CONCEPTOS DE BASES DE DATOS

CLASE 5

Árboles

- El uso de índices presenta ciertos problemas:
  - Se necesita un procesamiento adicional para reacomodar los archivos de índices cuando hay cambios en el archivo de datos
  - Si se manejan **archivos grandes**, los índices deberán manejarse en memoria secundaria
    - **Búsqueda binaria** muy costosa → demasiados desplazamientos
    - Muy costoso **mantener el índice ordenado** → ante cada cambio se debe reordenar el índice completo

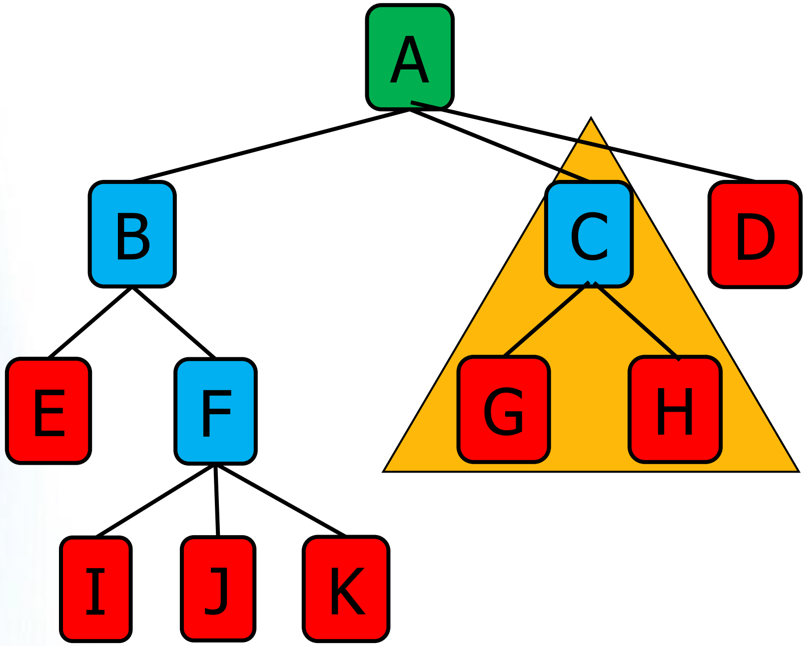
Árboles

- Se requiere un tipo de estructura que se pueda mantener en orden más eficientemente
  - Se necesita que ante un cambio no se deban hacer reorganizaciones masivas, sino locales
- Un árbol es una estructura de datos que se puede aplicar en los índices:
  - Permite localizar en forma más rápida la información de un archivo
  - Ante cambios, sólo debe reorganizarse localmente

Árboles

- Se analizarán los siguientes tipos de árboles
  - Binarios
  - AVL
  - Multicamino
  - Balanceados (B, B*, B+)
- Un árbol está formado por una serie de nodos conectados por aristas, que verifican:
  - Hay un único nodo raíz
  - Cada nodo tiene un único padre (excepto la raíz)
  - Hay un único camino desde la raíz hasta cada nodo
  - Puede estar ordenado o no

Árboles

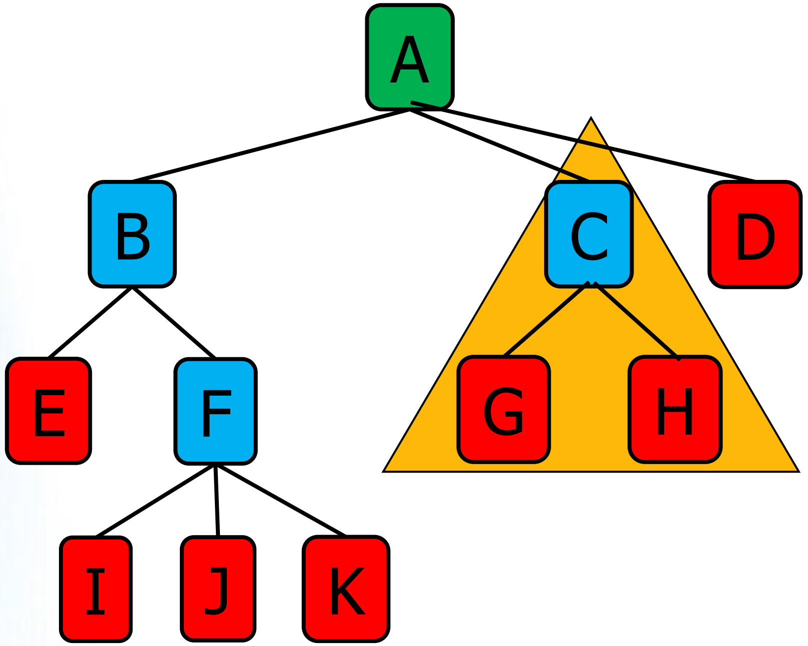


- **Raíz**: único nodo sin padre
- **Nodo interno**: tiene al menos un hijo
- **Nodo hoja (externo)**: no tiene hijos
- **Descendiente directo**: hijo
- **Descendientes**: hijo, nieto...
- **Subárbol**: árbol formado por un nodo y sus descendientes

