Práctica 1: Método de Euler. Métodos de Taylor

1 Guión de la práctica:

En esta práctica implementaremos en MATLAB el método de Euler y método de Taylor de orden 2 para resolver correctamente el problema de valor inicial (PVI) general

$$\begin{aligned} &u'(t) = f(t, u(t)), \qquad t \in (t_0, T), \\ &u(t_0) = u_0, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $f = (f_i)$ es una función de $(t_0, T) \times \mathbb{R}^d$ en $\mathbb{R}^d$.

1.1 Método de Euler

La fórmula asociada al PVI es

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n), \quad n = 0, \ldots, N-1, \tag{2}$$

con paso de mallado equidistante

$$h = \frac{T - t_0}{N}.$$

En primer lugar, vamos a implementar la función **euler.m**:

```
function [u,t]=euler(f,N,t0,T,u0)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  Esta función resuelve el problema de valor inicial
%       u'=f(t,u)
%       u(t0)=u0
% utilizando el método de Euler
%
%           [u,t]=euler(N,t0,T,u0)
%
%  Variables de Entrada:
%       f: vector columna. función que rige el sistema de EDO,
%          tiene dos argumentos f(t,x) donde t es escalar
%          y x vector columna.
%       N: número de pasos en los que dividimos el intervalo de
%          integración
%       t0: tiempo inicial
%       T:  tiempo final
%       u0: vector columna. Dato inicial
%
%  Variables de Salida:
%       u: matriz de length(u0) x N que contiene la solución
%       t: vector de tiempos
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

1.2 Método de Taylor de orden 2

Queremos ahora construir una función que nos permita resolver el método de orden 2:

$$u_{n+1} = u_n + hf_n + \frac{h^2}{2}(d_t f)_n + \frac{h^2}{2}(D_x f)_n f_n,$$

donde $(d_t f)_n$ es el vector de componentes

$$\frac{\partial f_i}{\partial t}(t_n, u_n),$$

y $(D_x f)_n$ es la matriz cuadrada de tamaño d de fila i y columna j definida

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t_n, u_n).$$

1. Implementar la función **Taylor2.m**:

```
function [u,t]=Taylor2(f,df,Df,T,t0,N,u0)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  Esta función resuelve el problema de valor inicial
%       u'=f(t,u)
%       u(t0)=u0
% utilizandodo un método de Taylor de orden 2
%
%       [u,t]=Taylor2(f,df,Df,T,t0,N,u0,b,c,A)
%
%  Variables de Entrada:
%       f: vector columna. función que rige el sistema de EDO,
%          tiene dos argumentos f(t,x) donde t es escalar
%          y x vector columna.
%       df: vector columna. función derivada parcial con respecto,
%           al tiempo de f, tiene dos argumentos df(t,x) donde
%           t es escalar y x vector columna.
%       Df: matriz cuadrada. función jacobiano con respecto a x de
%           f, tiene dos argumentos Df(t,x) donde t es escalar
%           y x vector columna.
%       N: número de pasos en los que dividimos el intervalo de
%          integración
%       t0: tiempo inicial
%       T:  tiempo final
%       u0: vector columna, dato inicial
%
%  Variables de Salida:
%       u: matriz de length(u0) x length(t) que contiene la solución
%       t: vector de tiempos
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Comentarios: Para realizar esta práctica se puede implementar todas las funciones o ficheros .m auxiliares que se necesiten aparte de los citados aquí.

1.3 Ejercicios:

1. Utilizar las funciones Euler y Taylor2 para resolver el problema de valor inicial siguiente: En el intervalo $[0, 10]$,

$$(\text{PVI1}) \left\{ \begin{array}{l} u' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ 2(\cos(t) - \sin(t)) \end{pmatrix} \\ u(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

2. Representar gráficamente la solución exacta de (PVI1)

$$u(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} + \sin(t) \\ 2e^{-t} + \cos(t) \end{pmatrix}$$

frente a la solución aproximada para varios valores de h.

3. Representar gráficamente las poligonales formadas por los valores (h, error) y calcular la media de las pendientes de cada uno de los segmentos.

4. Aportar conclusiones relacionando los resultados numéricos obtenidos con lo visto en teoría.

5. Utilizar las funciones Euler y Taylor2 para resolver el problema de valor inicial siguiente: En el intervalo $[0, 15]$ de

$$(\text{SIR}) \left\{ \begin{array}{ll} S' & = -\beta I S \\ I' & = \beta I S - \alpha I \\ R' & = \alpha I \end{array} \right.$$

con dato inicial $S(0) = 995$, $I(0) = 5$, $R(0) = 0$ y parámetros $\alpha = 0.5$ y $\beta = 0.005\alpha$. Representar con respecto al tiempo las tres funciones aproximadas. Cambiar los parámetros y ver cómo es el comportamiento de las soluciones.