Ejercicio 1:

Para este ejercicio vamos a ver en Sage como se comporta $\frac{n!}{1+2+...+n}$ para los 20 primeros números:

```
In: for i in srange (1,20):
        j=factorial(i)
        h=(i*(i+1))/2
        print i, j%h
Out:
1 0
2 2
3 0
4 4
5 0
6 6
7 0
8 0
9 0
10 10
11 0
12 12
13 0
14 0
15 0
16 16
17 0
18 18
19 0
```

Como vemos, en todos los números impares se cumple mientras que en algunos pares no. Vamos a demostrar cuando se cumple y cuando no:

Desarrollando la expresión anterior: $\frac{n!}{1+2+...+n}=\frac{1*2*...*n}{\frac{n*(n+1)}{2}}=\frac{1*2*...*(n-1)}{\frac{(n+1)}{2}}=\frac{2*(n-1)!}{n+1}$

Como vemos, la condición necesaria y suficiente es que se cumpla la última fórmula. Pero vamos a ver concretamente que pasa para números pares e impares:

- Si n es impar: entonces, n+1 es par y como tenemos un 2 en el numerador podemos pasando al denominador quedando la expresión: $\frac{(n-1)!}{\frac{n+1}{2}}$ Entonces: $\frac{n+1}{2}<n-1$, por tanto se encontrará en (n-1)! . Y por tanto dividirá a (n-1)! ,siendo esta una condición necesaria y suficiente para que se cumpla nuestra hipótesis.
- Si n es par: n+1 es impar. Podemos dividir otra vez en dos casos: si n+1 es primo no se cumpliría la condición (como vemos en sage) ya que no dividiría a números menores que él (como son los factores de (n-1)!); al contrario, si n+1 no es primo podremos dividirlo en dos factores p y q menores que n-1, incluyendose así en (n-1)!, y confirmando nuestra hipótesis.

Por tanto, las condiciones necesarias y suficientes son que n sea impar o que n+1 no sea primo.

Ejercicio 2:
Primero vamos a imprimir en sage los factores de los primeros números:
In:

```
print factor (11)
print factor (111)
print factor (1111)
print factor (11111)
print factor (111111)
print factor (1111111)
print factor (11111111)
print factor (111111111)
print factor (1111111111)
```

Out:

```
11
3 * 37
11 * 101
41 * 271
3 * 7 * 11 * 13 * 37
239 * 4649
11 * 73 * 101 * 137
3^2 * 37 * 333667
11 * 41 * 271 * 9091
```

Como vemos, los números 11 y 3 aparecen varias veces entre sus factores. Cada uno de estos números los podemos dividir en: $10^n+10^{(n-1)}+\ldots+10^2+10+1$
La solución que doy a este ejercicio es hacer cada potencia de diez módulo n y sumar para ver si ese es congruente con n. Si tuviéramos otra cifra multiplicando sería hacer lo mismo pero multiplicando el módulo de esa cifra por la de la potencia de 10.

Ejercicio 3:

En este caso, no he sido capaz de demostrar que la cifra es única pero he conseguido encontrar la cifra con un sencillo programa de sage:
In:

```
for i in srange (1,1000000):
    j=2^i
    h=5^i
    L1=j.digits()
    L2=h.digits()
    L1.reverse()
    L2.reverse()
    if L1[0]==L2[0]:
        print L1[0],i
```

Out:

```
3 5
3 15
3 78
3 88
3 98
3 108
3 118
3 181
3 191
3 201
```

```
3 211
3 274
3 284
3 294
3 304
3 367
3 377
…
```

Denotar que a partir del n=78 el número se repite cada 10 potencias ya que se repite periódicamente la primera cifra de cada una de las potencias.

Ejercicio 4:

Con un programa en sage comprobamos que el enunciado es correcto:

In:

```
print factor(2^4+4)
for i in srange (2,20):
    print is_prime(i^4+4)
```

Out:

```
False
False
False
False
False
False
False
False
False
False
False
False
False
False
False
False
…
```

Como vemos en el programa se cumple la afirmación. Para demostrarla usaremos inducción (tenemos demostrado ya en el programa el caso base):

$$(n+1)^4+1=n^4+1+4n^3+6n^2+4n+1$$

Sabemos que para los dos primeros términos se cumple (hipótesis) y si vamos agrupando de derecha a izquierda (4n +1 es compuesto, $6n^2+(4n+1)$ es compuesto (es impar)…) sale la suma de dos números compuestos que nos da un número compuesto.