LVI SBPO SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL
DE 04 ATÉ 07 NOVEMBRO 2024
FORTALEZA | CEARÁ

Um modelo de programação inteira para o problema da coloração Grundy Conexo

Fabio Carlos Sousa Dias,Wladimir Araújo Tavares, Davi Gomes Florêncio
Curso de Ciência da Computação, Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá, Quixadá, Ceará, CEP 63900-000
fabiocsd@lia.ufc.br, wladimirtavares@ufc.br, davigomesflorencio@gmail.com

RESUMO

Uma ordenação dos vértices conexa de um grafo $G = (V, E)$ é uma ordenação $v_1 < v_2 < \ldots < v_n$ de V tal que v_i possui pelo menos um vizinho em $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$ para todo $i \in \{2, \ldots, n\}$. Uma coloração Grundy conexa é uma coloração gulosa aplicada em uma ordenação de vértices conexa. O número Grundy conexo de G, denotado por $\Gamma_c(G)$, é o maior k tal que G admite uma k-coloração Grundy conexa. O parâmetro $\Gamma_c(G)$ fornece um limite de pior caso para a abordagem de coloração gulosa aplicada em uma ordenação de vértices conexa. Neste trabalho, revisitamos a formulação de programação inteira proposta por [Carvalho, 2023], propondo um fortalecimento da restrição relacionada com a conexidade da coloração. Em seguida, propomos duas novas formulações padrão para o número Grundy conexo, e conduzimos experimentos computacionais comparando-as com a formulação de representantes apresentada em [Carvalho, 2023].

PALAVRAS CHAVE. Otimização Combinatória. Coloração de Grundy Conexo. Programação Matemática. Teoria e Algoritmos em Grafos

ABSTRACT

A connected vertex ordering of a graph $G = (V, E)$ is an ordering $v_1 < v_2 < \ldots < v_n$ of V such that v_i has at least one neighbor in $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$ for every $i \in \{2, \ldots, n\}$. A connected Grundy coloring is a greedy coloring applied to a connected vertex ordering. The connected Grundy number of G, denoted by $\Gamma_c(G)$, is the largest k such that G admits a connected k-Grundy coloring. The parameter $\Gamma_c(G)$ provides a worst-case bound for the greedy coloring approach applied to a connected vertex ordering. In this work, we revisit the integer programming formulation proposed by [Carvalho, 2023], proposing a strengthening of the constraint related to the connectivity of the coloring. Next, we propose two new standard formulations for the connected Grundy number and conduct computational experiments comparing them with the representative formulation presented in [Carvalho, 2023].

KEYWORDS. Combinatorial Optimization. Connected Grundy Coloring Problem Mathematical Programming. Theory and Algorithms in Graphs.

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193407
https://proceedings.science/p/193407?lang=en

1. Introdução

Dado um grafo não direcionado $G = (V, E)$, uma k-coloração de vértices C de G é uma partição de V em k conjuntos independentes: $C = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$. O número cromático de G, denotado por $\chi(G)$ é o número mínimo de conjuntos independentes em uma coloração de G. O Problema da Coloração de Vértices (PCV) é o problema de determinar o número cromático de G. O PCV é um clássico problema NP-difícil [Garey e Johnson, 1979] na área de teoria dos grafos com diversas aplicações: escalonamento [Leighton, 1979], alocação de registradores [Chow e Hennessy, 1990], atribuição de frequência [Gamst, 1986] e muito outros.

A importância prática e a complexidade computacional do PCV levaram o desenvolvimento de métodos heurísticos para determinar soluções sub-ótimas em tempo polinomial para o problema. Entre essas heurísticas podemos destacar a heurística de coloração gulosa. Dado uma ordem dos vértices $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, para cada vértice v_i atribuímos a menor cor não utilizada entre os vértices já coloridos na vizinhança v_i. Chamaremos de coloração gulosa, a coloração obtida pela heurística de coloração gulosa. Uma característica interessante da heurística gulosa é que existe uma ordem dos vértices em que a coloração gulosa é ótima, ou seja, encontra o número cromático.

Na literatura, podemos encontrar vários critérios para obtenção de ordenação dos vértices para a heurística de coloração gulosa. [Welsh e Powell, 1967] consideraram o critério desconhecido largest-first. O método baseia-se na observação que os vértices com grau baixo são mais flexíveis para a escolha da cor, então eles podem ser atrasados para a coloração. [Matula e Beck, 1983] consideraram o critério conhecido como smallest-last. Nesse critério, o último vértice a ser colorido deve ser o de menor grau. O penúltimo vértice colorido deve ser o vértice de menor grau no grafo desconsiderando o último vértice. [Brélaz, 1979] constrói uma ordem dinâmica dos vértices escolhendo iterativamente o vértice com o maior grau de saturação conhecida por DSATUR. [Babel e Tinhofer, 1989] sugere a utilização de uma ordem dos vértices conectada para a heurística de coloração gulosa. Uma ordem de vértice é conectada se todo vértices v_i, $i \geq 2$ tem pelo menos um vizinho v_j, com $j < i$.

