Sea el método con paso equidistante $y_{n+1} = y_n + h(\theta f_n + (1-\theta) f_{n+1})$ con $\theta \in (0,1)$. Define el método de la forma $\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h\,\phi(t_n, y_n, \dots, y_{n+k-1}; h)$. Probar las tres hipótesis H_{MN} para la función de incremento ϕ.

$$y_{n+1} - y_n = h\underbrace{(\theta f(t_n, y_n) + (1-\theta) f(t_n + h, y_n + h\phi))}_{\phi = \phi_f(t_n, y_n; h)}$$

Las tres hipótesis H_{MN} son:

i) ϕ_f es continua

ii) $\exists h_0, L > 0$ tq $\|\phi_f(t_n, y_n; h) - \phi_f(t_n, \hat{y}_n; h)\| \leq L \|y_n - \hat{y}_n\|$ si $0 < h < h_0$

iii) Si $f \equiv 0 \Rightarrow \phi_f \equiv 0$

Demostración

i) El valor de ϕ_f se puede obtener por iteración de punto fijo:

$$\phi_f(t_n, y_n; h) = \lim_{k \to \infty} \phi_f^{[k]}(t_n, y_n; h)$$ donde $[k]$ representa la iteración k-ésima de ϕ_f.

$$\phi_f^{[k]}(t_n, y_n; h) = F(\phi_f^{[k-1]}(t_n, y_n; h))$$

Sabemos, por la Tarea 4, que $\phi = F(\phi)$ satisface el punto fijo si $h < \frac{1}{(1-\theta)L_f}$, esto es, la iteración converge al punto fijo independientemente de $\phi^{[0]}$ (la iteración inicial). Luego tomamos, por ejemplo, $\phi_f^{[0]} = 0$. Sabemos que si $\phi_f^{[k-1]}$ es continua, $\phi_f^{[k]} = F(\phi_f^{[k-1]})$ también lo es, pues es composición de funciones continuas.

Entonces sabemos que hasta k, todas las $\phi_f^{[k]}$ son continuas, para todo k, luego el límite de las k lo será si la convergencia es uniforme.

Defino la serie telescópica:

$$\phi_f^{[k]} = \sum_{j=1}^{k} (\phi_f^{[j]} - \phi_f^{[j-1]})$$ si la serie converge uniformemente, la sucesión de las $\phi_f^{[k]}$ lo hará y el límite será una función continua.

$$\|\phi_f^{[j]} - \phi_f^{[j-1]}\| = \|F(\phi_f^{[j-1]}) - F(\phi_f^{[j-2]})\| \underset{\text{Por Tarea 4}}{\leq} (1-\theta) L_f h \|\phi_f^{[j-1]} - \phi_f^{[j-2]}\|$$

Iterando concluimos que:

$$\|\phi_f^{[j]} - \phi_f^{[j-1]}\| \leq ((1-\theta) L_f h)^{j-1} \|\phi_f^{[1]} - \cancelto{0}{\phi_f^{[0]}}\|$$

$$\phi_f^{[1]} = F(\phi^{[0]}) = \theta f(t_n, y_n) + (1-\theta) f(t_n + h, y_n)$$

Por ser f continua, está acotada sobre compactos, luego para cada subconjunto K, $\exists M(K)$ tq $\|\phi_f^{[1]}\| \leq M$ si $(t_n, y_n, h) \in K$

Luego $\|\phi_f^{[j]} - \phi_f^{[j-1]}\| \leq ((1-\theta) L_f h)^{j-1} \underbrace{\|\phi_f^{[1]}\|}_{\leq M} \leq M((1-\theta)L_f h)^{j-1}$

Si tomamos $\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \|\phi_f^{[j]} - \phi_f^{[j-1]}\| \leq M \sum_{j=1}^{\infty} ((1-\theta)L_f h)^{j-1}$ la serie converge, puesto que $L_f h(1-\theta) < 1$

