

**PEMODELAN DINAMIKA PENYEBARAN PENYAKIT CAMPAK  
MENGUNAKAN MODEL SEIR BERBASIS RANTAI MARKOV**

*Laporan Ini Disusun untuk Memenuhi Projek Mata Kuliah Pengantar Proses  
Stokastik*

*Pengaplikasian Rantai Markov dalam Kehidupan Sehari – hari.*

**Dosen Pengampu : Madona Yunita Wijaya, M.Sc**



Disusun oleh :

Alifia Intan	11230940000016
Nazwah Laeza Camelia	11230940000034
Annisa Kusuma Wardani	11230940000038
Aisyah Anfaul Ummah	11230940000052

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SYARIF HIDAYATULLAH JAKARTA**

**2025M/1446 H**

## KATA PENGANTAR

*Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Puji syukur kami panjatkan kehadiran Allah SWT. karena atas rahmat dan kuasa-Nya kami dapat menyelesaikan makalah kami yang berjudul **“PEMODELAN DINAMIKA PENYEBARAN PENYAKIT CAMPAK MENGGUNAKAN MODEL SEIR BERBASIS RANTAI MARKOV”**. Makalah ini disusun sebagai Proyek Akhir semester 4 dari mata kuliah Pengantar Proses Stokastik pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Syarif Hidayatullah Jakarta.

Dalam proyek ini, kami menggunakan model SEIR untuk merepresentasikan status kesehatan individu di dalam suatu populasi. Dengan menggunakan pendekatan stokastik yang berbasis rantai markov dengan keadaan waktu diskrit, kami mensimulasikan peluang terjadinya transisi antar setiap status kesehatan dari waktu ke waktu dan menganalisis pengaruh parameter transisi terhadap kecepatan penyebaran serta pemulihan dari penyakit campak. Pendekatan ini diharapkan dapat memberikan penjelasan yang jelas tentang dinamika penyakit menular seperti campak.

Kami sebagai penulis memahami bahwa penulisan makalah Proyek Akhir ini tidak terlepas dari bimbingan, petunjuk, serta dukungan dari banyak pihak. Oleh karena itu, kami mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu kami dalam menyelesaikan makalah ini yang tidak bisa kami sebutkan satu-persatu.

Kami juga menyadari bahwa dalam penyusunan makalah ini masih terdapat kekurangan dan keterbatasan dalam penyajian maupun dalam analisisnya. Oleh karena itu, kami mengharapkan adanya kritik dan saran yang membangun sehingga di masa depan kami bisa melakukan perbaikan dan memperoleh hasil yang lebih baik lagi.

*Wassalammu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Tangerang Selatan, 12 Juni 2025

Penulis

## ABSTRACT

*Measles is one of the infectious diseases that still poses a threat to public health, especially in children. This study aims to model the dynamics of measles spread using a discrete time Markov chain-based SEIR (Susceptible-Exposed-Infectious-Recovered) approach. The model represents probabilistic transitions between individual health states through a transition matrix built based on epidemiological parameters such as infection rate ( $\beta$ ), incubation period ( $\sigma$ ), and recovery rate ( $\gamma$ ). Simulations were conducted for 100 days on the population of Malang Regency with an initial number of cases of 155 people. The results show that the peak of infection occurs on the 76th day, with the tendency of the system towards a steady state at the end of the simulation period. This approach provides insight into the dynamics of disease spread and supports intervention planning such as vaccination. Thus, the Markov chain-based SEIR model proved effective for analyzing and projecting the spread of infectious diseases in the community.*

**Keywords:** *Measles, SEIR Model, Markov Chain, Discrete Simulation, Infectious Disease, Epidemic Prediction, Compartmental Transition*

## ABSTRAK

Penyakit campak merupakan salah satu penyakit menular yang masih menjadi ancaman bagi kesehatan masyarakat, khususnya pada anak-anak. Penelitian ini bertujuan untuk memodelkan dinamika penyebaran campak menggunakan pendekatan SEIR (Susceptible–Exposed–Infectious–Recovered) berbasis rantai Markov waktu diskrit. Model ini merepresentasikan transisi probabilistik antar status kesehatan individu melalui matriks transisi yang dibangun berdasarkan parameter epidemiologis seperti laju infeksi ( $\beta$ ), masa inkubasi ( $\sigma$ ), dan laju pemulihan ( $\gamma$ ). Simulasi dilakukan selama 100 hari pada populasi Kabupaten Malang dengan jumlah kasus awal sebanyak 155 orang. Hasil menunjukkan bahwa puncak infeksi terjadi pada hari ke-76, dengan kecenderungan sistem menuju keadaan mantap pada akhir periode simulasi. Pendekatan ini memberikan wawasan terhadap dinamika penyebaran penyakit serta mendukung perencanaan intervensi seperti vaksinasi. Dengan demikian, model SEIR berbasis rantai Markov terbukti efektif untuk menganalisis dan memproyeksikan penyebaran penyakit menular di masyarakat.

**Kata kunci:** Campak, Model SEIR, Rantai Markov, Simulasi Diskrit, Penyakit Menular, Prediksi Epidemi, Transisi Kompartemen

## DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	i
ABSTRAK .....	ii
BAB I.....	1
PENDAHULUAN.....	1
1.1    Latar Belakang.....	1
1.2    Rumusan Masalah.....	2
1.3    Tujuan dan Manfaat .....	2
BAB II.....	3
KAJIAN TEORI .....	3
2.1    Proses Stokastik.....	3
2.2    Rantai Markov dalam Proses Stokastik .....	3
2.3    Matriks Transisi.....	4
2.4    Diagram Transisi .....	5
2.5    Transisi 2 Langkah .....	5
2.6    Transisi n Langkah .....	6
2.7    Klasifikasi Keadaan Rantai Markov .....	6
2.8    Limit Peluang Transisi.....	7
BAB III.....	9
METODOLOGI.....	9
3.1    Metode Data .....	9
3.2    Metode penelitian .....	9
3.3    Metode Analisis Data.....	10
BAB IV .....	12
HASIL DAN PEMBAHASAN .....	12
4.1    Model Matematika: Rantai Markov SEIR .....	12
4.1.1    Matriks Transisi.....	14
4.1.2    Diagram Transisi .....	15
4.2    Analisis Dinamika Kompartmen Menggunakan Rantai Markov .....	15
4.2.1    Hasil Simulasi Dinamika Kompartmen S, E, I, R .....	17
4.3    Analisis Puncak Infeksi dan Konvergensi Menuju Keadaan Tetap .....	20

BAB V.....	23
PENUTUP .....	23
5.1    Kesimpulan.....	23
5.2    Saran .....	23
DAFTAR PUSTAKA .....	24

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Salah satu permasalahan kesehatan global adalah penyakit menular yang dapat memberikan pengaruh signifikan terhadap populasi jika tidak ditangani dengan segera dan efektif. Campak adalah penyakit yang sangat menular yang disebabkan oleh virus. Penyakit ini dengan cepat menyebar ketika individu yang terinfeksi bernapas, batuk, atau bersin. Campak dapat menyebabkan penyakit yang parah, komplikasi, dan bahkan kematian. Campak bisa menyerang siapa saja, namun biasanya terjadi pada anak-anak. Campak menginfeksi saluran pernapasan dan kemudian menyebar ke seluruh tubuh. Gejalanya meliputi demam tinggi, batuk, pilek, dan ruam di seluruh tubuh. Meskipun begitu terdapat vaksin campak untuk penanganannya. Namun dengan angka yang cukup signifikan, campak masih bisa terjadi terutama pada anak-anak. Penyakit ini memiliki masa inkubasi yang relatif lama, serta tingkat penularan yang tinggi, sehingga memerlukan pendekatan khusus untuk memahami dan mengendalikan penyebarannya.

