

## Formulações de programação inteira para o problema da coloração de Grundy conexa

**Mateus C. Silva, Rafael A. Melo**

Instituto de Computação, Universidade Federal da Bahia  
Salvador, BA, Brasil  
mateuscs@ufba.br, rafael.melo@ufba.br

**Mauricio G. C. Resende**

Industrial & Systems Engineering, University of Washington  
Seattle, WA, USA  
mgcr@uw.edu

**Marcio C. Santos**

Departamento de Ciência da Computação, Universidade Federal de Minas Gerais  
Belo Horizonte, MG, Brasil  
marciocs@dcc.ufmg.br

**Rodrigo F. Toso**

Microsoft Corporation, One Microsoft Way  
Redmond, WA, USA  
rofran@microsoft.com

### RESUMO

Dado um grafo  $G = (V, E)$ , o problema da coloração de Grundy conexa consiste em encontrar uma coloração que possa ser obtida pela heurística *first-fit* através de uma sequência conexa dos vértices que maximize o número de cores. Uma sequência conexa dos vértices é uma na qual cada elemento, com exceção do primeiro, está conectado a algum elemento que o antecede. Neste artigo, são propostas duas formulações de programação inteira para o problema da coloração de Grundy conexa, uma formulação padrão e uma baseada na ideia de representativos. Experimentos computacionais preliminares indicam que a formulação por representativos apresenta desempenho melhor, em especial para grafos com densidade acima de 80%. Juntas, as formulações conseguiram encontrar a solução ótima para 61.25% dos casos. Ademais, no conjunto de instâncias analisadas, observa-se que a mediana da diferença percentual para as melhores soluções conhecidas para o problema da coloração de Grundy (no qual as restrições de conexidade são relaxadas) fica próximo de 2.5%.

**PALAVRAS CHAVE.** Coloração de vértices. Programação inteira. Algoritmos gulosos.

**Tópicos (Otimização Combinatória, Teoria e Algoritmos em Grafos, Programação Matemática)**

## ABSTRACT

Given a graph  $G = (V, E)$ , the connected Grundy coloring problem consists of finding a coloring that can be obtained by a *first-fit* heuristic through a connected vertex sequence that maximizes the number of colors used. A connected vertex sequence is such that every element in the sequence, except the first, is connected to some element that precedes it. In this article, we propose two integer programming formulations for the connected Grundy coloring problem, a standard formulation and one based on representatives' idea. Preliminary computational experiments indicate that the representative formulation performs better, especially for graphs with density above of 80%. Together they managed to find the optimal solution for 61.25% of the cases. Furthermore, in the set of instances analyzed, it was seen that the median percentage difference for the solutions to the Grundy coloring problem (in which the connectivity requirements are relaxed) is close to 2.5%.

**KEYWORDS.** Vertex coloring. Integer programming. Greedy algorithms.

**Paper Topics (Combinatorial Optimization, Graph Theory and Algorithms, Mathematical Programming)**

## 1. Introdução

### 1.1. Definições básicas

Dado um grafo  $G = (V, E)$  e um conjunto de cores  $K$ , uma *coloração* é um mapeamento  $c : V \rightarrow K$ . Uma *coloração própria* é uma coloração na qual  $c(u) \neq c(v)$  para toda aresta  $uv \in E$ . No restante do trabalho, uma coloração é própria a não ser que dito o contrário. Uma *k-coloração* é uma coloração com exatamente  $k$  cores. O *número cromático* de  $G$ ,  $\chi(G)$ , é o menor  $k$  tal que  $G$  admite uma  $k$ -coloração. Considere a *vizinhança* de  $v$ ,  $N(v)$ , como o conjunto de vértices adjacentes a  $v$  e sua *anti-vizinhança*,  $\bar{N}(v)$ , como o conjunto de vértices não adjacentes a  $v$ . Além disso, denote por  $\bar{N}[v] = \bar{N}(v) \cup \{v\}$  a *anti-vizinhança fechada* de  $v$ . Seja  $d(v) = |N(v)|$  o grau do vértice  $v$  e  $\Delta(G)$  o maior grau em  $G$ . A *densidade* de um grafo é definida como  $dens(G) = \frac{2 \times |E|}{|V| \times (|V| - 1)}$ .

Dada uma ordem  $\sigma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  para os vértices de um grafo, a heurística de coloração gulosa *first-fit* atribui a cada vértice  $v_i$  a cor de menor índice não utilizada para os seus vizinhos em  $(v_1, \dots, v_{i-1})$ . Uma *coloração de Grundy* é uma coloração que respeita as propriedades da heurística *first-fit*, i.e., se  $c(v) = k$  então existe algum vizinho  $u \in N(v)$  tal que  $c(u) = k'$  para todo  $k' < k$ . O *número de Grundy*,  $\Gamma(G)$ , é o maior  $k$  tal que  $G$  admite um  $k$ -coloração de Grundy. O *problema da coloração de Grundy* consiste em obter uma coloração de Grundy maximizando o número de cores.

