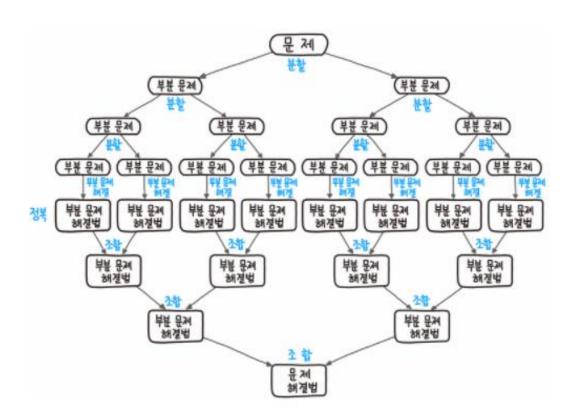
청년 AI 아카데미 20기 알고리즘 실습

재귀(Recursion)





재귀 (Recursion)



Bottom up!!

- 1. 문제를 굉장히 간단한 수준까지 하위 문제로 분할한다.
- 2. 하위 문제를 해결한다.

3. 하위 문제에 대한 결과를 원래 문제에 대한 결과로 정복(합병)한다.

c.f. Divide and Conquer 기법이라고도 부른다.



실습 목표

- 재귀 문제를 해결하기 위한 방법을 배우고 다양한 재귀 문제들을 실습해보자.
 - 1. 피보나치 수열의 n번째 항 구하기
 - 2. 하노이 탑
 - 3. 이진 탐색
 - 4. $n^k \mod m$ 효율적으로 계산하기





재귀 함수 구현 Tip 3가지

- 1. 재귀 함수가 무엇을 하는 함수인지 명확하게 정의합니다.
 - 함수 이름이 의미가 있을수록 좋습니다.
 - 함수가 지니는 <u>매개변수</u>들, 함수가 <u>무엇을 반환</u>하는지 등이 정의 안에 전부 녹아 있어야 합 니다.
 - Ex) 양의 정수 n이 주어졌을 때 1부터 n까지 합한 수를 계산하여라.

def Sum (a, b): # 자연수 a부터 b까지의 합을 반환하는 함수

Ex) Sum(4,9) = 39





재귀 함수 구현 Tip 3가지

- 2. 재귀 함수가 함수 내에서 호출이 된다면, 그것은 **올바른 답을 준다고** 가정하고, 하위 문제 정답을 통해 원래 문제의 정답을 구합니다.
 - 예를 들어 현재 구현 중인 Sum(a,b) 함수를 봅시다.
 - Sum(a,b-1)은 a부터 b-1까지의 합을 반환하므로, Sum(a,b) = b + Sum(a,b-1)입니다.
 - 아직 Sum(a,b-1)를 구현하지 않았지만, **구현했다고 가정**합니다.

def Sum (a, b): # 자연수 a부터 b까지의 합을 반환하는 함수

return Sum(a,b-1)+b



재귀 함수 구현 Tip 3가지

- 3. 재귀 함수엔 명확한 종료 조건이 반드시 있다.
- 재귀 함수는 자기 자신을 부르는 함수이므로, <mark>종료 조건이 없다면 무한히 수행</mark>됩니다.
- 따라서 함수 내에 종료 조건이 존재하고, 이는 가장 단순한 경우입니다.
- Ex) Sum(a,b) 에서 a가 b보다 크다면? a와 b가 같다면?

→
$$Sum(4,6) + 7 = 22$$

$$= \frac{15}{100} = \frac{15}{100} = \frac{15}{100}$$

$$\rightarrow$$
 Sum(4,5) = Sum(4,4) + 5 = 9

자현S中間(부)由 arkum에/합은 4이다.

자연우민우구3% 처 를 같???

PAI인공지능연구원

01. 피보나치 수열의 n번째 항 구하기

피보나치 수열의 n번째 항을 계산합니다.

$$F(1) = 1$$

$$F(2) = 1$$

$$F(3) = F(1) + F(2) = 1 + 1 = 2$$

...

$$F(N) = F(N-1) + F(N-2)$$

재귀 함수(Recursive Function)를 이용하여 구현하여 봅시다.

01. 피보나치 수열의 n번째 항 구하기

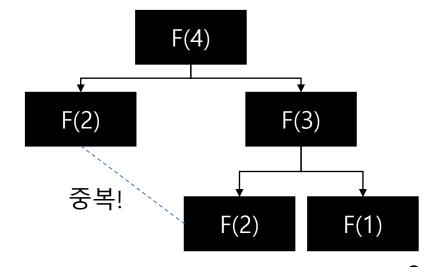
```
      def
      Fibo (n): # Fibo(n)은 피보나치 수열의 n번째 항을 반환하는 함수

      if n <= 2:</th>
      시간복잡도가 0(2<sup>n</sup>)

      return 1
      이므로 비효율적!!

      return Fibo(n-1) + Fibo(n-2)
```

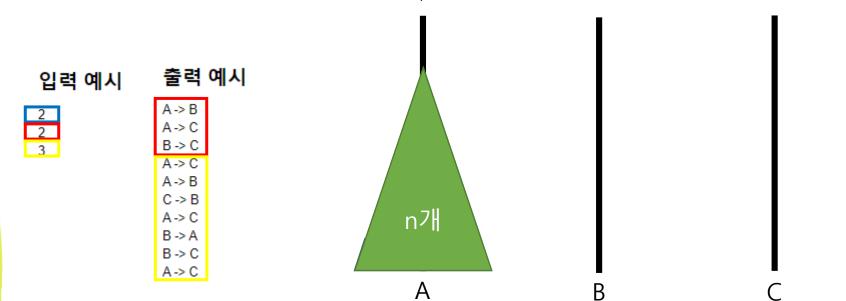
```
t = int(input())
for _ in range(t):
    n = int(input())
    print(Fibo(n))
```



3개의 기둥 A, B, C가 있고, A에 있는 n개의 무게가 다른 원판을 C로 옮기고 싶습니다. 아래와 같은 규칙에 따라 원판을 이동시킬 수 있습니다.