Entonces, por el Teorema M de Weierstrass, la convergencia es uniforme en $K \Rightarrow$
$\Rightarrow \phi_f$ continua sobre K arbitrario $\Rightarrow \phi_f$ continua (si $h < \frac{1}{(1-\theta)L_f}$) ✓

ii) $\|\phi_f(t_n, y_n; h) - \phi_f(t_n, \hat{y}_n; h)\| = \|\theta f(t_n, y_n) + (1-\theta) f(t_n+h, y_n+h\phi) - \theta f(t_n, \hat{y}_n) - (1-\theta) f(t_n+h, \hat{y}_n+h\phi)\|$
$\leq \theta \| f(t_n, y_n) - f(t_n, \hat{y}_n)\| + (1-\theta)\| f(t_n+h, y_n+h\phi) - f(t_n+h, \hat{y}_n+h\phi)\| \leq$

Desig. triangular

$\leq \theta L_f \|y_n - \hat{y}_n\| + L_f(1-\theta)(\|y_n - \hat{y}_n\| + h\|\phi(t_n, y_n; h) - \phi(t_n, \hat{y}_n; h)\|)$

f Lipschitz con respecto a su 2ª variable + Des triang

Se tiene:

$$\|\phi_f(t_n, y_n; h) - \phi_f(t_n, \hat{y}_n; h)\| - hL_f(1-\theta)\|\phi_f(t_n, y_n; h) - \phi_f(t_n, \hat{y}_n; h)\| \leq$$
$$\leq \theta L_f \|y_n - \hat{y}_n\| + L_f(1-\theta)\|y_n - \hat{y}_n\| = L_f\|y_n - \hat{y}_n\|$$

Luego, $\|\phi_f(t_n, y_n; h) - \phi_f(t_n, \hat{y}_n; h)\| \leq \frac{L_f}{1 - hL_f(1-\theta)} \|y_n - \hat{y}_n\|$

Esto se cumple si $1 - hL_f(1-\theta) > 0$, es decir, $h < \frac{1}{L_f(1-\theta)} = h_0$, como ya sabíamos.

Luego $\frac{L_f}{1 - hL_f(1-\theta)} = L$ se cumple ii) ✓

iii) Si $f \equiv 0$, $\phi_f = \theta \cdot 0 + (1-\theta) \cdot 0 \equiv 0$ ✓

□

Se cumplen las tres hipótesis H_{MN}

$$y_{n+2} = \frac{4}{3} y_{n+1} - \frac{1}{3} y_n + \frac{2}{3} h f_{n+2}$$

Por lo visto en la Tarea 2, el método se escribe como:

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j y_{n+j} = h \phi_f(t_n, y_n, y_{n+1}; h), \qquad \alpha_0 = \frac{1}{3}, \ \alpha_1 = \frac{-4}{3}, \ \alpha_2 = 1,$$

$$\phi_f(t_n, y_n, y_{n+1}; h) = \frac{2}{3} f\left(t_n + 2h, \frac{4}{3} y_{n+1} - \frac{1}{3} y_n + h\phi_f\right) = F(\phi).$$

Como he comprobado en la Tarea 4, la aplicación F es contractiva y se tiene que

$$\| F(\phi) - F(\hat{\phi}) \| \leq \frac{2}{3} L_f h \| \phi - \hat{\phi} \| \quad \text{para todo } h < \frac{3}{2L_f}.$$

Veamos que se satisfacen las hipótesis (H_{MN}):

i) ϕ es continua:

Como F es contractiva, ϕ se puede obtener iterando:

$$\phi_f(t_n, y_n, y_{n+1}; h) = \lim_{k \to \infty} \phi_f^{(k)}, \qquad \text{donde } \phi_f^{(k)} = F(\phi_f^{(k-1)}).$$

Tomando $\phi_f^{(0)} = 0$, se tiene que $\phi_f^{(k)}$ es continua para todo k por ser f continua, y además:

$$\phi_f^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} (\phi_f^{(j)} - \phi_f^{(j-1)})$$

$$\| \phi_f^{(j)} - \phi_f^{(j-1)} \| = \| F(\phi_f^{(j-1)}) - F(\phi_f^{(j-2)}) \| \overset{F \text{ contractiva}}{\leq} \left(\frac{2}{3} L_f h\right) \| \phi_f^{(j-1)} - \phi_f^{(j-2)} \| \leq \dots \leq$$

$$\leq \left(\frac{2}{3} L_f h\right)^{j-1} \| \phi_f^{(1)} - \phi_f^{(0)} \| = \left(\frac{2}{3} L_f h\right)^{j-1} \| \phi_f^{(1)} \|$$

