Eulers Metode

En metode for å løse differensialligninger

Målet er å finne hastighet og posisjon, $v(t)$, $x(t)$, som funksjoner av tid

Hvis akselerasjonen er konstant, så er dette enkelt:

$$v(t) = v_0 + at,$$
$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

Problemet er nå at akselerasjonen ikke alltid er konstant.

Hovedidéen

Akselerasjonen vil alltid være tilnærmet konstant hvis vi bare ser på et kort nok tidsintervall

Vi finner bevegelsen ved å regne oss fremover i tid, et lite steg i tid av gangen

Introduserer et lite tidssteg, Δt.

Vi finner bevegelsen ved å regne oss fremover i tid, et lite steg i tid av gangen

Introduserer et lite tidssteg, Δt.

Akselerasjonen endrer seg gjennom bevegelsen, så vi kaller akselerasjonen ved start for a_0.

Vi finner bevegelsen ved å regne oss fremover i tid, et lite steg i tid av gangen

Introduserer et lite tidssteg, Δt.

Akselerasjonen endrer seg gjennom bevegelsen, så vi kaller akselerasjonen ved start for a_0.

Hvis Δt er liten nok får vi

$$v(\Delta t) = v_0 + a_0 \cdot \Delta t,$$
$$x(\Delta t) = x_0 + v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a_0 \cdot \Delta t^2.$$

Vi finner bevegelsen ved å regne oss fremover i tid, et lite steg i tid av gangen

Vi kan nå bruke $v(\Delta t)$ og $x(\Delta t)$ til å finne en "ny" akeselerasjon, siden $a(\Delta t) = F(\Delta x, \Delta v, \Delta t)/m$.

Vi finner bevegelsen ved å regne oss fremover i tid, et lite steg i tid av gangen

Vi kan nå bruke $v(\Delta t)$ og $x(\Delta t)$ til å finne en "ny" akselerasjon, siden $a(\Delta t) = F(\Delta x, \Delta v, \Delta t)/m$.

Vi kan bruke den nye akselerasjonen $a(\Delta t)$ til å regne oss enda et steg fremover i tid

$$v(2\Delta t) = v(\Delta t) + a(\Delta t) \cdot \Delta t,$$

$$x(2\Delta t) = x(\Delta t) + v(\Delta t) + \frac{1}{2} a(\Delta t) \cdot \Delta t^2.$$

Vi finner bevegelsen ved å regne oss fremover i tid, et lite steg i tid av gangen

Vi kan nå bruke $v(\Delta t)$ og $x(\Delta t)$ til å finne en "ny" akselerasjon, siden $a(\Delta t) = F(\Delta x, \Delta v, \Delta t)/m$.

Vi kan bruke den nye akselerasjonen $a(\Delta t)$ til å regne oss enda et steg fremover i tid

$$v(2\Delta t) = v(\Delta t) + a(\Delta t) \cdot \Delta t,$$
$$x(2\Delta t) = x(\Delta t) + v(\Delta t) + \frac{1}{2}a(\Delta t) \cdot \Delta t^2.$$

Og dette kan vi fortstette med så lenge vi vil.

For hvert steg vi tar, beveger vi oss Δt frem i tid. Vi ser altså bare på tidspunktene

$$t = 0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \ldots$$

For hvert steg vi tar, beveger vi oss Δt frem i tid. Vi ser altså bare på tidspunktene

$$t = 0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \ldots$$

La oss navngi disse som følger

$$t_i \equiv i\Delta t$$

Da blir

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, \\ t_1 &= \Delta t, \\ t_2 &= 2\Delta t, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Vi navngir v og x på samme måte

