Tarea 8

Juan Velasco Izquierdo

December 6, 2020

Sea el método numérico $y_{n+2} - y_n = h\frac{2}{3}(f_{n+2} + f_{n+1} + f_{n+2})$**, identificar la región de estabilidad del método lineal multipaso y decidir si es A-Estable.**

Dado que nos encontramos ante un método lineal multipaso (MLM), la primera forma que tenemos de ver cómo es la región de estabilidad es usando el polinomio de estabilidad $\Pi(r, z)$. Para ello primero tenemos que identificar el primer y el segundo polinomio característicos. Vamos a ver los tres polinomios.

$\rho(\xi) = \xi^2 + 1$

$\sigma(\xi) = \frac{2}{3}\xi^2 + \frac{2}{3}\xi + \frac{2}{3}$

$\Pi(r, z) = \rho(r) - z\sigma(r) = r^2 - 1 - \frac{2}{3}zr^2 - \frac{2}{3}zr - \frac{2}{3}z = (1 - \frac{2}{3}z)r^2 - (\frac{2}{3}z)r - (1 + \frac{2}{3}z)$

La primera forma de ver si es A-Estable y determinar su región de estabilidad D es encontrar las raíces $r(z)$ del polinomio $\Pi(r, z)$ tales que $|r(z)| < 1$. En nuestro caso es bastante difícil obtener estas raíces por lo que vamos a utilizar el segundo método.

El segundo método consiste en observar la frontera de al región de estabilidad ∂D, el cual está contenido en $F := \{z \in \mathbb{C}$: existe una raíz de $\Pi(., z)$de módulo $1\}$. Sea $z \in F$, este z viene determinado por:

$z = \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})}$, con $0 \leq \theta < 2\pi$

Por lo tanto F es la imagen de una curva cerrada que separa $\mathbb{C}$ en dos regiones disjuntas $\mathbb{C}\backslash F = A_1 \sqcup A_2$, y por tanto o bien $\partial D \subseteq A_1$ o bien $\partial D \subseteq A_2$. Para ver cual caso se da simplemente hay que estudiar un punto.

Vamos a empezar viendo como es F usando como son los elementos del mismo. Pero primero vamos a ver un par de igualdades que usaremos en el desarrollo:

(1) $e^{ni\theta} = \cos(n\theta) + \sin(n\theta)$

(2) $ie^{i\theta} = i\cos(n\theta) - \sin(\theta)$

(3) $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$

(4) $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$
(5) $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$

Pasemos al desarrollo:

$z = \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})} = \frac{e^{2i\theta - 1}}{\frac{2}{3}e^{2i\theta}+\frac{2}{3}e^{i\theta}+\frac{2}{3}} =$

Usando (1)

$= \frac{\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)-1}{\frac{2}{3}(\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)+\cos(\theta)+i\sin(\theta)+1)} =$

Usando (3), (4) y (5)

$= \frac{3}{2}\frac{\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)+i2\sin(\theta)\cos(\theta)-\sin^2(\theta)-\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)+i2\sin(\theta)\cos(\theta)+\cos(\theta)+i\sin(\theta)+\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)} =$

$= \frac{3}{2}\frac{-2\sin^2(\theta)+2i\sin(\theta)\cos(\theta)}{2\cos^2(\theta)+2i\cos(\theta)\sin(\theta)+\cos(\theta)+i\sin(\theta)} = \frac{3}{2}\frac{\sin(\theta)(-\sin(\theta)+i\cos(\theta))}{\cos(\theta)(\cos(\theta)+i\sin(\theta))+\frac{1}{2}(\cos(\theta)+i\sin(\theta))} =$

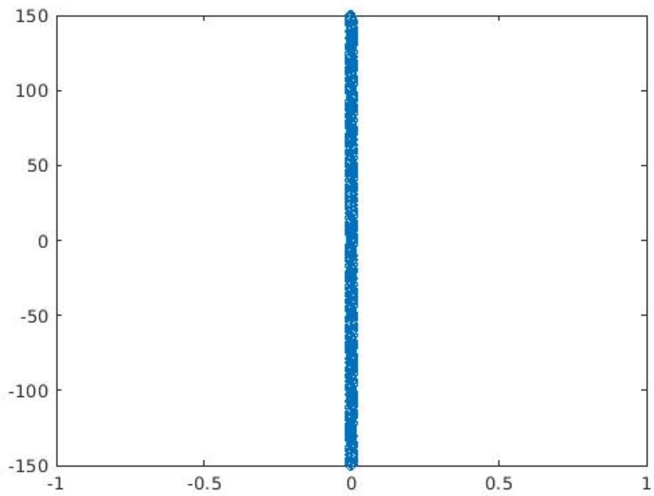
Usando (1) y (2)

$= \frac{3}{2}\frac{\sin(\theta)ie^{i\theta}}{\cos(\theta)e^{i\theta}+\frac{1}{2}e^{i\theta}} = \frac{3\sin(\theta)}{2\cos(\theta)+1}i$

Por tanto:

$F = \{z \in \mathbb{C} : z = \frac{3\sin(\theta)}{2\cos(\theta)+1}i, \theta \in [0, 2\pi]\}$

Podemos intuir que F es un segmento en el eje vertical, pero hemos usado Matlab para realizar una gráfica del mismo, la cual mostramos a continuación.



Esto confirma nuestras sospechas y por tato D está en el $int(F)$ y por tanto $D = \emptyset$ o bien $D = \mathbb{C}\backslash F$

Para ver esto simplemente tenemos que coger un punto en $\mathbb{C}_-$ y ver si sus raíces tienen módulo menor que 1. Si sucede esto $D = \mathbb{C}\backslash F$ y además es A-estable.

$\Pi(r, -\frac{3}{2}) = 2r^2 + r = r(2r+1)$ Por lo tanto $r_1(-\frac{3}{2}) = 0$ y $r_2(-\frac{3}{2}) = -\frac{1}{2}$, ambas de módulo menor que 1.

Concluimos pues que **el método es A-estable** y $D = \mathbb{C} \backslash F$.