Por otro lado,

$\phi_f^{(1)} = F(\phi_f^{(0)}) = F(0) = \frac{2}{3} f\left(t_n + 2h, \frac{4}{3} y_{n+1} - \frac{1}{3} y_n\right)$ es continua, y por tanto está acotada en compactos. Para cada compacto K, existe una constante M_K tal que $\| \phi_f^{(1)} \| \leq M_K$, entonces:

$$\| \phi_f^{(j)} - \phi_f^{(j-1)} \| \leq \left(\frac{2}{3} L_f h\right)^{j-1} M_K$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \| \phi_f^{(j)} - \phi_f^{(j-1)} \| \leq M_K \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} L_f h\right)^{j-1} \quad \text{que es convergente, por ejemplo,}$$

para $h < \dfrac{1}{2L_f}$

Por tanto, por el Teorema M de Weierstrass, la convergencia es uniforme,

y $\phi_f(t_n, y_n, y_{n+1}; h) = \lim_{k\to\infty} \phi_f^{(k)}$ es continua.

ii) $\| \phi_f(t_n, y_n, y_{n+1}; h) - \phi_f(t_n, \hat{y}_n, \hat{y}_{n+1}; h) \| =$

$= \| \frac{2}{3} f(t_n + 2h, \frac{4}{3} y_{n+1} - \frac{1}{3} y_n + h\phi) - \frac{2}{3} f(t_n + 2h, \frac{4}{3}\hat{y}_{n+1} - \frac{1}{3}\hat{y}_n + h\phi) \| \leq$

f Lipschitz $\leq \frac{2}{3} L_f \| \frac{4}{3}(y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}) - \frac{1}{3}(y_n - \hat{y}_n) + h(\phi_f(t_n, y_n, y_{n+1}; h) - \phi_f(t_n, \hat{y}_n, \hat{y}_{n+1}; h)) \| \leq$

$\overset{D.T.}{\leq} \frac{2}{3} L_f \left(\frac{4}{3} \| y_{n+1} - \hat{y}_{n+1} \| + \frac{1}{3} \| y_n - \hat{y}_n \| + h \| \phi_f(t_n, y_n, y_{n+1}; h) - \phi_f(t_n, \hat{y}_n, \hat{y}_{n+1}; h) \| \right)$

Despejando:

$$(1 - \frac{2}{3} h L_f) \| \phi_f(t_n, y_n, y_{n+1}; h) - \phi_f(t_n, \hat{y}_n, \hat{y}_{n+1}; h) \| \leq \frac{8}{9} L_f \| y_{n+1} - \hat{y}_{n+1} \| + \underbrace{\frac{2}{9} L_f \| y_n - \hat{y}_n \|}_{\leq \frac{8}{9} \| y_n - \hat{y}_n \| \cdot L_f}$$

$$\| \phi_f(t_n, y_n, y_{n+1}; h) - \phi_f(t_n, \hat{y}_n, \hat{y}_{n+1}; h) \| \leq \frac{8 \cdot L_f}{9(1 - \frac{2}{3} h L_f)} \sum_{j=0}^{1} \| y_{n+j} - \hat{y}_{n+j} \|$$

Por tanto se cumple la hipótesis ii), con $L = \dfrac{8 \cdot L_f}{9(1 - \frac{2}{3} h L_f)}$

iii) $f \equiv 0 \Rightarrow \phi_f \equiv 0$ porque $\phi_f(t_n, y_n, y_{n+1}; h) = \frac{2}{3} f(t_n + 2h, \frac{4}{3} y_{n+1} - \frac{1}{3} y_n + h\phi_f)$

Conclusión: La función incremento satisface las tres hipótesis HMN.

