João Vitor Sanches 9833704

Victor Chacon Codesseira 9833711

Exercício 2

Podemos dividir a barra em 4 elementos de mesmo comprimento, de forma que os nós estarão nas posições.

Nó	**Posição(x)**
x_1	0
x_2	$\frac{L}{4}$
x_3	$\frac{L}{2}$
x_4	$\frac{3L}{4}$
x_5	L

Assumindo uma variação linear da área, teremos que a equação da área ao longo de x será:

$$A_c(x) = 2A - \frac{x}{L}A$$

Dividindo nos 4 elementos, teremos cada elemento com uma seção transversal constante, que vamos adotar como a área na posição média:

Elemento	Nó Inicial	Nó Final	Posição Média	Área
e_1	x_1	x_2	$\frac{L}{8}$	$\frac{15}{8}A$
e_2	x_2	x_3	$\frac{3L}{8}$	$\frac{13}{8}A$
e_3	x_3	x_4	$\frac{5L}{8}$	$\frac{11}{8}A$
e_4	x_4	x_5	$\frac{7L}{8}$	$\frac{9}{8}A$

Para todos os elementos, teremos o mesmo E, e o mesmo comprimento $l = \frac{L}{4}$. Sendo A_i a área média do elemento i, a matriz de rigidez será:

$$K_i = \frac{E_i A_i}{L_i}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{4EA_i}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Substituindo, teremos:

$$K_1 = \frac{15}{2}\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, K_2 = \frac{13}{2}\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, K_3 = \frac{11}{2}\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, K_4 = \frac{9}{2}\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Compondo a matriz global, chegamos em:

$$K = \begin{bmatrix} [K_{11}]_1 & [K_{12}]_1 & 0 & 0 & 0 \\ [K_{21}]_1 & [K_{22}]_1 + [K_{11}]_2 & [K_{12}]_2 & 0 & 0 \\ 0 & [K_{21}]_2 & [K_{22}]_2 + [K_{11}]_3 & [K_{12}]_3 & 0 \\ 0 & 0 & [K_{21}]_3 & [K_{22}]_3 + [K_{11}]_4 & [K_{12}]_4 \\ 0 & 0 & 0 & [K_{21}]_4 & [K_{22}]_4 \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \frac{15}{2} & -\frac{15}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{15}{2} & 14 & -\frac{13}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{13}{2} & 12 & -\frac{11}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & 10 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

Vamos agora calcular as forças. Se desprezarmos a força distribuída, o vetor global de forças terá apenas a força de reação no nó 1, e a força externa no nó 5. Se quisermos considerar o peso próprio, para cada elemento, devemos calcular o efeito da força distibuída nos nós, que será:

$$F_i = \begin{bmatrix} \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x)N_1(x)dx \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x)N_2(x)dx \end{bmatrix}$$

Sendo

$$N_1 = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} = \frac{4}{L}(x_{i+1} - x) e \; N_2 = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{4}{L}(x - x_i)$$

$$F(x) = \rho g A(x) = \rho g A\left(2 - \frac{x}{L}\right)$$

Fazendo essa integração no Matlab, chegamos em:

$$F_i = \frac{2\rho g A}{48}\begin{bmatrix} 2x_i - 6L + x_{i+1} \\ x_i - 6L + 2x_{i+1} \end{bmatrix}$$

Considerando a força externa P, a força de reação R e que o deslocamento no nó 0(u_0) é nulo, teremos como incógnitas apenas u_2, u_3, u_4, u_5, R.

$$
\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \frac{15}{2} & -\frac{15}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{15}{2} & 14 & -\frac{13}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{13}{2} & 12 & -\frac{11}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & 10 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_1]_1 + R \\ [F_2]_1 + [F_1]_2 \\ [F_2]_2 + [F_1]_3 \\ [F_2]_3 + [F_1]_4 \\ [F_2]_4 + P \end{bmatrix}
$$

Podemos, então, resolver esse problema com os parâmetros passados, e teremos o resultado abaixo, que mostra o esperado, ou seja, que o resultado dos elementos finitos seja exato nos nós(já que no cálculo desprezamos o peso próprio, como no caso analítico), mas diferente nos demais pontos. No entanto, isso é suficiente, pois podemos obter a deformação real dentro do elemento usando as funções de forma, que já foram usadas na hora de jogar a força distribuída para os nós.