

# Informe Tarea 5

Ronald Cardona      Anderson Grajales  
Sebastian Valencia      Julian Sanchez

10 de octubre de 2018

## 1. Solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales

Muchos problemas del mundo real se formulan como sistemas de ecuaciones de  $n$  variables y  $m$  incógnitas que bajo condiciones ideales ( $n$  y  $m$  no son valores muy grandes), se pueden resolver de manera analítica. Sin embargo, cuando  $n$  y  $m$  tienden a ser valores muy grandes la solución analítica a estos problemas es muy difícil de calcular ya que requiere de mucho tiempo y claramente no es la forma más eficiente hacerlo. Debido a esto, desde el campo del *Análisis Numérico* se plantean diversas formas computacionales, ya sean algoritmos u otras técnicas que nos permitan resolver estos sistemas rápidamente, teniendo en cuenta que hay una **propagación de error** en cada cálculo dependiendo de la capacidad de la computadora donde se ejecuten estos. En este documento se presentan algunos algoritmos numéricos que son de gran ayuda a la hora de resolver sistemas de ecuaciones lineales.

### 1.1. Determinantes

**Definición 1.1.** Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de tamaño  $n \times n$ . El cofactor  $C_{ij}$  de  $a_{ij}$  se define como  $(-1)^{i+j} \det M_{ij}$ , donde  $M_{ij}$  es la matriz de tamaño  $(n-1) \times (n-1)$ , que se obtiene al eliminar la fila  $i$  y la columna  $j$  de la matriz. [1]

**Teorema 1.1.** Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de tamaño  $n \times n$ . [1]

- Para cada  $1 \leq i \leq n$  se cumple que:  $\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$

- Para cada  $1 \leq j \leq n$  se cumple que:  $\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}$

De acuerdo al teorema 1.1 se puede definir una ecuación de recurrencia para encontrar el determinante de una matriz  $A = [a_{ij}]$  de la siguiente manera:

$$\det(A, n)_{1 \leq i \leq n} = \begin{cases} a_{11}, & \text{if } n = 1. \\ (-1)^{i+1} \times a_{1i} \times \det(A', n-1), & \text{if } n > 1. \end{cases} \quad (1)$$

Donde  $A'$  es la matriz que se obtiene al eliminar la columna  $i$  y la fila  $n$  de  $A$ . De esta manera, para una matriz  $B$  de  $n \times n$ , la solución se entrega de la forma:  $\det(B, n)$ .

## 1.2. Multiplicación de matrices

**Definición 1.2.** Dadas las matrices  $A \in M_{m \times n}$  y  $B \in M_{n \times p}$ , entonces el producto de  $A$  con  $B$ , denotado  $AB$ , es una matriz  $C \in M_{m \times p}$ , dada por: [1]

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

con  $i = 1, \dots, m$  y  $j = 1, \dots, p$

## 1.3. Escalonamiento de matrices

**Definición 1.3.** Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de  $n \times n$ . Decimos que  $A$  está escalonada si  $\forall i, j, 1 \leq i \leq j \leq n, a_{ij} = 0$ .

```

Leer  $A, b$ 
si  $A \notin \mathbb{R}^{n \times n}$  ó  $b \notin \mathbb{R}^n$  entonces
    |  $A$  debe ser cuadrada y  $b$  debe ser un arreglo de  $n$  posiciones
si no, si  $\det A = 0$  entonces
    |  $A$  debe ser invertible
en otro caso
    para  $k = 1$  a  $n - 1$  hacer
        si  $A_{kk} = 0$  entonces
             $j \leftarrow k + 1$ 
            mientras  $j < n$  y  $A_{jk} = 0$  hacer
                |  $j \leftarrow j + 1$ 
            fin
            si  $j < n$  entonces
                para  $l = k$  a  $n$  hacer
                    |  $A_{kl} \leftarrow A_{kl} + A_{jl}$ 
                fin
                 $b_k \leftarrow b_k + b_j$ 
            fin
        fin
        para  $i = k + 1$  a  $n$  hacer
            si  $A_{ki} \neq 0$  entonces
                 $m \leftarrow \frac{A_{ik}}{A_{kk}}$ 
                para  $l = k$  a  $n$  hacer
                    |  $A_{il} \leftarrow A_{il} - m \times A_{kl}$ 
                fin
                 $b_i \leftarrow b_i - m \times b_k$ 
            fin
        fin
    fin
fin
La solución  $(A, b)$ 