Árboles

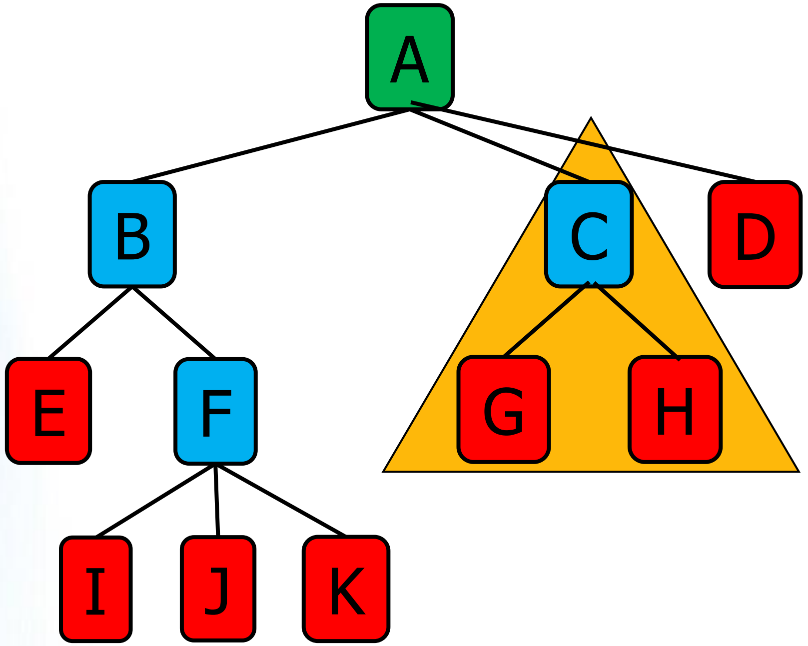
- Grado de un nodo: nro de descendientes directos
- Grado del árbol: mayor grado de sus nodos
  - Árbol binario → grado 2
  - Árbol multicamino → grado N
  - Lista → árbol degenerado de grado 1
- Profundidad de un nodo: nro de predecesores
- Profundidad del árbol (altura): profundidad máxima de sus nodos

Árboles



- Grado(B) → ?
- Grado del árbol → ?
- Profundidad(A) → ?
- Profundidad(H) → ?
- Altura del árbol → ?

Árboles



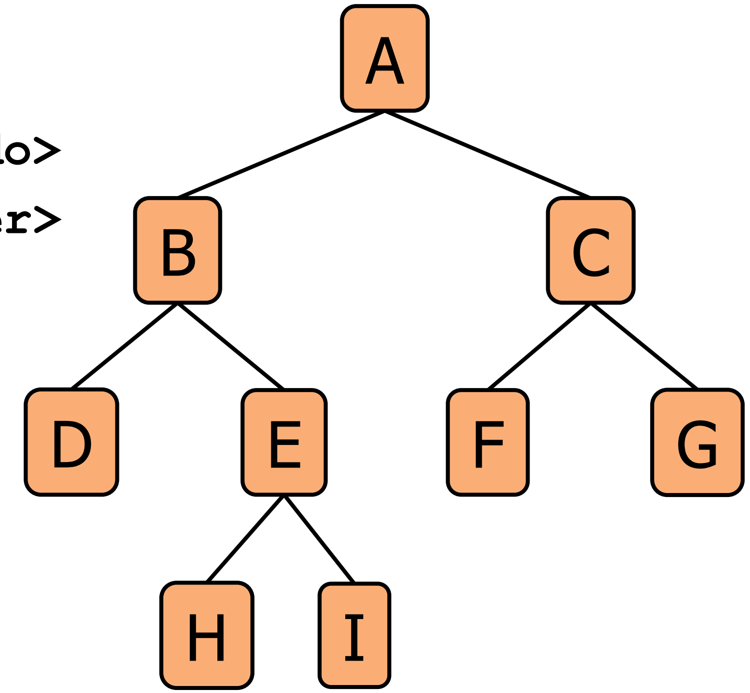
- **Camino:** existe un camino del nodo **X** al nodo **Y**, si existe una **sucesión de nodos** que permitan llegar desde **X** a **Y**
- **Camino(A,K)** = {A, B, F, K}
- **Camino(C,K)** = {}

Árboles

Binario

- El árbol binario es un árbol de grado 2
- Cada nodo tiene de 0 a 2 descendientes directos: el hijo izquierdo y el hijo derecho

```
<arbol> ::= <<nulo>> | <nodo>
<nodo> ::= <info> <izq> <der>
<izq> ::= <arbol>
<der> ::= <arbol>
```



