DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

TP2

Algoritmos y Estructuras de Datos III

Integrante	LU	Correo electrónico
Ezequiel Aguerre	246/07	ezeaguerre@gmail.com
Juan Vanecek	169//10	juann.vanecek@gmail.com
Santiago Camacho	110/09	santicamacho90@gmail.com
Tomas Rodriguez	527/10	tomirodriguez.89@gmail.com

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (54 11) 4576-3359
http://www.fcen.uba.ar

Índice

1. Problema 1: Robanúmeros

1.1. Presentación del problema

El Robanúmeros es un juego de cartas para dos jugadores. Al iniciar se dispone sobre la mesa una secuencia de cartas boca arriba. Cada carta tiene dibujado un número entero (no necesariamente positivo). El Robanúmeros se juega por turnos, alternando un turno para cada jugador. En su turno el jugador debe elegir uno de los dos extremos (izquierdo o derecho) de la secuencia que actualmente estáen la mesa y robar cartas comenzando por dicho extremo. Puede robar la cantidad de cartas que quiera pero tiene que robar cartas adyacentes a partir del extremo elegido. Por ejemplo, si las cartas en la mesa son

$$2,\ -4,\ 6,\ 1,\ 9,\ -10$$

Entonces el jugador podría robar las cartas $2,\ -4,\ 6$ empezando por la izquierda por ejemplo o bien las cartas $-10,\ 9,\ 1,\ 6$ empezando desde la derecha, pero no podría robar las cartas $2,\ 6,\ 1$ ya que se estaría salteando la carta -4. Tampoco sería posible robar las cartas $6,\ 1,\ 9$ ya que si bien son adyacentes, la secuencia no se inicia en alguno de los extremos.

En su turno, el jugador debe robar al menos una carta y el juego termina cuando ya no quedan cartas en la mesa. En este momento, cada jugador suma los valores de las cartas que robó y el que obtenga una suma mayor gana el juego.

Mingo y Aníbal son dos jugadores expertos de Robanúmeros y nos retaron a escribir un algoritmo que juegue tan bien como ellos. Es decir, tenemos que escribir un algoritmo que juegue en forma óptima a este juego suponiendo que su contrincante es tan inteligente como él. El programa a implementar debe tomar una secuencia inicial de cartas y debe indicar qué cartas robaría Mingo y Aníbal en cada turno, asumiendo que ambos juegan de manera óptima a este juego. En este contexto, decimos que un jugador juega de manera óptima si la diferencia de puntos obtenida a su favor es la mayor diferencia que se puede obtener frente a un oponente que juega también de manera óptima cada situación que se le deje. En caso de haber más de una solución óptima, el algoritmo puede devolver cualquiera de ellas. Se pide que el algoritmo desarrollado tenga una complejidad temporal de peor caso de $O(n^3)$, donde n es la cantidad de cartas en la secuancia inicial.

1.2. Resolución

Defino la funcion $f(i, j)$ como la solucion óptima usando de las cartas i a j. Esto es, lo máximo que puedo agarrar con las cartas de la izquierda (1*) o de la derecha (2*).

(1*) Supongamos que por la izquierda lo mejor que puedo hacer es usando las primeras k cartas. Significa que el valor que puedo tomar es $\sum_{t=i}^{k} carta[t]$ más lo que me deja tomar el otro jugador (que va a jugar de manera óptima) en la mitad $[k+1, j]$. Esto es el total que suma las cartas en dicha mitad, menos $f(k+1, j)$, ya que es el valor óptimo y el puntaje que va a juntar el otro jugador.

(2*) Asimismo, si lo mejor por derecha es usando k cartas, entonces el puntaje óptimo es la suma del valor de esas cartas ($\sum_{t=k}^{n} carta[t]$) más lo que puedo tomar del lado $[i, k-1]$ después de que haya jugado el otro jugador. Y como este lo va a hacer óptimamente, el valor que a mí me queda por elegir es $\sum_{t=i}^{k-1} carta[t] - f(i, k-1)$.

