

Repetitorium - Physik II

Florian Konstantin Diekmann

23. Mai 2011

Um den Übergang von der Mechanik und Thermodynamik zum nächsten Kapitel zu vereinfachen sei zunächst die Frage erlaubt: „Erschließt sich die Elektrodynamik unweigerlich aus der klassischen Mechanik?“ Anders als in der Mechanik, die wir auf handfeste Grundideen ableiten konnten, wird dies zunehmend schwerer fallen. So hat sich die Elektrodynamik als eigenständige Säule der Physik etabliert.

Dieser physikalische „Artikel“ soll keineswegs die Ansprüche an ein Vorlesungsskript erheben. Vielmehr dient es dem strukturierten Nacharbeiten des Vorlesungsinhaltes. Wobei immer nur ein kleiner Teil behandelt wird, der mir persönlich für wichtig erscheint. Weiter kann weder Richtigkeit noch Vollständigkeit garantiert werden. Sollten sich auch inhaltliche bzw. Tippfehler einschleichen, freue ich mich über jede Kontaktaufnahme. Da ich leider nicht alle Abbildungen selbst gestalten kann, bin ich häufig auf die Abbildungen fremder Lehrbücher angewiesen. So bedeutet ein Vermerk „Quelle:Demtröder“ eine Abbildung, die aus dem Band 2 der Demtröderreihe entnommen ist.

Inhaltsverzeichnis

1	Elektrostatik	3
1.1	Elektrische Ladungen	3
1.2	Kraft zwischen zwei Ladungsträgern	3
1.3	Das Elektrische Feld	4
1.3.1	Feld einer homogenen Ladungsverteilung	5
1.3.2	Der elektrische Fluss - Gauß'scher Satz	7
1.4	Elektrostatisches Potential	9
1.4.1	Die Spannung	10
1.4.2	Poissongleichung	12
1.5	Kondensator	12
1.5.1	Kapazität eines Plattenkondensators	12
1.6	Energie im elektrischen Feld	13
1.6.1	Energiedichte von elektrischen Feldern	14
1.7	Dielektrika	15
1.7.1	Dielektrische Polarisierung	16
1.7.2	Polarisationsladungen	16
2	Der elektrische Strom	17
2.1	Stromstärke und Stromtransport	17
2.2	Kirchhoffsche Regeln	17
2.2.1	Knotenregeln	18
2.2.2	Maschenregel	18
2.3	Stromdichte	18
2.4	Ohmsche Widerstände	19
2.4.1	Ohmsches Gesetz	19
2.4.2	Def. d. Widerstands	19
2.5	Einfache Netzwerke von Widerständen	20
2.5.1	Reihenschaltung	20
2.5.2	Parallelschaltung	20
2.6	Messgeräte (DMM)	20
2.7	Brückenschaltung: Wheatstone	21
2.8	Energie und Leistung elektrischer Ströme	22
2.9	Gesetz von Joule - el. Leistung	23
3	Magnetostatik	23
4	Elektromagnetische Felder	23
5	Wechselfelder	23

1 Elektrostatik

Massen erzeugen Gravitationsfelder, heiße Körper ein Temperaturfeld um sich, so erzeugen Ladungen in Analogie ein elektrisches Feld. So soll es hier primär in der Elektrostatik um die Betrachtung statischer elektrischer Ladungen gehen, die miteinander wechselwirken können. Diese Ladungen sind im Gegensatz zu bewegten Ladungen nicht frei beweglich.

1.1 Elektrische Ladungen

Es hat sich etabliert den Ladungen zwei Arten zuzuordnen. Damit folgt schon dieses Beispiel nicht mehr der Analogie zum Gravitationsfeld (die sich hauptsächlich durch eine attraktive Wechselwirkung charakterisiert), indem man zwischen **negativen** und **positiven** *Ladungsträgern* unterscheidet. Ladungen bleiben in abgeschlossenen Systemen stets erhalten und sind im Gegensatz zu Massen vom Bewegungszustand unabhängig, Ladungen müssen also vorwiegend nicht relativistisch betrachtet werden. Ausnahme bilden natürlich die Geschwindigkeit von Teilchen etc. ¹.

Gleichnamig Ladungen stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an

Die Elementarladung tritt anders als Masse vorwiegend in Quanten auf, also ganzzahligen Vielfachen der Elementarladung e

$$e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (\text{Coulomb}) \quad (1)$$

Selbst solche betragsmäßig kleinen Konstanten lassen sich heutzutage sehr genau bestimmen, die geschieht z.B. häufig anhand der Ergebnisse des *Millikan Versuchs*. Überlegungen haben gezeigt, dass schon kleinste Abweichungen um den „wahren Wert“ Kräfte hervorrufen müssten, die weit größer als die der Gravitationsfelder sein müssten.

1.2 Kraft zwischen zwei Ladungsträgern

Die Richtung der Wechselwirkung zwischen zwei Punktladungen erschließt sich aus ihrer Verbindungsline. Dies scheint zunächst absolut selbstverständlich, warum sollte genau diese Kraft unserem Gefühl widersprechen? Gehen wir davon aus, dass der Raum isotrop ist (von ihm keine Wechselwirkung ausgeht) können wir unsere Vermutung stützen, doch mit solchen Überlegungen muss man stets vorsichtig sein.

¹Dazu mehr in den Versuchen zu beschleunigten Elektronen in Fadenstrahlröhren

Das **Coulomb-Gesetz** beschreibt die Proportionalität der Kraft zwischen zwei Ladungen die gerade proportional aus dem Produkt beider Ladungen und umgekehrt proportional zum Radiusquadrat ist.

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 Q_2}{r^2} \hat{r}} \quad (2)$$

Dabei heißt ϵ_0 Dielektrizitätskonstante bzw. Influenzkonstante mit

$$\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

1.3 Das Elektrische Feld

Wir könnten das Elektrische Feld pragmatisch einführen als $\vec{F} = q\vec{E}$, doch dies ist zugegebenermaßen für das weitere Verständnis nicht sehr förderlich.

