LINMA1170 **Devoir 2**
Analyse Numérique **Méthodes itératives pour des systèmes linéaires**
Prof. Paul VAN DOOREN **Echéance, le 3 novembre 2016 (23h59)**

Dans ce devoir, nous étudions la méthode des gradients conjugués (CG) pour résoudre semi-itérativement des systèmes linéaires. On considère $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$.

Echauffement

Calculer les m itérés $\mathbf{x}_i$, résidus $\mathbf{r}_i$ et l'espace de Krylov $\mathcal{K}_m$ pour le système

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donnez les coordonnées des résidus dans l'espace de Krylov. Aussi, montrez (pas démontrer) que vos résidus sont orthogonaux.

Mise en oeuvre

- Implémentez une fonction Matlab déterminant les m itérés `X(:,i)`, résidus `R(:,i)` et l'espace de Krylov `K` $\in \Re^{n\times m}$ pour un système linéaire décrit par $\mathbf{A} \in \Re^{n\times n}$ et $\mathbf{b} \in \Re^{n\times 1}$, ayant pour entête

```
function [X,R,K] = myCG(A,b)
```

- Vérifiez vos conclusions de la partie "Echauffement" au moyen de votre fonction.
- Via votre fonction, vous allez calculer les m efforts internes $\mathbf{w}_j$ d'un ensemble planaire de m poutres en équilibre avec n connexions libres entre elles, soumises à $2n$ forces $\mathbf{f}_i$ extérieures. Les poutres sont ici supposées non rigides et de masse négligeable. Pour ce faire, nous modélisons l'ensemble de poutres comme un graphe, où une poutre est une arête et une connexion libre est un noeud. Nous pouvons donc formuler l'élongation des poutres par le système

$$\mathbf{Au} = \mathbf{e}$$

où $\mathbf{A} \in \Re^{m\times 2n}$, $\mathbf{u} \in \Re^{2n\times 1}$ décrit le déplacement des connexions (noeuds) et $\mathbf{e} \in \Re^{m\times 1}$ représente l'élongation des m poutres (arêtes) ; plus précisément, $\mathbf{u} = [u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_n]^T$, où (u_i, v_i) décrit le déplacement de la connexion (noeud) i dans le plan. Remarquez qu'on a $2n$ puisqu'il y a une composante x et une composante y.
En approximant les poutres par des ressorts, la loi de Hook implique

$$\mathbf{Ce} = \mathbf{w}$$

où $\mathbf{C} \in \Re^{m\times m}$ est une matrice diagonale dont chaque entrée $\mathbf{C}_{jj}$ représente la raideur $c_j > 0$ d'une poutre j.
Enfin, notre système étant à l'équilibre, la contribution des forces internes et externes s'annulent

$$\mathbf{A}^T\mathbf{w} = \mathbf{f}$$

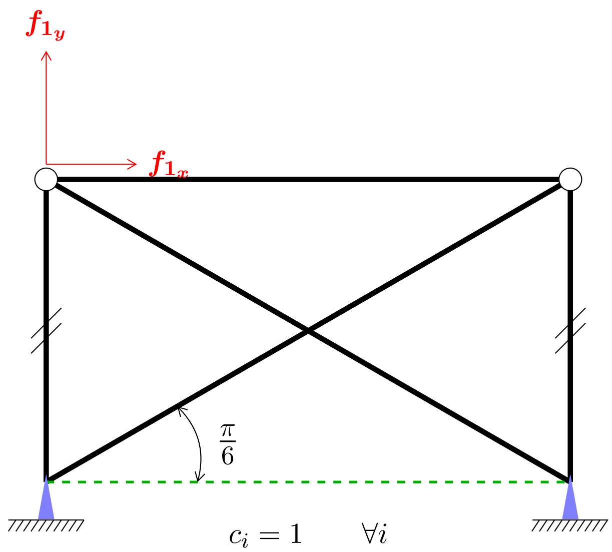

FIGURE 1 – Graphe d'un ensemble de 5 poutres avec 2 connexions libres. $\mathbf{f_1} = [1, 2]$.

A l'aide de ce modèle, dérivez le système linéaire à résoudre, sachant que celui-ci est réprésenté par une matrice K symétrique définie postive (SDP).
Résolvez ce système dans le cas de la figure 1 au moyen de votre fonction `myCG`, pour obtenir in fine les efforts internes $\mathbf{w}$ à l'équilibre.

Réflexion

Soit $\mathbf{x}$ appartenant à un espace de Krylov $\mathcal{K}_k = \texttt{span}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}, ..., \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{y})$. Démontrez que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ appartient à $\mathcal{K}_{k+1}$. A l'aide de cette preuve et de l'algorithme CG, prouvez que les directions $\boldsymbol{d}_k$ sont A-orthogonales. Veillez à mettre en évidence les hypothèses et l'algèbre nécessaires à cette preuve.

Performances

Nous analysons ici les performances de votre fonction `myCG` dans le cas d'un système matriciel symétrique indéfini

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

où $\mathbf{A} = \texttt{diag}(-49, -47, -45, \ldots, 149) \in \Re^{100\times100}$ et $\mathbf{b} = \mathbf{A}[1, 1, 1, ..., 1]^T$.
Ces performances sont comparées avec la méthode MATLAB `bicgstab.m`.

- Réalisez une expérience avec MATLAB montrant la convergence des résidus de votre fonction au cours des itérations.
- Le système matriciel indéfini peut être transformé en un système matriciel équivalent qui est SDP, càd $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$. Répétez l'expérience pour ce système SDP.
- Répétez l'expérience initiale avec la méthode `bicgstab.m` de MATLAB.

A la lumière des trois expériences précédentes, que pouvez-vous conclure de CG et BICGSTAB pour la résolution de systèmes indéfinis ? Concernant CG, est-ce cohérent ? Que remarquez-vous pour la résolution des équations normales par CG ?

Consignes

Le devoir est à réaliser par groupe de quatre.

La soumission se fait via `Moodle`. L'échéance n'est pas ferme, cependant tout délai est sanctionné d'un point par 24 heures (entamées) de retard. La soumission comprend trois fichiers distincts : (i) le rapport (`.pdf`) ; (ii) votre fonction `myCG.m` ; (iii) vos expériences (`.m`) pour la partie "Performances". Le tout est compressé dans un dossier (`.zip`).

Le rapport ne doit pas contenir de page de garde, seulement une entête reprenant au moins le nom des auteurs. Le rapport ne doit pas spécialement contenir de code source. Il n'y a pas de limite de pages, bien que la concision soit appréciée. La langue de rédaction est le français ou l'anglais. Il est fortement recommandé, voire souhaité que le rapport soit réalisé avec LaTeX, avec la `documentclass article [11pt]` en `pagestyle plain`. Vos implémentations sont priées d'être compréhensibles.

Bonus

Le groupe réalisant le rapport le plus concis, intelligible et complet en anglais obtiendra un point bonus à ce devoir. Ce concours ne s'applique qu'aux groupes ayant suivi les recommendations pour le rapport. Au plus un groupe peut obtenir ce bonus.

Contact

Pour toute question, contacter Pierre-Alexandre Beaufort. Disponible le mardi à l'Euler a.013 entre 15h et 17h. Merci de prévenir de votre passage.