Observe que cada critério de ordenação dos vértices admite várias implementações possíveis. Isso acaba adicionando uma camada de complexidade no problema de avaliação dos critérios de ordenação. Com relação a heurística de coloração gulosa, podemos propor a seguinte pergunta: quão ruim a heurística gulosa pode ser, independente da ordem do vértices escolhida?

Para responder essa pergunta, definiremos o número cromático de Grundy. Uma coloração obtida pelo algoritmo de coloração gulosa é chamada de **coloração Grundy**. O **número cromático de Grundy**, denotado por $\Gamma(G)$, representa o maior k tal que G admite uma k-coloração de grundy. O número cromático de Grundy indica o pior caso do algoritmo de coloração gulosa aplicada considerando uma ordem dos vértices qualquer.

O número Grundy foi primeiramente estudado por Grundy em 1939 no contexto de grafos orientados na análise de jogos combinatários [Grundy, 1939]. Em 1979, o problema foi formalmente apresentado em [Christen e Selkow, 1979].

Uma pergunta importante que pode ser feita é: a diferença entre a melhor e a pior coloração é pequena? [Benevides et al., 2014] explica que essa diferença pode ser arbitrariamente grande, mesmo para árvores. Por exemplo, em árvores binomias de ordem k, denotada por $\mathcal{B}_k$, temos que $\chi(G)(\mathcal{B}_k) = 2$ e $\Gamma(\mathcal{B}_k) = k$.

Por outro lado, o número Grundy pode ser computado em tempo polinomial para árvores e k-árvores parciais. No entanto, o problema de otimização associado número de

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193407
https://proceedings.science/p/193407?lang=en

Grundy é NP-Díficil para grafos em geral [Goyal e Vishwanathan, 1997] e permanece NP-Díficil para várias classes de grafos como grafos bipartidos [Havet e Sampaio, 2013] e grafos complementos de grafos bipartidos [Zaker, 2005, 2006].

Uma importante variante da coloração Grundy é a coloração Grundy conexa. Uma coloração Grundy conexa é uma coloração Grundy obtida por uma ordem conexa de vértices. O número de Grundy conexo, denotado $\Gamma_c(G)$, é o maior k tal que G admite uma k-coloração Grundy conexa. Note que o número de Grundy conexo representa o pior caso da heurística de coloração gulosa considerando ordem conexas. [Benevides et al., 2014] aponta que $\Gamma_c(G) - \chi(G)$ pode ser arbitrariamente grande. Além disso, existem grafos que admitem uma coloração conexa com $\chi(G)$-cores. Contudo, o menor número de cores obtido por uma ordem conexa, denotado por $\chi_c(G)$, é limitado por $\chi(G) + 1$.

[Carvalho, 2023] propõe duas formulações de programação inteira baseada na formulação padrão e de representantes, uma heurística de coloração gulosa conexa chamada CMinDF (connected minimum-degree first) e um algoritmo genético de chaves aleatórias enviesadas para o número de Grundy conexo.

Neste trabalho, apresentamos um modelo de programação inteira para o número de Grundy conexo. Além disso, apresentamos uma heurística para obtenção de uma ordem conexa. Por fim, apresentamos os resultados computacionais.

2. Preliminares

Um **grafo** G é um par ordenado (V, E) composto por um conjunto finito V, cujos elementos são denominados **vértices**, e por um conjunto $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$, cujos elementos são denominados **arestas**. Para todo grafo G, denotamos por $V(G)$ e $E(G)$, respectivamente, os conjuntos de vértices e arestas de G. $\Delta(G)$ é o valor do grau máximo de G. $N(v) = \{u \in V : \{v, u\} \in E\}$ é a vizinhança aberta do vértice v em G.

Abaixo apresentamos algumas definições usadas no trabalho:

- S é um conjunto independente de G se somente se $\forall u, v \in S, \{u, v\} \notin E(G)$.
- Uma k-coloração própria de G é uma partição de V em conjuntos independentes $\mathbb{S} = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$.
- Dada uma k-coloração, um vértice $v \in V_i$ é chamado um vértice Grundy se v é adjacente a pelo menos um vértice em cada classe de cor V_j para todo $j < i$.
- Uma k**-coloração Grundy** é uma k-coloração em que todos os vértices de todas as classes são Grundy.
- O **número de Grundy**, $\Gamma(G)$, é o maior número de cores em uma coloração em que todos os vértices são vértices grundy.
- Uma ordem de vértice $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ é **conectada** se para todo $i \geq 2$, v_i possui um vizinho v_j para $j < i$.
- Uma k**-coloração Grundy conexa** é uma k-coloração Grundy obtida por uma ordem de vértices conexa.
- O **número de grundy conexo**, $\Gamma_c(G)$, é o maior k tal que existe uma k-coloração grundy conexa.