- 원판은 한 번에 한 개씩만 제일 위에 있는 원판만 이동할 수 있습니다.
- 원판은 항상 무거운 것이 아래에 있어야 합니다. (시작 상태에서도 마찬가지)

A에서 C로 최소 횟수로 이동시킬 때, 이동하는 방식을 출력하는 프로그램을 작성합니다.



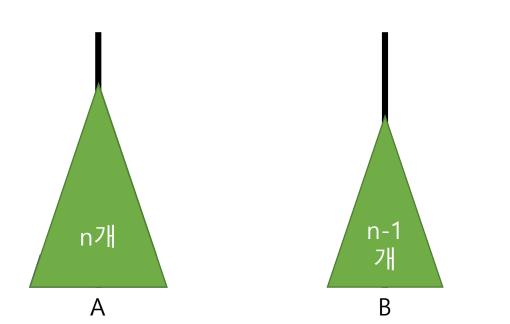
PAI인공지능연구원

POSTIBLE POHANG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

1. 재귀 함수의 정의 Hanoi(start,mid,end,n) #n개의 원판을 strat에서 mid를 거쳐 end로 이동하는 방식을 출력하는 함수

2. 재귀 호출을 어떤 식으로 할 수 있을까요?

Hanoi(A,C,B,n-1)



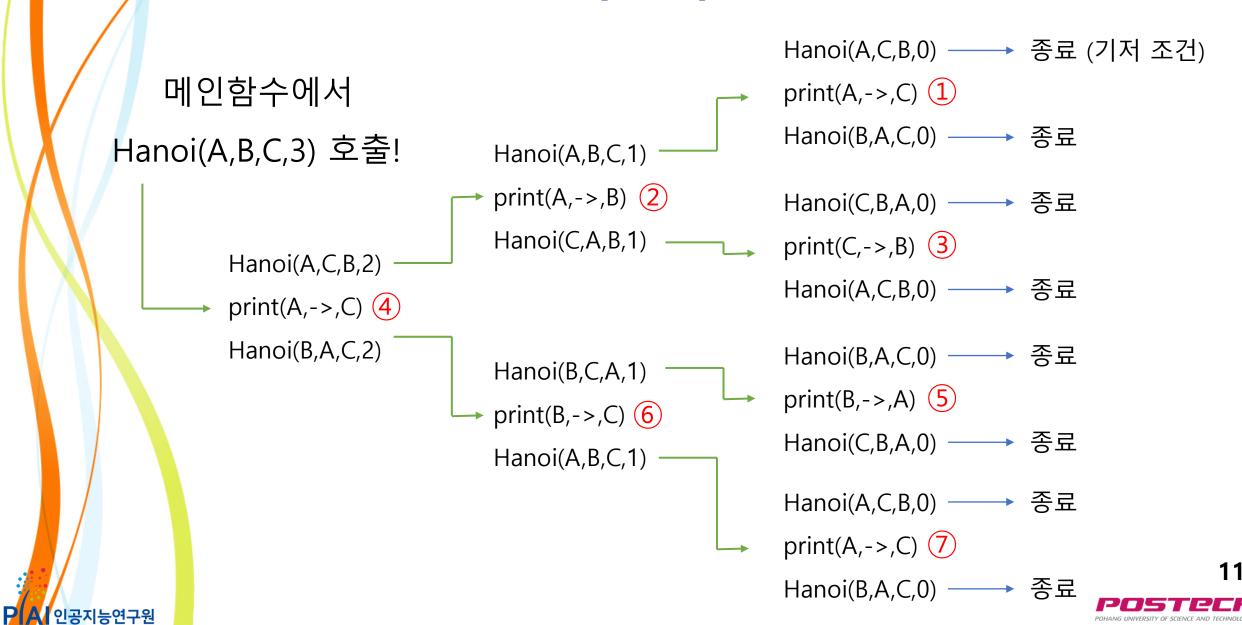
Hanoi(A,C,B,n-1) print(A,->,C) Hanoi(B,A,C,n-1)

A,B,C의 위치에 주의!!

3. 종료 조건: 가장 기본적인 수행 n이 0이라면, 어떠한 실행도 하지 않고 함수를 종료한다.



10



```
def Hanoi(n,start,mid,end): #n개 고리를 start에서 end로 옮기는 함수 if n == 0:
    return
    Hanoi(n-1,start,end,mid) #n-1개 고리를 start에서 mid로 옮김 print(start,'->',end) #남은 1개를 start에서 end로 옮김 Hanoi(n-1,mid,start,end) #mid로 옮긴 n-1개 고리를 end로 옮김 t = int(input()) for _ in range(t):
    n = int(input())
    Hanoi(n,'A','B','C')
```

【인공지능연구원

(1) 정렬된 리스트와, (2) 찾고자 하는 원소들을 담은 리스트가 주어집니다.