Tarea 4 extra

Consideramos el método $y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}(f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2})$

Por lo realizado en la tarea 4 tengo la siguiente información:

$$\phi_f(t_n, y_n, y_{n+1}; h) = \frac{1}{3}\left(f(t_n,y_n) + 4f(t_n+h, y_{n+1}) + f(t_n+2h, y_n + h\,\phi_f)\right)$$

Ésta función es un punto fijo de la función:

$$F(\phi) = \frac{1}{3}\left(f(t_n,y_n) + 4f(t_n+h, y_{n+1}) + f(t_n+2h, y_n+h\phi)\right)$$

Que hemos demostrado que es contractiva (Tarea 4) para $h < \frac{3}{L_f}$, donde L_f es la constante de Lipschitz asociada a f. Probemos las hipótesis (H_{MN})

(i) $\phi_f(t_n, y_n, y_{n+1}; h)$ es continua.

El valor de la función de incremento se obtiene por iteración de punto fijo

$$\phi_f(t_n, y_n, y_{n+1}; h) = \lim_{k\to\infty} \phi_f^{[k]}(t_n,y_n,y_{n+1};h) \quad \text{con} \quad \phi_f^{[k]}(t_n,y_n,y_{n+1};h) = F(\phi_f^{[k-1]}(t_n,y_n,y_{n+1};h))$$

Con la F definida anteriormente y $\phi_f^{[0]} = 0$. Por ser f una función continua por hipótesis, $\phi_f^{[k-1]}$ es una función continua. Además $\phi_f^{[k]}$ también lo es por ser composición de funciones continuas. Por lo tanto tengo una sucesión de funciones continuas, pero el límite (nuestra función de incremento) lo será si la convergencia es uniforme.

Observamos que $\phi_f^{[k]} = \sum_{j=1}^{k} (\phi_f^{[j]} - \phi_f^{[j-1]})$. Si la serie converge uniformemente sobre compactos, la sucesión $\{\phi_f^{[k]}\}_{k=1}^{\infty}$ también lo hará y el límite será una función continua.

Ahora:

$$\|\phi_f^{[j]} - \phi_f^{[j-1]}\| = \|F(\phi_f^{[j-1]}) - F(\phi_f^{[j-2]})\| \overset{\text{Tarea 4}}{\leq} \frac{hL_f}{3}\|\phi_f^{[j-1]} - \phi_f^{[j-2]}\| \leq \dots \leq \left(\frac{hL_f}{3}\right)^{j-1}\|\phi_f^{[1]}\|$$

Pero $\phi_f^{[1]}(t_n,y_n,y_{n+1};h) = \frac{1}{3}(f(t_n,y_n) + 4f(t_n+h, y_{n+1}) + f(t_n+2h, y_n))$, que por ser f continua está acotada sobre compactos. Entonces, para cada subconjunto compacto de $[t_0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times(0,\infty)$ existe una constante M_K tal que:

$$\|\phi^{[1]}(t_n,y_n,y_{n+1};h)\| \leq M_K \quad \text{si} \quad (t_n,y_n,y_{n+1};h)\in K$$

Finalmente, sobre cada compacto:

$$\| \phi_f^{(j)} - \phi_f^{(j-1)} \| \leq M_K \left(\frac{hL_f}{3}\right)^{j-1}$$

Como la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{hL_f}{3}\right)^j$ es convergente, pues hemos escogido $h < \frac{3}{L_f}$ Para que F fuera contractiva, y usando el criterio M de Weierstrass obtenemos que la convergencia es uniforme y que nuestra función de incremento es continua.

(ii) Existen constantes h_0 y L tales que:

$$D = \| \phi_f(t_n, y_n, y_{n+1}; h) - \phi_f(t_n, \hat{y}_n, \hat{y}_{n+1}; h) \| \leq L \sum_{j=0}^{1} \| y_{n+j} - \hat{y}_{n+j} \| \quad \text{si } 0 < h < h_0$$