Uma sequência conexa  $\sigma_c = (v_1, \dots, v_n)$  é uma sequência dos vértices garantindo que  $\forall i \geq 2$ ,  $v_i$  tem pelo menos um vizinho no intervalo  $(v_1, \dots, v_{i-1})$ . Uma *coloração de Grundy conexa* é uma coloração que pode ser obtida sobre uma sequência conexa dos vértices respeitando as propriedades da heurística *first-fit*. O *problema da coloração de Grundy conexa* consiste em obter uma coloração de Grundy conexa maximizando o número de cores. A solução ótima para o problema é o *número de Grundy conexo*,  $\Gamma_c(G)$ . Já o *número cromático conexo*,  $\chi_c(G)$ , denota o menor  $k$  tal que  $G$  aceita uma  $k$ -coloração conexa que respeita a propriedade da heurística *first-fit*. Note que  $\chi(G) \leq \Gamma_c(G) \leq \Gamma(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

Limites superiores combinatórios foram propostos para  $\Gamma(G)$ . Aos leitores interessados, recomendamos os artigos referenciados para mais detalhes. Shi et al. [2005] definiram o *stair factor*,  $\zeta(G)$ . Dado  $u \in V(G)$ , considere o conjunto  $N_{\leq}(u) = \{v \in V(G) : uv \in E(G), d_G(v) \leq d_G(u)\}$ . Seja  $\Delta_2(G) = \max_{u \in V(G)} \max_{v \in N_{\leq}(u)} d(v)$ . Zaker [2008] demonstrou a validade do

limite  $\Delta_2(G) + 1$ . Recentemente, Silva et al. [2024] definiram um novo limite, representado por  $\Psi(G)$ . A ideia deste é estabelecer que um vértice pode receber uma dada cor se os graus de seus vizinhos formarem uma sequência que lhe permita recebê-la. Isso pode ser calculado definindo-se uma função recursiva  $\psi$ , em que  $\psi(v, k)$  contém um limite superior para a maior cor menor ou igual a  $k$  que o vértice  $v$  pode receber.

### 1.2. Literatura relacionada

A coloração de grafos encontra aplicações em diversas áreas. Alguns exemplos mais recentes incluem redes de comunicação [Zhu et al., 2015], sinopse de vídeos [He et al., 2017], e projeto de estações ferroviárias [Jovanović et al., 2020]. Heurísticas de coloração *first-fit*, especialmente as heurísticas conexas (e.g., baseadas em busca em largura), são amplamente empregadas para obtenção de soluções para esses problemas. Portanto, o número de Grundy e o número de Grundy conexo possuem aplicabilidades significativas, já que fornecem uma medida teórica de qualidade das soluções no pior caso. É importante ressaltar que o problema da coloração de Grundy conexa é NP-difícil [Benevides et al., 2014].

Diversos trabalhos se concentraram na complexidade do problema da coloração de Grundy para classes de grafos específicas [Hedetniemi et al., 1982; Telle e Proskurowski, 1997]. Recentemente, alguns trabalhos se propuseram a resolver o problema para grafos quaisquer. Silva et al. [2023b, 2024] propuseram formulações de programação inteira. Silva et al. [2023a, 2024] elaboraram um algoritmo genético de chaves aleatórias viesado (BRKGA).

O problema da coloração de Grundy conexa foi menos explorado na literatura. Colorações conexas foram estudadas em Benevides et al. [2014], onde foi demonstrado que computar  $\Gamma_c(G)$  é NP-difícil mesmo para grafos cordais e complementar do bipartido. Por outro lado,  $\Gamma_c(G) = 2$  quando o grafo é bipartido. Os autores também demonstraram que  $\chi_c(G) \leq \chi(G) + 1$  e que determinar se  $\chi_c(G) = \chi(G)$  é NP-difícil. Mota et al. [2020] focaram em estudar quando  $\chi_c(G) = \chi(G)$  e no problema de decisão  $\chi_c(G) \leq k$  para grafos livres de  $H$  (um grafo é livre de  $H$  se não contém uma cópia de  $H$  como um subgrafo induzido). Já Bonamy et al. [2021] estudaram colorações de arestas conexas. Bonnet et al. [2018] provaram que o problema da coloração de Grundy conexa já é NP-completo para  $k = 7$  cores. Silva et al. [2023a] aplicaram um BRKGA para o problema da coloração de Grundy e sua versão conexa e mostraram que nas classes de grafos investigadas existe uma diferença percentual pequena entre as soluções encontradas para os dois problemas.

### 1.3. Contribuições do trabalho e organização

Neste estudo, são apresentadas duas formulações de programação inteira para abordar o problema da coloração de Grundy conexa. A primeira formulação visa particionar os vértices em classes de cores, seguindo uma abordagem padrão, enquanto a segunda adota a estratégia de formulação por representativos. Essas técnicas representam os primeiros esforços em abordar o problema via programação inteira.

O restante do trabalho é organizado como segue. A Seção 2 apresenta as formulações de programação inteira. A Seção 3 descreve os experimentos computacionais. A Seção 4 discute algumas considerações finais.

## 2. Formulações de programação inteira

Nesta seção, apresentamos duas formulações de programação inteira (PI) para o problema da coloração de Grundy conexa. Formulações de PI têm se mostrado efetivas para a resolução de diversos problemas de otimização em grafos [Furini et al., 2018; de Freitas et al., 2021; Dias et al., 2021; Marzo et al., 2022; Melo e Ribeiro, 2023]. No que segue, a Seção 2.1 apresenta a formulação padrão, enquanto a Seção 2.2 descreve a formulação por representativos.