Start=0 (리스트 인덱스)

End=8

5 9 10 12 16 18 21	29
--------------------	----

리스트: [21 11 18]

출력: []

주어진 리스트에 21이 들어 있는지 확인하는 방법?

- 1. 리스트의 앞부터 차례대로 탐색 O(n)
- 2. 이진탐색 O(log n) [단, 리스트가 정렬되어 있을 때!] ->굉장히 유용 ex: 검색시스템

(1) 정렬된 리스트와, (2) 찾고자 하는 원소들을 담은 리스트가 주어집니다.

Start=0 (리스트 인덱스)

End=8

5	9	10	12	16	18	21	27	29

리스트: [21 11 18]

출력: []



(1) 정렬된 리스트와, (2) 찾고자 하는 원소들을 담은 리스트가 주어집니다.

Start=0 (리스트 인덱스)

End=8

10 12 16 18 21 27 29



리스트: [21 11 18]

Median(중앙값) = (0+8)/2 =4

출력: []

16 < 21 오른쪽을 탐색!



15

(1) 정렬된 리스트와, (2) 찾고자 하는 원소들을 담은 리스트가 주어집니다.

PAO인공지능연구원

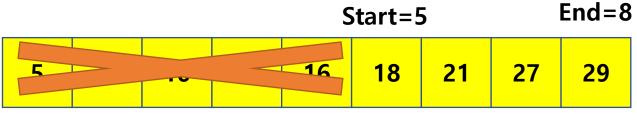
리스트: [21 11 18]

16

출력: []

(새 Start) = 5 → index가 5보다 작은 원소들은 탐색하지 않아도 됨!

(1) 정렬된 리스트와, (2) 찾고자 하는 원소들을 담은 리스트가 주어집니다.





리스트: [21 11 18]

Median(중앙값) = (5+8)//2 =6 출력: [6]

왼쪽을 탐색! List[6] = 21

(1) 정렬된 리스트와, (2) 찾고자 하는 원소들을 담은 리스트가 주어집니다.

Start=0 End=8



Median=4

왼쪽을 탐색! 16 > 11

리스트: [21 11 18]

출력: [6]



(1) 정렬된 리스트와, (2) 찾고자 하는 원소들을 담은 리스트가 주어집니다.

Start=0 End=3

5 9 10 12 16 --- 29

리스트: [21 11 18]

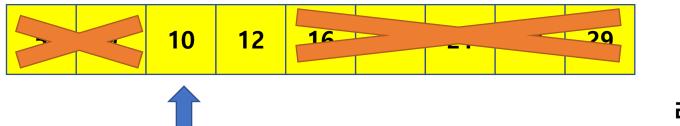
Median=1 출력: [6]

9 < 11 오른쪽을 탐색!

19

(1) 정렬된 리스트와, (2) 찾고자 하는 원소들을 담은 리스트가 주어집니다.

Start=2 End=3



Median=2

오른쪽 탐색! 10 < 11

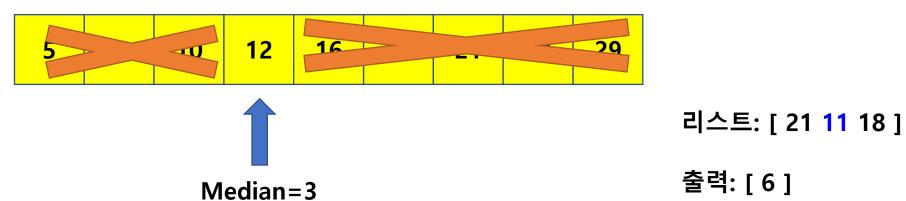
리스트: [21 11 18]

출력: [6]



(1) 정렬된 리스트와, (2) 찾고자 하는 원소들을 담은 리스트가 주어집니다.

Start=End=3

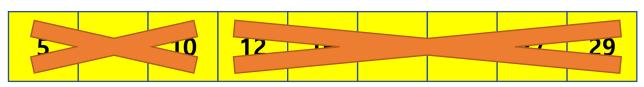


왼쪽 탐색! 12 > 11



(1) 정렬된 리스트와, (2) 찾고자 하는 원소들을 담은 리스트가 주어집니다.

End=2 Start=3



존재하지 않음. -1 리턴

리스트: [21 11 18]

출력: [6-1]



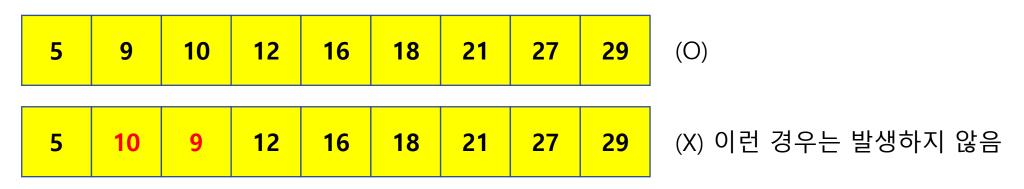
(1) <mark>정렬</mark>된 리스트와, (2) 찾고자 하는 원소들을 담은 리스트가 주어집니다.

|--|

리스트: [21 11 18]

최종 결과 출력: [6-15]

Note: 각 테스트 케이스마다, 첫번째 줄로 주어지는 리스트는 항상 오름차순으로 정렬돼 있음



그렇기에, 중앙값을 기준으로 왼쪽 부분이나 오른쪽 부분 하나만 재귀적으로 조사하면 됨!