Es decir, que f va a buscar el k (entre i y j) tal que maximiza el puntaje por izquierda (1*), y el de la derecha (2*), y se va a quedar con el máximo de estos dos.

Matemáticamente, la función queda definida de la siguiente manera (para cuando $i \leq j$):

$$f(i,j) = \text{máx}\left(\max_{i\leq k\leq j}\left\{\sum_{t=i}^{k} v[t] + \left(\sum_{t=k+1}^{j} v[t] - f(k+1,j)\right)\right\}, \max_{i\leq k\leq j}\left\{\sum_{t=k}^{j} v[t] + \left(\sum_{t=i}^{k-1} v[t] - f(i,k-1)\right)\right\}\right)$$

Para $i > j$ $f(i,j) = 0$. v el vector con los valores de las cartas. Si desarrollamos esta función nos queda la siguiente expresión.

$$\begin{aligned}
f(i,j) &= \text{máx}\left(\max_{i\leq k\leq j}\left\{\sum_{t=i}^{k} v[t] + \left(\sum_{t=k+1}^{j} v[t] - f(k+1,j)\right)\right\}, \max_{i\leq k\leq j}\left\{\sum_{t=k}^{j} v[t] + \left(\sum_{t=i}^{k-1} v[t] - f(i,k-1)\right)\right\}\right) \\
&= \text{máx}\left(\max_{i\leq k\leq j}\left\{\sum_{t=i}^{j} v[t] - f(k+1,j)\right\}, \max_{i\leq k\leq j}\left\{\sum_{t=i}^{j} v[t] - f(i,k-1)\right\}\right) \\
&= \sum_{t=i}^{j} v[t] + \text{máx}\left(\max_{i\leq k\leq j}\{-f(k+1,j)\}, \max_{i\leq k\leq j}\{-f(i,k-1)\}\right) \\
&= \sum_{t=i}^{j} v[t] - \text{mín}\left(\min_{i\leq k\leq j}\{f(k+1,j)\}, \min_{i\leq k\leq j}\{f(i,k-1)\}\right) \\
&= \sum_{t=i}^{j} v[t] - \min_{i\leq k\leq j}\{\text{mín}\,(f(k+1,j), f(i,k-1))\}
\end{aligned}$$

Veamos un ejemplo con dos cartas

$$\begin{aligned}
f(1,2) &= v[1] + v[2] - \text{mín}(\text{mín}(f(2,2), f(1,0)), \text{mín}(f(3,2), f(1,1))) \\
&= v[1] + v[2] - \text{mín}(\text{mín}(f(2,2), 0), \text{mín}(0, f(1,1))) \\
&= v[1] + v[2] - \text{mín}\{f(2,2), f(1,1), 0\} = \\
&= v[1] + v[2] - \text{mín}\{v[2], v[1], 0\}
\end{aligned}$$

Si $v[1] \geq 0$ y $v[2] \geq 0$ entonces $v[1]+v[2]-\text{mín}\{v[2], v[1], 0\} = v[1]+v[2]$ que es el máximo que se puede obtener. Si $v[1] < 0$ entonces $v[1]+v[2]-\text{mín}\{v[2], v[1], 0\} = v[1]+v[2]-v[1] = v[2]$, que es positivo y es el óptimo. Lo mismo para $v[2] < 0$. Si $v[1] < 0$ y $v[2] < 0$ entonces $v[1]+v[2]-\text{mín}\{v[2], v[1], 0\} = v[1]$ *o* $v[2]$, dependiendo cuál sea el máximo, que es, claramente la solución óptima, ya que obtenemos el mejor puntaje posible (agarrar la carta más grande).