Treten Kräfte auf, obwohl der geladene Körper ruht, so sprechen wir von *Coulomb-Kräften* und beschreiben das Gebiet, in dem diese Kraft auftritt als **elektrisches Feld**.

Treten gleichzeitig Kräfte auf, obwohl der Ladungsträger nicht ruht, so sprechen wir hier von *Lorentzkräften*, die zwar proportional zur Geschwindigkeit sind, jedoch vektormäßig senkrecht auf der Geschwindigkeit stehen. Wir sprechen hier von einer Kraftwirkung in einem *Magnetfeld*

Erfährt ein Körper in einem elektrischen Feld eine Kraft \vec{F} mit der Ladung Q , so definieren wir die **elektrische Feldstärke** als

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} \quad (3)$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}} \quad (4)$$

Nach unserer Definition für die elektrische Feldstärke ergibt sich eine Einheit in SI-Größen von

$$[E] = \frac{N}{C} = \frac{V}{m} \quad (5)$$

Die für den gesamten \mathbb{R}^3 definierte elektrische Feldstärke (die z.B. beim Schwerfeld durch \vec{g} bezeichnet wird) ist ein **Vektorfeld**. Genau diese Eigenschaft der Vektorcharakteristik erschwert uns zunächst eine qualitative Beschreibung. Unter bestimmten Berücksichtigungen können wir jedoch Aussagen treffen. Als Hilfskonstrukt benutzt man so genannte **Feldlinien**, mit ihnen beschreibt man den Zustand an Äquivalenten Orten. Ihre Anzahl oder Zeichendichte ist willkürlich, kann demnach kein wirkliches Maß für die Feldstärke sein. Solche Feldlinienbilder

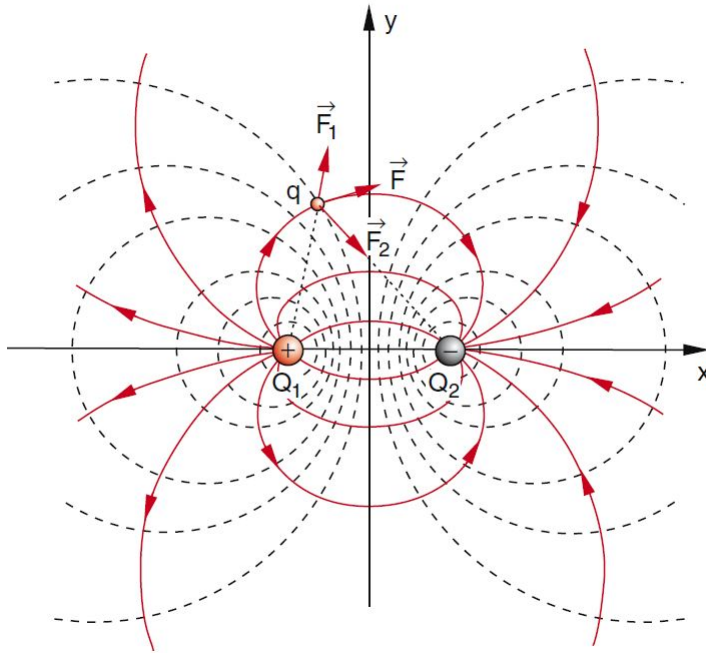


Abbildung 1: Feldlinienbild für zwei betragsgleiche Punktladungen mit unterschiedlichem Vorzeichen. Demtröder

kennt man zu Genüge aus den meistens physikalischen Lehrbüchern und sollten jedem schon begegnet sein. Dabei vergisst man häufig, dass diese Art der Darstellung nur ein Schnittbild durch das dreidimensionale Feld ist. Damit geht natürlich zwangsläufig die Vergleichbarkeit im gesamten Raum verloren, die wir jedoch durch hoch symmetrische Felder zurückgewinnen können.

In Solchen Feldern werden positive Ladungen als Quellen und negative Ladungen als Senken bezeichnet. Elektrische Felder zeigen demnach immer von **postiven Ladungen hin zu negativen Ladungen**.

Eine kleine Anekdote sei hier erlaubt und geht auf meinen alten (nun schon pensionierten) zurück. Sollte man einmal die Definition von Quellen und Senken vergessen haben, hilft das **n⁴-Gesetz** weiter. **Linien münden im grünen Süden**. Und geht damit auf die alte schulische Erklärung von Magnetpolen und den ihn zugeordneten Farben *rot* und *grün* zurück.

1.3.1 Feld einer homogenen Ladungsverteilung

Bisher haben wir uns hauptsächlich mit diskreten Ladungsverteilungen (Punktladungen) beschäftigt. Jede Berechnung von Ladungsverteilungen folgt dem gleichen Prinzip, egal ob langer Leiter oder eine Scheibe. Hier soll exemplarisch das Vorgehen für die Berechnung des Felds für einen unendlich lang ausgedehnten Draht mit der Probeladung q_1 durchgeführt werden.

1. Welche Kräfte wirken?

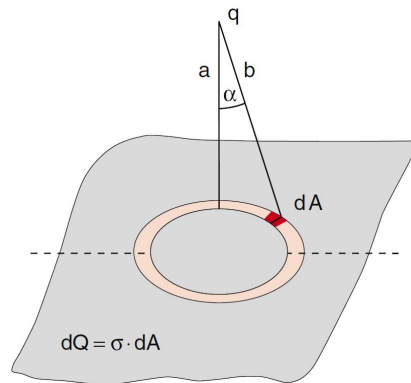


Abbildung 2: Berechnung einer homogenen Ladungsverteilung eines Leiters

2. Wie groß ist die Ladungsdichte?
3. Integration über „zerstückelte“ Flächen

Zunächst sei gesagt, dass sich der Anteil des elektrischen Feldes stets aus den zwei grundlegenden Richtungen x,y durch vektorielle Addition ableiten lässt. So ergibt sich