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193407
https://proceedings.science/p/193407?lang=en

3. Heurística Gulosa Número de Grundy Conexo

Nesta seção, apresentaremos a heurística CMINDegree apresentada em [Carvalho, 2023]. Em seguida, propomos a heurística CMINDegreeMinPath adicionando um critério de desempate para a heurísitica anterior. Logo depois, apresentamos a versão estendida de ambas heurísticas.

Heurística CMINDegree: A ideia dessa heurística é começar a colorir os vértices mais flexíveis primeiro (menor grau no grafo induzido pelos vértices ainda não escolhidos). O Algoritmo 1 mostra uma implementação da heurística CMinDegree. Neste algoritmo, utilizamos uma fila de prioridade mínima para escolher os vértices que serão adicionados no vetor S. Observe que um vértice só é adicionado na fila de prioridade se ele possui pelo menos um vértice em S. Este fato garante que estamos construindo uma sequência conexa dos vértices. Durante a execução da heurística, a ordem de coloração dos vértices é armazenada em S. No final do Algoritmo, utilizamos a heurística de coloração gulosa para obter um limite inferior para $\Gamma_c(G)$.

Algoritmo 1: HEURÍSTICA CMINDEGREE

```
Function CMINDegree(G,v):
    Seja Q um fila de prioridade mínima.
    Seja S um vetor de tamanho |V|
    Seja deg um vetor de tamanho |V|
    para v ∈ V(G) faça
        deg[v] ← |N(v)|
    insere( Q, (deg[v], v) )
    enquanto Q ≠ ∅ faça
        (d, v) ← extract_min(Q)
        se v ∉ S então
            insert(S, v)
            para u ∈ N(v) faça
                se u ∉ S então
                    deg[u] ← deg[u] − 1
                    insere( Q, (deg[u], u) )
    retorne ColoracaoGulosa(G, S)
```

Heurística CMINDegreeMinPath: Nesta heurística, propomos que, em caso de empate entre os vértices de menor grau, seja escolhido aquele que possui o caminho mais curto até o vértice inicial. Essa nova heurística pode ser obtida com algumas mudanças na heurística apresentada anteriormente.

Heurística CMinDegree Estendida e CMinDegreeMinPath: A versão estendida da heurística CMinDegree e CMinDegreeMinPath pode ser obtida iniciando a heurística CMinDegree e CMinDegreeMinPath, respectivamente, com cada vértice $v \in V$.

3.1. Resultados Computacionais

Nesta seção apresentamos os resultados computacionais das heurísticas desenvolvidas neste trabalho. Para isso, geramos grafos de maneira aleatória com quantidade de vértices $n = 50$ e densidade $d \in \{0.5, 0.8\}$. Foram gerados 1000 grafos para cada densidade, totalizando 2000 grafos.

Na Tabela 1 mostra a comparação entre a heurística CMinDegree e a CMinDegreeMinPath. Na primeira coluna temos a densidade dos grafos. Nas duas próximas colunas temos em quantas instâncias a heurística CMinDegree foi melhor e o total de cores geradas. Nas duas próximas colunas são as mesmas, mas agora para a heurística CMinDegreeMinPath.

Nas instâncias de densidade alta, a heurística CMinDegreeMinPath foi melhor em 81 instâncias. Dessas, em média ela gerou uma coloração com 1.62 cores a mais em

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193407
https://proceedings.science/p/193407?lang=en

comparação a heurística CMinDegree. Já nas instâncias de densidade baixa, a CMinDegreeMinPath foi melhor em 24 instâncias e, em média ela gerou uma coloração com 1.83 cores a mais. No total, a CMinDegreeMinPath foi melhor em 105 instâncias.

	CMinDegree		CMinDegreeMinPath	
d	Vitórias	Total cores	Vitórias	Total cores
0.5	667	14114	691	14158
0.8	690	23175	771	23307

Tabela 1: Tabela de comparação entre as heurísticas CMinDegree e CMinDegreeMinPath

A Tabela 2 apresenta uma comparação entre as heurísticas CMinDegree Estendida e CMinDegreeMinPath Estendida. Nas instâncias de densidade alta, a heurística CMinDegreeMinPath Estendida foi melhor em 141 instâncias. Dessas, em média ela gerou uma coloração com 1.07 cores a mais em comparação a heurística CMinDegree. Já nas instâncias de densidade baixa, a CMinDegreeMinPath foi melhor em 127 instâncias e, em média ela gerou uma coloração com 1.12 cores a mais. No total, a CMinDegreeMinPath foi melhor em 268 instâncias.

	CMinDegree		CMinDegreeMinPath Estendida	
d	Vitórias	Total cores	Vitórias	Total cores
0.5	721	16029	848	16171
0.8	712	25503	853	25654

Tabela 2: Tabela de comparação entre as heurísticas CMinDegree Estendida e CMinDegreeMinPath Estendida

4. Modelo de Programação Inteira

Nesta seção, apresentaremos os modelos de programação inteira existente na literatura para o problema e o modelo proposto nesse trabalho. Também fazemos uma demostração que toda solução viável desses modelos é uma coloração grundy conexa.