1.3. Pseudocódigo

Para resolverlo de manera iterativa y construyendo la solución desde "abajo" se recorre una matriz en diagonal desde la diagonal principal, donde cada elemento (i,j) representa el puntaje obtenido al tomar desde la carta i hasta la j de manera óptima. Al finalizar de construir la matríz el puntaje óptimo se encuentra en la celda (0,n-1) Para construir cada celda (i,j) necesitamos los elementos:

- $(k+1, j) \forall i \leq k < j$
- $(i, k-1) \forall i < k \leq j$

Esto es así porque necesitamos saber qué puntaje obtendría el otro jugador si le dejamos esas cartas, de manera de poder dejarle el menor puntaje posible.

```
calcular( cartas : array )
   n := cantidad de elementos en el arreglo
   cache := array(n*n)
   jugadas := array(n*n)
   para todo 0 <= i < n
      cache[i][i] := cartas[i]
      jugadas[i][i] := Jugada<izquierda,1 carta>

   para 1 <= columna < n
      para 0 <= diagonal < n - columna
         i := diagonal
         j := columna + diagonal
         min_ij := +Infinito
         puntos := 0
         para i <= k <= j
            a := cache[k+1][j] o 0 si k+1 > j
            b := cache[i][k-1] o 0 si k-1 < j
            si b < min_ij o a < min_ij
               si a < b
                  jugadas[i][j] = Jugada<izquierda,k-1+1 cartas>
                  min_ij = a
               sino
                  jugadas[i][j] = Jugada<derecha,j-k+1 cartas>
                  min_ij = b
            cache[i][j] = puntos - min_ij
   devolver optimo puntaje := cache[0][n-1]
   devolver lista de jugadas := reconstruir jugadas a partir de jugadas[0][n-1]
```

1.4. Casos de Test

1.4.1. Elige soluciones intermedias no "óptimas"

Probamos con las cartas 1, -10, 2 y 3. Para poder ganar se debe sólo tomar el 3, en lugar del 2 y 3 que nos daría un mayor puntaje parcial.

- Si tomara el 1 el otro eligiría el 2 y el 3 y nos quedaría el -10 y perderíamos 5 a -9.
- Si tomara el 2 y 3 el otro eligiría el 1 y tendríamos luego que tomar el -10 y perderíamos 1 a -5.
- Si toma sólo el 3 el otro puede elegir tanto el 1 como el 2, pues nosotros eligiríamos la otra carta y al oponente sólo le quedaría el -10 y ganaríamos. Por lo tanto el oponente tiene que elegir las 3 cartas que quedan, para maximizar su puntaje.

1.4.2. Elige cartas negativas para aumentar la diferencia de puntos

Probamos con las cartas 10, -10, 2 y 3. La idea es simplemente ver que toma cartas negativas si eso lleva a una solución óptima. En este caso tiene que tomar todas las cartas, si tomara sólo el 3 el oponente podría sumar 2 puntos y ganar sólo por un punto de diferencia, al tomar todas las cartas se asegura ganar por 5 puntos.

- Si tomara el 10 el otro eligiría 2 y 3 y nos quedaría el -10, perdiendo 5 a 0.
- Si tomara el 2 y el 3 el otro eligiría el 10 y nosotros el -10, perdiendo 10 a -5.
- Si tomara 10 y -10 el otro eligiría 2 y 3 y perderíamos 5 a 0.
- Si tomara 2, 3 y -10 perderíamos 10 a -5.
- Si tomara sólo el 3 el otro eligiría lo que queda y llegaría a 2, ganando 3 a 2.
- Si toma todas las cartas se gana 5 a 0.

1.4.3. Pierde por lo menos posible

Probamos con las cartas 1, -10 y 1. Si no se puede ganar, por lo menos se pierda por la menor cantidad de puntos.

- Si tomara sólo cualquiera de los unos, el oponente eligiría el 1 restante y a nosotros nos quedaría el -10, perdiendo 1 a -9 (10 puntos de diferencia)
- Si tomara el 1 y el -10 perdería 1 a -9 (10 puntos de diferencia).
- Si toma todas las cartas pierde 0 a -8 (8 puntos de diferencia).