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$$

Schon durch Symmetriebetrachtungen kann man sich überlegen, dass man von jedem Punkt des Leiters eine Linie hin zur Probeladung ziehen kann. Genau diese horizontalen Komponenten heben sich gegenseitig auf, wir können also schreiben

$$d\vec{E} = d\vec{E}_y$$

Denkt man sich das Vektordreieck, so ist $dE_y = dE \cos \alpha$. Der Betrag des elektrischen Feldes erschließt sich nach (4) mit $r = b$ zu

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{b^2} \cos \alpha \quad (6)$$

Aus der Abbildung 2 zeigt sich $b = \frac{a}{\cos \alpha}$

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{a^2} \cos^3 \alpha$$

Für jede Ladungsverteilung gibt es verschiedene Quotienten. Ab folgend nun die Linien, Flächen und Volumenladungsdichte

$$\lambda = \frac{dQ}{dL} \quad (7)$$

$$\sigma = \frac{dQ}{dA} \quad (8)$$

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \quad (9)$$

Im unseren Fall handelt es sich um eine Linienladungsdichte, mit $dL = dx$ und $x = a \tan \alpha$ bzw. $dx = \frac{a}{\cos^2 \alpha} d\alpha$

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \cos \alpha}{a} d\alpha \quad (10)$$

Um das gesamte elektrische Feld zu bekommen, integrieren wir über alle Winkel zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$

$$E_y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \cos \alpha}{a} d\alpha \quad (11)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \quad (12)$$

Exakt diese Vorgehensweise lässt sich für jedes hochsymmetrische elektrische Feld anwenden, so erhält man für einen unendlich ausgedehnten Plattenkondensator

$$E_y = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (13)$$

1.3.2 Der elektrische Fluss - Gauß'scher Satz

Die Idee des elektrischen Fluss erfolgt als Erweiterung des anschaulichen Flussbegriffs aus der Hydrodynamik. Nehmen wir an, dass es endlich viele Feldlinien gäbe, so ordnen wir jeden Feldlinie eine Art Röhre/Schlauch zu. Die gerade so dick ist, dass sich benachbarte gerade nicht berühren können. Man kann sich das folgende Bild sehr schön vorstellen, wenn man es mit dem Wasserfluss vergleicht. Das Medium (elektrisches Feld) fließt im Röhrengebilde **von Quellen hin zu Senken** und wird dann **elektrischer Fluss** genannt.

Das Flüssigkeitsvolumen welches in einer Zeitspanne einen gewissen Querschnitt durchfließt ist demnach der Fluss. Eine alternative Beschreibung ist das Produkt aus der Fließgeschwindigkeit und der durchstrichenen Fläche.

$$\Psi = AE \quad (14)$$

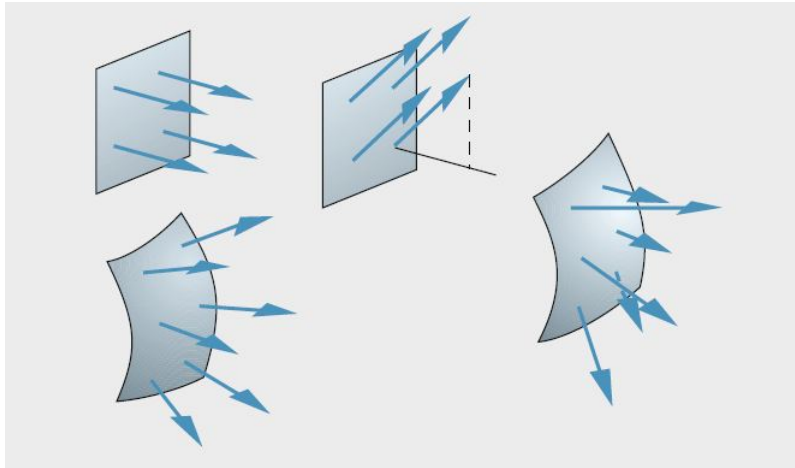


Abbildung 3: Steht das überall konstante E-Feld senkrecht auf der Fläche, so gilt $\Psi = AE$. Steht $E(\text{const!})$ schräg zur Fläche so wirkt nur $\Psi = AE \cos \alpha$. Der allgemeine Fall trifft immer zu, so integrieren wir mit (17). *Abb. S.318 Gerthsen*

Diese Definition sind zugegeben sehr umgangssprachlich, erleichtern aber den nächsten Schritt hin zur physikalischen quantitativen Beschreibung.

Steht das elektrische Feld unter einem Winkel α zur Flächennormale der durchströmten Fläche, so ist der äquivalente Teil gegeben durch das Produkt aus Fläche und Feld mal des eingeschlossenen Winkels

$$\Psi = AE \cos \alpha \quad (15)$$

und erinnert uns stark an das Skalarprodukt zweier vektoriellen Größen. Tatsächlich ergibt sich dieser Zusammenhang als

$$\Psi = \vec{A} \cdot \vec{E} \quad (16)$$

Wenn sich jedoch entlang der Fläche das elektrische Feld ändert (es z.B. keine Punktladungscharakteristik hat), so verunglückt unsere Definition sofort, können sie retten jedoch erweitern indem wir über die einzelnen Flächenstücke $d\vec{A}$ integrieren.

$$\boxed{\Psi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}} \quad (17)$$

Beispiel: elektrischer Fluss einer Punktladung Q. Hierfür überlegen wir uns zunächst die spezifischen Eigenschaften der umgebenden Sphäre. Die Ladungsverteilung einer Punktladung ist radialsymmetrisch, demnach in Abhängigkeit vom

Abstand zum Zentrum schon bestimmt.

$$\Psi = \int_{\text{Kugel}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Für das elektrische Feld benutzen wir (4) und erhalten nach einsetzen und ausklammern der Konstanten

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Kugel}} \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot \underbrace{d\vec{A}}_{\Rightarrow 4\pi r^2} \\ &= \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Wir erkennen schnell, dass sich die unschönen Konstanten gegenseitig aufheben. Geschichtlich betrachtet ist genau dies der Grund, warum man den Vorfaktor $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ so gewählt hat. Im alten cgs-system kamen die Coulomb-Gesetze übrigens ohne diese „unvorteilhaften“ aus, die Kehrseite der Medaille war die schwierige Integration.