4.1. Modelo Padrão Carvalho

Em [Carvalho, 2023], os autores apresentam dois modelos de programação inteira, ambas baseadas nas formulações do problema de coloração de vértices (PCV). A primeira é baseada na formulação padrão e a segunda na formulação do representante.

A formulação padrão para o número grundy conexo possui os seguintes conjuntos de variáveis. Seja $T = \{1, 2, \ldots, n\}$ representando a ordem em que os vértices são coloridos, $K = \{1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1\}$ as cores disponíveis para um vértices.

Considere as seguintes variáveis de decisão para o problema grundy conexo:

$$z_{vkt} = \begin{cases} 1, \text{se o vértice } v \in V \text{ recebe a cor } k \in K \text{ no tempo } t \in T \text{ para } k \leq t. \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$w_k = \begin{cases} 1, \text{se a cor } k \in K \text{ é usada} \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

A Figura 1 apresenta ss restrições do modelo padrão para o número conexo de grundy. A função objetivo do modelo é maximizar o número de cores usada. A restrição (4.1.2) garante que os vértices adjacentes não recebem a mesma cor. A restrição (4.1.3) garante que cada vértice recebe exatamente uma cor em um algum tempo. A restrição (4.1.4) determina que w_k só pode ser usada se algum vértice $v \in V$ em algum tempo $t \in T$ usar a cor k. A restrição (4.1.5) garante a propriedade grundy. A restrição (4.1.6) estabelece que um único vértice recebe uma cor em cada tempo t. A restrição (4.1.7) garante que uma coloração conectada.

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193407
https://proceedings.science/p/193407?lang=en

$$\max \quad \sum_{v \in K} w_k \tag{4.1.1}$$

$$\sum_{\substack{t \in T \\ t \geq k}} z_{ukt} + \sum_{\substack{t \in T \\ t \geq k}} z_{vkt} \leq w_k \quad \forall k \in K, \{u, v\} \in E \tag{4.1.2}$$

$$\sum_{t \in T} \sum_{k \in K} z_{vkt} = 1 \quad \forall v \in V \tag{4.1.3}$$

$$w_k \leq \sum_{v \in V} \sum_{t \in T} z_{vkt} \quad \forall k \in K \tag{4.1.4}$$

$$\sum_{t' \geq k'} z_{vk't'} \leq \sum_{u \in N(v)} \sum_{k \leq t' \leq t} z_{ukt'} \quad \begin{array}{c} \forall v \in V, k, k' \in K \\ t \in T \setminus \{1\} \text{ com } k < k' \end{array} \tag{4.1.5}$$

$$\sum_{v \in V} \sum_{k \in K} z_{vkt} = 1 \quad \forall t \in T \tag{4.1.6}$$

$$\sum_{k \in K} z_{vkt} \leq \sum_{u \in N(v)} \sum_{t' < t} \sum_{k \in K} z_{ukt'} \quad \forall v \in V, t \in T \setminus \{1\} \tag{4.1.7}$$

$$w_k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K \tag{4.1.8}$$

$$z_{vkt} \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V, t \in T, k \in K \tag{4.1.9}$$

Figura 1: Modelo padrão para o número de grundy conexo

Dada uma solução viável (z', w') do modelo acima podemos encontrar subconjuntos de $V_1, \ldots, V_k$ subconjuntos de V tal que

$$V_i = \{v | z_{v,i,t} = 1, \quad \exists t \in T\}$$

Além disso, podemos obter a ordem inicial $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ que os vértices são coloridos da seguinte maneira:

$$u_i = v, \text{ se } z_{v,k,i} = 1, \text{ para algum} k \in K \tag{1}$$

Proposição 1. *Dada uma solução viável (z', w') da formulação acima. Seja $V_1, \ldots, V_K$ obtida a partir de uma solução viável (z', w'). Então $V_1, \ldots, V_K$ tem a propriedade grundy.*

Prova Suponha por absurdo que existe um $v \in V_i$ que é colorido no tempo $t \geq i$ tal que não existe nenhum vizinho de $v \in V_j$ para algum $j < i$. Sem perda de generalidade, seja V_m o primeiro subconjunto livre de vizinhos de v. Tome $k = m, k' = i$, $t = i$, temos que $\sum_{u \in N(v)} \sum_{m \leq t' \leq t} z_{umt'} = 0$. Pela restrição 4.1.5, temos que $\sum_{t' \geq i} z_{vit'} \leq 0$. Dessa maneira, temos que $z_{vit'} = 0$ para $t' \geq i$. Absurdo com o fato $z_{vit} = 1$ para $t = i$.

