Curso 2020/21

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

PROBLEMAS. Hoja 1

1. Ver que el método de Euler falla cuando queremos aproximar la solución $Y(t) = t^{\frac{3}{2}}$ del problema

$$Y' = \frac{3}{2}Y^{\frac{1}{3}}, \qquad Y(0) = 0.$$

Cuál es el problema. Justificar la respuesta.

2. Considerando mallados equidistantes, probar el orden de truncatura o orden de consistencia de los siguientes métodos

1. Euler implícito, $\quad y_{n+1} = y_n + hf_{n+1}$.
2. Taylor 2, $\quad y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2}(f_t(t_n, y_n) + f_n f_y(t_n, y_n))$.
3. Runge, $\quad y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f_n)$.
4. Leap-frog, $\quad y_{n+2} = y_n + 2hf_{n+2}$.
5. Trapecio, $\quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$ (utilizando solo Taylor).
6. Trapecio, $\quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$ (utilizando la regla de cuadratura del trapecio).

3. Sea un PVI. Utilizando los polinomios de interpolación de Lagrange obtener el método de Adams-Bashforth de dos pasos

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h\left(\frac{3}{2}f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{1}{2}f(t_n, y_n)\right),$$

y el de tres pasos

$$y_{n+3} = y_{n+2} + h\left(\frac{23}{12}f(t_{n+2}, y_{n+2}) - \frac{4}{3}f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{5}{12}f(t_n, y_n)\right).$$

4. Sea el PVI

$$Y' = Y \quad t \in [0,1], \quad Y(0) = 1,$$

cuya solución exacta es $Y(t) = e^t$. Dado un paso equidistante $h = 1/N$, obtener los siguientes resultados:

a. Utilizando Euler explícito y tomando $y_0 = 1$, probar que $y_n = (1+h)^n$ para $n = 1, \ldots, N$.

b. Demostrar por inducción que para $t_n = nh$,

$$|Y(t_n) - (1+h)^n| \le \frac{e}{2}h^2 \sum_{k=0}^{n-1}(1+h)^k, \qquad \text{para } n = 1, \ldots, N.$$

c. Como consecuencia se tiene que

$$\max_{n=0,\ldots,N} |Y(t_n) - (1+h)^n| = O(h).$$