Note: 각 테스트 케이스마다, 첫번째 줄로 주어지는 리스트는 항상 오름차순으로 정렬돼 있음

5	9	10	12	16	18	21	27	29	(O)
5	10	9	12	16	18	21	27	29	(X) 이런 경우는 발생하지 않음

하지만, 두번째 줄로 주어지는 리스트는 그렇지 않을 수도 있음!

리스트: [9 21 18] (〇)

리스트: [9 18 21] (O) 문제 없음

03. 이진 탐색 [재귀 함수]

```
def binary(data,left,right,q): #data의 Left:right 범위 내에서 q의 위치를 반환하는 함수
   if left > right: # 없는 경우의 중간
       return -1
   mid = (left + right) // 2 # 중간 위치의 값 설정
   if data[mid] == q: # 현재 중앙에 있는 값이 맞는 경우의 조건
       return mid
   # 문제분할: q와 data[mid]의 관계에 따라 부분문제를 호출
   if data[mid] > q:
       subproblem = binary(data,left,mid-1,q)
   elif data[mid] < q:</pre>
       subproblem = binary(data,mid+1,right,q)
   # 분할된 문제들을 합쳐서 따로 행하는 것이 없음
   return subproblem
t = int(input())
for in range(t):
   data = list(map(int,input().split()))
   query = list(map(int,input().split()))
   answer = []
                                                       A = [1, 2, 3]
                                                       print(A) → [1,2,3] 줄력
   for a in query:
                                                       print(*A) → 1,2,3 출력
       answer.append(binary(data, 0, Len(data)-1,q))
   print(*answer)
```

PIAI인공지능연구원



03. 이진 탐색 [반복문]

```
t = int(input())
for _ in range(t):
    data = list(map(int,input().split()))
    query = list(map(int,input().split()))
    answer = []
    for q in query:
        left = 0
        right = Len(data)-1
        while left <= right:</pre>
            mid = (left + right) // 2
            if data[mid] == q:
                break
            elif data[mid] > q:
                right = mid - 1
            elif data[mid] < q:</pre>
                left = mid +1
        if left > right:
            answer.append(-1)
        else:
            answer.append(mid)
    print(*answer)
```

PA 인공지능연구원

03. 이진 탐색 [라이브러리]

import bisect

PAI인공지능연구원

```
def find(1,x):
    i = bisect.bisect_left(1,x)
    if i != len(1) and l[i] := x:
        return i
    return -1
t = int(input())
for _ in range(t):
    data = list(map(int,input().split()))
    query = list(map(int,input().split()))
    answer = [find(data,x) for x in query]
    print(*ans)
```

$04. n^k \mod m$ 효율적으로 계산하기

 n^k 를 12345678로 나눈 나머지를 계산합니다.

Ex) 2^5 % 12345678 = 32 10^7 % 12345678 = 10000000 10^8 % 12345678 = 1234576 1^{89195} % 12345678 = 1 8949156^0 % 12345678 = 1 0^{123456} % 12345678 = 0

Python에서는 int 범위 이상의 큰 수를 자동으로 다루지만, 자리수가 많아지면 프로그램이 오래 걸리기 때문에 위의 식을 활용해야 합니다!

다음 성질을 이용해야 한다!

$$ab \% x = ((a \% x) * (b \% x))\% x$$

$$X^{a}X^{b} = X^{(a+b)}$$

$$X^{2b} = X^{b*}X^{b} & X^{2b+1} = X^{b*}X^{b*}X$$



$04. n^k \mod m$ 효율적으로 계산하기

PIAI인공지능연구원

```
def Power (n,k,m): #Power(n, k, m): n^k = m으로나는 나머지를 반환하는 함수
    if k == 0:
        return 1
    if k == 1:
        return n
    half = Power(n,k//2,m)
    if k % 2 == 0:
        return (half*half)%m
    else:
        return (half*half*n)%m
t = int(input())
for _ in range(t):
    n,k,m = map(int,input().split())
    print(Power(n,k,m))
```

이전 문제인 이진 탐색과 비슷, 하지만 **가장 가까운 원소**를 찾아야 함!

Start=0 End=8

5	9	10	12	16	18	21	27	29
3	9	10	12	10	10	21	21	29



Mid(중간) = (0+8) // 2 = 4

리스트: [21 22 38]

출력: []

if List[mid] = = target:
 output.append(target)
elif List[mid] < target:
 start = mid + 1
elif List[mid] > target:
 end = mid

 List[Start-1]
 왼쪽의 원소들은 정답이 될 수

 없지만, List[Start-1]는 정답이 될 수 있음

List[End] 오른쪽의 원소들은 정답이 될 수 없지만, List[End]는 정답이 될 수 있음

이전 문제인 이진 탐색과 비슷, 하지만 **가장 가까운 원소**를 찾아야 함!

Start=0 End=8

9 10 12 16 18 21 27 2	29
---	----

Mid=4

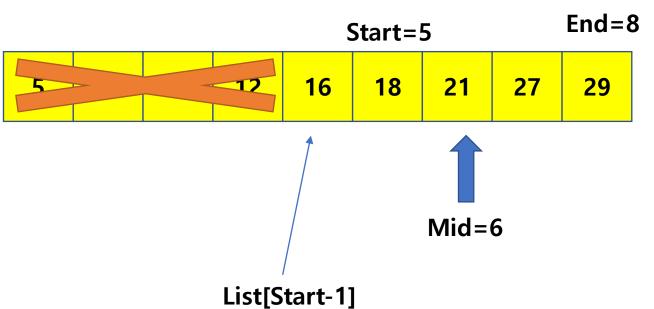
16 < 21 오른쪽을 탐색!