Proposição 2. *Dada uma solução viável (z', w') da formulação acima. Seja $u_1, \ldots, u_n$ uma sequência dos vértices obtida a partir de uma solução viável (z', w'). Então $u_1, \ldots, u_n$ é uma sequência de vértices conectada.*

Prova Suponha por absurdo que existe u_i com $i \geq 2$ tal que u_i não tem nenhum vizinho no conjunto $\{u_1, \ldots, u_{i-1}\}$. Tome $t = i$ e $v = u_i$, temos que $\sum_{u \in N(v)} \sum_{t' < i} \sum_{k \in K} z_{ukt'} = 0$. Isso implica que $\sum_{k \in K} z_{vki} \leq 0$. Concluímos que $z_{vki} = 0$ para todo $k \in K$. Absurdo com o fato que o vértice v é colorido no tempo t.

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193407
https://proceedings.science/p/193407?lang=en

4.2. Fortalecendo a formulação padrão

Nesta subseção, propomos uma maneira de fortalecer a formulação padrão adicionando algumas desigualdades válidas.

Nós definimos a (v, k, t)-desigualdade da seguinte maneira:

$$\sum_{k'=k+1}^{t} \sum_{t'=k'}^{t} z_{vk't'} \leq \sum_{u \in N(v)} \sum_{t'=k}^{t-1} z_{ukt'} \qquad \begin{array}{c} \forall v \in V, k \in K \\ t \in T \setminus \{1\}, k < t \end{array}$$

Proposição 3. *Se a restrição (4.1.5) é válida então (v, k, t)-desigualdade.*

Prova Seja $V_1, V_2, \ldots, V_k$ obtida a partir de uma solução viável (x', z'). Vamos mostrar que a propriedade grundy é garantida pela (v, k, t)-desigualdade. Suponha por absurdo que $V_1, V_2, \ldots, V_k$ não tem a propriedade grundy, ou seja, existe um $v \in V_i$ colorido no tempo $t > i$ tal que v não possui nenhum vizinho em algum V_j para algum $j < i$. Seja V_m o primeiro subconjunto de V sem vizinho de v. Logo, $\sum_{\ u \in N(v)} \sum_{k \leq t' \leq t} z_{ukt'} = 0$. Logo, $\sum_{k' > k} \sum_{t' \geq k'} z_{vk't'} \leq 0$. Isso implica que $z_{vit} = 0$.

5. Novas Formulações Padrão para o Número Grundy Conexo

Apresentaremos as duas novas formulações em três partes: restrições relacionadas com a coloração, restrições relacionadas com a propriedade grundy e as restrições que garantem a conectividade.

5.1. Variáveis de decisão

As duas novas formulações utilizam as seguintes variáveis:

$$x_{v,c} = \begin{cases} 1, \text{se o vértice } v \text{ recebe a cor } c \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$z_c = \begin{cases} 1, \text{se a cor } c \text{ é usada} \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$y_{vcp} = \begin{cases} 1, \text{se o vértice } v \in V \text{ recebe a cor } c \in C \text{ no tempo } p \in P \text{ para } c \leq p \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

5.2. Restrições de coloração

As restrições relacionadas com a coloração utilizadas nos dois modelos são tomadas emprestadas do modelo de prograação inteira para o problema de coloração de vértices (PCV) apresentado a seguir:

$$\min \quad \sum_{c \in C} z_c \tag{2}$$

$$s.a. \quad \sum_{c \in C} x_{v,c} = 1 \qquad \forall v \in V \tag{3}$$

$$x_{v,c} + x_{u,c} \leq z_c \qquad \forall \{u, v\} \in E, \forall c \in C \tag{4}$$

$$z_c \leq \sum_{v \in V} x_{v,c} \qquad \forall c \in C \tag{5}$$

$$z_c \leq z_{c-1} \qquad \forall c \in \{2, \ldots, |C|\} \tag{6}$$

$$x_{v,c} \in \{0, 1\} \qquad \forall v \in V(G), \forall c \in C \tag{7}$$

$$z_c \in \{0, 1\} \qquad \forall c \in C \tag{8}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193407
https://proceedings.science/p/193407?lang=en

A restrição (3) garante que cada vértice só pode receber uma cor. A restrição (4) garante que a coloração obtida será uma coloração própria. A restrição (5) garante que uma cor k só pode ser usada se algum vértice v recebeu a cor k. A restrição (6) assegura que as primeiras cores serão usadas.

5.3. Restrições da propriedade Grundy

Em [Rodrigues, 2020], o conjunto de restrições que garante a propriedade grundy é apresentada abaixo:

$$x_{v,c} \geq 1 - \sum_{d=1}^{c-1} x_{v,d} - \sum_{u \in N(v)} x_{u,c} \quad \forall v \in V(G), \quad \forall c \in C \tag{9}$$

Já em [Carvalho et al., 2023], o conjunto de restrições que garante a propriedade grundy é apresentada abaixo:

$$x_{v,c'} \leq \sum_{u \in N(v)} x_{u,c} \quad \forall v \in V(G), \quad \forall c, c' \in C \text{ se } c < c' \tag{10}$$