1.5. Análisis de complejidad

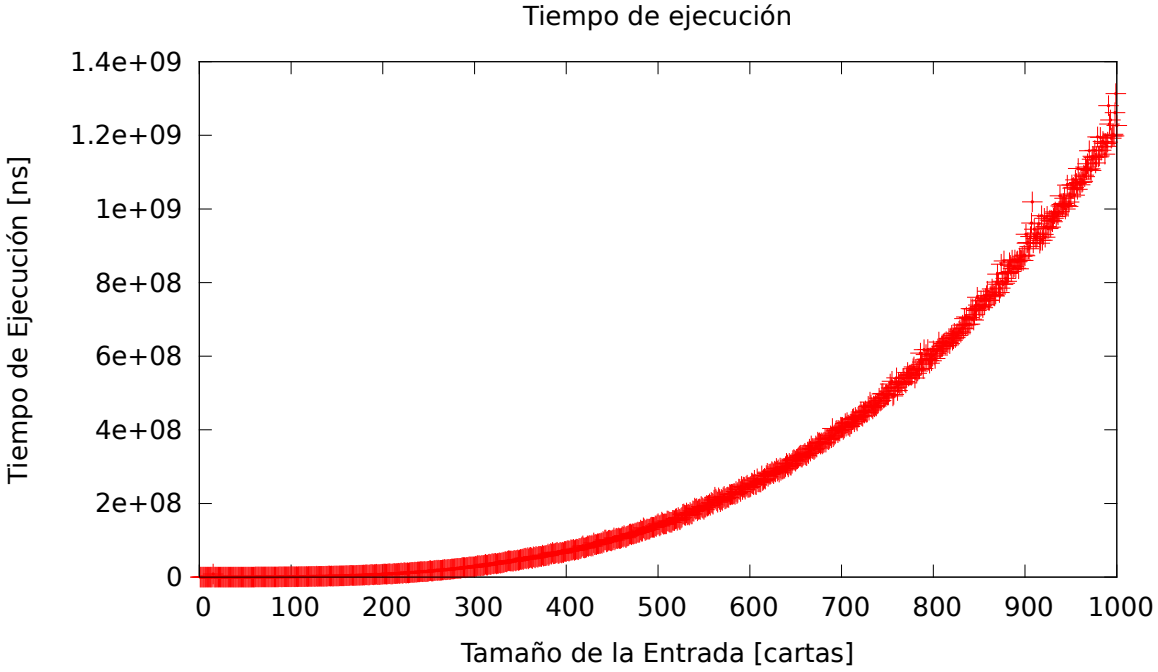
Son simplemente 3 ciclos anidados que como mucho recorren n elementos, el resto de las operaciones es $O(1)$, por ende la complejidad es $O(n^3)$.