리스트: [21 22 38]

출력: []



이전 문제인 이진 탐색과 비슷, 하지만 **가장 가까운 원소**를 찾아야 함!



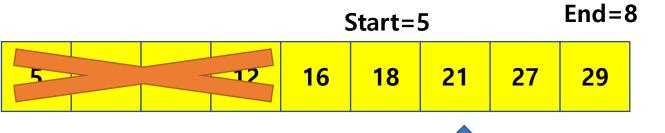
리스트: [21 22 38]

출력: []





이전 문제인 이진 탐색과 비슷, 하지만 **가장 가까운 원소**를 찾아야 함!





Mid=6

탐색 완료!

PAV인공지능연구원

List[mid] = 21

값을 그대로 리턴!

리스트: [21 22 38]

출력: [21]

이전 문제인 이진 탐색과 비슷, 하지만 **가장 가까운 원소**를 찾아야 함!

Start=0 End=8

5	9	10	12	16	18	21	27	29	
---	---	----	----	----	----	----	----	----	--

리스트: [21 22 38]

출력: [21]



이전 문제인 이진 탐색과 비슷, 하지만 **가장 가까운 원소**를 찾아야 함!





리스트: [21 22 38]

출력: [21]

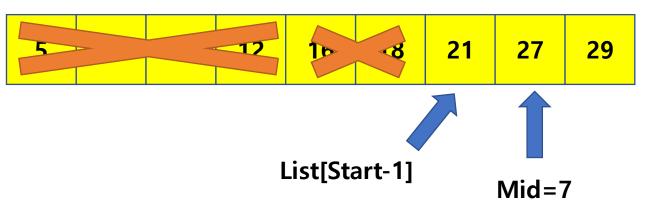
21 < 22 오른쪽을 탐색!

직전의 21과 비슷하게, 22를 찾는 과정이 진행됨. 여기서...



이전 문제인 이진 탐색과 비슷, 하지만 **가장 가까운 원소**를 찾아야 함!

Start=7 End=8



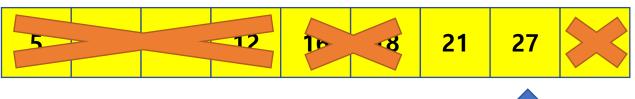
리스트: [21 22 38]

출력: [21]

27 > 22 왼쪽을 탐색!



이전 문제인 이진 탐색과 비슷, 하지만 가장 가까운 원소를 찾아야 함!





리스트: [21 22 38]

출력: [21]





이전 문제인 이진 탐색과 비슷, 하지만 **가장 가까운 원소**를 찾아야 함!

Start=End=7





리스트: [21 22 38]

출력: [21 21]

남은 선택지는 2개밖에 없음.(21과 27)

22-21 < 27-22이므로, 정답은 21

이전 문제인 이진 탐색과 비슷, 하지만 **가장 가까운 원소**를 찾아야 함!

5	9	10	12	16	18	21	27	29
---	---	----	----	----	----	----	----	----

리스트: [21 22 38]

출력: [21 21 29]

38은 가장 큰 원소인 29보다도 크므로, 정답은 29





ADD01. 이진 탐색 2 [힌트 1: 반복문]

```
def binary2(1, x):
       #x가 첫번째 값보다 작거나 마지막 값보다 큰 경우를 미리 확인
       if x<=1[0]: return 1[0]
       if x>=1[-1]: return 1[-1]
       start=0
       end=len(1)-1
       while start<end:
           mid = (start+end)//2
           if l[mid]==x: return l[mid]
           elif x<1[mid]: end = mid</pre>
10
           else: start = mid+1
11
       #위에서 return이 없었다면 L[end-1] < x < L[end]가 항상 성립
12
       #두 값중 x와 더 가까운 값 반환
13
       if abs(1[end-1]-x) \le abs(1[end]-x): return 1[end-1]
14
15
       else: return l[end]
16
17  t = int(input())
18 for in range(t):
19 l = list(map(int,input().split()))
20
       q = list(map(int,input().split()))
       ans = [binary2(1, x) for x in q]
21
       print(*ans)
22
```

PAI인공지능연구원

ADD01. 이진 탐색 2 [힌트 2: 재귀함수]

PAI인공지능연구원

```
def binary(1,s,e,x):
    if x<1[∅]: return 1[∅] #x가 첫번째 값보다 작거나 마지막
    if s>=e:
          if \ abs(1[e-1]-x) <= abs(1[e]-x): \ return \ 1[e-1]
          else: return 1[e]
       mid = (s+e)//2
                                           # |[mid]와 x가 같은경우:
       if 1[mid]==x: return 1[mid]
       elif l[mid]>x: return binary(l,s,mid,x) # /[mid]> x인 경우:
       else: return binary(1,mid+1,e,x)
                                      # |[mid] < x인 경우:
10
11
   t = int(input())
   for _ in range(t):
    l = list(map(int,input().split()))
14
15
       q = list(map(int,input().split()))
       ans = [binary(1,0,len(1),x)] for x in q
16
17
      print(*ans)
```

ADD01. 이진 탐색 2 [힌트 3: 라이브러리 사용]

import bisect

• • • •

i = bisect_left(l,x)

위의 구문을 통해 정렬된 리스트 I에서 x라는 값이 들어갈 위치를 찾을 수 있습니다. 이때 bisect_left 함수는 x와 같은 값들이 있을 때 그 중 가장 작은 인덱스를 반환하며 bisect_right 함수는 가장 큰 인덱스를 반환합니다.