Rekursive Berechnung der Feldstärke: Nehmen wir an, wir kennen den Fluss eines Felds und sollen Aussagen über die Topologie und das Verhalten des elektrischen Felds machen, so helfen unsere anfänglichen Überlegungen zur Symmetrie enorm. Nehmen wir an, wir kennen $\Psi = \frac{Q}{\epsilon_0}$ und legen um diese Punktladung (wir nehmen zumindest an, dass es sich um solch eine handelt) irgendeine Hüllfläche. Idealisieren diese allerdings gleich zu einer Kugel, das erspart uns eine Menge Rechenerie die sehr komplex werden müsste.

Die Oberfläche solch einer Kugelsphäre kennen wir mit $4\pi r^2$ und hoffen, dass der Fluss gleichmäßig über die Kugelfläche verteilt auftreten wird. So haben wir für Ψ zwei Angaben.

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = 4\pi r^2 E$$

Der Vergleich mit 17 zeigt uns für die Auflösung nach E

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (18)$$

Das ist genau die Definition des Betrags des elektrischen Felds einer Punktladung, wie wir es gewohnt sind.

1.4 Elektrostatistisches Potential

Wenn wir uns an die Mechanik des 1. Semesters erinnern, so fällt im Zusammenhang mit der Potentiellen Energie der Begriff des konservativen Kraftfelds. Dabei stellten wir fest, dass es gerade unwichtig ist welchen Weg wir von Punkt 1 nach

2 wählen. Gleiches gilt auch für das statische elektrische Feld. Die Arbeit W die verrichtet werden muss um die Probeladung Q hin zu einem anderen Punkt im Kraftfeld zu transportieren ist unabhängig vom gewählten Weg. Das elektrische Kraftfeld ist also ein **konservatives Kraftfeld**.

Bewegen wir die Ladung im Feld relativ langsam (in der Größenordnung von 5% Vakuum-Lichtgeschwindigkeit) so entspricht die Arbeit, die wir aufbringen müssen gerade dem negative Produkt aus $q\vec{E}$ und der Weglänge

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = -q\vec{E}d\vec{s} \quad (19)$$

So ergibt sich für die Arbeit zwischen zwei Punkten p_1 p_2

$$W_{12} = -q \int_{p_1}^{p_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (20)$$

$$0 = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \Rightarrow \text{konservativ!} \quad (21)$$

Dividiert man die Änderugn der potentiellen Energie durch den Betrag der bewegten Probeladung, erhält man einen Zusammenhang zwischen geleisteter Arbeit von p_1 und p_2 die wir **Potentialdifferenz** bzw. häufig auch als **Spannung** bezeichnen

1.4.1 Die Spannung

$$U = \frac{W}{q} = \phi(p_2) - \phi(p_1) = - \int_{p_1}^{p_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (22)$$

Diese Form erscheint auf den ersten etwas ungewohnt, dabei kennen wir sie aus der Schule im Zusammenhang mit Plattenkondensatoren. Die Linearität des Abstands d zweier Platten lässt ein schnelles lösen des Integrals zu:

$$E = \frac{U}{d}$$

Beachte: Von einer Spannung zu sprechen ist relativ sinnfrei, nur durch den Bezug zu einem Punkt im elektrischen Feld kann man von Spannungen sprechen. Besser ist es von einer **Spannung zwischen zwei Punkten** zu Sprechen, dies ergibt sich unmittelbar aus der Definition (22)

Soweit zur Arbeit, die auf keinen Fall mit dem Potential verglichen werden darf. Jedem Punkt im elektrischen Feld ordnen wir eine bestimmte Eigenschaft zu, in

diesem Fall ein Potentialwert. Wie bei der potentiellen Energie im Schwerfeld der Erde liegt es in unserer Hand den Nullpunkt frei zu bestimmen, es hat sich jedoch als vorteilhaft erwiesen den „unendlichen Punkt“ als Normierung zu benutzen. So ergibt sich das **Elektrostatische Potential** als die Aufsummierung der Wegstücke zwischen dem Punkt p hin zum Nullpunkt.

$$\boxed{\phi(p) = \int_p^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{s}} \quad (23)$$

Beispiel: Potential im elektrischen Feld einer Punktladung. Das E-Feld einer Punktladung ergibt sich natürlich als $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$. Potential für E-Felder ergeben sich durch (23). Wir wollen explizit das Potential zwischen p und dem Nullpunkt bestimmen. Da man leider nicht den genauen Weg kennt, wie sich das Teilchen nun ins unendliche bewegen wird, stellt man sich vereinfacht vor, dass wir uns mit dem Teilchen entlang einer Feldlinie R bewegen.

$$\begin{aligned} \phi(p) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{1}{r^2} dr \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left. \frac{1}{r} \right|_R^{\infty} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

Solch ein Potential hat demnach die Proportionalität von $1/r$ (Abb. 4)

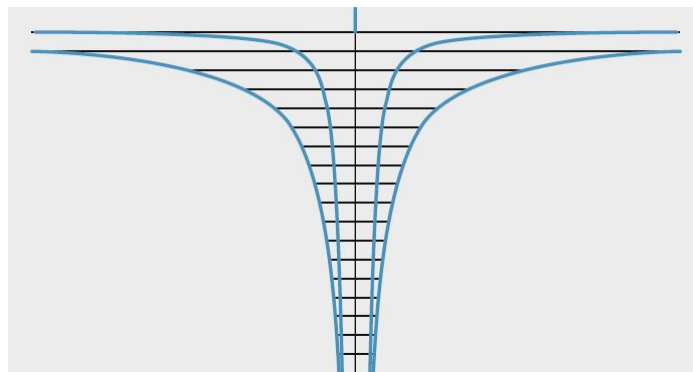


Abbildung 4: Potential einer Punktladung. Orte gleicher Potentiale werden schwarz dargestellt als Äquipotentialflächen. Zum Vergleich die Feldlinien blau markiert. *Abb. S. 320 Gerthsen*

1.4.2 Poissongleichung

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \boxed{\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (24)$$

1.5 Kondensator

Ein Kondensator ist ein Ladungsspeicher für elektrostatische Ladungsträger. Durch externe Aufladung kann sich ein Potential aufbauen, welches wir Spannung nennen. Diese Spannung ergibt mit Plattenabstand d und einer homogenen Ladung beingt durch (17)

$$E = \frac{U}{d} \quad (25)$$

Die Spannung ist ein Maß für die gespeicherte Ladung C . Da $U \propto Q$ gilt, findet man die Proportionalitätskonstante **C** als die **Kapazität des Kondensators**.