Dalam penganalisaannya, metode matematis sangatlah dibutuhkan untuk mempelajari dinamika penyebaran penyakit campak. Salah satu model yang banyak digunakan adalah model SEIR (Susceptible–Exposed–Infected–Recovered), yang membagi populasi menjadi empat kategori berdasarkan status infeksi individu. Model ini juga memperhatikan fase saat terpapar penyakit (Exposed), yang sangat relevan untuk penyakit seperti campak yang memiliki periode inkubasi sebelum individu menjadi menular.

Melalui pendekatan Discrete Time Markov Chain (DTMC) dalam model SEIR memungkinkan representasi probabilistik dari transisi antar kompartemen dalam interval waktu diskrit. Dengan pendekatan ini, penyebaran penyakit dapat diilustrasikan melalui sebuah matriks transisi, yang menunjukkan kemungkinan perpindahan individu dari satu status ke status lainnya dalam satu langkah waktu. Matriks transisi ini dibuat berdasarkan parameter biologis dan epidemiologis campak yang diambil dari literatur, seperti laju infeksi ( $\sigma$ ), laju kesembuhan ( $\gamma$ ), serta nilai reproduksi dasar ( $R_0$ ).

Dengan ini, kita dapat mensimulasikan evolusi penyebaran penyakit campak secara numerik dan memprediksi dampaknya dalam populasi. Model ini juga berguna untuk menilai efektivitas intervensi kesehatan seperti vaksinasi atau peningkatan tingkat kesembuhan. Oleh karena itu, penyusunan

dan analisis model SEIR berbasis Markov Chain sangat penting dalam perencanaan pengendalian penyakit menular seperti campak.

## **1.2 Rumusan Masalah**

1. Bagaimana membangun model matematika yang sesuai untuk menggambarkan dinamika penyebaran penyakit campak pada populasi besar?
2. Bagaimana perubahan jumlah individu dalam setiap kompartemen (Susceptible, Exposed, Infectious, Recovered) seiring waktu dapat dianalisis menggunakan pendekatan rantai Markov?
3. Berapa lama waktu yang dibutuhkan hingga jumlah individu terinfeksi mencapai puncaknya dan bagaimana laju penyebaran penyakit campak memengaruhi waktu menuju keadaan mantap (steady state)?

## **1.3 Tujuan dan Manfaat**

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menganalisis perubahan jumlah individu dalam setiap kompartemen seiring waktu, dan menentukan waktu puncak infeksi. Sedangkan manfaat dari penelitian ini adalah untuk mengetahui dan memahami penerapan Rantai Markov dalam kehidupan sehari-hari khususnya pada kasus yang kami teliti.

## BAB II KAJIAN TEORI

### 2.1 Proses Stokastik

Proses stokastik  $\{X_t, t \in T\}$  adalah kumpulan variabel acak dengan indeks  $t$ , dimana  $t$  umumnya diartikan sebagai waktu. Oleh karena itu,  $X_t$  adalah keadaan (state) dari suatu proses stokastik pada waktu ke- $t$ . Contohnya  $X(t) = i$  artinya adalah proses stokastik tersebut ada dalam keadaan  $i$  pada waktu ke- $t$ . Dimana  $T$  sendiri adalah himpunan indeks waktu dari proses stokastik tersebut. Dan nilai yang diasumsikan oleh peubah acak  $X_t$  disebut sebagai keadaan (state) dan koleksi semua keadaan yang memungkinkan disebut dengan ruang keadaan (state space), biasanya state space dilambangkan dengan  $S$ . Proses stokastik dapat dibedakan berdasarkan waktu dan keadaan.

Berdasarkan waktu, proses stokastik dapat dibedakan menjadi 2, yaitu:

- Proses stokastik waktu diskrit, jika himpunan indeks waktu  $T$  adalah himpunan yang dapat dihitung. Contohnya:  $\{X_t, t = 0, 1, 2, \dots\}$ .
- Proses stokastik waktu kontinu, jika  $T$  adalah suatu selang dalam bilangan real. Contohnya:  $\{X_t, t \geq 0\}$ .

Berdasarkan keadaan (state), proses stokastik dapat dibedakan menjadi 2, yaitu:

- Proses stokastik dengan keadaan diskrit, jika ruang keadaannya merupakan himpunan yang terhingga. Contohnya:  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$
- Proses stokastik dengan keadaan kontinu, jika ruang keadaannya merupakan suatu selang pada bilangan real. Contoh:  $S = \{X(t) \geq 0\}$ .

### 2.2 Rantai Markov dalam Proses Stokastik

Rantai Markov atau proses Markov adalah proses stokastik yang menggambarkan urutan kejadian yang mungkin di mana probabilitas setiap kejadian hanya bergantung pada keadaan yang dicapai pada kejadian sebelumnya. Suatu proses stokastik  $\{X_t, t = 0, 1, 2, \dots\}$  disebut juga sebagai Rantai Markov apabila peluang bersyarat berikut terpenuhi:

$$P(X_{t+1} = j | X_t = i_{t-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{t+1} = j | X_t = i) = P_{ij}^{(t, t+1)}$$

untuk setiap nilai  $i_0, i_1, \dots, i_{t-1}, i, j$  dan  $t \geq 0$ .

Persamaan tersebut menunjukkan bahwa distribusi bersyarat  $X_{t+1}$  jika diberikan semua riwayat keadaan sebelumnya sampai waktu ke-  $t$ , hanya bergantung pada keadaan sekarang. Hal ini merupakan sifat markov atau memoryless, dimana masa depan hanya dipengaruhi oleh kondisi saat ini. Nilai  $p_{ij}^{(t,t+1)}$  disebut sebagai peluang transisi satu langkah dari keadaan  $i$  (pada waktu  $t$ ) ke keadaan  $j$  (pada waktu  $t + 1$ ). Peluang transisi ini secara umum dapat merupakan fungsi terhadap waktu. Jika peluang transisi tidak bergantung pada waktu  $t$ , maka rantai markov dikatakan memiliki peluang transisi stasioner, yaitu:

$$p_{ij}^{(t,t+1)} = p_{ij}, \text{ untuk setiap } t.$$

Dalam hal ini,  $p_{ij}$  disebut peluang transisi satu langkah dari keadaan  $i$  ke keadaan  $j$ , jika:

- $p_{ij} \geq 0$ .
- $i, j \geq 0$ ,
- $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1$

Artinya, dari suatu keadaan  $i$ , jumlah seluruh peluang untuk berpindah ke semua kemungkinan keadaan  $j$  harus berjumlah satu, sesuai dengan sifat distribusi probabilitas.

### 2.3 Matriks Transisi

Matriks transisi merupakan sebuah matriks yang menunjukkan peluang berpindah dari satu keadaan (state) ke keadaan lainnya dalam sebuah proses stokastik, terutama pada model rantai Markov.

Peluang transisi satu langkah dapat disusun ke dalam suatu matriks  $P = [p_{ij}]$  yang disebut transisi atau matrik stokastik. Bentuk dari matriks transisi akan selalu berbentuk matriks persegi dimana banyaknya kolom akan sama dengan banyaknya keadaan. Matriks transisi dapat dituliskan sebagai berikut :

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \dots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

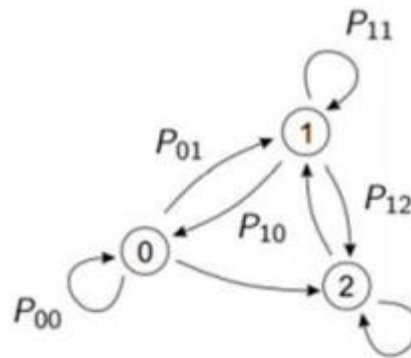
Matriks transisi juga memiliki beberapa sifat atau karakteristik, yaitu:

- 1) Memiliki jumlah kolom dan baris yang sama atau matriks bujursangkar
- 2) Jumlah unsur-unsur disetiap baris adalah satu

- 3) Tidak selalu memiliki jumlah unsur-unsur di setiap kolom sama dengan satu
- 4) Unsur matriks bernilai antara nol dan satu

## 2.4 Diagram Transisi

Peluang transisi satu langkah juga dapat digambarkan dengan menggunakan diagram transisi yang menyatakan keadaan-keadaan yang terjadi dan peluang perpindahan dari keadaan satu ke keadaan yang lainnya. Diagram transisi dapat dituliskan sebagai berikut :



Pada diagram ini, setiap keadaan digambarkan sebagai simpul (node), sedangkan perpindahan antar keadaan ditunjukkan dengan panah yang mencantumkan arah dan nilai probabilitas transisinya.