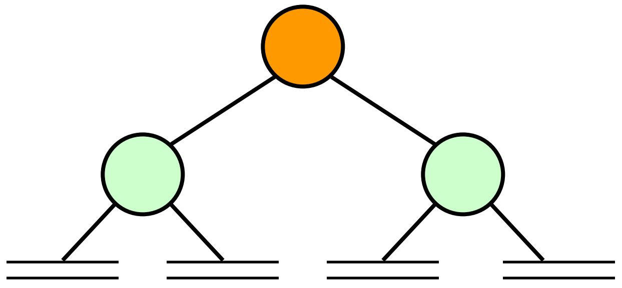
Árboles

Binario

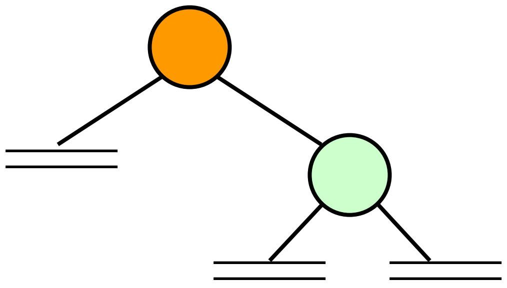
- El árbol binario tiene diferentes aplicaciones tales como expresiones aritméticas, árboles de decisión, árboles de búsqueda (ABB), etc.

- En algunos casos se exige que el árbol sea completo → **todo nodo interno debe tener dos descendientes**

Árbol binario completo



Árbol binario no completo



Árboles

Binario

- Estructura de datos utilizada para el almacenamiento de un árbol binario
  - Archivo con registros de longitud fija
  - La información en el archivo no está ordenada
  - Cada nodo es un registro: elemento, hijoIzq, hijoDer
  - Costo de espacio → muchos campos vacíos
  - Operaciones
    - Búsqueda
    - Inserción
    - Eliminación

Árboles

Binario

- Estructura de datos utilizada para el almacenamiento de un árbol binario

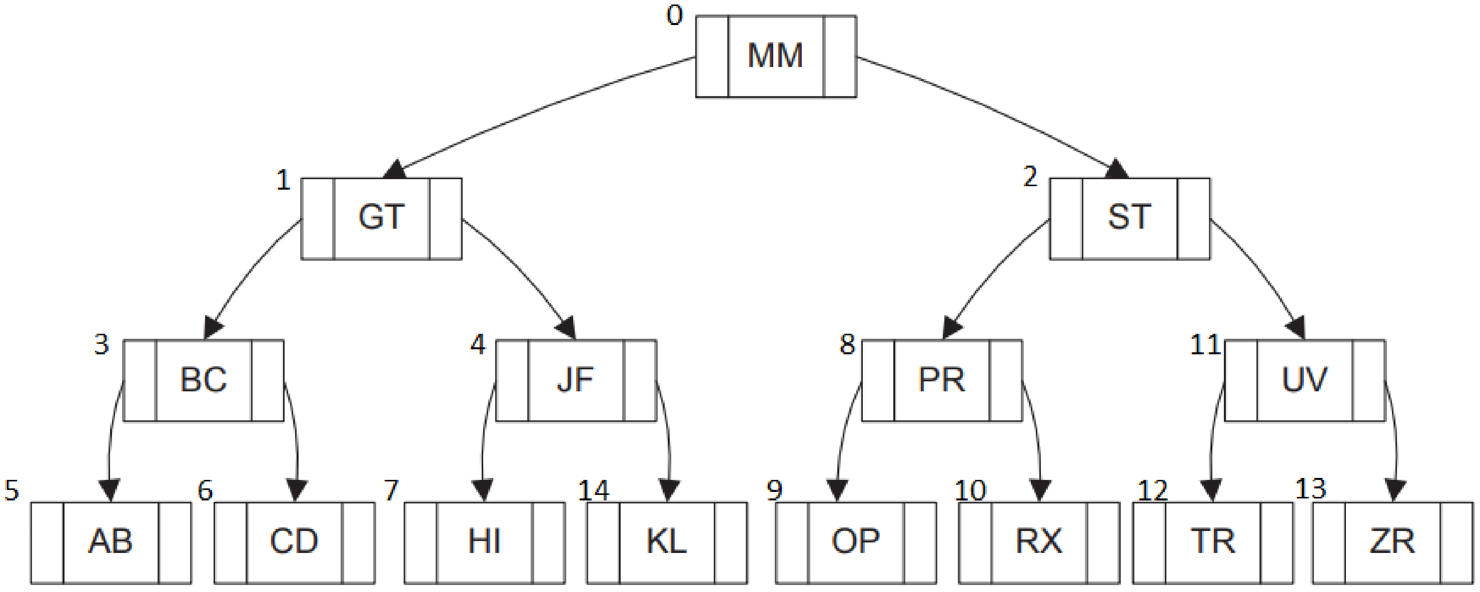
```
Type regAB = record
                    elemento: tipoDato; {clave índice}
                    hijoIZQ: integer; {dir. hijo menor (NRR)}
                    hijoDER: integer; {dir. hijo mayor (NRR)}
                   end;
      indiceBinario = file of regAB;
```

