TAREA 10

Juan Carlos Izquierdo

Sea una EDO cuyas soluciones satisfacen $Y(t)^t S Y(t) = Y_0^t S Y_0 \ \forall Y_0 \in \mathbb{R}^n, t \geq t_0$

donde S es simétrica y no nula. Entonces, un método Runge-Kutta tq $M=0$

probar que se verifica $Y_{n+1}^t S Y_{n+1} = Y_n^t S Y_n$

Utilizar $f(t,Y)^t S Y = 0$ ¿Por qué es cierto?

Vamos a empezar probando $f(t,Y)^t S Y = 0$. Para ello vamos a desarrollar $Y(t)^t S Y(t)$

$$Y(t)^t S Y(t) = (Y_1 \ \dots \ Y_n) \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots \\ S_{21} & S_{22} & \ddots \\ \vdots & & S_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} =$$

$$= (Y_1 \ Y_2 \dots Y_n) \begin{pmatrix} Y_1 S_{11} + Y_2 S_{12} + \dots + Y_n S_{1n} \\ \\ Y_1 S_{n1} + \dots + Y_n S_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 S_{ii} + 2 \sum_{i \neq j}^{n} Y_i Y_j S_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Y_i Y_j S_{ij}$$

Si derivamos esta expresión con respecto a t.

$$\left(\sum_i \sum_j Y_i Y_j S_{ij} \right)' = 2 \sum_i \sum_j Y_i' Y_j S_{ij} = 2 \sum_i \sum_j f_i(t,Y) S_{ij} Y_j =$$

Usando el desarrollo de antes

$$\stackrel{\downarrow}{=} f(t,Y)^t S Y$$

Además

$(Y_0^t S Y_0)' = 0$ (Y_0 no depende de t)

Por tanto $\boxed{f(t,Y)^t S Y = 0}$ (1)

Una vez demostrado esto vamos a ver la conservación de

$y_{n+1}^T S y_{n+1} = y_n S y_n$

Sabemos que $y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i$ por ser RK

Por tanto

$$y_{n+1}^T S y_{n+1} = (y_n + h\sum b_i k_i)^T S (y_n + h\sum b_i k_i) =$$

$$= y_n^T S y_n + \underbrace{y_n^T S (h\sum b_i k_i) + (h\sum b_i k_i)^T S y_n}_{0 \text{ por } (1)} + (h\sum b_i k_i)^T S (h\sum b_i k_i)$$

Sólo queda ver que $(h\sum b_i k_i)^T S (h\sum b_i k_i) = 0$ pero esto es

porque $M = 0$.

Por tanto $\boxed{y_{n+1}^T S y_{n+1} = y_n S y_n}$