## 2.5 Transisi 2 Langkah

Matrik stokastik dua langkah didefinisikan pada ruang keadaan yang sama namun ruang waktu dua langkah dari periode  $t$  ke  $t + 2$  untuk setiap  $t$ . Dengan perpindah dari keadaan  $i$  ke keadaan  $j$  dalam dua langkah transisi. Elemen matrik stokastik dua langkah disebut peluang transisi 2 langkah:

$$p_{ij}^2 = P(X_{k+2} = j | X_k = i)$$

Matriks stokastik transisi 2 langkah dapat diselesaikan dengan matriks itu sendiri, sehingga:

$$\begin{aligned}
 P^2 &= P \times P \\
 &= \begin{bmatrix} P_{00}^2 & P_{10}^2 \\ P_{01}^2 & P_{11}^2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P_{00} & P_{10} \\ P_{01} & P_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{00} & P_{10} \\ P_{01} & P_{11} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} P_{00}P_{00} + P_{10}P_{01} & P_{00}P_{10} + P_{10}P_{11} \\ P_{01}P_{00} + P_{11}P_{01} & P_{01}P_{10} + P_{11}P_{11} \end{bmatrix}$$

## 2.6 Transisi n Langkah

Sama halnya dengan transisi 2 langkah, transisi n langkah merupakan ruang keadaan yang sama namun ruang waktu dua langkah dari periode  $t$  ke  $t + n$  untuk setiap  $t$ . Secara umum, transisi n langkah didefinisikan:

$$p_{ij}^n = P\{X_{t+n} = j | X_t = i\}, \text{ untuk } n \geq 0, \text{ dan } i, j \geq 0.$$

$P^{(n)}$  menyatakan matriks probabilitas transisi n-langkah  $p_{ij}^n$ . Solusi lainnya dengan mengalikan matriks  $P$  hingga jumlah  $n$ :

$$P^{(n)} = P \times P \times P \times \dots$$

## 2.7 Klasifikasi Keadaan Rantai Markov

### a. Dapat Diakses (Accessible)

Suatu keadaan  $j$  dikatakan dapat diakses dari keadaan  $i$  (ditulis  $i \rightarrow j$ ) jika terdapat peluang positif bahwa proses dapat berpindah dari  $i$  ke  $j$  dalam sejumlah langkah tertentu, yaitu

$$P_{ij}^n > 0 \text{ untuk suatu } n \geq 0$$

### b. Berkomunikasi

Dua keadaan  $i$  dan  $j$  dikatakan berkomunikasi jika  $i \rightarrow j$  dan  $j \rightarrow i$ . Ini berarti proses dapat bergerak bolak-balik antara kedua keadaan tersebut.

Hubungan komunikasi memiliki sifat:

- Refleksif : Setiap keadaan berkomunikasi dengan dirinya sendiri.
- Simetris : Jika  $i \leftrightarrow j$  maka  $j \leftrightarrow i$
- Transitif : Jika  $i \leftrightarrow j$  dan  $j \leftrightarrow k$  maka  $i \leftrightarrow k$

### c. Tidak Dapat Direduksi (Irreducible)

Sebuah rantai Markov disebut irreducible jika seluruh keadaannya berada dalam satu kelas, artinya setiap keadaan saling berkomunikasi dengan yang lain.

### d. Periodik

Periode suatu keadaan  $i$  didefinisikan sebagai pembagi terbesar bersama (gcd) dari semua  $n \geq 1$  sedemikian sehingga  $P_{ii}^n > 0$ .

- Jika  $d(i) = 1$ , maka keadaan disebut aperiodik.
  - Jika  $d(i) > 1$ , maka keadaan disebut periodik.
  - Jika suatu keadaan memiliki transisi diri langsung ( $p_{ii} > 0$ ) maka pasti aperiodik.
  - Semua keadaan dalam satu kelas memiliki periode yang sama.
- e. Keadaan Recurrent dan Transient
- Suatu keadaan  $i$  disebut recurrent jika peluang untuk kembali ke keadaan  $i$  dari keadaan  $i$  adalah 1.
  - Suatu keadaan disebut transient jika peluang untuk kembali ke keadaan tersebut kurang dari 1.
  - Secara matematis:
    - Recurrent jika  $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$
    - Transient jika  $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$

## 2.8 Limit Peluang Transisi

### a) Konvergensi Peluang Transisi

Pada rantai Markov, peluang transisi  $P_{ij}^{(n)}$  menunjukkan peluang bahwa sistem berpindah dari keadaan  $i$  ke keadaan  $j$  dalam  $n$  langkah. Untuk banyak kasus, ketika  $n \rightarrow \infty$ , peluang transisi ini akan konvergen ke suatu nilai tertentu, yaitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j$$

Nilai limit ini disebut peluang limit atau peluang jangka panjang, dan umumnya tidak bergantung pada keadaan awal  $i$ .

Namun, tidak semua rantai Markov memiliki limit peluang transisi. Salah satu penyebabnya adalah periodisitas. Jika rantai Markov bersifat periodik (misal hanya dapat kembali ke suatu keadaan dalam kelipatan tertentu), maka peluang transisi dapat terus berfluktuasi dan tidak mencapai limit. Meskipun peluang transisi bisa konvergen, dalam beberapa kasus limitnya bergantung pada keadaan awal, terutama jika ada keadaan yang transient (keadaan yang mungkin tidak pernah dikunjungi lagi setelah waktu tertentu).

### b) Keadaan Ergodik

- Suatu keadaan disebut positive recurrent jika waktu harapan untuk kembali ke keadaan tersebut hingga.
- Jika keadaan tersebut juga aperiodik, maka disebut ergodik.

- Sebuah rantai Markov dikatakan ergodik jika:
    - Ia irreducible (semua keadaan saling berkomunikasi)
    - Semua keadaannya ergodik.
- c) Teorema Limit Peluang Transisi

Jika rantai Markov adalah ergodik, maka:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j$$

dan  $\pi_j$  memenuhi sistem persamaan:

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}, \text{ dengan } \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$$

Nilai  $\pi_j$  ini mewakili proporsi waktu jangka panjang bahwa sistem berada di keadaan  $j$ .

Jika limit peluang transisi eksis dan independen dari keadaan awal, maka limit dari matriks transisi pangkat- $n$  adalah:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \cdots \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \cdots \end{bmatrix}$$

## **BAB III**

### **METODOLOGI**

#### **3.1 Metode Data**

Kami menggunakan metode literatur jurnal dari rujukan untuk mengkaji serta meneliti data hasil penelitian yang telah diolah dalam jurnal. Metode kepustakaan atau sering disebut studi literatur, merupakan cara untuk mengumpulkan informasi dari berbagai sumber tertulis seperti buku, artikel jurnal, dokumen resmi, dan laporan penelitian sebelumnya. Metode ini dimulai dengan mencari jurnal yang terdapat data yang relevan, menganalisis data hasil penelitian, dan menginterpretasikannya. Pelaksanaan awal metode ini melalui studi pustaka, studi kasus, studi komparatif, studi waktu dan gerak, analisis tingkah laku, dan analisis dokumenter. Sumber data yang diperoleh adalah data sekunder yang bersumber dari laporan penelitian sebuah jurnal.