Árboles

Binario

Raíz → 0

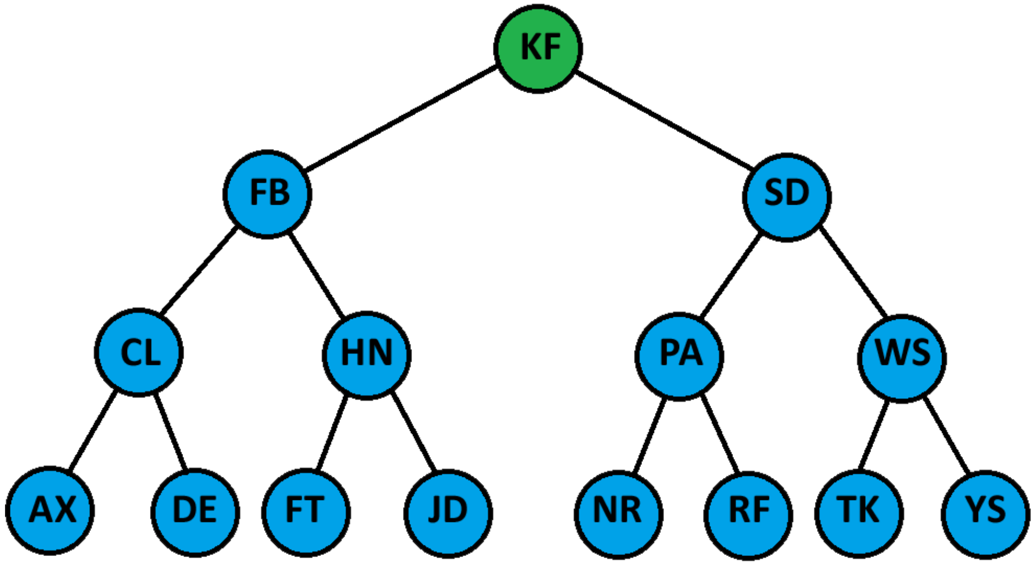
	Clave	Hijo Izq	Hijo Der
0	MM	1	2
1	GT	3	4
2	ST	8	11
3	BC	5	6
4	JF	7	14
5	AB	-1	-1
6	CD	-1	-1
7	HI	-1	-1
8	PR	9	10
9	OP	-1	-1
10	RX	-1	-1
11	UV	12	13
12	TR	-1	-1
13	ZR	-1	-1
14	KL	-1	-1



Árboles

Binario

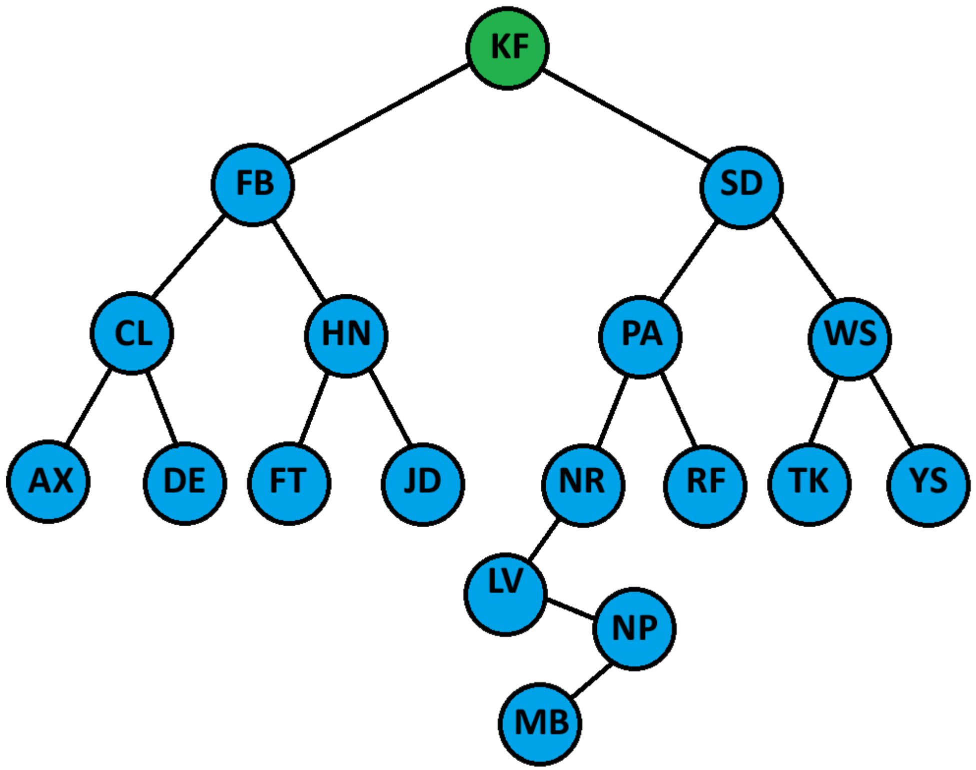
- Ejemplo: se construye el árbol dada la siguiente lista ordenada de claves
  - **AX CL DE FB FT HN JD KF NR PA RF SD TK WS YS**