5.4. Restrições relacionadas com a conectividade

Note que a propriedade da ordem dos vértices conexa é parcialmente assegurada pela propriedade grundy. Em toda coloração grundy, os vértices que receberam cores diferente 1 já satisfaz a restrição de conectividade, já que esses vértices não receberam a cor 1 por que já tinha um vizinho colorido previamente com a cor 1 . Logo, as restrições para garantir a conectividade da coloração precisam ser apenas checadas nos vértices coloridos com a cor 1, exceto do vértice colorido com a cor 1 na primeira posição. Podemos aplicar essa ideia na formulação padrão de Carvalho, onde podemos substituir o conjunto de restrição (4.7) pelas restrições abaixo:

$$z_{v1t} \leq \sum_{u \in N(v)} \sum_{t' < t} \sum_{k \in K} z_{ukt'} \quad \forall v \in V, t \in T \setminus \{1\} \tag{11}$$

Abaixo apresentamos as demais restrições da nossa formulação do grundy conexo. São restrições que fazem a relação entre a variável x e a variável y, a propriedade de grundy e que garantem a conectividade dos vértices de cor 1 nas posições diferente da primeira.

$$\min \quad \sum_{c \in C} z_c \tag{12}$$

$$s.a. \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8 \tag{13}$$

$$9 \quad \text{ou} \quad 10 \tag{14}$$

$$x_{v,c} \leq \sum_{p=c}^{n} y_{vcp} \leq x_{v,c} \qquad \forall v \in V, \quad \forall c \in C \tag{15}$$

$$\sum_{\forall v \in V} \sum_{c=1}^{p} y_{vcp} = 1 \qquad \forall p \in P \setminus \{1\} \tag{16}$$

$$\sum_{c=1}^{\min(p,|K|)} \max(1, (c-1)) y_{vcp} \leq \sum_{\forall u \in N(v)} \sum_{p'=1}^{p-1} \sum_{c=1}^{\min(p',|K|)} y_{ucp'} \quad \forall v \in V, \quad \forall p \in P \setminus \{1\} \tag{17}$$

$$\sum_{c'=2}^{\min(p,|K|)} \sum_{p'=c'}^{p} y_{vc'p'} \leq \sum_{\forall u \in N(v)} \sum_{p'=1}^{p-1} y_{u1p'} \quad \forall v \in V, \quad \forall p \in P \setminus \{1\} \tag{18}$$

$$y_{v,c,p} \in \{0, 1\} \tag{19}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193407
https://proceedings.science/p/193407?lang=en

A restrição (15) garante que se um vértice receber uma cor c, então ele irá ser alocado em uma única posição válida $c \leq p \leq n$. A restrição (16) garante que em cada posição p teremos um único vértice alocado. A restrição (17) garante que se um vértice for alocada em uma posição $p > 1$ com uma cor $2 \leq c \leq p$, então $c - 1$ vizinhos desse vértice devem ser alocados em posições menores com que p. Com a restrição (4), temos a garantia que será com uma cor diferente de c. Essa restrição garante a conectividade dos vértices coloridos com cor > 1. A restrição (18) garante a conectividade dos vértices coloridos com a cor 1 nas posições $p > 1$. Ela garante que se nenhum vizinho do vértice v for colorido com a cor 1 nas posições $[1, p-1]$, então v deve ser colorido com a cor 1 na posição p.

6. Resultados Computacionais

Nesta seção, são descritos os experimentos computacionais realizados nesse trabalho.Todos os experimentos foram implementados na linguagem de programação Python e executados em um computador com um processador Intel Xeon E5-2620 v2, 32GB de memória RAM, 2.10GHz, e sistema operacional Linux 64 bits. Utilizamos o pacote NetworkX para manipulação de grafos e redes complexas. A documentação da biblioteca, com exemplos detalhados, está disponível em: `https://networkx.org/`. Para resolver os modelos de PLI, utilizamos o solver matemático Gurobi. Todas as formulações foram executadas com um limite de tempo de 3600 segundos (1 hora) e limitação de memória de 8GB.

Utilizamos os mesmos grafos de [Carvalho et al., 2023][1], que são grafos aleatórios gerados com densidades d de arestas de 0.4, 0.6 e 0.8. Para cada densidade, foram gerados 5 grafos com tamanhos $n \in 15, 20, 25, 30$ vértices, totalizando 60 grafos.

6.1. Formulação Padrão Carvalho versus Padrão Carvalho Modificada

A primeira comparação envolve a formulação padrão de Carvalho e sua versão modificada apresentada na Seção 4.2. Das 60 instâncias, a formulação padrão de Carvalho não encontrou nenhuma solução ótima, enquanto a versão modificada encontrou uma solução ótima para $n = 15$ e $d = 0.4$. Nas demais instâncias, ambas pararam devido ao limite de tempo. Das 59 instâncias em que nenhuma das formulações encontrou o ótimo, a versão modificada encontrou a melhor solução viável em 47 casos, enquanto a versão padrão obteve a melhor solução em 38 casos. Concluímos que o fortalecimento da formulação padrão de Carvalho foi eficaz.