 $bisect_left: \ l[i-1] < x < = l[i] \ if \ i! = 0 \ , \qquad bisect_right: \ l[i] < = x < l[i+1] \ if \ i! = len(l) - 1$



ADD01. 이진 탐색 2 [힌트 3: 라이브러리 사용]

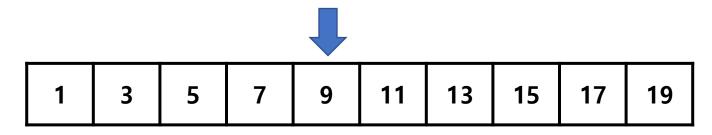
import bisect

••••

i = bisect_left(l,x)

위의 구문을 통해 정렬된 리스트 I에서 x라는 값이 들어갈 위치를 찾을 수 있습니다. 이때 bisect_left 함수는 x와 같은 값들이 있을 때 그 중 가장 작은 인덱스를 반환하며 bisect_right 함수는 가장 큰 인덱스를 반환합니다.

 $bisect_left: \ l[i-1] < x < = l[i] \ if \ i! = 0 \ , \qquad bisect_right: \ l[i] < = x < l[i+1] \ if \ i! = len(l) - 1$



x = 8 or 9

bisect_left(I,x)==4



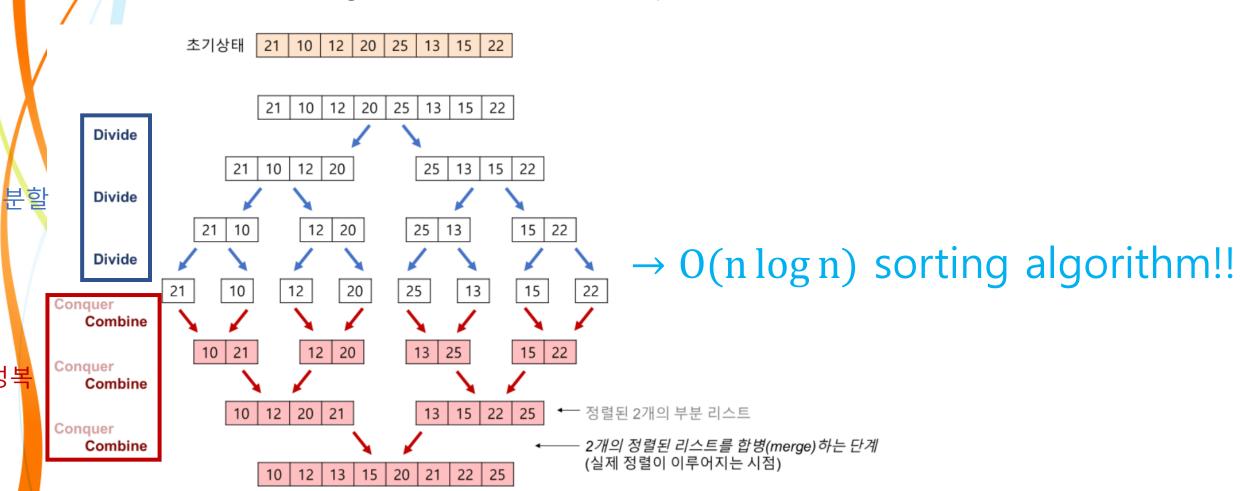


ADD01. 이진 탐색 2 [힌트 3: 라이브러리 사용]

```
import bisect
3 def find(1,x):
4 i = bisect.bisect left(1,x)
5 #x가 첫번째 값보다 작거나 같은 경우
7 #x가 마지막 값보다 큰 경우
   if i \ge len(1): return 1[-1]
   #L[i-1] < x <= L[i]가 항상 성립하기 때문에
10 #두 값 중 x와 더 가까운 값을 찾아 반환한다.
12
    else: return 1[i-1]
13
14 t=int(input())
15 for _ in range(t):
q = list(map(int,input().split()))
ans=[find(1,x) for x in q]
    print(*ans)
19
```

PAI인공지능연구원

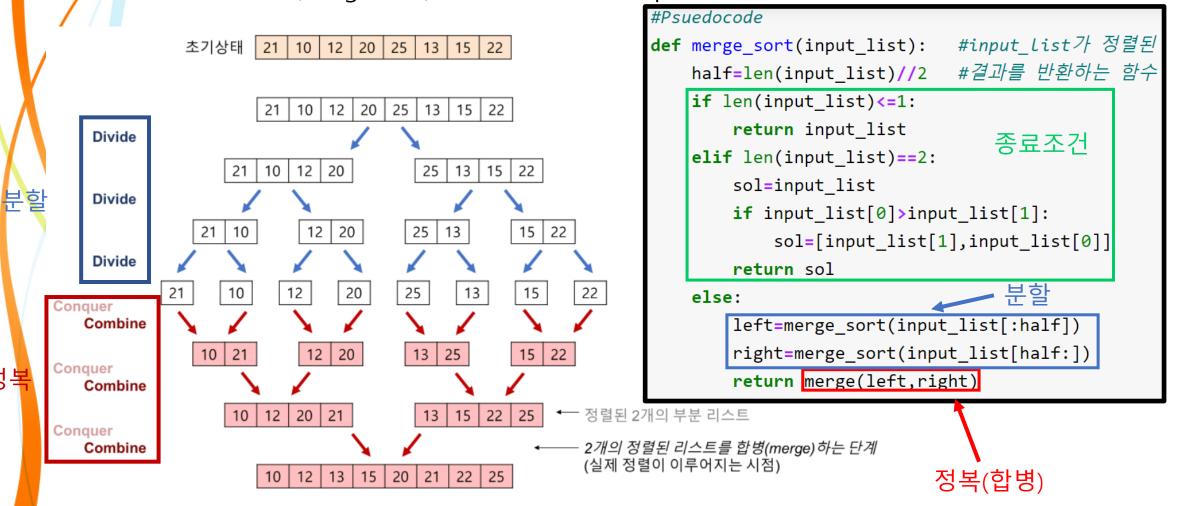
합병 정렬(Merge Sort) -> Divide and Conquer를 이용하여 정렬하는 알고리즘