Árboles

Binario

- Pero ahora supongamos que se debe insertar las siguientes claves → **LV NP MB**



Árboles

Binario

- Para acceder al nodo MB son necesarios 7 accesos → la performance de la búsqueda ya no puede considerarse logarítmica
- Para árboles binarios con **cientos de claves** se puede llegar a requerir más de 30 accesos para alcanzar algunos de sus elementos
- No alcanza a ser lo suficientemente eficiente

Árboles

Binario

- Un árbol balanceado (completamente) es un árbol en donde la altura de la trayectoria más corta hacia una hoja no difiere de la altura de la trayectoria más larga hacia una hoja

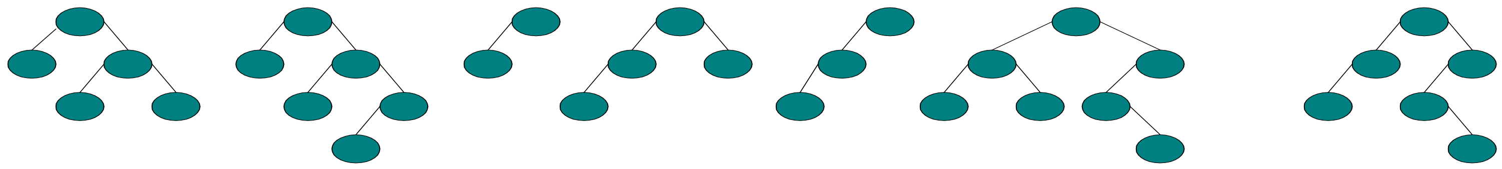
  - Los árboles binarios se desbalancean fácilmente → **búsquedas más costosas** (mayor cantidad de desplazamientos)

  - Una solución es reorganizar los nodos del árbol a medida que se reciben las claves → Árboles AVL

Árboles

AVL

- Un árbol AVL es un árbol binario balanceado
  - No está balanceado completamente → la diferencia máxima de altura entre las alturas de cualquiera de dos subárboles que comparten raíz común es 1
  - Se lo denomina entonces árbol BA(1) → árbol balanceado en altura, con diferencia máxima 1
    - Clase general BA(k): máxima diferencia de altura es k
  - ¿Cuáles de los siguientes son árboles AVL?



Árboles

AVL

- La estructura debe ser respetada → al insertar y eliminar nodos se realizan rotaciones restringidas a un área local del árbol
    - Algoritmos de rebalanceo sencillos
    - Mayor costo de acceso a disco
- Inviables para índices
    - Costo adicional al insertar / eliminar nodos
    - Al ser árboles binarios, si tienen muchos elementos son muy profundos (muchos niveles)

Árboles

AVL

- Si se cuenta con N claves

  - En un árbol binario completamente balanceado, el peor caso de búsqueda para encontrar una clave, busca en $\log_2(N+1)$ niveles del árbol

  - En un árbol AVL el peor caso de búsqueda podría ser buscar en $1.44 \log_2 (N+2)$ niveles del árbol

Árboles AVL

- Para 1.000.000 claves
  - Un árbol binario completamente balanceado, requiere desplazamiento en 20 niveles para buscar alguna de las claves
  - En un árbol AVL el número máximo de niveles a buscar es de 28
  - Para almacenamiento secundario son valores inaceptables → máximo 5 o 6 desplazamientos

Árboles

- Volviendo a los dos problemas planteados inicialmente
  - La búsqueda binaria requiere demasiados desplazamientos
  - Mantener un índice en orden es muy costoso
- Los árboles balanceados en altura proporcionan una solución admisible al segundo problema

Árboles

Binarios Paginados

- Desplazamientos en memoria secundaria → costo de tiempo relativamente alto
- Pero una vez en posición, la lectura o escritura de un conjunto de bytes contiguos es rápida
- Desplazamiento lento + transferencia rápida → paginación