6.2. Formulação de Representantes versus Formulações Propostas

Agora, comparamos as duas versões das formulações propostas apresentadas na Seção 5. Compararemos as três formulações restantes: Representante, Proposta1 e Proposta2. Na Tabela 3, apresentamos o resultado geral para as instâncias de tamanho $n = 15$, onde a primeira coluna mostra a densidade d, e as colunas seguintes apresentam o tempo em segundos (t(s)) e o valor da função objetiva (obj). Das instâncias analisadas, apenas uma vez a formulação Proposta1 não encontrou a solução ótima (destacado em vermelho).

Observamos que, nas instâncias de densidade baixa ($d = 0.4$) e média ($d = 0.6$), as formulações propostas são melhores, encontrando a solução ótima em tempos cerca de 80% e 9% menores que a formulação Representante. Contudo, para instâncias de densidade alta ($d = 0.8$), a formulação Representante se mostrou superior, encontrando soluções ótimas em tempos significativamente menores comparado às formulações propostas.

Comportamento semelhante ocorre para as instâncias de tamanho $n = 20$, conforme mostrado na Tabela 4. A partir das instâncias de densidade $d = 0.6$, a formulação Representante se mostra superior, encontrando a solução ótima para todas essas instâncias,

[1] `https://github.com/mateuscsilva/grundycoloring`

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193407
https://proceedings.science/p/193407?lang=en

	Representante		Proposta1		Proposta2	
d	t(s)	obj	t(s)	obj	t(s)	obj
	258.9	7	44.6	7	**21.0**	7
	256.6	7	**26.1**	7	54.5	7
0.4	307.6	5	**15.1**	5	23.3	5
	169.1	7	143.5	7	**119.6**	7
	274.6	7	**32.7**	7	42.2	7
média	253.36		52.40		**52.12**	
	267.3	9	540.4	9	292.1	9
	286.7	9	429.9	9	**186.6**	9
0.6	**24.4**	9	493.3	9	277.5	9
	418.4	8	88.3	8	**67.4**	8
	12.6	9	294.9	9	103.2	9
média	201.88		369.36		**185.36**	
	2.1	11	3148.5	11	580.2	11
	2.7	12	1358.0	12	559.3	12
0.8	**2.9**	11	588.4	11	186.8	11
	3.8	10	3600.5	10	314.3	10
	3.9	10	1108.8	10	1384.7	10
média	**3.08**		1960.84		605.06	

Tabela 3: Resultado para instâncias com $n = 15$.

enquanto as formulações propostas pararam devido ao limite de tempo. Destaque para as instâncias de densidade $d = 0.8$, onde a formulação Representante encontra soluções ótimas em tempos muito rápidos.

Já na Tabela 5, temos um resumo com as quantidades de ótimos encontrados pelas três formulações por tamanho e densidade. Em geral, a formulação do representante se mostra superior, encontrando a solução ótima em 35 das 60 instâncias. Por essa tabela, podemos observar que o comportamento observado nas instâncias de tamanho 15 e 20 continua a ocorrer nas de tamanho 25 e 30, onde a representante encontra as soluções ótimas em praticamente todas as instancias de densidade alta.

Para finalizar, das instâncias que as três formulações não garantiram a solução ótima (21 instâncias), comparamos as soluções viáveis encontradas. A formulação do representante encontrou a melhor solução em 3, a Proposta1 13 e a Proposta2 em 16 das 21 instâncias. Além disso, das instâncias que cada uma não garantiu a solução ótima, em 4/25 a Representante não encontrou uma solução viável, a Proposta em 6/44 e Proposta2 0/42. Destacamos que nenhuma formulação parou devido a falta de memória.

7. Conclusão e Trabalho Futuro

Neste trabalho estudamos o Problema de Coloração de Grundy conexo, onde apresentamos duas novas formulações de programação inteira além de um fortalecimento de uma formulação existente da literatura. Realizamos a comparação computacional das formulações usando instâncias de testes gerados de maneira aleatória disponíveis. Podemos concluir que a formulação do representante, estado da arte da literatura, se mostra em geral superior, mas nas instâncias de densidade baixa e média e tamanho baixo, nossas formulações se mostraram superiores. Quando comparamos as duas formulações propostas nesse trabalho, a formulação usando a restrição que garante a propriedade de Grundy de [Rodrigues, 2020] se mostra superior que a formulação que usa a propriedade de Grundy de [Carvalho et al., 2023]. Encontrando mais soluções ótimas com média de tempo menor. Além de encontrar sempre soluções viáveis nas instâncias que parou devido ao limite de tempo e com qualidade superior.