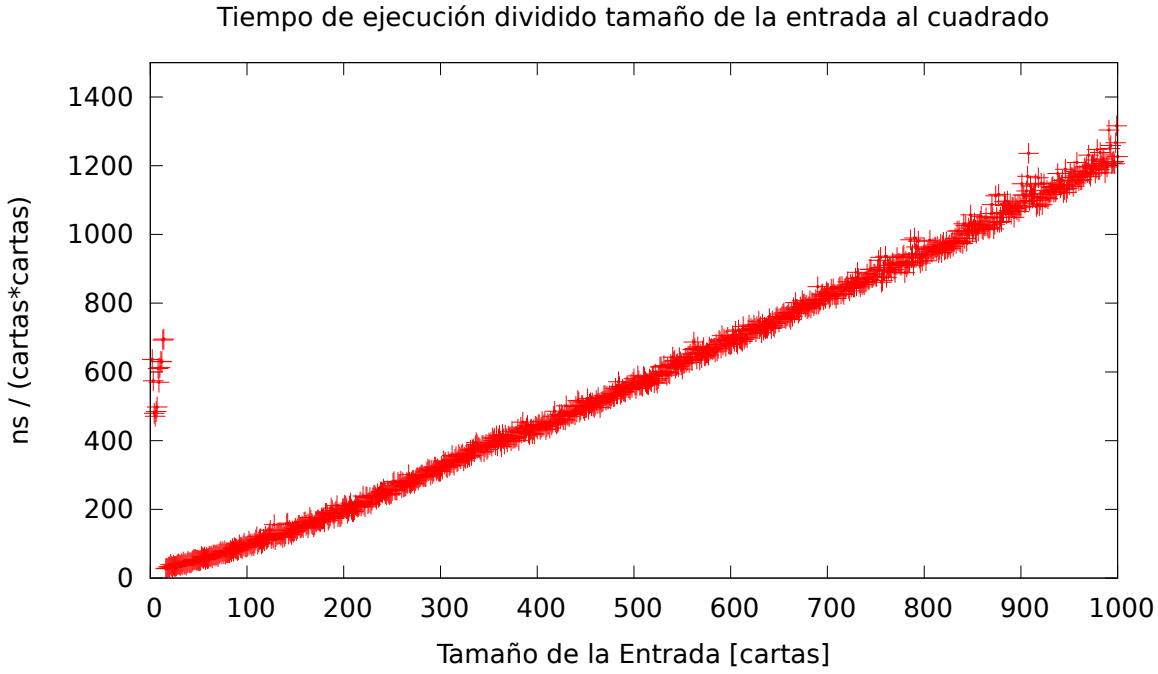
1.6. Test de complejidad

Para convencernos que la complejidad es $O(n^3)$ se graficó el tiempo que tarda el algoritmo en resolver distintos problemas.

El tamaño de la entrada es simplemente la cantidad de cartas, ya que es de lo único que depende el algoritmo, pues para una cantidad de cartas determinada siempre va a realizar la misma cantidad de iteraciones.

También graficamos el tiempo de ejecución dividido el tamaño de la entrada al cuadrado, para comprobar que obtenemos una recta.





1.7. Compilar y ejecutar

Desde el directorio src/Ejercicio1:

- **Compilar:** ./ej1 make
- **Ejecutar:** ./ej1
- **Correr casos de test:** ./ej1 tests
- **Benchmarks:** ./ej1 bench

1.8. Código Fuente

```
public void calcularSolucion() {
 int n = cartas.length;
 for ( int i = 0; i < n; i++ ) {
  cache[i][i] = cartas[i];
  jugadas[i][i].desdeIzquierda( 1 );
 }

 for ( int columna = 1; columna < n; columna++ ) {
  for ( int diagonal = 0; diagonal < n - columna; diagonal++ ) {
   int i = diagonal;
   int j = columna + diagonal;
   int min_ij = Integer.MAX_VALUE;
   int puntos = 0;
   int x = i, y = j;
   for ( int k = i; k <= j; k++ ) {
    int a = 0, b = 0;
    puntos += cartas[k];
    if ( k + 1 <= j ) a = cache[k + 1][j];
    if ( k - 1 >= i ) b = cache[i][k - 1];
    if ( min_ij < a && min_ij < b ) continue;
    if ( a < b ) {
     jugadas[i][j].desdeIzquierda( k - i + 1 );
     min_ij = a;
    } else {
     jugadas[i][j].desdeDerecha( j - k + 1 );
     min_ij = b;
    }
   }
   cache[i][j] = puntos - min_ij;
  }
 }
}
```

2. Problema 2: La centralita (de gas)

2.1. Presentación del problema

En una región del país se está considerando realizar una inversión fuerte para proveer de gas natural a un conjunto de pueblos que no disponen aún de este recurso. Para ello, es posible ubicar centrales distribuidoras de gas en algunos de los pueblos y construir tuberías para distribuir el gas de un pueblo a otro. Un pueblo será provisto de gas siempre que exista algún camino por medio de tubería hasta alguna de las centrales (incluso si este camino pasa por otros pueblos). Debido al elevado costo de construcción de las centrales distribuidoras, el presupuesto con el que se cuenta alcanza para construir a lo sumo k centrales.

Por otro lado, los ingenieros a cargo de este proyecto saben que mientras más larga sea una tubería construida entre dos pueblos, mayor es el riesgo de roturas y escapes de gas durante el trayecto (la longitud de una tubería que conecta dos pueblos está dada por la distancia entre estos dos pueblos). En este sentido, se definió el riesgo asociado a cada posible plan de construcción como la mayor de las longitudes de las tuberías construidas en dicho plan.