1.5.1 Kapazität eines Plattenkondensators

Für einen metallischen Kugelkondensator (manchmal auch als Kugelkonduktor bezeichnet, wenn sich die äußere Gauß-Schale im Unendlichen befindet)² mit dem Radius R ergibt sich durch das Potential $\phi(R)$ (23), und anschließend Umformen nach der gespeicherten Ladungsmenge: $Q = 4\pi\epsilon_0 R \cdot U$. Wobei wir hier für die Spannung U das Nullpotential mit $r = \infty$ entsprechend der üblichen Konvention gewählt haben (Wir schreiben also die Potentialdifferenz nicht explizit auf, sollten sie aber trotzdem erwähnen). Die beschriebene Proportionalitätskonstante ist hierbei $C_{Kugel} = 4\pi\epsilon_0 R$.

Für eine weitere Abstrahierung kann man den kapazitiven Ausdruck betrachten. $4\pi R$ ist gerade die Oberfläche A der Kugel dividiert durch den entsprechenden Radius der Kugel. Schreiben wir also $\frac{Q}{U} = \epsilon_0 \frac{A}{R}$

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \frac{A}{R} \quad (26)$$

Die Einheit der Kapazität ist zu Ehren Faradays durch den Namenszusatz „**Farad**“ bezeichnet.

$$[C] = 1 \frac{As}{V} = 1 F$$

Hinweis: Um Kapazitäten von Symmetrischen Objekten zu berechnen kann immer der Umweg über das Potential benutzt werden. Voraussetzung ist natürlich, dass

²Einfacher ist es jedoch zunächst den Begriff des Kugelkondensators zu benutzen und zwischen Schalenkugelkondensatoren zu unterscheiden

man das jeweilige spezifische E-Feld kennt. Hier einige **Beispiele für Kapazitäten** von Kugelschalenkondensator, Zylinderkondensator, Plattenkondensator sowie Paralleldraht

$$\begin{aligned} C_{KS} &= 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \\ C_{Zyl} &= \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln(r_2/r_1)} \\ C_{Platt} &= \epsilon_0 \frac{A}{d} \\ C_{ParaDraht} &= \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/r)} \end{aligned}$$

Beachte: Die vorletzte Formel wurde schon im Beispiel (26) behandelt. Sie ist auch für alle anderen Körper gültig, so lange der Abstand d hinreichend klein ist.

Parallelschaltung von Kondensatoren

$$C_{ges} = \sum_{i=1}^N C_i \quad (27)$$

Serienschaltung von Kondensatoren

$$\frac{1}{C_{ges}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \quad (28)$$

1.6 Energie im elektrischen Feld

Stellen wir uns einen geladenen Plattenkondensator vor, dem wir eine kleine Ladung dQ hinzufügen möchten. Im Fall, dass der Kondensator schon vorgeladen ist, existiert ein E-Feld. Gegen gerade dieses E-Feld muss Arbeit verrichtet werden (Der Millikan-Versuch macht sich diese Kraftwirkung zu nutze und erzeugt wunderbare Schwebefekte). Es gilt für die Kraftwirkung

$$d\vec{F} = \vec{E} \cdot dQ$$

Für die Arbeit gilt nach der klassischen Mechanik $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Setzen wir also dies um

$$dW = -dQ \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Der Teil nach dQ entspricht gerade dem Potential zwischen Anfangs und Endpunkt (22)

$$dW = dQ \cdot U$$

Bisher haben wir lediglich gezeigt wie sich die Arbeit für den kleinst möglichen Ladungsteil verhält. Um jedoch die Energie zu bestimmen, die in einem aufgeladenen Kondensator steckt, betrachten wir jetzt alle Ladungsträger die wir hin zu anderen Platte bewegen möchten. Die Integration liefert uns

$$W = \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ = \frac{1}{2} \frac{1}{C} Q^2$$

Im alltäglichen Gebruch hat es sich als praktisch erwiesen i sich je nach Gegebenheit $\frac{Q^2}{C}$ durch $Q = C \cdot U$ entsprechend abzuändern.

Ist die Ladungsverschiebung abgeschlossen, so ist die gesamte geleistete Arbeit übergegangen in eine Form, die wir **potentielle Energie** des Kondensators nennen.

$$\boxed{E_{pot} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U} \quad (29)$$

1.6.1 Energiedichte von elektrischen Feldern

Nachdem wir den Kondensator erfolgreich aufladen konnten und ihm eine charakteristische Energie zuordnen konnten darf die Frage erlaubt sein wo sich denn diese Energie nun befindet.

Da sie weder außen an den Platten noch in selbiger zu finden sind, liegt es nahe, dass die **Energie im inneren des Kondensators** beheimatet sein sollte. durch die Aufladung des Kondensators erzeugen wir ein E-Feld, wir vermuten daher, dass genau hier die Energie gespeichert wird.