No restante do texto, denotaremos o conjunto de vértices por  $V = \{1, \dots, n\}$ . Além disso, considere o conjunto de cores disponíveis como  $K = (1, \dots, \min(\zeta(G), \Psi(G), \Delta_2(G) + 1))$ ,

e a sequência de possíveis cores do vértice  $v$  por  $K_v = (1, \dots, \min(\zeta(G), \psi(v, \Delta(G)+1), \Delta_2(G)+1))$ , e a sequência de possíveis cores do vértice  $v$  no tempo  $t$  por  $K_{vt} = \{k' \in K_v \mid k' \leq t\}$ . Lembramos que os limites estão definidos na Seção 1.1. Por fim, define-se  $V_k = \{v \in V \mid k \in K_v\}$  como o conjunto de vértices que podem receber a  $k$ -ésima cor. As formulações propostas utilizam, para algumas variáveis, um índice representando o tempo no qual um vértice é colorido. Esse tempo está associado à posição do vértice na sequência conexa determinada, i.e., um vértice colorido no tempo  $t$  é o  $t$ -ésimo elemento na sequência.

## 2.1. Formulação padrão

Para formular o problema da coloração de Grundy conexa utilizando programação inteira, considere as variáveis de decisão:

$$z_{vkt} = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } v \in V \text{ recebe a cor } k \in K_{vt} \text{ no tempo } t \in T, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$w_k = \begin{cases} 1, & \text{se a cor } k \in K \text{ é usada,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, o problema pode ser expresso como:

$$\max \sum_{k \in K} w_k \tag{1}$$

$$\sum_{\substack{t \in T, \\ t \geq k}} z_{ukt} + \sum_{\substack{t \in T, \\ t \geq k}} z_{vkt} \leq w_k, \quad \forall k \in K_v \cap K_u, \ uv \in E, \tag{2}$$

$$\sum_{t \in T} \sum_{k \in K_{vt}} z_{vkt} = 1, \quad \forall v \in V, \tag{3}$$

$$w_k \leq \sum_{v \in V} \sum_{\substack{t \in T, \\ t \geq k}} z_{vkt}, \quad \forall k \in K, \tag{4}$$

$$\sum_{t' \in \{k', \dots, t\}} z_{vk't'} \leq \sum_{\substack{u \in N(v), \\ u \in V_k}} \sum_{t' \in \{k, \dots, t-1\}} z_{ukt'}, \quad \forall v \in V, \ k, k' \in K_v, t \in T \setminus \{1\}, \text{ com } k < k', \tag{5}$$

$$\sum_{v \in V} \sum_{k \in K_{vt}} z_{vkt} = 1, \quad \forall t \in T, \tag{6}$$

$$\sum_{k \in K_{vt}} z_{vkt} \leq \sum_{u \in N(v)} \sum_{t'=1}^{t-1} \sum_{k \in K_{ut'}} z_{ukt'}, \quad \forall v \in V, \ t \in T \setminus \{1\}, \tag{7}$$

$$w_k \in \{0, 1\}, \quad \forall k \in K. \tag{8}$$

$$z_{vkt} \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V, \ t \in T, \ k \in K_{vt}. \tag{9}$$

A função objetivo (1) maximiza o total de cores utilizadas. As restrições (2) garantem que vértices adjacentes não recebam a mesma cor. As restrições (3) asseguram que cada vértice receba exatamente uma cor em um único período. As restrições (4) determinam que  $w_k$  assumo o valor um apenas se a cor  $k$  é usada. As restrições (5) garantem a propriedade de Grundy. Observe que eles implicam que se um vértice  $v \in V$  recebe uma cor no período  $t$ , todas as cores com índice menor precisam ser usadas na vizinhança de  $v$  nos períodos de um até  $t-1$ . As restrições (6) estabelecem

que um único vértice receba uma cor em cada período. As restrições (7) certificam que um vértice só seja colorido, se pelo menos um de seus vizinhos foi colorido antes, com exceção do primeiro vértice, ou seja, garante que a coloração é conexa. As restrições (8)-(9) definem os requisitos de integralidade sobre as variáveis de decisão.

## 2.2. Formulação por representativos

Formulações por representativos [Corrêa et al., 2004; Frota et al., 2010] têm sido aplicadas com sucesso para coloração em grafos e diversos outros problemas de particionamento [Campêlo et al., 2005; Bahiense et al., 2014; Melo e Ribeiro, 2015; Melo et al., 2021]. A seguir, apresentamos uma formulação de programação inteira por representativos para o problema da coloração de Grundy conexa. Considere as variáveis de decisão:

$$Z_{vut} = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } u \in V \text{ é representado pelo vértice } v \in \bar{N}[u] \text{ no tempo } t \in T, \text{ para } v \leq u, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$y_{vu} = \begin{cases} 1, & \text{se os vértices } v, u \in V \text{ são representativos e a cor de } v \text{ precede a de } u, \text{ para } v \neq u, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Uma formulação de PI por representativos pode ser definida como:

$$\max \sum_{v \in V} \sum_{t \in T} Z_{vut} \quad (10)$$

$$\sum_{t \in T} Z_{uvt} + \sum_{t \in T} Z_{uwt} \leq \sum_{t \in T} Z_{uut}, \quad \forall u \in V, v, w \in \bar{N}[u], \text{ s.t. } vw \in E \text{ e } u \leq v < w, \quad (11)$$