Se pide escribir un algoritmo que determine un plan de construcción de tuberías y centrales (a lo sumo k centrales) de forma tal que ningún pueblo quede sin acceso al preciado recurso. El plan debe indicar en qué pueblos se instalarán centrales y entre qué pares de pueblos se construirán tuberías de distribución de gas. El plan propuesto debe tener riesgo mínimo, y en caso de haber más de un plan óptimo, el algoritmo puede devolver cualquiera de ellos. Se pide que el algoritmo desarrollado tenga una complejidad temporal de peor caso de $O(n^2)$, donde n es la cantidad de pueblos del problema.

2.2. Resolución

La resolución se reduce, simplemente, a obtener un AGM del grafo original y luego particionarlo eliminando las aristas de mayor peso (para eso colocamos centrales en ambas componentes conexas).

2.3. Pseudocódigo

```
construir agm del grafo
ordenar aristas del agm de mayor a menor
por cada arista del agm de mayor a menor y mientras haya centrales para colocar:
   puebloA := el pueblo de un extremo de la arista
   puebloB := el pueblo del otro extremo de la arista
   si hay mas de una central para colocar:
      colocar central en puebloA si no tiene
      colocar central en puebloB si no tiene
      eliminar arista del agm
   sino:
      si no hay centrales colocadas:
         colocar central en puebloA
      sino, si no hay central construida en puebloA ni en puebloB:
         salir
      sino, si sólo uno entre puebloA y puebloB tiene una central construida:
```

```
      si puebloA no tiene central:
         construir central en puebloA
      sino:
         construir central en puebloB
      eliminar arista del agm
   sino, los dos tienen central:
      eliminar arista del agm
```

2.4. Demostración

Un AGM es también lo que se conoce como un "Minimium Bottleneck Spanning Tree", es decir, un AGM tiene la propiedad de que el peso máximo entre todas sus aristas es el mínimo posible [1].

Además, por la propiedad de corte [2] sabemos que si partimos un AGM quitando una arista tenemos dos componentes conexas, que la arista de menor peso que las une es la que acabamos de quitar (no podría ser otra, porque sino esa sería la que estuviese en el AGM). De modo que si particionamos el AGM en las aristas de mayor peso (colocando una central en ambos vertices de la arista) estamos eliminando la mayor arista del AGM que además es la menor arista que podía unir las dos componentes conexas. Es decir que reducimos el costo del resultado y además sabemos que es una decisión óptima, porque no hay ningún otro AGM que tenga una arista de menor peso entre esas dos componentes conexas, con lo cual sacamos la arista "óptima" que además era la más pesada.

2.5. Análisis de complejidad

Construír un AGM a partir de una matriz de adyacencia utilizando Prim es $O(n^2)$ [3]. El AGM tiene $n-1$ aristas [4] (pues es un árbol), de modo que ordenar todas las artistas tiene, en el peor caso, una complejidad de $O(n^2)$, incluso podría ser $O(n \log n)$, pero aunque así no sea no va a cambiar el resultado. Por último, recorrer todas las aristas ordenadas es $O(n)$, y eliminar una arista del agm puede ser, según la implementación, entre $O(1)$ y $O(n)$, aún así, la complejidad de todo el ciclo no sería peor que $O(n^2)$. Sumando todo obtenemos una complejidad del algoritmo de $O(n^2)$.

2.6. Test de complejidad

2.7. Compilar y ejecutar

Desde el directorio src/Ejercicio2:

- **Compilar:** ./ej1 make
- **Ejecutar:** ./ej1

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Minimum_spanning_tree#Minimum_bottleneck_spanning_tree
[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Minimum_spanning_tree#Cut_property
[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Prim%27s_algorithm#Time_complexity
[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Tree_%28graph_theory%29#Definitions

- **Correr casos de test:** ./ej1 tests
- **Benchmarks:** ./ej1 bench

3. Problema 3: Saltos en *La Matrix*

3.1. Presentación del problema

La Matrix es un juego que consite de participantes en un tablero cuadrado. Cada casillero contiene un resorte que le permite al jugador saltar a otro casillero en dirección vertical u horizontal dependiendo del valor de salto del resorte.