Árboles

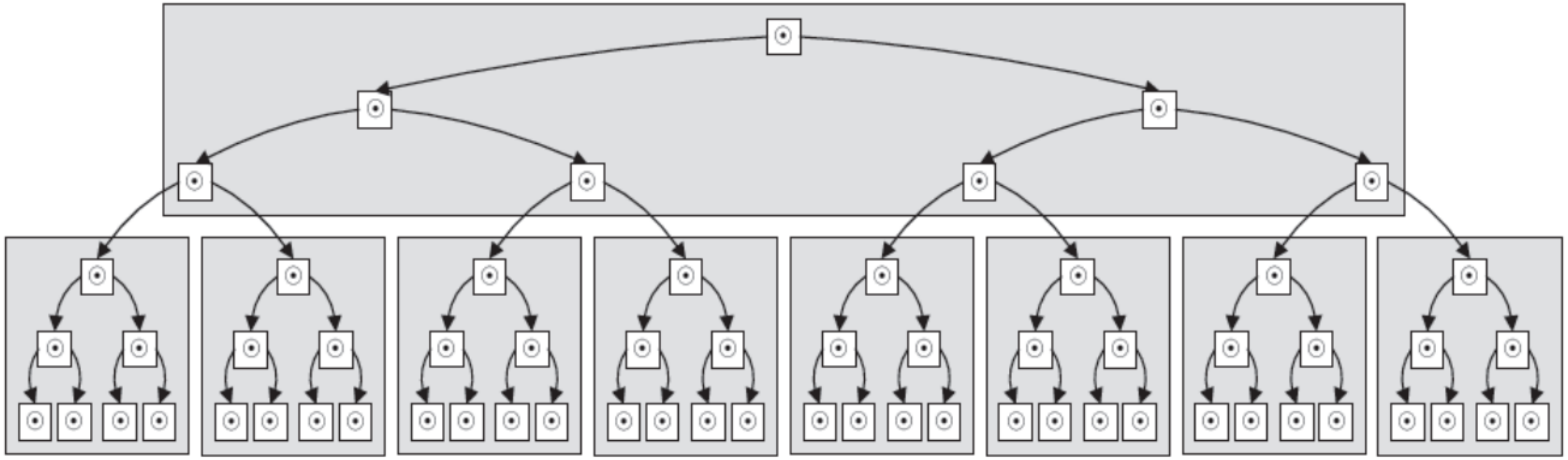
Binarios Paginados

- Estrategia
  - Dividir el árbol binario en páginas
  - Almacenar cada página en un bloque de direcciones contiguas en disco
- Se puede reducir el número de desplazamientos considerablemente
  - Permite búsquedas más rápidas en almacenamiento secundario
  - Solución potencial al problema de búsqueda eficiente

Árboles

Binarios Paginados

- Ejemplo
  - Posibilidad de acceder a 63 nodos con sólo 2 accesos a disco



Árboles

Binarios Paginados

- Uso de páginas grandes
  - Suposición de árbol **completamente balanceado**
  - Páginas de 8 Kb → **511 claves por página**
  - Para buscar cualquiera de 134.217.727 claves se requieren sólo 3 desplazamientos
- Cada acceso a una página requiere transmitir muchos datos → la mayoría no usados
  - Hay un tiempo de transmisión adicional, pero se ahorran muchos desplazamientos que consumirían mucho más tiempo

Árboles

Binarios Paginados

- Comparación
  - Peor caso de búsqueda en un árbol binario balanceado, N claves → $\log_2 (N+1)$
  - Para la versión paginada del mismo árbol, N claves, k claves por página → $\log_{k+1} (N+1)$
  - En el ejemplo:
    - Log_{2} (134.217.727 +1) = 27 desplazamientos
    - Log_{511+1} (134.217.727 +1) = 3 desplazamientos

Árboles

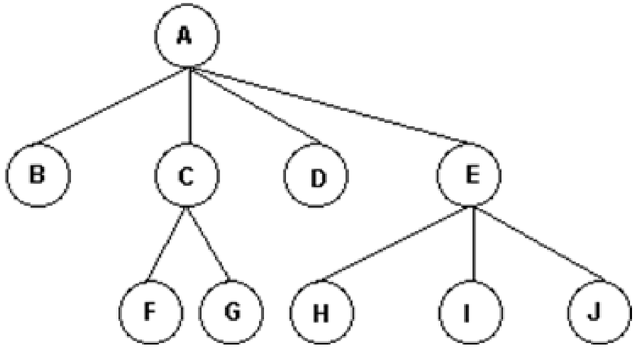
Binarios Paginados

- Problemas
  - ¿Cómo construirlo?
  - ¿Cómo elegir la raíz?
  - ¿Cómo mantenerlo balanceado?
  - La idea de agrupar claves en páginas es muy buena, pero no se ha encontrado forma de hacerlo correctamente

Árboles

Multicamino

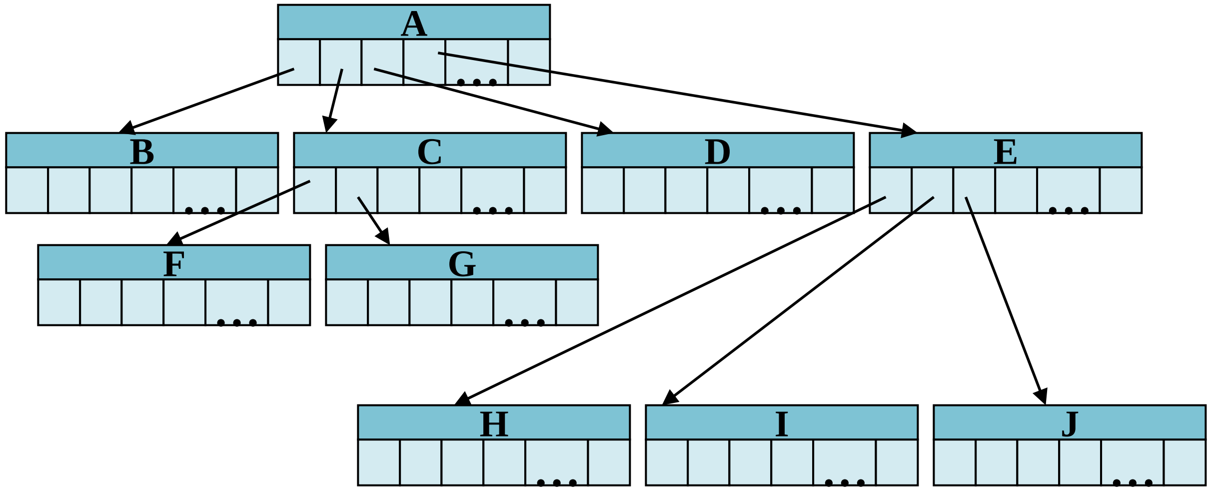
- Un árbol N-ario o multicamino es aquel en el que cualquier nodo puede tener cualquier número de hijos
  - Por definición, un árbol multicamino es todo árbol N-ario, con N ≥ 2
  - En general, al nombrar a un árbol multicamino se hará referencia a un árbol con N > 2, para diferenciarlos de los árboles binarios que ya fueron analizados