Veamos:

$$D = \left\| \frac{1}{3}\left(f(t_n, y_n) - f(t_n, \hat{y}_n)\right) + \frac{4}{3}\left(f(t_{n+h}, y_{n+1}) - f(t_{n+h}, \hat{y}_{n+1})\right) + \frac{1}{3}\left(f(t_n+2h, y_n + h\phi_f) - f(t_n+2h, \hat{y}_n + h\hat{\phi}_f)\right) \right\|$$

f Lipschitz $\oplus$ desigualdad triangular $\leq \frac{1}{3}L_f \| y_n - \hat{y}_n \| + \frac{4}{3}L_f \| y_{n+1} - \hat{y}_{n+1} \| + \frac{1}{3}L_f \| y_n + h\phi_f - \hat{y}_n - h\hat{\phi}_f \|$

$\left(\phi_f \text{ aquí denota } \phi_f(t_n, y_n, y_{n+1}; h) \quad \text{y} \quad \hat{\phi}_f = \phi_f(t_n, \hat{y}_n, \hat{y}_{n+1}; h) \right)$

$\leq \frac{1}{3}L_f \left(\| y_n - \hat{y}_n \| + 4 \| y_{n+1} - \hat{y}_{n+1} \| + \| y_n - \hat{y}_n \| + h \| \phi_f - \hat{\phi}_f \| \right)$, entonces tengo que:

$$\left(1 - \frac{hL_f}{3}\right) \overbrace{\| \phi_f - \hat{\phi}_f \|}^{D} \leq \frac{1}{3}L_f \left(2\| y_n - \hat{y}_n \| + 4 \| y_{n+1} - \hat{y}_{n+1} \| \right)$$

Si $1 - \frac{hL_f}{3} > 0 \longleftrightarrow \boxed{h < \frac{3}{L_f} = h_0}$ (ya lo teníamos para F contractiva), paso dividiendo:

$$D \leq \frac{L_f}{3\left(1 - \frac{hL_f}{3}\right)} 2 \left(\| y_n - \hat{y}_n \| + 2 \| y_{n+1} - \hat{y}_{n+1} \| \right) \leq \underbrace{\frac{4L_f}{3\left(1 - \frac{hL_f}{3}\right)}}_{\boxed{L}} \left(\| y_n - \hat{y}_n \| + \| y_{n+1} - \hat{y}_{n+1} \| \right)$$

$\blacksquare$

(iii) Si $f \equiv 0$ entonces $\phi_f(t_n, y_n, y_{n+1}; h) = \frac{1}{3}\left(\cancel{f(t_n, y_n)}^{=0} + 4 \cdot \cancel{f(t_{n+h}, y_{n+1})}^{=0} + \cancel{f(t_n+2h, y_n + h\phi_f)}^{=0} \right) \equiv 0$

$\blacksquare$

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n + (1-\theta)h, \theta y_n + (1-\theta) y_{n+1}), \text{ con } \theta \in (0,1).$$

El método numérico se puede escribir de la forma

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h\,\phi(t_n, y_n, \ldots, y_{n+k-1}; h).$$

Probar las tres hipótesis H_{MN} para la función incremento ϕ correspondiente.

Por tarea 2:

$$\phi_f(t_n, y_n, h) = f(t_n + (1-\theta)h, y_n + (1-\theta)h\,\phi_f)$$

i) ϕ_f es continua

El valor de la función de incremento se puede obtener por iteración de punto fijo.

$$\phi_f(t_n, y_n; h) = \lim_{k\to\infty} \phi_f^{[k]}(t_n, y_n; h)$$

$$\phi_f^{[k]}(t_n, y_n; h) = F(\phi_f^{[k-1]}(t_n, y_n; h))$$

con la función de iteración $F(\phi) = f(t_n + (1-\theta)h, y_n + (1-\theta)h\phi)$.

Tarea 4

Si $h < \dfrac{1}{L_f(1-\theta)}$, condición que supondremos en adelante, hay un único punto fijo y la iteración converge a él sea cual sea el iterante inicial.

Por ser f una función continua, si $\phi_f^{[k-1]}$ es una función continua, la función $\phi_f^{[k]} = F(\phi_f^{[k-1]})$ también lo será, pues es composición de funciones continuas.

Tomamos como iterante inicial $\phi_f^{[0]} = 0$. Todas las funciones $\phi_f^{[k]}$ son entonces continuas, pero el límite no tiene por qué serlo. Sí lo será si la convergencia es uniforme.