$$\sum_{t \in T} Z_{uvt} \leq \sum_{t \in T} Z_{uut}, \quad \forall u \in V, v \in \bar{N}(u), \text{ s.t. } N(v) \cap \bar{N}(u) = \emptyset \text{ e } u < v, \quad (12)$$

$$\sum_{v \in \bar{N}[u], t \in T} Z_{vut} = 1, \quad \forall u \in V, \quad (13)$$

$$\sum_{t' \in \{1, \dots, t\}} Z_{uvt'} \leq \sum_{\substack{w \in N(v) \cap \bar{N}[p], \\ p \leq w}} \sum_{t' \in \{1, \dots, t-1\}} Z_{pwt'} + 1 - y_{pu}, \quad \forall u, p \in V, v \in \bar{N}[u],$$

$$t \in T \setminus \{1\}, \text{ s.t. } p \neq u \text{ e } u \leq v, \quad (14)$$

$$\sum_{\substack{u \in \bar{N}[v], \\ u \leq v}} Z_{uvt} \leq \sum_{v' \in N(v)} \sum_{\substack{u \in \bar{N}[v'], \\ u \leq v'}} \sum_{t=1}^{t-1} Z_{uvt'}, \quad \forall v \in V, t \in T \setminus \{1\}, \quad (15)$$

$$y_{vu} + y_{uv} \geq \sum_{t \in T} Z_{uut} + \sum_{t \in T} Z_{vvt} - 1, \quad \forall u, v \in V, \text{ s.t. } u < v, \quad (16)$$

$$y_{uv} + y_{vu} \leq \sum_{t \in T} Z_{uut}, \quad \forall u, v \in V, \text{ s.t. } u \neq v, \quad (17)$$

$$\sum_{u \in V} \sum_{t \in T} Z_{uut} \leq \min(\Psi(G), \zeta(G), \Delta_2(G) + 1), \quad (18)$$

$$Z_{uvt} \in \{0, 1\}, \quad \forall u \in V, v \in \bar{N}[u], t \in T, \text{ s.t. } u \leq v, \quad (19)$$

$$y_{uv} \in \{0, 1\}, \quad \forall u, v \in V, \text{ s.t. } u \neq v. \quad (20)$$

A função objetivo (10) maximiza o número total de vértices representativos. As restrições (11) garantem que vértices adjacentes não recebam a mesma cor. As restrições (12) indicam que um



vértice só pode representar outro se o primeiro for representativo. As restrições (13) garantem que cada vértice recebe uma cor em um único período. As restrições (14) implicam a propriedade de Grundy. Eles estabelecem que se  $p, u \in V$  são representativos,  $p$  precede  $u$ , e  $u$  representa  $v \in \bar{N}[u]$ , então  $p$  deve representar um dos vizinhos de  $v$  antes que  $u$  possa representar  $v$ . As restrições (15) asseguram que um vértice só seja colorido se pelo menos um de seus vizinhos foi colorido antes, com exceção do primeiro vértice. As restrições (16)-(17) garantem uma ordem entre dois vértices se e somente se ambos forem representativos. A restrição (18) limita o número total de vértices representativos. As restrições (19)-(20) determinam a integralidade das variáveis.

### 3. Experimentos computacionais preliminares

Os experimentos computacionais foram conduzidos em um computador com sistema operacional Ubuntu x86-64 GNU/Linux, processador Intel Core i7-10700 Octa-Core 2.90 Ghz, e 16GB de RAM. As formulações foram implementadas em Julia empregando o pacote JuMP e o resolvidor Gurobi v. 10.0.1. Foram adotadas as configurações padrão do Gurobi, com exceção do paralelismo que foi desativado. Foi estabelecido um tempo limite de 3600 segundos (uma hora) para as formulações. Uma solução viável inicial foi fornecida para as formulações (detalhes serão descritos na Seção 3.2).

#### 3.1. Instâncias

Os testes foram realizados em um conjunto de instâncias usadas por Silva et al. [2024] para o problema da coloração de Grundy. As instâncias foram geradas com o gerador de grafos *ggen* [Morgenstern, s.d.] e seguem o mesmo padrão do conjunto de instâncias utilizado anteriormente para outra variante do problema de coloração de vértices [Melo et al., 2021]. O conjunto é formado por duas classes de grafos: geométricos e randômicos.

Os grafos possuem  $|V| \in \{15, 20, 25, 30\}$  e foram gerados considerando as probabilidades de possuir uma aresta (para os grafos randômicos) e a distância euclidiana (para grafos geométricos) dentre  $\{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$ . Cada grupo de instâncias, definido para uma combinação entre número de vértices e distância euclidiana (ou probabilidade para grafos randômicos) possui 5 instâncias. Cada grupo será identificado como  $C\_n\_p$ , em que  $C$  representa a classe do grafo: randômicos (rand), geométricos (geo);  $n$  o número de vértices, e  $p$  a probabilidade para os grafos randômicos, e a distância euclidiana para os grafos geométricos, e corresponde aproximadamente à densidade do grafo. Portanto, foram gerados 16 grupos para cada classe, totalizando 160 instâncias. O resultado para cada grupo será apresentado como a média para as suas 5 instâncias.