Äquivalent zur Dichte bei Massen berechnet sich die Energiedichte aus dem Quotienten der gespeicherten **Energie pro Volumen**.

$$w = \frac{E_{pot}}{V}$$

Für den speziellen Fall eines **Plattenkondensators** ergibt sich weiter mit $V = A \cdot d$ (wobei d den Abstand beider Platten zueinander beschreibt) und der Kapazität $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$ Sowie der Feldstärke $E = \frac{U}{d}$

$$w = \frac{\frac{1}{2} C \cdot U^2}{A \cdot d} = \frac{\epsilon_0 \cdot A \cdot E^2 \cdot d^2}{2 \cdot A \cdot d^2}$$

Weitere Beispielrechnungen würden zeigen, dass für jede Art von elektrischen Feldern die **elektrische Energiedichte** stets gegeben ist durch

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2 \quad (30)$$

1.7 Dielektrika

Zugegeben sind Dielektrika recht seltsame Objekte, auf eine explizite Herleitung soll daher verzichtet werden (ein paar wichtige Beziehungen habe ich dennoch beigefügt). Wichtiger ist es die Phänomene die so ein besonderer Isolator erzeugt zu verstehen und deuten zu können. Nehmen wir uns einen geladenen Plattenkondensator, in selbigen schieben wir ein Dielektrikum, der primär als Isolator wirkt. In diesem Isolator selbst sind eine große Menge neuer Ladungsträger enthalten, die sich entsprechend dem Dipolmoment genau entgegen der Polarisierung des Plattenkondensators ausrichten (wie die Kompassnadel im Magnetfeld der Erde). Für die Kapazität des Ladungsträgers ergibt sich jetzt eine **wesentlich höhere Kapazität**, da wir sehr viel mehr Ladungsträger polarisieren können. Diese Ladungserhöhung ist je nach gewählten Stoff sehr unterschiedlich. Diese Materialkonstante fließt direkt in die Berechnung der Kapazität ein. So ergibt sich jetzt für einen Plattenkondensator mit **Dielektrizitätszahl** ϵ_r

$$C = \underbrace{\epsilon_0 \epsilon_r}_{\epsilon} \frac{A}{d} \quad (31)$$

Diese spezifische Eigenschaft der Dielektrika nutzt man in der technischen Anwendung für verschiedenste Bereiche. Drei wichtige Anwendungen sind

1. **Geringe Schichtabstände** lassen sich so realisieren, **ohne die Gefahr von Kurzschlüssen**.
2. Luft besitzt im allgemeinen lediglich eine **Spannungsfestigkeit** von $\approx 3 \frac{\text{kV}}{\text{mm}}$, hingegen ein Dielektrikum sogar $\approx 60 \frac{\text{kV}}{\text{mm}}$ erreichen kann. So kann sehr hohe Energiedichten erreichen, bei gleichbleibend kleinen Ausmaßen.
3. Durch die **höhere Kapazität** können kleinere Kondensatoren gebaut werden, die zudem in der Produktion günstiger geraten.

„Warum kamen wir bisher ohne Dielektrika aus?“ Diese Frage ist leicht zu beantworten. Denn das Dielektrikum, welches wir für unsere bisherigen Rechnungen benutzt haben (ohne es genauer gewusst zu haben) ist das Medium Luft. Der glückliche Zufall ist jedoch, dass dessen Materialkonstante ϵ_r gerade ungefähr durch 1

1.7.1 Dielektrische Polarisation

$$\vec{p} = q\vec{d} \quad (32)$$

1.7.2 Polarisationsladungen

$$\sigma_{pol} = \frac{Q_{pol}}{A} = \frac{N \cdot q \cdot d \cdot A}{A} = P \quad (33)$$

Polarisation

$$\vec{E}_{Diel} = \frac{\sigma_{frei} - \sigma_{pol}}{\epsilon_0} = \vec{E}_{Vak} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad (34)$$

Dielektrische Suzeptibilität

$$\boxed{\vec{E}_{Diel} = \frac{1}{\epsilon} \vec{E}_{Vak} = \frac{1}{1 + \chi} \vec{E}_{Vak}} \quad (35)$$

2 Der elektrische Strom

In der Elektrostatik beschäftigten wir uns zunächst mit statisch ruhenden Teilchen. Die besondere Eigenschaft war hier gerade, dass längs eines Leiters keine Potentialdifferenz auftrat.

Jede Bewegung von elektrischen Ladungen bezeichnen wir als einen **elektrischen Strom**, dieser ist definiert durch die Bewegung positiver Ladungsträger. Wie kommt es jedoch zu diesem **Teilchentransport**, der die Quelle jeder Teilchen sein sollte? In den meisten Fällen handelt es sich hier um externe Spannungsquellen, welche je nach Polung einen Elektronenmangel bzw. Elektronenüberschuss erzeugen können. Diese Elektromotorische Kraft (EMK) hält die Bewegung der Teilchen aufrecht. Ohne diese externe **Potentialdifferenz** fließen die Elektronen nach einiger Zeit nicht mehr und ruhen. Genau dann befinden wir uns im elektrostatischen Zustand.

2.1 Stromstärke und Stromtransport

Elektrischer Strom Ein elektrischer Strom beschreibt die Anzahl an Ladungen dQ , die pro Zeitintervall dt einen Leiterquerschnitt durchfließen. Allgemein ergibt sich

$$I := \frac{dQ}{dt} \quad (36)$$

Die Einheit der Stromstärke ist festgelegt durch 1A(mpere). Ampere ist eine Basisgröße im SI-System lässt sich folglich nicht durch andere Größen darstellen.

Für Gleichströme können wir uns überlegen, dass die Ladungsmenge endlich gegeben ist mit $Q = n \cdot qt$ (Ladung kann schließlich nur in Quanten auftreten). Es folgte für das Zeitintervall T

$$I_{gl} = \frac{n \cdot q}{T} \quad (37)$$

2.2 Kirchhoffsche Regeln

Netzwerke von Schaltungen können unterschiedlich aufgebaut sein. Man unterscheidet zwischen so genannten Knoten- und Maschentopologien.