$\phi_f^{[k]} = \sum_{j=1}^{k} (\phi_f^{[j]} - \phi_f^{[j-1]})$. Si la serie converge uniformemente sobre compactos, la sucesión $\{\phi_f^{[k]}\}_{k=1}^{\infty}$ también lo hará, y el límite será una función continua.

Ahora bien,

$$\| \phi_f^{[j]} - \phi_f^{[j-1]} \| = \| F(\phi_f^{[j-1]}) - F(\phi_f^{[j-2]}) \| \leq L_f (1-\theta) h \| \phi_f^{[j-1]} - \phi_f^{[j-2]} \|$$

Iterando esta relación,

$$\| \phi_f^{[j]} - \phi_f^{[j-1]} \| \leq (L_f (1-\theta) h)^{j-1} \| \phi_f^{[1]} \|.$$

Pero $\phi_f^{[1]} (t_n, y_n; h) = f(t_n + (1-\theta)h, y_n)$.

Por ser f continua, está acotada sobre compactos. Así pues, para cada subconjunto compacto K de $[t_0, T] \times \mathbb{R}^d \times (0, \infty)$, existe una constante M_K tal que $\| \phi_f^{[1]} (t_n, y_n; h) \| \leq M_K$ si $(t_n, y_n; h) \in K$.

Concluimos que sobre cada compacto $\| \phi_f^{[j]} - \phi_f^{[j-1]} \| \leq M_K (L_f (1-\theta) h)^{j-1}$.

Como la serie $\sum_{j=1}^{\infty} (L_f (1-\theta) h)^j$ es convergente, tenemos, por el criterio M de Weierstrass, que la convergencia es uniforme sobre K. Esto implica que ϕ_f es continua sobre K. Como el compacto K es arbitrario, concluimos que ϕ_f es una función continua en $[t_0, T] \times \mathbb{R}^d \times (0, \infty)$ si $h < \frac{1}{L_f (1-\theta)}$

ii) Existen constantes h_0 y L tales que $\| \phi_f (t_n, y_n; h) - \phi_f (t_n, \hat{y}_n; h) \| \leq L \| y_n - \hat{y}_n \|$ si $0 < h < h_0$.

$$\| \phi_f (t_n, y_n; h) - \phi_f (t_n, \hat{y}_n; h) \| =$$

$$= \| f(t_n + (1-\theta)h, y_n + (1-\theta)h \phi(t_n, y_n; h)) - f(t_n + (1-\theta)h, \hat{y}_n + (1-\theta)h \phi(t_n, \hat{y}_n; h)) \|$$

$$\underset{f \text{ Lipschitz}}{\leq} L_f \| y_n + (1-\theta)h \phi(t_n, y_n; h) - (\hat{y}_n + (1-\theta) h \phi(t_n, \hat{y}_n; h)) \|$$

$$\underset{\text{Desig. triang.}}{\leq} L_f \| y_n - \hat{y}_n \| + L_f (1-\theta) h \| \phi(t_n, y_n; h) - \phi(t_n, \hat{y}_n; h) \|$$

$$\Rightarrow (1 - L_f (1-\theta) h) \| \phi_f (t_n, y_n; h) - \phi_f (t_n, \hat{y}_n; h) \| \leq L_f \| y_n - \hat{y}_n \|$$

Entonces, para cualquier $h_0 < \dfrac{1}{L_f(1-\theta)}$ se tiene que

$$\|\phi_f(t_n, y_n; h) - \phi_f(t_n, \hat{y}_n; h)\| \leq \frac{L_f}{1 - L_f(1-\theta)h_0} \|y_n - \hat{y}_n\| \quad , \quad 0 < h < h_0 .$$

Así pues, se tiene la hipótesis (H_{MN})-(ii) con $L = \dfrac{L_f}{1 - L_f(1-\theta)h_0}$

iii) Si $f = 0$, entonces $\phi_f = 0$.

$$\phi_f = f(t_n + (1-\theta)h, y_n + (1-\theta)h\,\phi_f) \overset{f=0}{=} 0$$

$$\Rightarrow \phi_f(t_n, y_n; h) = 0$$