#### **3.2 Metode penelitian**

Langkah-langkah yang dilakukan dalam proses penelitian adalah sebagai berikut:

1. Pengumpulan data

Langkah pertama ialah mencari dan meneliti berbagai sumber literatur yang terpercaya. Dengan menyeleksi jurnal atau laporan penelitian yang mengandung data relevan mengenai penyakit campak dengan pendekatan matematika dengan model SEIR.

2. Menganalisis dan menentukan parameter model

Setelah mendapatkan literasi yang sesuai, langkah selanjutnya yaitu menganalisis data yang tersedia. Lalu menentukan beberapa parameter dalam pemodelan seperti tingkat penularan ( $\beta$ ), periode inkubasi ( $\alpha$ ), tingkat pemulihan ( $\gamma$ ), dll.

3. Menyusun Matriks Peluang Transisi Markov

Matriks transisi ini dibuat untuk menunjukkan peluang berpindahnya individu dari satu status kesehatan ke status kesehatan lainnya. Seperti dari keadaan rentan (S), menjadi keadaan terpapar (E), lalu menjadi keadaan menular (I), dan kemudian keadaan sembuh (R). Diagram transisi juga disusun sebagai representasi visual untuk memudahkan pemahaman alur perubahan status kesehatan dalam model Rantai Markov yang dibangun.

#### 4. Simulasi dan Prediksi Dinamika Penyebaran Penyakit

Setelah memodelkan dan menyusun matriks transisi, dilakukan simulasi untuk melihat dinamika penyebaran campak dalam suatu populasi. Simulasi ini dilakukan dengan bantuan perangkat lunak seperti Python, atau RStudio. Lalu dilakukan secara iteratif untuk memproyeksikan perubahan jumlah individu dalam setiap kompartemen (S, E, I, R) pada setiap langkah waktu.

#### 5. Penarikan kesimpulan

Berdasarkan hasil simulasi dan grafik perubahan kompartemen, disimpulkan bagaimana perubahan jumlah individu dalam kompartemen S, E, I, dan R dapat dianalisis secara efektif menggunakan pendekatan rantai Markov, pada hari seberapa waktu puncak infeksi terjadi dan menuju keadaan mantap (Steady State).

### 3.3 Metode Analisis Data

Analisis data dilakukan untuk menjelaskan pola penyebaran penyakit campak dari kondisi satu status individu ke kondisi lainnya dalam populasi masyarakat Kabupaten Malang. Analisis ini dilakukan secara deskriptif dengan menggunakan pendekatan model SEIR berbasis Rantai Markov waktu diskrit. Pendekatan ini digunakan untuk mempermudah analisis dalam menggambarkan dinamika perubahan kompartemen individu (Susceptible Exposed Infectious Recovered) dari waktu ke waktu.

Besarnya peluang transisi pada model ini dianalisis menggunakan persamaan:

$$P_{ij}(t) = \frac{n_{ij}(t)}{n_i(t)}$$

Dengan:

- $P_{ij}(t)$ : Peluang transisi dari keadaan  $i$  ke keadaan  $j$  pada waktu  $t$ .
- $n_{ij}(t)$ : Jumlah individu yang berpindah dari kompartemen  $i$  ke  $j$  pada waktu  $t$ .
- $n_i(t)$ : Jumlah total individu pada kompartemen  $i$  pada waktu  $t$ .

Analisis dilakukan melalui tabel data tentang jumlah individu di setiap kompartemen SEIR dari waktu ke waktu, kemudian dihitung proporsi perubahan untuk memperoleh peluang untuk transisi antar kompartemen. Parameter epidemiologi seperti tingkat penularan ( $\beta$ ), masa inkubasi ( $\sigma$ ), dan

tingkat pemulihan ( $\gamma$ ) digunakan untuk mendefinisikan peluang perpindahan antar status.

Prediksi jumlah individu pada setiap kompartemen di masa mendatang dilakukan menggunakan pendekatan deskriptif berikut:

$$X(t) = X(t - 1)P$$

Dengan:

- $X(t)$ : Vektor jumlah individu dalam setiap kompartemen SEIR pada waktu ke- $t$
- $X(t - 1)$ : Vektor jumlah individu pada waktu sebelumnya
- $P$ : Matriks peluang transisi antar kompartemen

Matriks transisi  $P$  disusun berdasarkan parameter epidemiologi, antara lain tingkat penularan ( $\beta$ ), laju perpindahan dari Exposed ke Infectious ( $\sigma$ ), dan laju pemulihan ( $\gamma$ ). Nilai sendiri dihitung dari persamaan:

$$\beta = \frac{K}{D \times N}$$

Dengan:

- $K$ : Angka reproduksi dasar ( $R_0$ )
- $D$ : Durasi infektivitas
- $N$ : Jumlah total populasi

Persamaan tersebut menunjukkan bahwa jumlah individu pada setiap kondisi kesehatan di masa mendatang dapat diprediksi dengan mengalikan kondisi saat ini dengan peluang transisinya. Dengan metode ini, dapat dianalisis apakah penyakit akan menyebar luas, tetap berada dalam populasi (endemik), atau menghilang seiring berjalannya waktu.

Analisis ini akan dilakukan pada salah satu skenario nilai  $R_0$  (angka reproduksi dasar) yaitu 5, untuk melihat bagaimana tingkat penularan mempengaruhi dinamika penyebaran penyakit campak. Hasil simulasi disusun dan divisualisasikan untuk menganalisis:

- Jumlah individu yang terinfeksi tertinggi
- Jangka waktu penyebaran penyakit
- Perbandingan antar skenario
- Potensi tercapainya kekebalan kelompok

Dengan memanfaatkan pendekatan ini, diharapkan dapat diperoleh gambaran yang lebih jelas mengenai pola penyebaran penyakit campak serta proyeksi jumlah individu di masing-masing kompartemen di masa mendatang.

## BAB IV

### HASIL DAN PEMBAHASAN

#### 4.1 Model Matematika: Rantai Markov SEIR

Dalam analisis ini, kami menggunakan model SEIR (Susceptible – Uncovered – Immunity – Recovered) untuk menunjukkan penyebaran penyakit campak di Kabupaten Malang. Model ini menggunakan beberapa parameter epidemiologi yang menggambarkan aliran perpindahan setiap antar status kesehatan individu dalam populasi tersebut.

Pada bagian ini disajikan Tabel yang berisi data tentang jumlah total populasi Kabupaten Malang, serta distribusi awal individu dalam masing-masing kompartemen SEIR (Susceptible, Exposed, Infectious, Recovered) berdasarkan kasus campak yang tercatat di awal periode pengamatan. Data ini digunakan sebagai dasar simulasi dalam memodelkan dinamika penyebaran penyakit campak menggunakan pendekatan SEIR berdasarkan Rantai Markov waktu diskrit.

Distribusi awal individu dalam kompartemen SEIR dihitung berdasarkan data awal kasus campak sebanyak 155 kasus. Dengan asumsi proporsi 60% infeksius dan 40% terpapar, maka jumlah awal individu dalam kompartemen **Infectious** ( $I_0$ ) adalah 93 orang dan **Exposed** ( $E_0$ ) sebanyak 62 orang. Sementara itu, kompartemen **Recovered** ( $R_0$ ) diasumsikan nol karena belum terdapat data pasien yang telah sembuh ketika pengamatan dimulai. Populasi yang tersisa dimasukkan ke dalam kompartemen **Susceptible** ( $S_0$ ).