46

정복

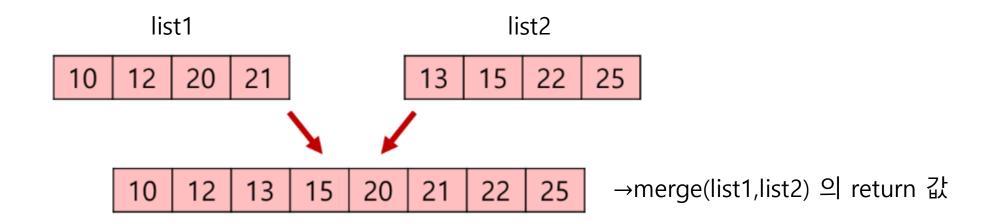
합병 정렬(Merge Sort) -> Divide and Conquer를 이용하여 정렬하는 알고리즘



47

정복

합병 정렬(Merge Sort) -> Divide and Conquer를 이용하여 정렬하는 알고리즘



정렬된 두 개의 리스트가 주어졌을 때, 두 리스트를 합병하여 정렬한 결과의 각 원소가 두 리스트 중 어떤 리스트에서 가져온 것인지 계산하는 프로그램을 작성하여라.

List 1

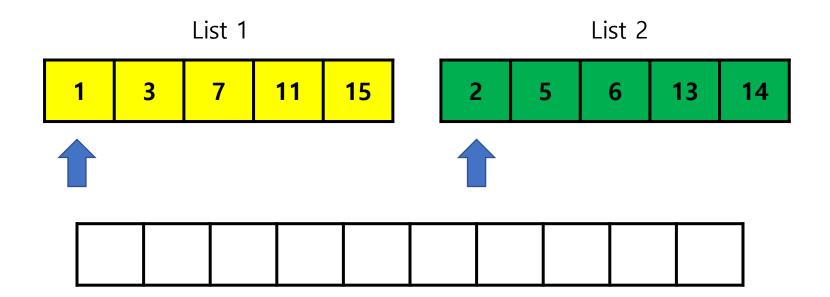
1 3 7 11 15

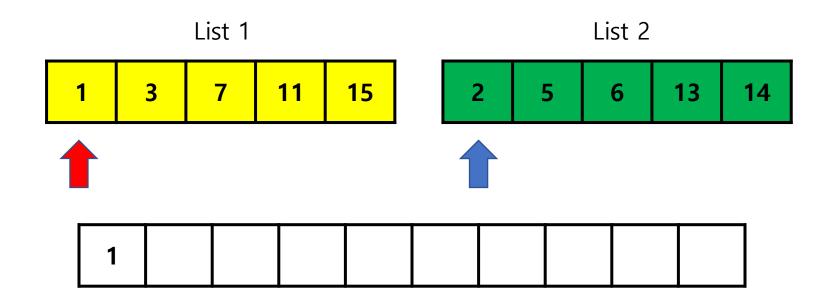
2 5 6 13 14

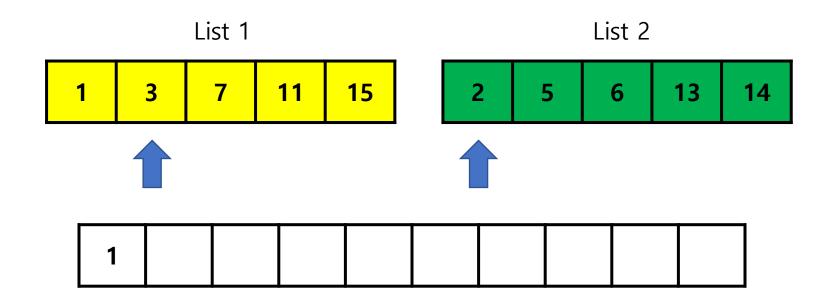
정렬된 두 개의 리스트가 주어졌을 때, 두 리스트를 합병하여 정렬한 결과의 각 원소가 두 리스트 중 어떤 리스트에서 가져온 것인지 계산하는 프로그램을 작성하여라.

