Tarea 7

Juan Velasco Izquierdo

November 27, 2020

Sea $y_{n+3} - y_{n+2} = h(\frac{23}{12}f_{n+2} - \frac{4}{3}f_{n+1} + \frac{5}{12}f_n)$**. Supongamos que se verifican las hipótesis** (H_{MN})**. Ver si se verifica el criterio de la raíz y identificar su orden de consistencia.**

Empecemos con el criterio de la raíz. Para ver que nuestro método lo cumple tenemos que ver que las raíces del primer polinomio característico sean de módulo menor que 1 y las que tengan módulo 1 sean simples.

El primer polinomio característico de nuestro método es:
$\rho(\xi) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \xi^j = -\xi^2 + \xi^3 = \xi^2(\xi - 1)$

Como podemos ver sus raíces son 0 (raíz doble) y 1 (raíz simple), por lo que **cumple el criterio de la raíz**.

Pasamos ahora a ver el orden de consistencia. Para ello, dado que nos encontramos a un método lineal multipaso (MLM), vamos a usar la siguiente proposición:

Proposición: Un MLM es consistente de orden $p \geq 1$ si y solo si $C_q = \frac{1}{q!}[\sum_{j=0}^{k} \alpha_j j^q - q \sum_{j=0}^{k} \beta_j j^{q-1}] = 0$ con $q = 0, 1, \ldots, p$ y $C_{p+1} \neq 0$

Por tanto vamos a usar la proposición con nuestro método que tiene como α_i y β_i:

$\alpha_0 = 0$ $\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = -1$ $\alpha_3 = 1$ $\beta_0 = \frac{5}{12}$ $\beta_1 = -\frac{4}{3}$ $\beta_2 = \frac{23}{12}$ $\beta_3 = 0$

Vamos a calcular por separado cada C_q y vamos a ver cual es distinto de 0 (no incluiremos los sumandos que son 0):

C_0**:** $C_0 = 1[-1 * 2^0 + 1 * 3^0] = 0$

C_1**:** $C_1 = 1[-1 * 2^1 + 1 * 3^1 - 1(\frac{5}{12} * 0^0 - \frac{4}{3} * 1^0 + \frac{23}{12} * 2^0] = 0$

C_2**:** $C_2 = \frac{1}{2!}[-1 * 2^2 + 1 * 3^2 - 1(\frac{5}{12} * 0^1 - \frac{4}{3} * 1^1 + \frac{23}{12} * 2^1] = 0$

C_3**:** $C_3 = \frac{1}{3!}[-1 * 2^3 + 1 * 3^3 - 1(\frac{5}{12} * 0^2 - \frac{4}{3} * 1^2 + \frac{23}{12} * 2^2] = 0$

C_4**:** $C_4 = \frac{1}{4!}[-1 * 2^4 + 1 * 3^4 - 1(\frac{5}{12} * 0^3 - \frac{4}{3} * 1^3 + \frac{23}{12} * 2^3] = \frac{9}{24}$

Como $C_i = 0$ para $i = 1, 2, 3$ y $C_4 \neq 0$ entonces el método es **consistente de orden 3**.