Berikut ini adalah daftar parameter yang digunakan dalam model beserta definisi dan nilainya:

Parameter	Notasi	Nilai (dari jurnal)	Penjelasan
Tingkat penularan	$\beta$ (beta)	Tidak disebutkan langsung, tetapi dikaitkan dengan K (gunakan K = 5)	Menentukan seberapa cepat individu susceptible terinfeksi ( $S \rightarrow E$ ).
Tingkat infektivitas	$\sigma$ (sigma)	$f = 0,125$	Laju transisi dari exposed ke

			infectious ( $E \rightarrow I$ ),
Tingkat pemulihan	$\gamma$ (gamma)	$r = 0,1428571$	Laju transisi dari infectious ke recovered ( $I \rightarrow R$ ).
Angka reproduksi dasar	$K (R_0)$	5, 10, 15 (dalam skenario berbeda)	Jumlah rata-rata orang yang tertular oleh satu orang sakit dalam populasi rentan.
Jumlah populasi	$N$	2.382.258 jiwa	Total populasi yang dimodelkan di Kabupaten Malang (tahun 2000).
Jumlah awal rentan	$S_0$	2.382.103 jiwa	Sisa populasi selain E dan I.
Jumlah awal terpapar	$E_0$	62 jiwa	40% dari 155 penderita campak.
Jumlah awal terinfeksi	$I_0$	93 jiwa	60% dari 155 penderita campak pada awal waktu.
Jumlah awal sembuh	$R_0$	0 jiwa	Diasumsikan belum ada yang sembuh saat awal model.

Data distribusi awal ini kemudian digunakan sebagai dasar untuk memodelkan dinamika transisi antar kompartemen menggunakan parameter transisi yang telah ditentukan sebelumnya, seperti laju penularan ( $\beta$ ), laju infeksi ( $\sigma$ ), dan laju kesembuhan ( $\gamma$ ). Analisis selanjutnya bertujuan untuk

memproyeksikan sebaran penyakit campak di masa mendatang dan menilai potensi terjadinya endemik di wilayah tersebut.

#### 4.1.1 Matriks Transisi

Model SEIR ini mempertimbangkan empat status kesehatan, yaitu: Susceptible (S), Exposed (E), Infectious (I), dan Recovered (R). Dengan demikian, matriks transisi disusun berdasarkan peluang perpindahan antara keempat status tersebut saja, dengan mengabaikan faktor eksternal seperti kelahiran, kematian, dan terinfeksi ulang.

$$A = \begin{bmatrix} 1-i & i & 0 & 0 \\ 0 & 1-f & f & 0 \\ 0 & 0 & 1-r & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hasil substitusi nilai parameter, menghasilkan matriks transisi:

$$A = \begin{bmatrix} 0.9999721 & 0.0000279 & 0 & 0 \\ 0 & 0.875 & 0.125 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8571429 & 0.1428571 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Keterangan Parameter:

- $i (\beta \times I_0)$  sebagai laju infeksi ( $S \rightarrow E$ ) dihitung dengan:

$$i = \frac{K}{N \times D} \times I_0 = \frac{5}{2.382.258 \times 7} \times 93 \approx 0,0000279$$

dengan N ukuran populasi, K angka reproduksi, D rata-rata durasi keinfeksi dan I jumlah awal individu infectious.

- $f (\sigma)$  sebagai laju infektivitas ( $E \rightarrow I$ ) dihitung dengan:

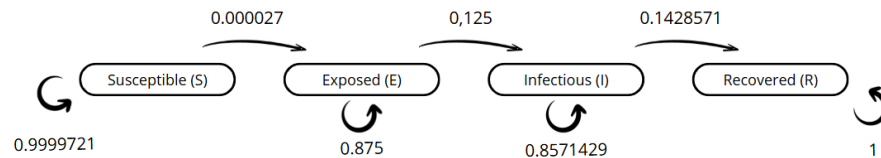
$$f = \frac{1}{\text{rata-rata periode laten}} = \frac{1}{8} = 0,125$$

- $r (\gamma)$  sebagai laju recovery ( $I \rightarrow R$ ) dihitung dengan:

$$r = \frac{1}{\text{rata-rata durasi keinfeksi}} = \frac{1}{7}$$

#### 4.1.2 Diagram Transisi

Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan, peluang transisi dari setiap kejadian dapat divisualisasikan dengan bentuk diagram transisi seperti berikut:



Penjelasan dari diagram ini yaitu individu dari kompartemen Susceptible (S) dapat berpindah ke status Exposed (E) dengan peluang 0,000027 yang merepresentasikan tingkat penularan ( $\beta$ ). Selanjutnya, individu yang berada di kompartemen Exposed (E) memiliki kemungkinan untuk berpindah ke status Infected (I) dengan peluang 0.125 yang sesuai dengan tingkat infektivitas ( $\alpha$ ). Lalu dilanjutkan dengan individu yang berada di kompartemen Infected (I) memiliki kemungkinan untuk berpindah ke status Recovered (R) dengan peluang 0.1428571 yang sesuai dengan tingkat pemulihan ( $\gamma$ ). Diagram ini berfungsi sebagai representasi visual dari dinamika penyebaran penyakit dalam populasi, sekaligus dasar untuk simulasi numerik guna memprediksi perubahan jumlah individu dalam setiap kompartemen dari waktu ke waktu.

#### 4.2 Analisis Dinamika Kompartemen Menggunakan Rantai Markov

Perubahan jumlah individu dalam setiap kompartemen SEIR dianalisis menggunakan pendekatan rantai Markov dengan memanfaatkan matriks transisi yang menggambarkan peluang perpindahan antar status kesehatan. Dalam pendekatan ini, status kesehatan individu dibagi ke dalam empat kompartemen, yaitu Susceptible (S), Exposed (E), Infectious (I), dan Recovered (R), sesuai dengan struktur model SEIR. Menurut data dari Kabupaten Malang pada tahun 2000, kondisi awal populasi ditentukan sebagai berikut:  $S_0 = 2.382.103$  jiwa,  $E_0 = 62$  jiwa,  $I_0 = 93$  jiwa, dan  $R_0 = 0$  jiwa. Setelah itu, dilakukan simulasi selama 100 hari menggunakan iterasi matriks transisi dengan rumus

$$X(t + 1) = A \cdot X(t)$$

di mana A adalah matriks transisi dan  $X(t)$  adalah vektor populasi pada waktu ke-t.