El problema esta en buscar la cantidad mínima de saltos que puede hacer un participante desde un casillero origen a otro destino. Ademas cada participante tiene una cantidad de potencias extra que puede usar para llegar a casilleros mas alejados.

3.2. Resolución

Para resolver este problema se planteó hacer un grafo *tridimensional* (explicado más adelante).

Al plantear el grafo (dirigido) de casilleros como nodos conectados a sus posibles casilleros de saltos hacía fácil la busqueda de camino mínimo entre origen y destino, pero se comlpicaba el cálculo del uso de las potencias, ya que era muy costoso saber cuantas potencias se habian usado.

Es por eso que se planteó finalmente uno tridimensional. Este incluye información de las potencias en sí mismo. El grafo dirigido tridimensional consiste en repetir el grafo de casilleros como nodos y conexiones como aristas k cantidad de veces, donde k = número de potencias. Es decir, cuando se toma una decisión que no requiere potencias, me quedo en la misma matriz, pero cuando uso alguna potencia, salto a otra matriz dependiendo de la cantidad de potencias utilizadas. No puedo saltar de una matriz con mayor k a una de menor. Entonces obtengo un grafo dirigido de $(n^2) * k$ nodos, donde una misma posición esta repetida k veces.

3.2.1. Algoritmo

Como cada arista representa un salto, todas tienen el mismo costo. Por eso, adaptamos el problema a buscar el camino mínimo con el algoritmo de BFS en un grafo dirigido, empezando desde el casillero origen.

```
LaMatrix(Tablero inicio fin potencia)
    niveles = { inicio : 0 } //diccionario con la clave inicio y 0 como significado
    anterior = { inicio : NULL } //diccionario, clave inicio y NULL como significado
    i = 1
    frontera = [inicio]
    while(frontera){
        siguiente = []
        for x in frontera {
            for y in vecinos(x){ //vecinos es un arreglo del alcance que tiene x
                if !nivel.estaDefinido(y){
                    nivel[y] = i
                    anterior[y] = x
```

```
                siguiente.agregar(y)
            }
        }
    }
    frontera = siguitente
    i++
    }

saltosAfin = niveles.significado(fin) //cantidad de saltos
secuenciaDeSaltos = anterior.dameSecuencia(fin) //devuelve el camino desde el inicio
return (saltosAfin, secuenciaDeSaltos)
```

3.3. Demostración

3.4. Análisis de complejidad

El algoritmo es principalmente una busqueda en anchura, y esta tiene complejidad temporal de $O(V + E)$ donde V son los nodos y E las aristas. En nuestro caso tenemos $(n^2) * k$ nodos y en caso máximo en que todos los nodos esten conectados a sus posibles lugares de salto serian $(n^2) * 2(n-1) * k$ ya que hay n^2 nodos con $n-1$ conexiones máximas en cada dirección (vertical u horizontal) por cada nivel k. Esto daría acotado superiormente $(n^3) * k$. Es decir que el peor caso sería de $O((n^2) * k + (n^3) * k)$ que es lo mismo que $O((n^3) * k)$.