Como trabalho futuro, queremos pesquisar como podemos fortalecer as formulações nas instâncias de densidade maiores. Além de realizar um estudo com instâncias menores

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193407
https://proceedings.science/p/193407?lang=en

	Representante		Proposta1		Proposta2	
d	t(s)	obj	t(s)	obj	t(s)	obj
0.4	**3571.8**	9	3600.4	9	3600.5	9
0.4	3605.7	9	3600.5	9	**3586.1**	9
0.4	3606.0	8	3600.7	8	**872.8**	8
0.4	3605.8	8	1164.9	8	**670.1**	8
0.4	3605.4	9	**2845.0**	10	3600.5	10
média	3598.9		2962.3		**2466.0**	
0.6	**1367.6**	11	3600.7	11	3600.6	11
0.6	**915.6**	11	3600.6	11	3600.6	11
0.6	**2041.7**	11	3600.7	11	3600.7	11
0.6	**3432.5**	11	3600.6	10	3600.6	10
0.6	**346.8**	12	3600.7	12	3600.7	12
média	**1620.84**		3600.66		3600.64	
0.8	**9.7**	13	3601.0	13	3601.0	13
0.8	**74.5**	13	3600.9	13	3600.8	13
0.8	**47.6**	13	3600.9	13	3600.9	13
0.8	**15.1**	13	3601.0	13	3601.0	13
0.8	**12.8**	14	3600.8	14	3601.0	14
média	**31.94**		3600.92		3600.94	

Tabela 4: Resultado para instâncias com $n = 20$.

n	d	Representante	Proposta1	Proposta2
15	0.4	5	5	5
	0.6	5	5	5
	0.8	5	4	5
20	0.4	1	2	3
	0.6	5	0	0
	0.8	5	0	0
25	0.4	0	0	0
	0.6	0	0	0
	0.8	5	0	0
30	0.4	0	0	0
	0.6	0	0	0
	0.8	4	0	0
soma		35	16	18

Tabela 5: Quantidade de Instâncias que tiveram sua otimalidade provada.

para avaliarmos o fortalecimento da formulação de Carvalho.

Referências

Babel, L. e Tinhofer, G. (1989). *Connected sequential colorings: the smallest partially hard-to-color graph*. Institut für Mathematik und Informatik, Technische Universität München.

Benevides, F., Campos, V., Dourado, M., Griffiths, S., Morris, R., Sampaio, L., e Silva, A. (2014). Connected greedy colourings. In *LATIN 2014: Theoretical Informatics: 11th Latin American Symposium, Montevideo, Uruguay, March 31–April 4, 2014. Proceedings 11*, p. 433–441. Springer.

Brélaz, D. (1979). New methods to color the vertices of a graph. *Communications of the ACM*, 22(4):251–256.

Carvalho, M. (2023). Application of biased random-key genetic algorithm and formulations for the grundy coloring problem and the connected grundy coloring problem. Master's thesis, Universidade Federal da Bahia. URL `https://repositorio.ufba.br/handle/ri/39322`.

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193407
https://proceedings.science/p/193407?lang=en

Carvalho, M., Melo, R., Santos, M. C., Toso, R. F., e Resende, M. G. C. (2023). Formulações de programação inteira para o problema da coloração de grundy. *Anais SBPO 2024*.

Chow, F. C. e Hennessy, J. L. (1990). The priority-based coloring approach to register allocation. *ACM Transactions on Programming Languages and Systems (TOPLAS)*, 12 (4):501–536.

Christen, C. A. e Selkow, S. M. (1979). Some perfect coloring properties of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 27(1):49–59.

Gamst, A. (1986). Some lower bounds for a class of frequency assignment problems. *IEEE transactions on vehicular technology*, 35(1):8–14.

Garey, M. R. e Johnson, D. S. (1979). *Computers and intractability*, volume 174. freeman San Francisco.

Goyal, N. e Vishwanathan, S. (1997). Np-completeness of undirected grundy numbering and related problems. *Manuscript, Bombay*.

Grundy, P. M. (1939). Mathematics and games. *Eureka*, 2:6–9.

Havet, F. e Sampaio, L. (2013). On the grundy and b-chromatic numbers of a graph. *Algorithmica*, 65(4):885–899.

Leighton, F. T. (1979). A graph coloring algorithm for large scheduling problems. *Journal of research of the national bureau of standards*, 84(6):489.

Matula, D. W. e Beck, L. L. (1983). Smallest-last ordering and clustering and graph coloring algorithms. *Journal of the ACM (JACM)*, 30(3):417–427.

Rodrigues, E. N. H. D. (2020). **Coloração k-imprópria gulosa**. Disponível em: `http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/50955`. Acesso em: 14 fev. 2022.

Welsh, D. J. e Powell, M. B. (1967). An upper bound for the chromatic number of a graph and its application to timetabling problems. *The Computer Journal*, 10(1):85–86.

Zaker, M. (2005). Grundy chromatic number of the complement of bipartite graphs. *Australas. J Comb.*, 31:325–330.

Zaker, M. (2006). Results on the grundy chromatic number of graphs. *Discrete mathematics*, 306(23):3166–3173.

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193407
https://proceedings.science/p/193407?lang=en