Berikut proses iterasi matriks yang kami lakukan:

```
# PARAMETER & KONDISI AWAL
# Data dari jurnal (Kabupaten Malang, tahun 2000)
N = 2382258          # Total populasi
S0 = 2382103         # Susceptible (N - 155)
E0 = 62              # Exposed (40% dari 155)
I0 = 93              # Infectious (60% dari 155)
R0 = 0               # Recovered (diasumsikan nol)

✓ 0.0s
```

```
# Laju transisi dari jurnal
i = 0.0000279        # Laju infeksi (S -> E) (dengan asumsi K = 5)
f = 0.125             # Laju infektivitas (E -> I)
r = 0.1428571         # Laju recovery (I -> R)

# Matriks transisi Markov SEIR
A = np.array([
    [1 - i, 0, 0, 0],
    [i, 1 - f, 0, 0],
    [0, f, 1 - r, 0],
    [0, 0, r, 1]
])

print(A)

✓ 0.0s

[[9.999721e-01 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00]
 [2.790000e-05 8.750000e-01 0.000000e+00 0.000000e+00]
 [0.000000e+00 1.250000e-01 8.571429e-01 0.000000e+00]
 [0.000000e+00 0.000000e+00 1.428571e-01 1.000000e+00]]
```

```
# Vektor kondisi awal populasi
pop_init = np.array([S0, E0, I0, R0])

# SIMULASI 100 HARI
T = 100
pop_history = np.zeros((T + 1, 4))
pop_history[0] = pop_init

for t in range(1, T + 1):
    pop_history[t] = A @ pop_history[t - 1]

print(f"pop_init: {pop_init}")
print(f"T: {T}")
print(f"pop_history: {pop_history}")
print(f"pop_history[0]: {pop_history[0]}")

✓ 0.0s
```

```
pop_init: [2382103      62      93         0]
T: 100
pop_history: [[2.38210300e+06 6.20000000e+01 9.30000000e+01 0.00000000e+00]
 [2.38203654e+06 1.20710674e+02 8.74642897e+01 1.32857103e+01]
 [2.38197008e+06 1.72080659e+02 9.00582291e+01 2.57806051e+01]
 [2.38190362e+06 2.17027542e+02 9.87028541e+01 3.86460625e+01]
 [2.38183717e+06 2.56354210e+02 1.11730893e+02 5.27464660e+01]
 [2.38177072e+06 2.90763191e+02 1.27813619e+02 6.87080174e+01]
 [2.38170426e+06 3.20869195e+02 1.45899934e+02 8.69671002e+01]
 [2.38163781e+06 3.47210095e+02 1.65165742e+02 1.07809942e+02]
 [2.38157137e+06 3.70256528e+02 1.84971905e+02 1.31405041e+02]
 [2.38150492e+06 3.90420303e+02 2.04829421e+02 1.57829591e+02]
 [2.38143848e+06 4.08061752e+02 2.24370622e+02 1.87090928e+02]
 [2.38137203e+06 4.23496167e+02 2.43325404e+02 2.19143864e+02]
 [2.38130559e+06 4.36999426e+02 2.61501664e+02 2.53904626e+02]
 [2.38123916e+06 4.48812924e+02 2.78769223e+02 2.91261995e+02]
 [2.38117272e+06 4.59147881e+02 2.95046675e+02 3.31086158e+02]
 [2.38110628e+06 4.68189114e+02 3.10290648e+02 3.73235670e+02]
 [2.38103985e+06 4.76098340e+02 3.24487065e+02 4.17562892e+02]
 [2.38097342e+06 4.83017060e+02 3.37644077e+02 4.63918173e+02]
 [2.38090699e+06 4.89069008e+02 3.49786355e+02 5.12153027e+02]
 [2.38084056e+06 4.94362755e+02 3.60950527e+02 5.62122491e+02]
 [2.38077414e+06 4.98992862e+02 3.71181526e+02 6.13686837e+02]
 [2.38070772e+06 5.03042353e+02 3.80529717e+02 6.66712753e+02]
 [2.38064129e+06 5.06583804e+02 3.89048639e+02 7.21074125e+02]
 ...
 [2.37598666e+06 5.30351021e+02 4.64142705e+02 5.66484684e+03]
 [2.37553238e+06 5.30336346e+02 4.64130553e+02 5.73115293e+03]
 [2.37546610e+06 5.30321656e+02 4.64118252e+02 5.79745727e+03]]
pop_history[0]: [2.382103e+06 6.200000e+01 9.300000e+01 0.000000e+00]
```

#### 4.2.1 Hasil Simulasi Dinamika Kompartmen S, E, I, R

Berikut hasil simulasi selama 100 hari:

```
pop_init: [2382103 62 93 0]
T: 100
pop_history: [[2.38210300e+06 6.20000000e+01 9.30000000e+01 0.00000000e+00]
[2.38203654e+06 1.20710674e+02 8.74642897e+01 1.32857103e+01]
[2.38197008e+06 1.72088659e+02 9.00582291e+01 2.57806051e+01]
[2.38190362e+06 2.17027542e+02 9.87028541e+01 3.86460625e+01]
[2.38183717e+06 2.56354210e+02 1.11730893e+02 5.27464660e+01]
[2.38177072e+06 2.90763191e+02 1.27813618e+02 6.87080174e+01]
[2.38170426e+06 3.20869195e+02 1.45899934e+02 8.69671002e+01]
[2.38163781e+06 3.47210095e+02 1.65165742e+02 1.07809942e+02]
[2.38157137e+06 3.70256528e+02 1.84971905e+02 1.31405041e+02]
[2.38150492e+06 3.90420303e+02 2.04829421e+02 1.57829591e+02]
[2.38143848e+06 4.08061752e+02 2.24370622e+02 1.87090928e+02]
[2.38137203e+06 4.23496167e+02 2.43325404e+02 2.19143864e+02]
[2.38130559e+06 4.36999426e+02 2.61501664e+02 2.53904626e+02]
[2.38123916e+06 4.48812924e+02 2.78769223e+02 2.91261995e+02]
[2.38117272e+06 4.59147881e+02 2.95046675e+02 3.31086158e+02]
[2.38110628e+06 4.68189114e+02 3.10290648e+02 3.73235670e+02]
[2.38103985e+06 4.76098340e+02 3.24487065e+02 4.17562892e+02]
[2.38097342e+06 4.83017060e+02 3.37644077e+02 4.63918173e+02]
[2.38090699e+06 4.89069086e+02 3.49786355e+02 5.12153027e+02]
[2.38084056e+06 4.94362755e+02 3.60950527e+02 5.62122491e+02]
[2.38077414e+06 4.98992862e+02 3.71181526e+02 6.13686837e+02]
[2.38070772e+06 5.03042353e+02 3.80529717e+02 6.66712753e+02]
[2.38064129e+06 5.06583804e+02 3.89048639e+02 7.21074125e+02]
...
[2.37559866e+06 5.30351021e+02 4.64142765e+02 5.66484684e+03]
[2.37553238e+06 5.30336346e+02 4.64130553e+02 5.73115293e+03]
[2.37546610e+06 5.30321656e+02 4.64118252e+02 5.79745727e+03]]
pop_history[0]: [2.382103e+06 6.200000e+01 9.300000e+01 0.000000e+00]
```

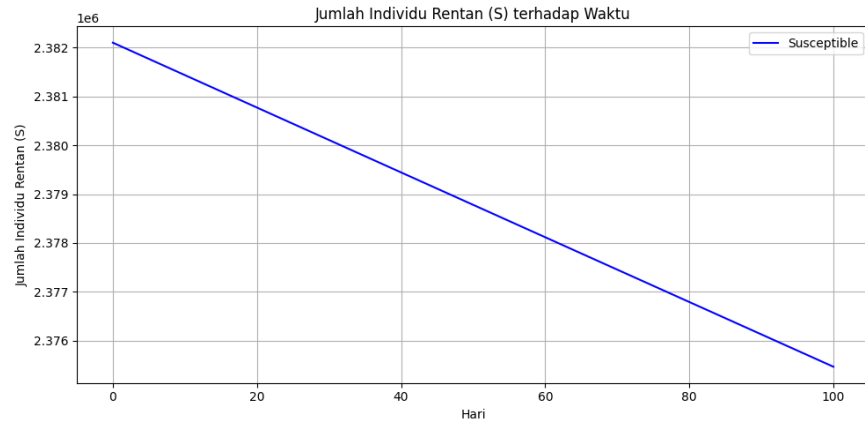
Berikut hasil simulasi selama 10 hari, dimulai dari hari ke-0 hingga hari ke-9:

Hari	S	E	I	R
0	2,382,103	62.00	93.00	0.00
1	2,382,037	120.71	87.46	13.29
2	2,381,970	172.08	90.06	25.78
3	2,381,904	217.03	98.70	38.65
4	2,381,837	256.35	111.73	52.75
5	2,381,771	290.76	127.81	68.71
6	2,381,704	320.87	145.90	86.97
7	2,381,638	347.21	165.17	107.81
8	2,381,571	370.26	184.97	131.41
9	2,381,505	390.42	204.83	157.83

