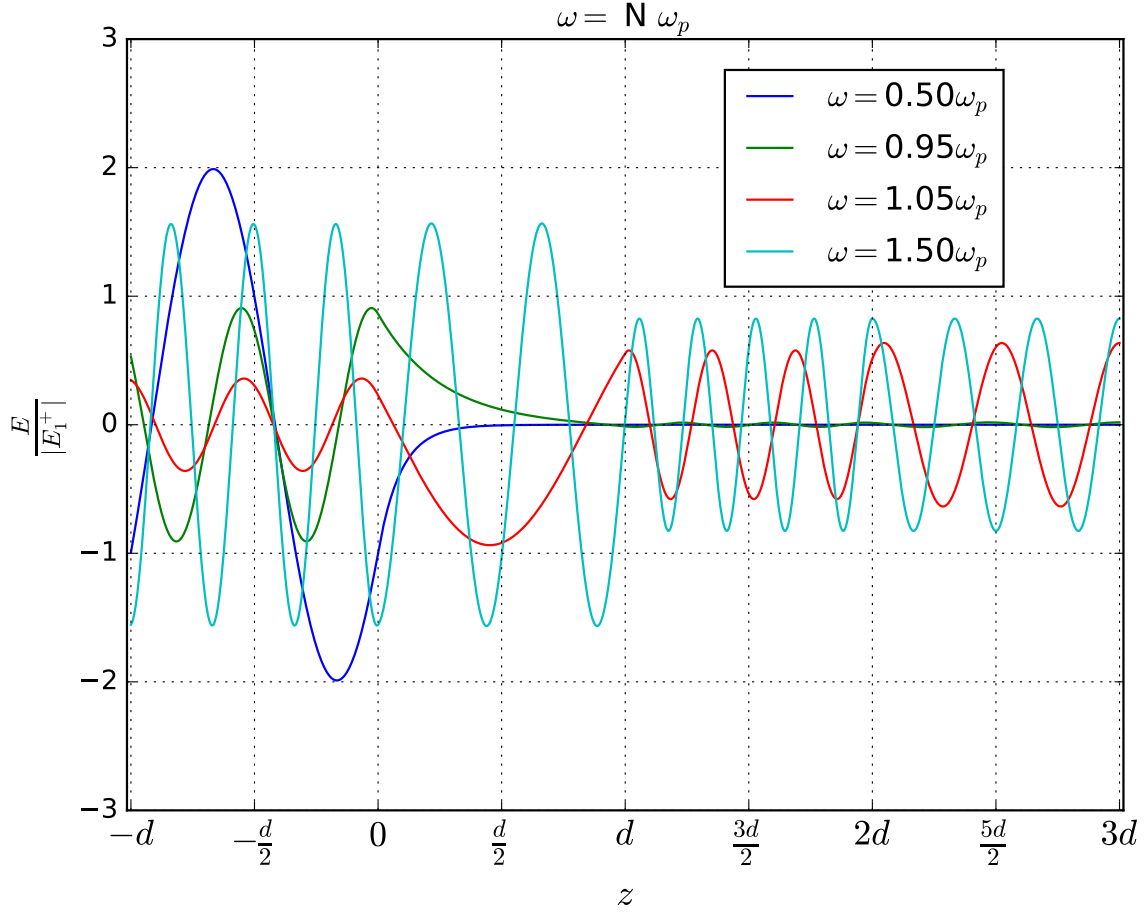


Figura 28: Campo electrico total para distintas frecuencias  $\omega$