É necessário ressaltar que as instâncias deste conjunto não são necessariamente conexas. Dessa forma, as instâncias desconexas foram conectadas usando o seguinte procedimento. O vértice de maior grau com menor índice de cada componente conexa é selecionado e um caminho é criado entre esses vértices do menor índice até aquele com maior índice entre eles, tornando a instância conexa. Essa heurística tenta manter o número de Grundy conexo do grafo resultante próximo daquele da componente conexa da instância original com o maior valor.

#### 3.2. Geração de solução inicial

A solução inicial fornecida para os modelos consiste naquela que apresenta o maior número de cores entre as soluções obtidas utilizando três critérios gulosos de forma conexa. Dois desses são critérios gulosos amplamente estabelecidos na literatura para o problema da coloração de vértices (a-b), enquanto o outro visa maximizar o número de cores (c). Especificamente, consideramos os critérios: (a) *connected maximum-degree first* (CMDf), que define uma sequência  $(v_1, \dots, v_n)$  na qual prioriza os vértices de maior grau de forma conexa; (b) *DSatur* [Brélaz, 1979], que define uma sequência  $(v_1, \dots, v_n)$  usando um critério adaptativo baseado no grau máximo de saturação dos vértices, definido pela quantidade de vértices com cores diferentes adjacentes a eles; e (c) *connected minimum-degree first* (CMinDf), que define uma sequência  $(v_1, \dots, v_n)$  priorizando os vértice de menor grau.

### 3.3. Resultados preliminares

As Tabelas 1-2 resumem os resultados obtidos. Nessas tabelas, a primeira coluna representa o grupo de instâncias, de modo que cada linha corresponde aos valores médios de suas cinco instâncias. A segunda coluna (lsc) fornece o melhor limite superior combinatório, considerando  $\zeta(G)$ ,  $\Delta_2(G) + 1$  e  $\Psi(G)$ . A terceira coluna (h) indica a média dos valores da solução heurística inicial fornecidos para a formulação. A seguir, para cada uma das formulações, as colunas indicam a média das melhores soluções obtidas (melhor), a média dos limites duais alcançado pelo resolvidor no final da execução (ls), a média dos *gaps* de otimalidade em porcentagem, calculado para cada instância individual como  $100 \times \frac{ls - \text{melhor}}{\text{melhor}}$  (observe que aqui nos referimos à melhor solução e ao limite para uma instância específica, não à média), o tempo médio de execução (tempo), e o número de instâncias resolvidas até a otimalidade (#opt). As duas últimas linhas nas tabelas indicam a média dos valores entre todas as linhas e o número total de instâncias resolvidas até a otimalidade. Os maiores valores nas colunas *melhor* são destacados em negrito.

A Tabela 1 mostra que a formulação por representativos conseguiu provar a otimalidade em 30 casos contra 27 da formulação padrão. Contudo, o *gap* e o tempo total médio final é menor com a formulação padrão. Vale destacar que a maior parte das instâncias provadas ótimas pela formulação padrão tem  $\eta = 0.2$ , ou seja, são esparsas. Já a formulação por representativos teve vantagem nas mais densas com  $\eta = 0.8$ . Nas instâncias randômicas (Tabela 2) percebe-se uma relação similar quanto a densidade e prova de otimalidade principalmente para a formulação por representativos. Nesse grupo, a formulação padrão encontrou mais dificuldades, provando 8 soluções como ótimas, contra 29 do representativo. Além disso, o *gap* e tempo total médio final foram melhores para a formulação por representativos. Considerando as duas formulações, foi possível provar a otimalidade para 77 instâncias.

Tabela 1: Resultados das formulações para os grafos geométricos

grupo	lsc	h	padrão					rep				
			melhor	ls	gap	tempo	#opt	melhor	ls	gap	tempo	#opt
geo_15_0.2	4.4	<b>3.6</b>	<b>3.6</b>	3.6	0.0	2.0	5	<b>3.6</b>	3.8	6.7	1291.6	4
geo_15_0.4	7.5	6.0	<b>6.8</b>	7.0	3.6	1137.0	3	<b>6.8</b>	7.2	7.2	2464.6	2
geo_15_0.6	10.8	9.6	<b>10.2</b>	10.8	6.0	2211.7	2	<b>10.2</b>	10.6	4.2	1449.4	3
geo_15_0.8	12.8	12.0	<b>12.4</b>	12.8	3.5	1445.2	3	<b>12.4</b>	12.4	0.0	1.0	5
geo_20_0.2	4.4	3.6	<b>3.8</b>	3.8	0.0	37.9	5	3.6	4.8	33.3	2880.3	2
geo_20_0.4	11.2	8.2	9.2	11.2	22.0	3600.0	0	<b>9.6</b>	11.2	17.3	3600.0	0
geo_20_0.6	13.2	10.6	12.0	13.2	10.2	3600.0	0	<b>12.2</b>	13.0	6.8	3027.8	1
geo_20_0.8	16.6	15.0	15.6	16.6	6.6	2886.5	1	<b>16.0</b>	16.0	0.0	30.9	5
geo_25_0.2	5.0	4.4	<b>4.6</b>	4.6	0.0	110.2	5	<b>4.6</b>	6.0	32.9	3600.0	0
geo_25_0.4	12.6	9.4	<b>10.6</b>	12.6	20.0	3600.0	0	10.2	12.6	24.4	3600.1	0
geo_25_0.6	17.6	14.4	<b>15.8</b>	17.6	11.5	3600.1	0	15.6	17.6	13.0	3600.1	0
geo_25_0.8	20.8	18.0	19.4	20.8	7.3	3600.1	0	<b>19.6</b>	19.8	1.1	998.3	4
geo_30_0.2	6.8	5.0	<b>5.6</b>	6.2	10.7	2509.8	2	5.4	7.0	32.3	3600.1	0
geo_30_0.4	15.2	10.8	<b>12.6</b>	15.2	21.6	3600.1	0	12.0	15.2	27.7	3600.2	0
geo_30_0.6	22.2	17.4	<b>18.8</b>	22.2	18.5	3600.3	0	18.4	22.0	20.0	3600.1	0
geo_30_0.8	25.0	21.6	22.8	25.0	9.9	3600.5	0	<b>23.4</b>	23.8	1.9	2198.9	4
Média	12.8	10.6	<b>11.4</b>	12.7	9.4	2455.8		<b>11.4</b>	12.7	14.3	2485.6	
Total							27					30