Hasil simulasi kompartemen Susceptible (S):

```
# Plot hanya jumlah individu dalam kompartemen S
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(df["Day"], df["Susceptible"], label="Susceptible", color="blue")

plt.title("Jumlah Individu Rentan (S) terhadap Waktu")
plt.xlabel("Hari")
plt.ylabel("Jumlah Individu Rentan (S)")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```

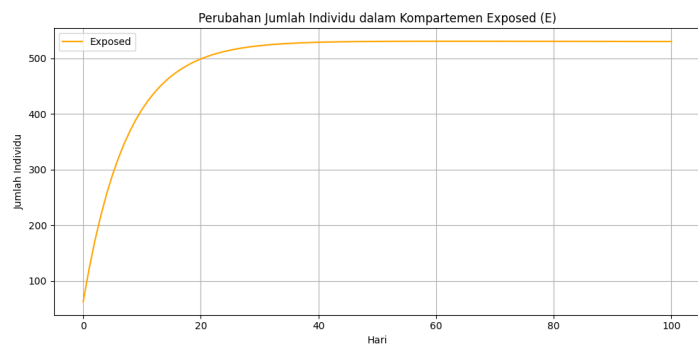


Jumlah individu dalam kompartemen Susceptible (S) secara bertahap berkurang, menandakan bahwa sebagian kecil dari populasi mulai beralih ke status terinfeksi atau sembuh.

Hasil simulasi kompartemen Exposed (E):

```
# Plot hanya kompartemen Exposed (E)
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(df["Day"], df["Exposed"], label="Exposed", color="orange")

plt.title("Perubahan Jumlah Individu dalam Kompartemen Exposed (E)")
plt.xlabel("Hari")
plt.ylabel("Jumlah Individu")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```

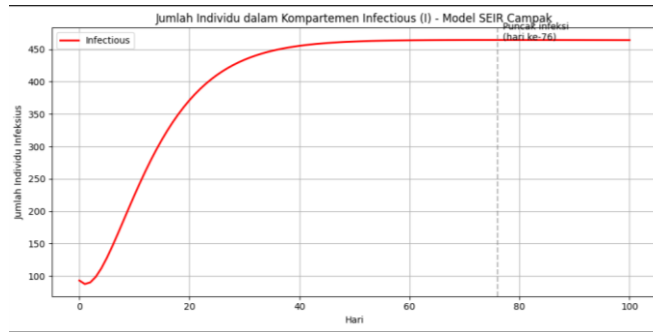


Hasil simulasi kompartemen Infectious (I):

```
# Plot hanya kompartemen I (Infectious)
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(df["Day"], df["Infectious"], label="Infectious", color="red", linewidth=2)

# Tandai puncak infeksi
plt.axvline(x=peak_day, color='gray', linestyle='--', alpha=0.6)
plt.text(peak_day + 1, peak_value, f'Puncak infeksi\n(hari ke-{peak_day})', color='black')

plt.title("Jumlah Individu dalam Kompartemen Infectious (I) - Model SEIR Campak")
plt.xlabel("Hari")
plt.ylabel("Jumlah Individu Infeksius")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

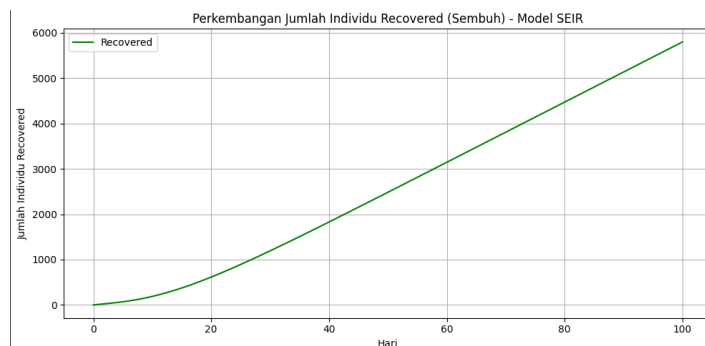


Hasil simulasi menunjukkan bahwa jumlah individu dalam kompartemen Exposed (E) dan Infectious (I) mengalami peningkatan pada awal periode, yang menandakan penyebaran infeksi sedang berlangsung. Namun setelah beberapa waktu, laju pertambahan ini mulai melambat dan menunjukkan tren mendatar.

Hasil simulasi kompartemen Recovered (R):

```
# Plot hanya kompartemen Recovered
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(df["Day"], df["Recovered"], label="Recovered", color="green")

plt.title("Perkembangan Jumlah Individu Recovered (Sembuh) - Model SEIR")
plt.xlabel("Hari")
plt.ylabel("Jumlah Individu Recovered")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```



Kompartemen Recovered (R) mengalami peningkatan yang stabil seiring waktu karena orang yang pulih dari infeksi beralih ke status kekebalan permanen.

Secara keseluruhan, visualisasi grafik hasil simulasi memperjelas dinamika setiap kompartemen dari waktu ke waktu. Pendekatan Markov terbukti ampuh dalam merepresentasikan perubahan status kesehatan populasi terkait penyakit campak. Penyakit menyebar secara lambat dan terkendali, serta mulai menunjukkan penurunan pada fase akhir simulasi. Ini menunjukkan bahwa dengan parameter yang

diterapkan dan tanpa adanya migrasi atau kelahiran baru, epidemi campak dapat dikelola dan bahkan bisa lenyap dalam jangka waktu yang panjang.

#### 4.3 Analisis Puncak Infeksi dan Konvergensi Menuju Keadaan Tetap

Berikut code Python untuk mengetahui waktu terjadinya puncak infeksi dan metode menuju keadaan yang mantap (steady state):

```
# ANALISIS DAN VISUALISASI
# Simpan dalam DataFrame
df = pd.DataFrame(pop_history, columns=["Susceptible", "Exposed", "Infectious", "Recovered"])
df["Day"] = df.index

# Cari hari puncak infeksi
peak_day = df["Infectious"].idxmax()
peak_value = df["Infectious"].max()

# Tampilkan ringkasan awal dan akhir
print("♦ Data Hari ke-0 (Awal):")
print(df.head(1))
print("\n♦ Data Hari ke-100 (Akhir):")
print(df.tail(1))

# Mencari hari ke berapa jumlah infeksius maksimum terjadi
peak_day = np.argmax(pop_history[:, 2]) # kolom ke-2 adalah Infectious (I)
peak_value = pop_history[peak_day][2]

print(f"\n♦ Puncak infeksi terjadi pada hari ke-{peak_day} dengan jumlah infeksius sebanyak {peak_value:.2f} orang.")
✓ 0.0s
```

Outputnya adalah:

```
♦ Data Hari ke-0 (Awal):
Susceptible  Exposed  Infectious  Recovered  Day
0    2382103.0    62.0      93.0         0.0     0

♦ Data Hari ke-100 (Akhir):
Susceptible  Exposed  Infectious  Recovered  Day
100  2.375466e+06  530.321656  464.118252  5797.457271  100

♦ Puncak infeksi terjadi pada hari ke-76 dengan jumlah infeksius sebanyak 464.33 orang.
```

Hasil simulasi menunjukkan bahwa jumlah individu dalam kompartemen Infeksius (I) mencapai nilai tertingginya pada hari ke-76, yaitu sebanyak 464 orang. Setelah mencapai puncaknya, jumlah individu yang terinfeksi mulai berkurang secara perlahan, seiring dengan meningkatnya jumlah individu yang pindah ke kompartemen Recovered (R).

Peluang steady state adalah peluang peralihan di masa depan akan menjadi tidak bergantung dari keadaan awal. Peluang peralihan pada tingkat keadaan seimbang (steady state) merupakan peluang peralihan yang sudah mencapai keseimbangan sehingga tidak akan berubah terhadap perubahan waktu yang terjadi. Prinsip ini digunakan untuk mengamati ada beberapa state untuk mengetahui keuntungan, lamanya proses, biaya dari usaha yang dilakukan.