2.2.1 Knotenregeln

In Knoten kann keine Ladung gespeichert werden, so sollte die **Summe der zufließenden Ströme den abfließenden** entsprechen.

$$\boxed{\sum_{k=1}^n I_k = 0} \quad (38)$$

2.2.2 Maschenregel

Ein zweiter möglicher Aufbau ist eine Masche. Umläuft man einmal eine gesamte Masche, so muss die **Summe aller Potentialdifferenzen null** ergeben. Hierbei ist es unabhängig, wie der Umlaufsinn festgelegt wurde. Die Wichtung von Klemmspannung und den Spannungsabfällen an Widerständen (etc.) erfolgt anti-parallel, also mit unterschiedlichem Vorzeichen. Die Kirchhoffschen Regeln kann man sich bildlich als Vektoraddition hin zum Nullvektor vorstellen.

$$\boxed{\sum_{k=1}^n U_k = 0} \quad (39)$$

2.3 Stromdichte

Stromdichte \vec{j} ist eine vektorielle Größe und beschreibt den Ladungstransport durch einen Leiter mit einem bestimmten Querschnitt A. Für gutartige Leiter gilt demnach

$$j = \frac{I}{A}$$

Besser ist jedoch die vektorielle Aufsummierung über die Flächennormalen von Querschnittsflächen.

$$\boxed{I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}} \quad (40)$$

Hauptträger der elektrischen Ladung in el. Leitern sind vorwiegend Elektronen, weitere Vertreter sind Ionen die z.B: Ladungsaustausch in Ionengittern (Elektrolyten etc.) ermöglichen. In Plasmen treten nicht nur spannende Effekte wie z.B. die Polarlichter auf, hier werden zugleich Ionen und Elektronen für den Austausch von Ladungen benötigt.

$$\begin{aligned}\vec{j} &= nq\vec{v} \\ \vec{j} &= \varrho_{el}\vec{v}\end{aligned}\tag{41}$$

Mit der Ladungsdichte geschrieben als $\varrho_{el} = nq$ (bemerke: Die Ladungsdichte nicht mit Dichten von Massenverteilungen bzw. dem elektrischen Widerstand verwechseln!)

2.4 Ohmsche Widerstände

Durchlaufen Elektronen einen ohmschen Leiter, so finden fortlaufend Stoßprozesse statt, die zur Verlangsamung selbiger führen. Gitterschwingungen im Leiter selber sind die überwiegenden Effekte, die zu Reibungseffekten führen können.

2.4.1 Ohmsches Gesetz

Viele dürften mit dem Begriff des Ohmschen Gesetzes die Gleichung $U = R \cdot I$ verbinden. Leider ist dies ein großer Irrtum, dass Ohmsche Gesetz beschreibt die Proportionalität von homogenen ohmschen Widerständen zur Leiterlänge und die Proportionalität zum Kehrwert des Leiterquerschnitts.

$$\boxed{R = \varrho_{el} \frac{l}{A}}\tag{42}$$

Wobei ϱ_{el} den spezifischen Widerstand beschreibt ($\frac{1}{\varrho_{el}} = \sigma$) Die Einheit von ohmschen Widerständen wird angegeben in 1Ω (Ohm)

2.4.2 Def. d. Widerstands

Die leicht zu merkende Gleichung $U=RI$ entspricht in ihrer ursprünglichen Form

$$I = \frac{1}{R}U = G \cdot U\tag{43}$$

$$\boxed{U = R \cdot I}\tag{44}$$

G steht hier für den Leitwert

2.5 Einfache Netzwerke von Widerständen

2.5.1 Reihenschaltung

Für Reihenschaltungen von ohmschen Widerständen ergibt sich, dass die jeweiligen Stromstärken überall gleich sind, die Spannungsabfälle über einen Widerstand jedoch von der eigenen Mächtigkeit abhängt. Nach der Maschenregel als Summe über die einzelnen Teilspannungen ergibt sich

$$R_{ges} = \frac{U}{I} = \sum_i R_i \quad (45)$$

Merke: **In Reihenschaltungen addieren sich die Widerstände**

2.5.2 Parallelschaltung

Parallelschaltungen charakterisieren sich durch eine überall konstant vorliegende Spannung. Einzig die Stromstärke ist unterschiedlich und ermittelt sich durch den jeweiligen Widerstand aus $I_i = \frac{U}{R_i}$. Aus der Knotenregel folgt, die Summe aller gleichartigen Ströme ergibt den Gesamtstrom mit

$$R_{ges} = \frac{U}{I_{ges}} = \sum_i \frac{1}{R_i} = \sum_i G_i \quad (46)$$

Merke: **Bei Parallelschaltungen addieren sich die Leitwerte**

2.6 Messgeräte (DMM)

Um quantitativ unsere aufgestellten Gesetzmäßigkeiten zu überprüfen sollten wir messbare Größen auch mit dafür ausgelegten Messgeräten durchführen. Die Problematik ist ähnlich der Unschärfe im Gebiet der Quantenmechanik, durch jede Messung wird das Ergebnis verfälscht. Wir können dann nicht mehr genau sagen, wie die Welt kurz vor dem Messvorgang sich darstellte. Können wir diese negativen Auswirkungen technisch verschwindend klein werden lassen, bleibt uns die Möglichkeit zumindest durch statistische Betrachtungen unsere Ergebnisse und Theorien zu überprüfen.

Amperemeter: werden **in Reihe** geschaltet. Wird der Innenwiderstand R_i sehr klein im Verhältnis zum Gesamtwiderstand R der Schaltung, so ergibt sich der Verringerungsfaktor

$$\alpha = \frac{R}{R + R_i}$$

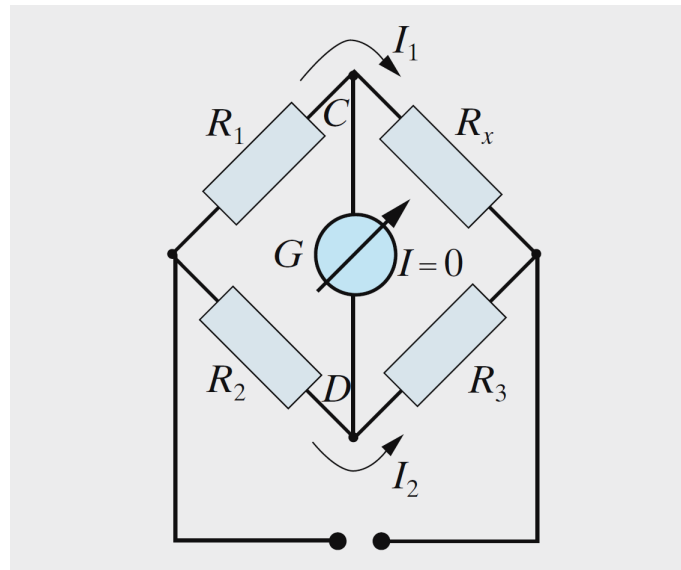


Abbildung 5: Wheatstone Brückenschaltung zur Messung vom R_x

Für R_i spricht man von einem idealen Amperemter. Amperemter müssen immer **niederohmig** sein