Essa predominância da formulação por representativos em grafos densos também foi visto para o problema de coloração de Grundy [Silva et al., 2024], e se deve ao fato que quanto mais denso o grafo, menores as anti-vizinhanças e menos variáveis  $X_{uv}$  serão geradas e consequentemente o número total de restrições também irá diminuir. O contrário ocorre para as instâncias mais esparsas, em que a anti-vizinhança será maior; além disso, os limites podem restringir mais a quantidade

total de cores para um vértice e ao todo na formulação padrão gerando uma quantidade reduzida de variáveis e restrições.

Tabela 2: Resultados das formulações para os grafos randômicos

grupo	lsc	h	padrão					rep				
			melhor	ls	gap	tempo	#opt	melhor	ls	gap	tempo	#opt
rand_15_0.2	5.4	3.8	<b>4.2</b>	4.2	0.0	24.1	5	<b>4.2</b>	4.6	9.0	2102.4	3
rand_15_0.4	8.4	5.4	<b>6.6</b>	7.6	14.3	3159.9	1	<b>6.6</b>	7.0	6.9	1983.6	3
rand_15_0.6	10.4	6.6	<b>8.8</b>	10.4	18.0	3600.0	0	<b>8.8</b>	9.0	2.5	856.5	4
rand_15_0.8	12.6	9.6	<b>10.8</b>	12.6	16.9	3600.0	0	<b>10.8</b>	10.8	0.0	5.3	5
rand_20_0.2	6.8	4.2	<b>5.4</b>	6.4	17.3	2975.3	1	5.2	6.8	31.0	3600.0	0
rand_20_0.4	11.8	6.8	8.4	10.8	28.3	3600.0	0	<b>8.6</b>	10.8	25.5	3600.0	0
rand_20_0.6	14.0	9.2	10.2	14.0	37.3	3600.0	0	<b>11.0</b>	11.6	5.8	2486.0	3
rand_20_0.8	17.2	11.4	12.8	17.2	34.7	3600.0	0	<b>13.2</b>	13.2	0.0	79.8	5
rand_25_0.2	9.4	5.4	<b>6.8</b>	8.4	23.8	3516.6	1	<b>6.8</b>	9.4	38.6	3600.0	0
rand_25_0.4	13.8	7.6	<b>8.8</b>	13.8	56.7	3600.0	0	<b>8.8</b>	13.6	54.7	3600.0	0
rand_25_0.6	18.0	10.6	11.8	18.0	53.1	3600.1	0	<b>12.6</b>	15.6	24.6	3600.0	0
rand_25_0.8	21.6	13.4	15.2	21.6	42.3	3600.1	0	<b>16.6</b>	16.6	0.0	978.6	5
rand_30_0.2	9.6	5.8	<b>6.8</b>	9.0	32.4	3600.0	0	6.6	9.6	46.2	3600.2	0
rand_30_0.4	16.0	8.2	<b>9.6</b>	16.0	66.9	3600.1	0	<b>9.6</b>	16.0	67.1	3600.2	0
rand_30_0.6	21.4	11.8	<b>13.8</b>	21.4	56.0	3600.2	0	<b>13.8</b>	19.0	38.1	3600.2	0
rand_30_0.8	25.6	15.2	17.6	25.6	45.7	3600.3	0	<b>18.4</b>	20.2	10.1	3561.6	1
Média	13.8	8.4	9.8	13.5	33.9	3304.7		<b>10.1</b>	12.1	22.5	2553.4	
Total							8					29