```

**Algoritmo 1:** Algoritmo para escalar matrices

## 1.4. Eliminación Gaussiana Simple

**Algoritmo 2:** Algoritmo de Eliminación Gaussiana Simple

## 1.5. Sustitución Regresiva

```
Leer  $A, b$ 
 $marks \leftarrow NULL$ 
 $n \leftarrow Len(A) - 1$ 
 $x \leftarrow 0$ 
 $x_n \leftarrow \frac{b_n}{A_{nn}}$ 
para  $i \leftarrow n - 1$  a  $-1$  hacer
|    $sumatoria \leftarrow 0$ 
|   para  $p \leftarrow i + 1$  a  $n + 1$  hacer
|   |    $sumatoria \leftarrow sumatoria + A_{ip} * x_p$ 
|   fin
|    $x_i \leftarrow b_i$ 
fin
si  $marks \neq NULL$  entonces
|    $marcas[Len(A)] \leftarrow 0$ 
|   para  $i \leftarrow 0$  a  $Len(A)$  hacer
|   |    $marcas_{marks_i} \leftarrow x_i$ 
|   fin
|   Retornar  $marcas$ 
Retornar  $x$ 
```

**Algoritmo 3:** Algoritmo de Sustitución Regresiva

## 1.6. Sustitución Progresiva

```
Leer  $A, b$ 
 $n \leftarrow Len(A) - 1$ 
 $x \leftarrow 0$ 
 $x_0 \leftarrow \frac{b_0}{A_{00}}$ 
para  $i \leftarrow 1$  a  $n + 1$  hacer
|    $sumatoria \leftarrow 0$ 
|   para  $p \leftarrow 0$  a  $i$  hacer
|   |    $sumatoria \leftarrow sumatoria + A_{ip} * x_p$ 
|   fin
|    $x_i \leftarrow \frac{b_i - sumatoria}{A_{ii}}$ 
fin
Retornar  $x$ 
```

**Algoritmo 4:** Algoritmo de Sustitución Progresiva

## 1.7. Eliminacion Gaussiana con Pivoteo Parcial

```
Leer  $A, b, n, k$ 
 $mayor \leftarrow |A_{kk}|$ 
 $filaMayor \leftarrow k$ 
para  $s \leftarrow k + 1$  a  $n$  hacer
    si  $|A_{sk}| > mayor$  entonces
         $mayor \leftarrow |A_{sk}|$ 
         $filaMayor \leftarrow s$ 
    fin
si  $mayor = 0$  entonces
    | El sistema no tiene solucion unica
si no, si  $filaMayor \neq k$  entonces
     $temp \leftarrow A_{filaMayor}$ 
     $A_{filaMayor} \leftarrow temp$ 
     $A_k \leftarrow A_{filaMayor}$ 
     $temp \leftarrow b_{filaMayor}$ 
     $b_{filaMayor} \leftarrow b_k$ 
     $b_k \leftarrow temp$ 
Retornar( $A, b$ )
```

**Algoritmo 5:** Algoritmo de Pivoteo Parcial

## 1.8. Eliminacion Gaussiana con Pivoteo Total

```
Leer  $A, b, n, k$ 
 $mayor \leftarrow |A_{kk}|$ 
 $filaMayor \leftarrow k$ 
 $columnaMayor \leftarrow k$ 
para  $r \leftarrow k$  a  $n$  hacer
    para  $s \leftarrow k$  a  $n$  hacer
        si  $|A_{rs}| > mayor$  entonces
             $mayor \leftarrow |A_{rs}|$ 
             $filaMayor \leftarrow r$ 
             $columnaMayor \leftarrow s$ 
        fin
    fin
si  $mayor = 0$  entonces
    | El sistema no tiene solucion unica
en otro caso
    si  $filaMayor \neq k$  entonces
         $temp \leftarrow A_k$ 
         $A_k \leftarrow A_{filaMayor}$ 
         $A_{filaMayor} \leftarrow temp$ 
         $temp \leftarrow b_k$ 
         $b_k \leftarrow b_{filaMayor}$ 
         $b_{filaMayor} \leftarrow temp$ 
    si  $columnaMayor \neq k$  entonces
         $temp \leftarrow A_{0columnaMayor}$ 
         $A_{0columnaMayor} \leftarrow A_{0k}$ 
         $A_{0k} \leftarrow temp$ 
         $temp \leftarrow b_{0columnaMayor}$ 
         $b_{0columnaMayor} \leftarrow b_{0k}$ 
         $b_{0k} \leftarrow temp$ 
         $temp \leftarrow marcas_k$ 
         $marcas_k \leftarrow marcas_{columnaMayor}$ 
         $marcas_{columnaMayor} \leftarrow temp$ 
    Retornar( $A, b$ )
```

**Algoritmo 6:** Algoritmo de Pivoteo Total

## Referencias

- [1] Orlando García Jaimes, Jairo A. Villegas Gutiérrez, Jorge Iván. *Álgebra Lineal*. Editorial EAFIT, Medellín 2012.