Práctica 2: Métodos de Runge-Kutta explícitos

1 Guión de la práctica:

En esta práctica implementaremos en MATLAB métodos Runge-Kutta explícitos para resolver correctamente el problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{aligned} &Y'(t) = f(t, Y(t)), \qquad t \in (t_0, T), \\ &Y(t_0) = u_0 \end{aligned}$$

2 Método de Runge-Kutta explícito

Los métodos Runge-Kutta son una familia de métodos monopaso que en un número s de etapas promedian la velocidad para aproximar con mejor orden de truncatura el PVI. Este conjunto de métodos fue inicialmente desarrollado alrededor del año 1900 por los matemáticos C. Runge y M. W. Kutta. Runge fue alumno de Weierstrass. Kutta, al igual que Hilbert, Minkowski, Perron y Sommerfeld, fue alumno de Lindemannn.

En esta práctica trabajaremos con los explícitos o clásicos, es decir, aquellos que a partir de dato y_n calculamos en progresión distintas etapas k_1 a k_s de forma directa.

Una forma extendida de identificar estos métodos son los **tableros de Butcher**. Estos constan de dos vectores (c y b) de tamaño s y una matriz cuadrada A de tamaño s. Si el método es explícito, la matriz A estriangular inferior y con ceros en la diagonal.

Queremos ahora construir una función que nos permita resolver un método Runge-Kutta explícito general de s etapas:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i(t_n, y_n; h)$$

$$\begin{array}{c|c} c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_s \end{pmatrix} & A \\ \hline & (b_1 \cdots b_s) = b^T \end{array}$$

donde

$$k_1(t_n, y_n; h) = f(t_n + c_1 h, y_n)$$

y para $i > 1$

$$k_i(t_n, y_n; h) = f(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j), \quad i = 2, \dots, s.$$

Definir $k = (k_1, k_2, \dots, k_s) \in M(d, s)$

$f \in \mathbb{R}^d$

3 Tableros de Butcher explícitos

- Método de Runge (1895) de orden 2:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

$k_1(t_n, y_n, h) = f(t_n, y_n)$

$k_2(t_n, y_n, h) = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h \frac{1}{2} k_1)$

$y_{n+1} = y_n + h k_2$

- Método de Heun de orden 2:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

$k_1(t_n, y_n) = f(t_n, y_n)$

$k_2(t_n, y_n) = f(t_n + h, y_n + h(k_1))$

$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2}\right)$

- Método de Heun de orden 3:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$$

- Método de Kutta (1905) de orden 4:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

4 Programa

Queremos ahora construir una función, **RKexplicito.m**, que nos permita resolver un método Runge-Kutta explícito general de s etapas:

```
function [y,t]=RKexplicito(f,T,t0,N,y0,b,c,A)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  Esta función resuelve el problema de valor inicial
%       Y'=f(t,Y)
%       Y(t0)=y0
% utilizandodo un método Runge-Kutta explícito
%
%       [y,t]=RKexplicito(f,T,t0,N,y0,b,c,A)
%
%  Variables de Entrada:
%
%       f: vector columna. función que rige el sistema de EDO,
%          tiene dos argumentos f(t,x) donde t es escalar
%          y x vector columna.
%       N: número de pasos en los que dividimos el intervalo de
%          integración
%       t0: tiempo inicial
%       T:  tiempo final
%       y0: vector columna, dato inicial
%       b,c,A: coeficientes del tablero de BUTCHER.
%              A: matriz cuadrada de orden s
%         b,c: vectores columna de orden s
%
%  Variables de Salida:
%
%       y: matriz de length(u0) x length(t) que contiene la solución
%       t: vector de tiempos
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Comentarios: Para realizar esta práctica se puede implementar todas las funciones o ficheros .m auxiliares que se necesiten aparte de los citados aquí.

5 Ejercicios:

1. Utilizar las funciones Euler y RKexplicito con los tableros dados anteriormente para resolver el problema de valor inicial siguiente: En el intervalo $[0, 10]$,

$$\begin{cases} u' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 2\sin(t) \\ 2(\cos(t) - \sin(t)) \end{bmatrix} \\ u(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

   (a) Representar gráficamente la solución exacta frente a la solución aproximada para varios valores de h.

   (b) Representar gráficamente las poligonales formadas por los valores (h, error) y calcular la media de las pendientes de cada uno de los segmentos.

   (c) Aportar conclusiones relacionando los resultados numéricos obtenidos con lo visto en teoría.

2. Utilizar RKexplicito con Euler y con los tableros dados anteriormente con $N = 500$ y $N = 10000$ para resolver el problema de valor inicial siguiente: En el intervalo $[0, 10]$,

$$\begin{cases} u' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 998 & -999 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 2\sin(t) \\ 999(\cos(t) - \sin(t)) \end{bmatrix} \\ u(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

   (a) ¿Qué sucede?

   (b) Comprobar que su solución también es:

$$u(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} + \sin(t) \\ 2e^{-t} + \cos(t) \end{pmatrix}$$

3. **Problema de los tres cuerpos**. Un problema clásico de la Física Matemática es es el movimiento de tres cuerpos bajo la Ley de la Gravitación Universal: La fuerza de atracción que ejerce la partícula de masa M_1 situada en $X_1 \in \mathbb{R}^3$ sobre la partícula de masa M_2 situada en $X_2 \in \mathbb{R}^3$ es

$$F(X_1, X_2) = Gm_1m_2 \frac{X_1 - X_2}{|X_1 - X_2|^3}.$$

   Aquí vamos a planter la dinámica aislada del Sol, la Tierra y Marte. Sea M_s, M_t y M_m sus masas tal que $M_s = 330000M_t$ y $M_t = 10M_m$. Suponemos las siguientes hipótesis:

   - Los tres cuerpos permanecen en el mismo plano.
   - El centro de gravedad de los tres cuerpos coincide con el centro del Sol.

   Así, las trayectorias vienen dadas por $X_s(t) = (0, 0)$, $X_t(t) = (x_1(t), x_2(t))$ y $X_m(t) = (x_3(t), x_4(t))$ y satisface el sistema en unidades astronómicas:

$$\frac{d^2X_t}{dt^2} = 4\pi^2 \left(\frac{M_m}{M_s} \frac{X_m - X_t}{|X_m - X_t|^3} - \frac{X_t}{|X_t|^3} \right),$$
$$\frac{d^2X_m}{dt^2} = 4\pi^2 \left(\frac{M_t}{M_s} \frac{X_t - X_m}{|X_m - X_t|^3} - \frac{X_m}{|X_m|^3} \right).$$

   (a) Suponiendo que las posiciones iniciales están en su perihelio $X_t(0) = (1, 0)$ y $X_m(0) = (1.52, 0)$ y sus velocidades iniciales son $\dot{X}_t(0) = (0, -5.1)$ y $\dot{X}_m(0) = (0, -4.6)$, resuelve el sistema en el intervalo $[0, 2]$ con Euler $h = 0.01$. ¿Qué sucede? ¿Tienen sentido las soluciones numéricas?

   (b) ¿Qué sucede con h más pequeños, $h = 0.001$ y $h = 0.0001$?

   (c) Aplica alguno de los tableros RK explícitos (Heun de orden 3) con $h = 0.01$. ¿Qué sucede? ¿Por qué crees que está sucediendo?