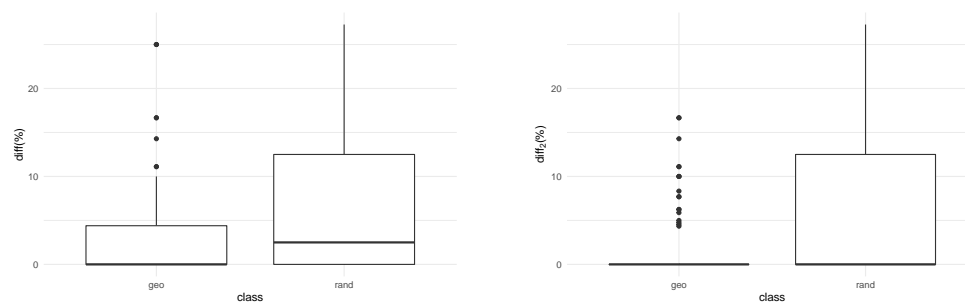
### 3.4. Comparação entre $\Gamma_c(G)$ e $\Gamma(G)$

Nesta seção, focamos na avaliação de otimalidade através da comparação com a versão não conexa e em reportar os desvios entre soluções obtidas utilizando formulações de programação inteira para as duas variantes do problema: a coloração de Grundy e a coloração de Grundy conexa. Para isso, são considerados os maiores valores encontrados entre as formulações para cada instância usada nesse artigo e comparado com a melhor solução de cada instância entre as formulações da versão genérica [Silva et al., 2024]. Denote por  $max_{CG}$  e  $max_{CGC}$  os maiores valores encontrados pelas formulações para uma dada instância do problema da coloração de Grundy e do problema da coloração de Grundy conexa, respectivamente; e  $ls_{min}$  como o melhor limite encontrado para o problema conexo para uma instância. Considere que os desvios para uma dada instância podem ser dados por  $diff = 100 - 100 \times \frac{max_{CGC}}{max_{CG}}$  e  $diff_2 = 100 - 100 \times \frac{max_{CGC}}{\min(max_{CG}, ls_{min})}$ , sendo o primeiro o desvio entre as melhores soluções para cada problema e o segundo o quão longe do ótimo a melhor solução do conexo está.

A Figura 1 apresenta os *boxplots* com os desvios para cada classe de grafos utilizada, com a Figura 1(a) representando o desvio  $diff$  e a Figura 1(b) com  $diff_2$ . Na Figura 1(a), a mediana dos desvios para os grafos geométricos e randômicos foram respectivamente 0.0% e 2.5%; e mesmo o último tendo uma amplitude interquartis maior ainda é possível avaliar as soluções do problema conexo utilizando a versão não conexa para essas classes de grafos, visto que ela fornece um limite superior justo pela diferença percentual. Pela Figura 1(b), para os grafos geométricos, pode-se notar que se alcançou o ótimo para a maior parte das instâncias e as demais representam um comportamento anômalo, caracterizando-as como *outliers*. Já para as randômicas se preserva parte da distribuição, só que agora a mediana foi para 0.0%.

Na Seção 3.3 foi dito que se provou a otimalidade para 77 instâncias. Deve-se lembrar que  $\Gamma_c(G) \leq \Gamma(G)$  e como consequência se para uma dada instância sabemos o valor de  $\Gamma(G)$  e se encontramos a solução do problema conexo com mesmo valor, então para essa instância  $\Gamma_c(G) =$





(a) Boxplots comparativos do desvio entre as melhores soluções das formulações para  $\Gamma(G)$  e  $\Gamma_c(G)$ .

(b) Boxplots comparativos do desvio do melhor limite superior com a melhor solução para  $\Gamma_c(G)$ ;

Figura 1: Boxplots comparativos entre os resultados das formulações para  $\Gamma(G)$  e  $\Gamma_c(G)$ .

$\Gamma(G)$  e a solução é ótima. Portanto, pode se afirmar que foi encontrado o ótimo para 98 instâncias, o que dá 61.25% dos casos de teste.

#### 4. Comentários finais

Neste artigo, foram propostas formulações de programação inteira para o problema da coloração de Grundy conexa. Uma das formulações adota uma técnica tradicional para particionar os vértices em classes de cores, enquanto a outra emprega a abordagem de vértices representativos. Até onde sabemos, esta é a primeira vez em que o problema foi formulado utilizando programação inteira. Além disso, foi proposto um método que permite reutilizar instâncias desconexas da literatura, tentando preservar o valor da solução.

Os experimentos computacionais preliminares mostraram que a formulação por representativos apresenta um desempenho superior à formulação padrão. O problema da coloração de Grundy conexa demonstrou ser desafiador para as abordagens propostas, especialmente quando se trata de provar a otimalidade. No entanto, observou-se que, na maioria dos casos, é possível encontrar a solução ótima. Em especial, as instâncias com densidade de aproximadamente 20% mostram ser mais fáceis para a formulação padrão e as com densidade em torno de 80% para a formulação por representativos. Como foi visto, a formulação por representativos consegue ter vantagem em instâncias mais densas porque gera modelos com uma quantidade reduzida de variáveis e com menos simetria do que a formulação padrão. O oposto ocorre em instâncias mais esparsas.

#### Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001. Este trabalho foi parcialmente apoiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), processos 314662/2020-0 e 314718/2023-0. Este trabalho foi parcialmente apoiado pelo projeto FAPESB INCITE PIE0002/2022.

#### Referências

- Bahiense, L., Frota, Y. A. M., Noronha, T. F., e Ribeiro, C. C. (2014). A branch-and-cut algorithm for the equitable coloring problem using a formulation by representatives. *Discrete Applied Mathematics*, 164:34–46.
- Benevides, F., Campos, V., Dourado, M., Griffiths, S., Morris, R., Sampaio, L., e Silva, A. (2014). Connected greedy colourings. In Pardo, A. e Viola, A., editors, *LATIN 2014: Theoretical Informatics*, p. 433–441, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg.