3.5. Código de fuente

```
public class Tablero {
    private int[][][] superMatrix; //array de matrices, la posicion en el primer arreglo
    private int n;
    private int poderes;

    public Tablero(int n, int k, int[][] Matrix)
    {
        this.n = n;
        this.poderes = k;

        superMatrix = new int[k+1][][];
        for(int i = 0; i <= k; i++)
        {
            superMatrix[i] = Matrix;
        }
    }

    public List<Tripla> vecinos (int k, int x, int y)
    {
        int valor = this.superMatrix[k][x-1][y-1]; //x-1 y-1

        List<Tripla> vs = new ArrayList<Tripla>();
        List<Tripla> horizontales = valoresHorizontales(k,x,y,valor);
        List<Tripla> verticales = valoresVerticales(k,x,y,valor);
```

```
    vs.addAll(horizontales);
    vs.addAll(verticales);
    return vs;
}

private List<Tripla> valoresHorizontales (int k, int x, int y, int valor)
{
    List<Tripla> vs = new ArrayList<Tripla>();
    Tripla v = new Tripla(k,x,y);
    //valores horizontales
    for (int i = 0; i <= valor; i++)
    {
        if ((x+i) <= this.n)
        {
            v.setSecond((x+i));
            vs.add(v);
        }
        if ((x-i) > 0)
        {
            v.setSecond((x-i));
            vs.add(v);
        }
    }
    //valores horizontales con poder
    if((this.poderes-k)>0) //si quedan poderes entonces...
    {
        for (int i = 1; i <= (this.poderes - k); i++)
        {
            if ((x + valor + i) <= this.n)
            {
                v.setFirst(k + i);
                v.setSecond(x + valor + i);
                vs.add(v);
            }
            if ((x - valor - i) > 0)
            {
                v.setFirst(k + i);
                v.setSecond(x - valor - i);
                vs.add(v);
            }
        }
    }
    return vs;
}

private List<Tripla> valoresVerticales (int k, int x, int y, int valor)
{
    List<Tripla> vs = new ArrayList<Tripla>();
    Tripla v = new Tripla(k,x,y);
    //valores verticales
```

```
        for (int i = 0; i <= valor; i++)
        {
            if ((y+i) <= this.n)
            {
                v.setThird(y+i);
                vs.add(v);
            }
            if ((y-i) > 0)
            {
                v.setThird(y-i);
                vs.add(v);
            }
        }
        //valores verticales con poder
        if((this.poderes-k)>0) //si quedan poderes entonces...
        {
            for (int i = 1; i <= (this.poderes - k); i++)
            {
                if ((y + valor + i) <= this.n)
                {
                    v.setFirst((k + i));
                    v.setThird(y + valor + i);
                    vs.add(v);
                }
                if ((y - valor - i) > 0)
                {
                    v.setFirst((k + i));
                    v.setThird(y - valor - i);
                    vs.add(v);
                }
            }
        }
        return vs;
    }
}
-------------------------

public class Jugador {
    private HashMap<Dupla, Integer> niveles; //diccionario que contiene a cuantos
                                              saltos o nivel esta tal casillero.
    private HashMap<Dupla, Integer> poderesUsadosHastaAqui; //diccionario que contiene
                                                             a cuantos poderes se usaron
    private HashMap<Tripla, Tripla> anterior; //diccionario que dado un casillero
                                                devuelve cual es el anterior en su camino
    private Dupla inicio;
    private Dupla fin;
    private Tablero tablero;

    public Jugador(Dupla inicio, Dupla fin, Tablero tablero)
    {
        this.inicio = inicio;
```

```
        this.fin = fin;
        this.tablero = tablero;
        this.niveles = new HashMap<Dupla, Integer>();
        this.poderesUsadosHastaAqui = new HashMap<Dupla, Integer>();
        this.anterior = new HashMap<Tripla, Tripla>();
    }

    public void resolver() //USA EL ALGORITMO DE BFS
    {
        this.niveles.put(this.inicio,0);
        Tripla inicioT = this.inicio.duplaToTripla(0);
        this.anterior.put(inicioT, null);
        int nivel = 1;
        ArrayList<Tripla> frontera = new ArrayList<Tripla>();
        frontera.add(inicioT);
        while(!frontera.isEmpty())
        {
            ArrayList<Tripla> siguiente = new ArrayList<Tripla>();
            for(Tripla t : frontera)
            {
                for (Tripla v : tablero.vecinos(t.getFirst(),t.getSecond(),t.getThird()))
                {
                    Dupla v2 = v.triplaToDupla();
                    if(!this.niveles.containsKey(v2))
                    {
                        this.niveles.put(v2,nivel);
                        this.anterior.put(v,t);
                        siguiente.add(v);
                    }
                }
            }
            frontera.clear();
            frontera.addAll(siguiente);
            nivel = nivel+1;
        }
    }
}
```