Berikut code Python untuk mengetahui metode menuju keadaan yang mantap (steady state):

```

# Iterasi simulasi harian
for t in range(1, T + 1):
    pop_history[t] = A @ pop_history[t - 1]

# DataFrame untuk hasil simulasi
df = pd.DataFrame(pop_history, columns=["Susceptible", "Exposed", "Infectious", "Recovered"])
df["Day"] = df.index

# Hitung perubahan harian (selisih absolut)
df_diff = df[["Susceptible", "Exposed", "Infectious", "Recovered"]].diff().abs()
df_diff["Day"] = df["Day"]

# Ambil data hari ke-90 sampai 100
df_diff_tail = df_diff[df_diff["Day"] >= 90]

# Plot grafik perubahan harian
plt.figure(figsize=(8, 4))
plt.plot(df_diff_tail["Day"], df_diff_tail["Susceptible"], label="Δ Susceptible", linestyle='--', color='blue')
plt.plot(df_diff_tail["Day"], df_diff_tail["Exposed"], label="Δ Exposed", linestyle='--', color='orange')
plt.plot(df_diff_tail["Day"], df_diff_tail["Infectious"], label="Δ Infectious", linestyle='--', color='red')
plt.plot(df_diff_tail["Day"], df_diff_tail["Recovered"], label="Δ Recovered", linestyle='--', color='green')

```

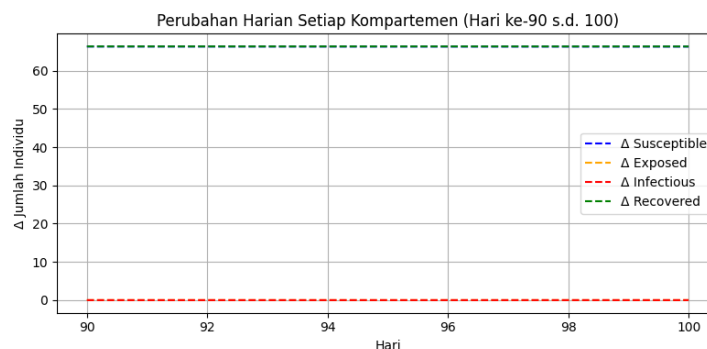
```

plt.title("Perubahan Harian Setiap Kompartemen (Hari ke-90 s.d. 100)")
plt.xlabel("Hari")
plt.ylabel("Δ Jumlah Individu")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()

```

✓ 1.0s

Outputnya adalah:



Menjelang akhir simulasi, khususnya setelah hari ke-90, grafik dinamika populasi menunjukkan bahwa laju perubahan jumlah individu di setiap kompartemen mulai melambat. Meskipun belum sepenuhnya konstan, sistem menunjukkan kecenderungan menuju keadaan yang mantap sekitar hari ke-100. Hal ini ditunjukkan dengan semakin sedikitnya selisih jumlah individu antar hari di setiap kompartemen, terutama pada kompartemen I, yang semakin mendekati nol.

Di samping itu, dampak angka reproduksi dasar ( $K$ ) terhadap waktu yang diperlukan untuk mencapai keadaan yang mantap juga menjadi perhatian penting. Berdasarkan simulasi dari referensi jurnal, diketahui bahwa semakin tinggi nilai  $K$ , maka sistem epidemi akan mencapai keadaan yang mantap dalam waktu yang lebih singkat. Sebagai contoh, untuk  $K=5$ , waktu

yang diperlukan untuk mencapai keseimbangan diperkirakan sekitar 550.000 hari, sedangkan untuk  $K=10$  dan  $K=15$ , waktu itu menurun menjadi 270.000 hari dan 190.000 hari. Hal ini menunjukkan bahwa meskipun penyebaran lebih cepat ketika nilai  $K$  tinggi, populasi juga cenderung lebih cepat mencapai titik jenuh, dimana tidak ada lagi individu yang dapat terinfeksi.

## **BAB V**

### **PENUTUP**

#### **5.1 Kesimpulan**

Model SEIR berbasis Rantai Markov waktu diskrit mampu menggambarkan dinamika penyebaran penyakit campak secara realistis dalam populasi besar. Model ini memanfaatkan parameter epidemiologi seperti tingkat penularan, masa inkubasi, dan tingkat pemulihan untuk menyusun matriks transisi antar kompartemen (S, E, I, R).

Hasil simulasi menunjukkan puncak infeksi terjadi pada hari ke-76, setelah itu jumlah individu yang terinfeksi mulai menurun, dan populasi menunjukkan kecenderungan menuju keadaan stabil (steady state) pada akhir periode simulasi.

Tingkat penyebaran penyakit sangat dipengaruhi oleh nilai reproduksi dasar ( $R_0$ ). Semakin tinggi nilai  $R_0$ , semakin cepat sistem mencapai titik jenuh, meskipun jumlah individu yang terinfeksi juga meningkat tajam di awal.

Model ini dapat menjadi alat bantu yang efektif untuk memahami, memproyeksikan, dan mengaktifkan intervensi dalam pengendalian penyakit menular seperti campak.

#### **5.2 Saran**

Berdasarkan hasil penelitian yang dilakukan mengenai pemodelan penyebaran penyakit campak menggunakan model SEIR berbasis rantai markov, disarankan agar penelitian selanjutnya mempertimbangkan penambahan variabel-variabel eksternal seperti angka kelahiran, kematian, dan mobilitas penduduk yang dapat mempengaruhi dinamika populasi secara lebih kompleks. Selain itu, penggunaan pendekatan stokastik waktu kontinu atau simulasi berbasis Monte Carlo dapat dijadikan metode alternatif untuk memperoleh hasil yang lebih presisi dan realistis. Disarankan pula agar data yang digunakan berasal dari sumber epidemiologis yang lebih mutakhir dan akurat agar hasil simulasi dan proyeksi model lebih relevan untuk pengambilan keputusan. Mengingat model ini juga memiliki potensi untuk diaplikasikan pada penyakit menular lainnya, maka pihak terkait seperti instansi kesehatan dan pemerintah daerah diharapkan dapat memanfaatkan pendekatan ini sebagai salah satu dasar dalam perencanaan strategi pencegahan dan pengendalian penyakit secara umum.

### DAFTAR PUSTAKA

Novitasari, D. (2019, Januari 19). *Model deterministik dinamika penyebaran penyakit campak*. Prosiding Seminar Nasional & Call For Papers Program Studi Magister Pendidikan Matematika, Universitas Siliwangi, Tasikmalaya. ISBN: 978-602-9250-39-8.

World Health Organization. (2024, November 14). *Measles*. <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/measles>

Wikipedia contributors. (2025, Juni 1). *Markov chain*. Wikipedia. [https://en.wikipedia.org/wiki/Markov\\_chain](https://en.wikipedia.org/wiki/Markov_chain)

Siti Nuryam, Arman, Muhtar, N., Jufra, & La Gubu. (2022). Aplikasi analisis rantai Markov untuk memprediksi status pasien Rumah Sakit Umum Daerah (RSUD) Kabupaten Buton. *Jurnal Matematika, Komputasi dan Statistika*, 2(2).

Siti Fatimah, Zen, N. H., & Fitrisia, A. (2025). Literatur review dan metodologi ilmu pengetahuan khusus. *Journal of Social Science Research*, 5(1), 41–48.

Taylor, H. M., & Karlin, S. (1998). *An introduction to stochastic modeling* (3rd ed.). Academic Press.

Ross, S. M. (2009). *Introduction to probability models* (10th ed.). Academic Press.