- Bonamy, M., Groenland, C., Muller, C., Narboni, J., Pekárek, J., e Wesolek, A. (2021). A note on connected greedy edge colouring. *Discrete Applied Mathematics*, 304:129–136.
- Bonnet, É., Foucaud, F., Kim, E. J., e Sikora, F. (2018). Complexity of Grundy coloring and its variants. *Discrete Applied Mathematics*, 243:99–114.
- Brélaz, D. (1979). New methods to color the vertices of a graph. *Communications of the ACM*, 22(4):251–256.
- Campêlo, M., Campos, V., e Corrêa, R. (2005). On the asymmetric representatives formulation for the vertex coloring problem. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 19:337–343.
- Corrêa, R. C., Campêlo, M., e Frota, Y. A. M. (2004). Cliques, holes and the vertex coloring polytope. *Information Processing Letters*, 89:159–164.
- de Freitas, R., Dias, B., Maculan, N., e Szwarcfiter, J. (2021). On distance graph coloring problems. *International Transactions in Operational Research*, 28(3):1213–1241.
- Dias, B., de Freitas, R., Maculan, N., e Michelon, P. (2021). Integer and constraint programming approaches for providing optimality to the bandwidth multicoloring problem. *RAIRO: Recherche Opérationnelle*, 55:S1949 – S1967.
- Frota, Y., Maculan, N., Noronha, T. F., e Ribeiro, C. C. (2010). A branch-and-cut algorithm for partition coloring. *Networks: An International Journal*, 55:194–204.
- Furini, F., Malaguti, E., e Santini, A. (2018). An exact algorithm for the partition coloring problem. *Computers & Operations Research*, 92:170–181.
- He, Y., Gao, C., Sang, N., Qu, Z., e Han, J. (2017). Graph coloring based surveillance video synopsis. *Neurocomputing*, 225:64–79.
- Hedetniemi, S. M., Hedetniemi, S. T., e Beyer, T. (1982). A linear algorithm for the Grundy (coloring) number of a tree. *Congressus Numerantium*, 36:351–363.
- Jovanović, P., Pavlović, N., Belošević, I., e Milinković, S. (2020). Graph coloring-based approach for railway station design analysis and capacity determination. *European Journal of Operational Research*, 287(1):348–360.
- Marzo, R. G., Melo, R. A., Ribeiro, C. C., e Santos, M. C. (2022). New formulations and branch-and-cut procedures for the longest induced path problem. *Computers & Operations Research*, 139:105627.
- Melo, R. A., Queiroz, M. F., e Santos, M. C. (2021). A matheuristic approach for the  $b$ -coloring problem using integer programming and a multi-start multi-greedy randomized metaheuristic. *European Journal of Operational Research*, 295(1):66–81.
- Melo, R. A. e Ribeiro, C. C. (2015). Improved solutions for the freight consolidation and containerization problem using aggregation and symmetry breaking. *Computers & Industrial Engineering*, 85:402–413.
- Melo, R. A. e Ribeiro, C. C. (2023). MIP formulations for induced graph optimization problems: a tutorial. *International Transactions in Operational Research*, 30(6):3159–3200.

- Morgenstern, C. (s.d.). Graph generator *ggen*. Online reference at <http://iridia.ulb.ac.be/~fmascia/files/ggen.tar.bz2>, último acesso em 25 de Julho de 2023.
- Mota, E., Rocha, L., e Silva, A. (2020). Connected greedy coloring of  $H$ -free graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 284:572–584.
- Shi, Z., Goddard, W., Hedetniemi, S. T., Kennedy, K., Laskar, R., e McRae, A. (2005). An algorithm for partial Grundy number on trees. *Discrete Mathematics*, 304(1-3):108–116.
- Silva, M. C., Melo, R., Santos, M. C., Toso, R. F., e Resende, M. G. (2023a). Algoritmos genéticos de chaves aleatórias enviesadas para o problema da coloração de Grundy. In *Anais do LV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, São José dos Campos. SOBRAPO.
- Silva, M. C., Melo, R., Santos, M. C., Toso, R. F., e Resende, M. G. (2023b). Formulações de programação inteira para o problema da coloração de Grundy. In *Anais do LV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, São José dos Campos. SOBRAPO.
- Silva, M. C., Melo, R. A., Santos, M. C., Toso, R. F., e Resende, M. G. C. (2024). Obtaining the Grundy chromatic number: How bad can my greedy heuristic coloring be? *Computers & Operations Research*. URL <https://doi.org/10.1016/j.cor.2024.106703>.
- Telle, J. A. e Proskurowski, A. (1997). Algorithms for vertex partitioning problems on partial  $k$ -trees. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 10(4):529–550.
- Zaker, M. (2008). New bounds for the chromatic number of graphs. *Journal of Graph Theory*, 58(2):110–122.
- Zhu, X., Dai, L., e Wang, Z. (2015). Graph coloring based pilot allocation to mitigate pilot contamination for multi-cell massive MIMO systems. *IEEE Communications Letters*, 19(10):1842–1845.