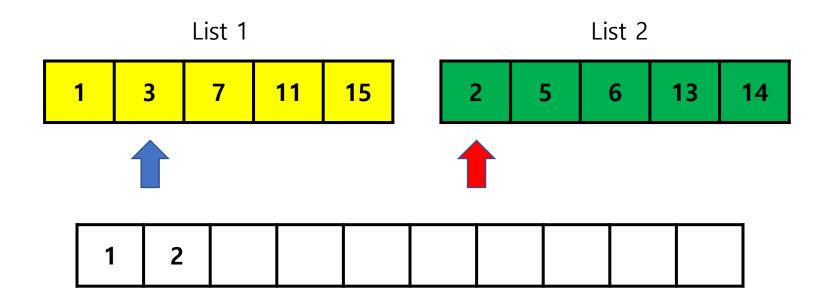
List 1 List 2

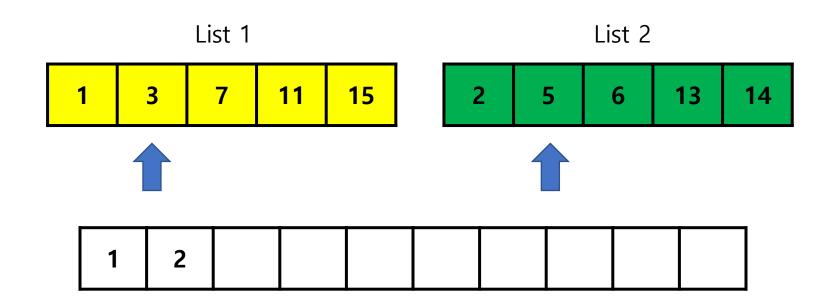
1 3 7 11 15
2 5 6 13 14

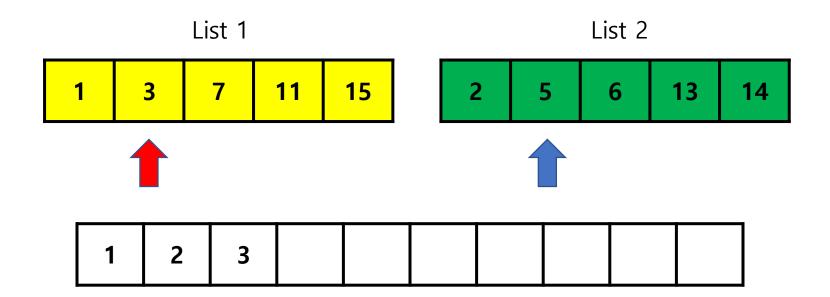


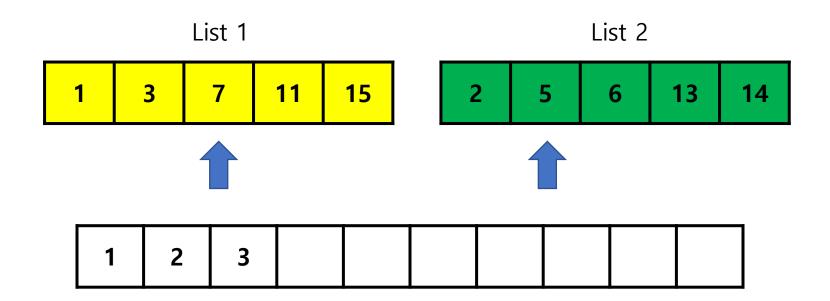


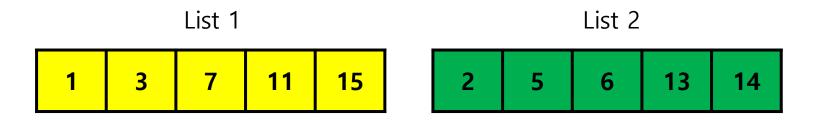




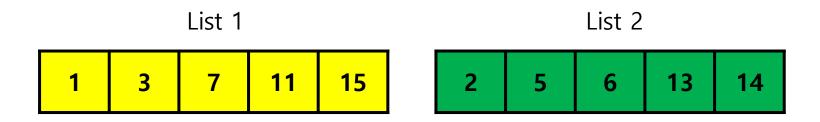


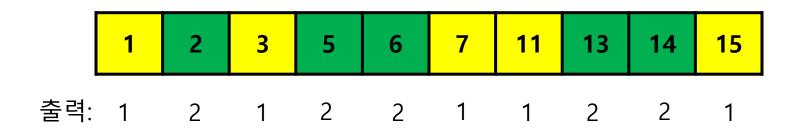






정렬된 두 개의 리스트가 주어졌을 때, 두 리스트를 합병하여 정렬한 결과의 각 원소가 두 리스트 중 어떤 리스트에서 가져온 것인지 계산하는 프로그램을 작성하여라.





59

```
def merge(11,12):
       n = len(11)
       m = len(12)
       i=j=0
       #결과를 저장할 리스트 선언
       ret=[0]*(n+m)
       for k in range(n+m):
           #12의 원소를 모두 사용한 경우 11에서 원소를 뽑는다.
           if i >= m:
10
              ret[k]=1
11
              i+=1
           #11의 원소를 모두 사용한 경우 12에서 원소를 뽑는다.
12
           elif i>=n:
13
14
              ret[k]=2
15
              j+=1
           #L1, L2에 각각 적어도 하나의 원소가 남아있다.
16
           #두 값의 크기를 비교하여 어떤 리스트의 원소를 선택할지 결정
17
18
           elif 11[i]<12[j]:
              ret[k]=1
19
                                          t=int(input())
20
              i+=1
           else:
                                          for _ in range(t):
21
22
              ret[k]=2
                                             11 = list(map(int,input().split()))
23
              j+=1
                                             12 = list(map(int,input().split()))
24
       return ret
                                             print(*merge(11,12))
```

과제1. 도시 도로 정비

- A나라에 도시가 n개 있다고 하자

PAV인공지능연구원

- 각 두 개의 도시마다 두 도시를 잇는 도로가 존재한다.
- 도시 P가 (x_1, y_1) 에 위치하고, 도시 Q가 (x_2, y_2) 에 위치하면 도로 정비하기 위한 비용은 $|x_1 x_2| + |y_1 y_2|$ 이다.
- => 모든 도로를 정비하기 위한 비용 /를 구하는 프로그램을 작성하세요.