Voltmeter: werden **parallel** geschaltet. Ein perfektes Voltmeter besitzt einen unendlich großen Innenwiderstand, so wird die Änderung der fließenden Ladungen kaum beeinträchtigt (siehe unbelasteter Spannungsteiler)

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{U}{R} \right)$$

Voltmeter sollten also einen möglichst großen Innenwiderstand (oft im Bereich von $M\Omega$) gegen über der Gesamtschaltung besitzen. Voltmeter müssen **hochohmig** sein

2.7 Brückenschaltung: Wheatstone

Die Wheatstone Brückenschaltung (Abb. 5) dient zur Bestimmung von zunächst unbekannten Widerständen. Die Schaltung ist sternförmig mit 4 Widerständen aufgebaut, wobei je 2 in Reihe geschaltet und zusammen eine Parallelschaltung darstellen. In einer dieser Schaltung ist der unbekannte Widerstand. Wichtig ist, dass mindestens einer der Widerstände veränderbar. Diesen Widerstand verändern wir in seiner Stärke so lange, bis durch die aufgespannte Brücke kein Strom mehr fließt, man spricht von einem **Abgleich der Brücke**. So sind demnach die Spannungsabfälle an R_x und R_3 gleich (bzw. die gleiche Menge Ladung pro Zeit fließt

dort entlang). Es ist damit

$$\begin{aligned} I_1 R_1 &= I_2 R_2 \\ I_1 R_x &= I_2 R_3 \end{aligned}$$

Wir teilen nun die obere durch die untere Gleichung und erhalten die bekannte Wheatstone Gleichung:

$$\boxed{\frac{R_1}{R_x} = \frac{R_2}{R_3}} \quad (47)$$

2.8 Energie und Leistung elektrischer Ströme

Verschiebt sich eine Ladung Q (egal ob nun durch externe Krafteinwirkung oder durch zauberhafte Influenz) von Punkt $P1$ zu $P2$ so wird Energie in Form von

$$E_{frei} = Q \cdot U \quad (48)$$

zugeführt. Erinnerung: Diese Beziehung hatten wir durch das elektrostatische Potential für radialsymmetrische Felder gezeigt (22) Gemäß der Energie in einem Kondensator kann Energie im E-Feld gespeichert werden. Dies geschieht z.B. über einer Ladung und dessen kinetische Energie.

Beispiel: Rasende Elektronen Für viele Anwendungen benötigt man schnelle Elektronen die eine Bewegungsenergie besitzen (z.B. für Kollisionsuntersuchungen oder der **Fadenstrahlröhre**). Erhitzen wir eine Glühwendel durch Strom, so wird diese ab einer bestimmten Stromstärke im sichtbaren Spektrum leuchten. Genau hier treten Elektronen aus dem Leiter, man nennt dies den „glühelektrischen Effekt“. Diese erzeugten Elektronen sollen in einem E-Feld beschleunigt werden (Die geschieht z.B. durch eine positiv geladene Metallplatte, zu dieser die Elektronen hin wandern möchten). Gehen wir davon aus, dass die **komplette elektrische Energie in Bewegungsenergie** umgewandelt werden kann ergibt sich für die Beträge sich

$$\begin{aligned} E &= q \cdot U = \frac{1}{2}mv^2 \\ v &= \sqrt{\frac{2qU}{m}} \end{aligned}$$

Die Beschleunigung kann so aber nur störungsfrei ablaufen, wenn es nicht zu viele Stoßpartner gibt. Ideal ist natürlich ein Fein-Vakuum. Wobei diese schöne Formel zudem nur für geringe Geschwindigkeiten gilt, bis hin zu ungefähr 5% Vakuumlichtgeschwindigkeit.

Was ist uns also gelungen? Wir können Teilchen Energien zuordnen, obwohl diese selbst keine Ladungsmaterie sind, sie sind nur die Überträger. Es zeigt sich als

sinnvoll eine Basisgröße einzuführen. **Elektronenvolt** beschreibt die Energie, die ein Elektron mit der Ladung e und der Spannung $1V$ erfährt.

$$\boxed{1eV = 1.6 \cdot 10^{-19} C \cdot V = 1.6 \cdot 10^{-19} J} \quad (49)$$

Die Vorstellung, dass Elektronen Energie transportieren können ist heikel, denn schon in Leitern wird diese Energie meist in thermische Wärmestrahlung umgewandelt. Die Größenordnung dieser Abstrahlung ergibt sich nach dem Gesetz von Joule

2.9 Gesetz von Joule - el. Leistung

Erinnern wir uns an die Arbeit W (48). Für $U=\text{const}$ ergibt sich die zeitliche Änderung der Arbeit als Leistung (alles strikt nach der klassischen Mechanik)

$$P = \dot{W} = \frac{dU \cdot Q}{dt} = U \cdot \dot{Q} = U \cdot I \quad (50)$$

Merken wir uns die einfache Form für die **elektrische Leistung**

$$\boxed{P = U \cdot I}$$

Für einen ohmschen Leiter ergibt sich mit $U = RI$, dass $P = RI^2$ ist.

3 Magnetostatik

4 Elektromagnetische Felder

5 Wechselfelder