Árboles

Multicamino

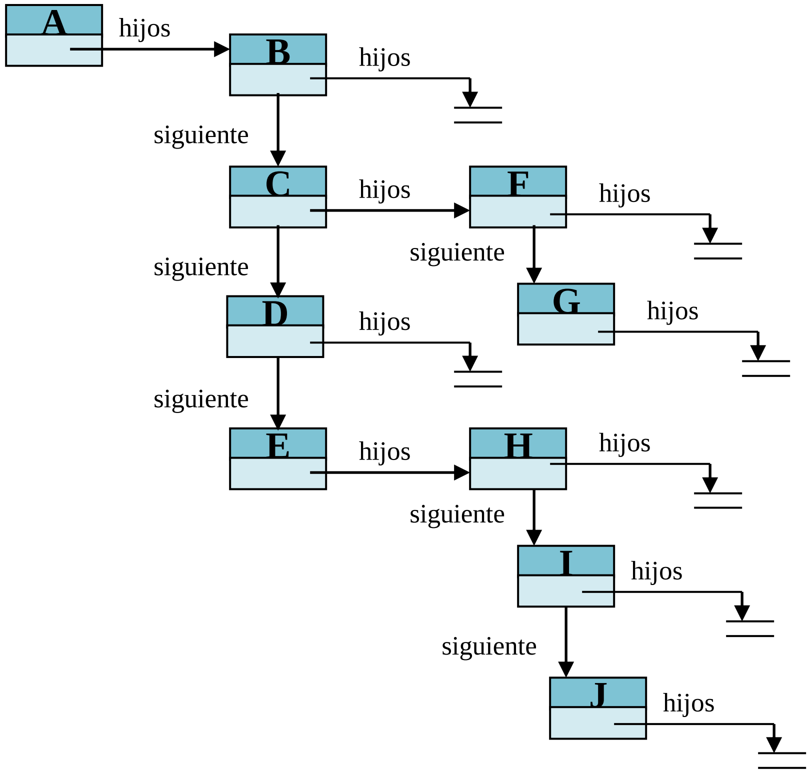
- Implementación 1: hijos como arreglo de referencias
  - Desaprovecha memoria si el número de hijos es muy variable
  - No puede usarse si el número de hijos es ilimitado



Árboles

Multicamino

- Implementación 2: hijos como lista enlazada
  - Estructura dinámica
  - Uso de punteros → más complejo



Árboles

Multicamino

- Los árboles multicamino son una buena opción que resuelve uno de los problemas que tienen los árboles binarios → cantidad de niveles

- Sin embargo, se debe mantener el árbol balanceado para asegurar la eficiencia
  - Si el árbol esta desbalanceado, no se puede asegurar que las búsquedas realizadas tengan un costo logarítmico

Árboles

Balanceados (B)

- Hasta ahora, se han construido árboles desde la raíz hacia abajo
  - Problemas para elegir la raíz
  - Problemas para mantener el árbol balanceado
- Alternativa: utilizar otro tipo de árboles, que se construyan hacia arriba
  - Se construyen partiendo de la base del árbol
  - La raíz emerge con la misma construcción del árbol
  - Se mantienen balanceados
  - Se denominan árboles B

Árboles

Balanceados (B)

- Árboles B (balanceados)
  - Son árboles multicamino
  - Se construyen en forma ascendente
    - Esta forma especial de construcción permite mantenerlo balanceado a bajo costo
  - Su orden indica la **máxima cantidad de descendientes** que cada nodo puede tener

Árboles

Balanceados (B)

- Propiedades de un árbol B de orden M
  - **Cantidad de hijos por nodo**:
    - Máximo: M hijos
    - Mínimo: [M/2] hijos (menos raíz y terminales)
    - Mínimo raíz: 2 hijos (o sino ninguno)
  - **Nodos no terminales**: K hijos → K-1 claves
  - **Nodos terminales (hoja)**: todos están al mismo nivel
    - Máximo: M-1 claves
    - Mínimo: [M/2]-1 claves
  - **Cantidad de punteros**: cantidad claves + 1

Árboles

Balanceados (B)

- Propiedades de un árbol B de orden M
  - **Formato del nodo**: cada $\mathbf{R_{i-1}} < \mathbf{R_i} < \mathbf{R_{i+1}}$

PO	R1	P1	R2	P2	R3	P3	R4	P4	R5	P5	Nro de registros

  - **Estructura**
    - Archivo con registros de longitud fija
    - Cada registro contiene un nodo
    - Type **regArbolB** = record

      hijos: array [1..M] of integer;

      claves: array [1..(M-1)] of char;

      cantClaves: integer;

      end

Árboles

Balanceados (B)

- Nodo adyacente hermano
  - Dos nodos son adyacentes hermanos si tienen **el mismo padre y son apuntados por punteros adyacentes** en el padre
- Operaciones
  - Creación e inserción
  - Búsqueda
  - Borrado
  - Modificación (se trata como una baja seguida de un alta)

Árboles

Operaciones (B)

- **Inserción (creación)**
  - Comienza con una búsqueda que llega hasta el nivel hoja → los registros se insertan en un nodo terminal
  - Después de encontrar el lugar de inserción, el trabajo de inserción, división y promoción continúa en forma ascendente desde abajo

Árboles

Operaciones (B)

- **Inserción (creación)**
  - Si el registro tiene lugar en el nodo terminal → no se produce overflow
    - Sólo se hacen **reacomodamientos internos** en el nodo
  - Si el registro no tiene lugar en el nodo terminal → se produce overflow
    - El nodo se **divide** y los elementos se **reparten** entre los nodos
    - Hay una **promoción** al nivel superior, y ésta **puede propagarse**, incluso hasta generar una nueva raíz

Árboles

Operaciones (B)

- **Inserción (creación) →** Performance
  - Orden = M, Altura = H
  - Mejor caso (sin overflow)
    - H lecturas
    - 1 escritura
  - Peor caso (overflow hasta la raíz → aumenta nivel del árbol)
    - H lecturas
    - 2H + 1 escrituras (dos por nivel + la raíz)
  - Estudios realizados
    - M = 10 → **25% overflow**
    - M = 100 → **2% overflow** (98% MC, 2% puede o no ser PC)

Árboles

Operaciones (B)

- **Búsqueda de información**
  - Comienza la búsqueda desde el nodo raíz
  - Busca la clave en el nodo
  - Si no la localiza se toma el puntero correspondiente entre las claves existentes
    - Si el puntero **no es nulo** → se toma ese nodo y se repite la búsqueda
    - Si el puntero **es nulo** → el elemento no se encuentra en el árbol

Árboles

Operaciones (B)

- **Búsqueda de información → Performance**
  - Orden = M, Altura = H
  - Axioma: N = #claves → N+1 punteros nulos en nodos terminales
  - Accesos
    - Mejor caso: 1 lecturas   Peor caso: H lecturas
  - ¿Cómo se puede acotar H?
Nivel	**#mínimo de descendientes**
1	2
2	2 * [M/2]
3	2 * [M/2] * [M/2]
H	$2 * [M/2]^{H-1}$

Árboles

Operaciones (B)

- **Búsqueda de información → Performance**

  - Orden = M, Altura = H, #Claves = N

$N+1$	$>=$	$2 * [M/2]^{H-1}$
$(N+1)/2$	$>=$	$[M/2]^{H-1}$
$\log_{[M/2]} ((N+1)/2)$	$>=$	$H - 1$
H	$<=$	$1 + \log_{[M/2]} ((N+1)/2)$

  - M = 512 y N = 1.000.000 → H <= 3,37
  - En sólo 4 lecturas se encuentra un registro

Árboles

Operaciones (B)

- **Eliminación**

  - Mejor caso: **no se produce underflow** al borrar el elemento del nodo (sólo reacomodos) → #claves >= [M/2]-1

    - **Caso 1:** nodo terminal
    - **Caso 2:** nodo no terminal → llevar a un nodo terminal

  - Peor caso: **se produce underflow** al borrar el elemento del nodo → #claves < [M/2]-1

    - **Caso 3:** redistribución
    - **Caso 4**: concatenación

Árboles

Operaciones (B)

- **Eliminación**

  - Redistribución: cuando un nodo tiene underflow es posible redistribuir las claves entre dicho nodo y el **nodo adyacente hermano** → sólo en caso que este tenga suficientes elementos

  - Concatenación: si un **nodo adyacente hermano** está al mínimo no se puede redistribuir → se concatena con un nodo adyacente disminuyendo el número de nodos (y en algunos casos también la **altura** del árbol)

Árboles

Operaciones (B)

- **Eliminación →** Performance

  - Orden = M, Altura = H

  - Mejor caso (borra de un nodo terminal)
    - H lecturas
    - 1 escritura (el nodo sin el elemento borrado)

  - Peor caso (concatenación lleva a decrementar el nivel del árbol)
    - 2H - 1 lecturas
    - H + 1 escrituras