$$v_i \equiv v(t_i), \qquad x_i \equiv x(t_i).$$

Vi navngir v og x på samme måte

$$v_i \equiv v(t_i), \qquad x_i \equiv x(t_i).$$

Slik at

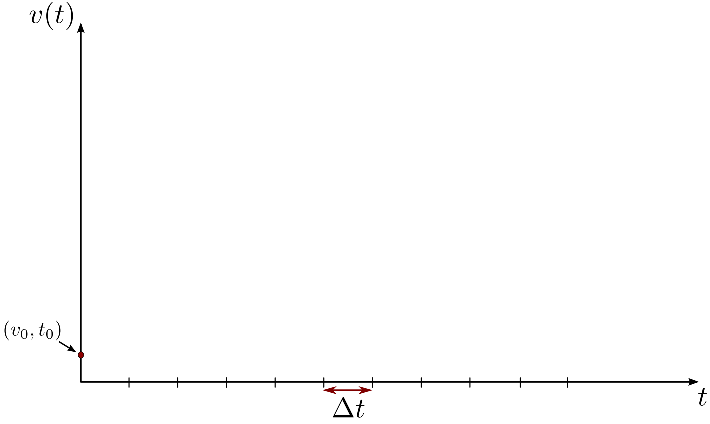
$$\begin{aligned} v_0 &= v(t_0) = v(0) \\ v_1 &= v(t_1) = v(\Delta t) \\ v_2 &= v(t_2) = v(2\Delta t) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= x(t_0) = x(0) \\ x_1 &= x(t_1) = x(\Delta t) \\ x_2 &= x(t_2) = x(2\Delta t) \\ &\vdots \end{aligned}$$

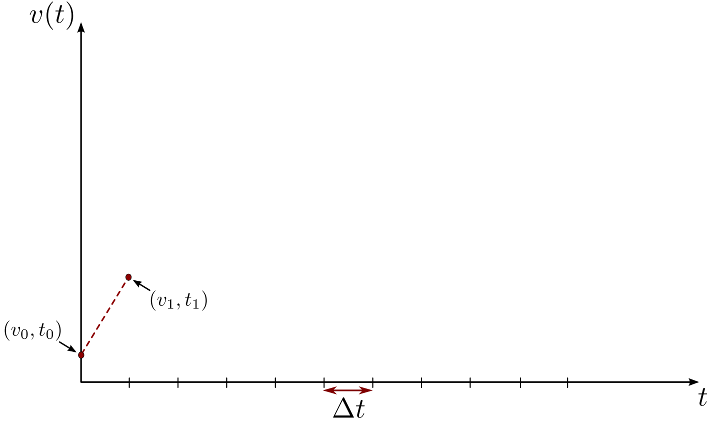
Vi kan da skrive bevegelsesligningene som

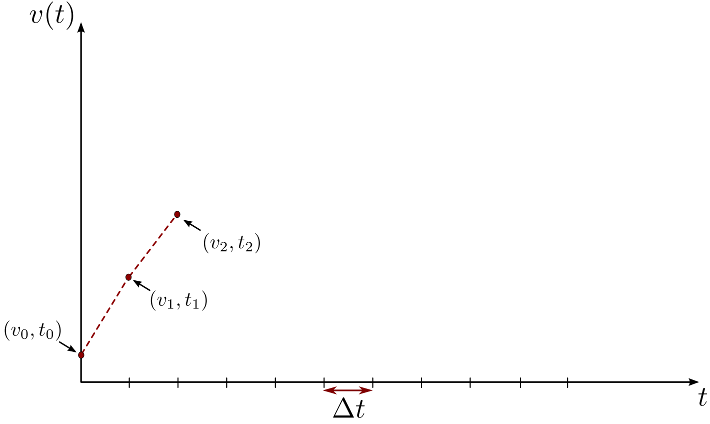
$$v_{i+1} = v_i + a_i \cdot \Delta t,$$
$$x_{i+1} = x_i + v_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a_i \cdot \Delta t^2,$$

Der vi finner akselerasjonen a_i fra $F(x_i, v_i, t_i)/m$.

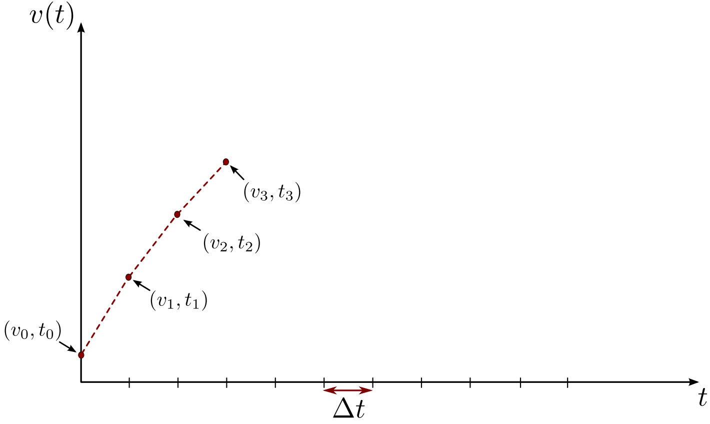


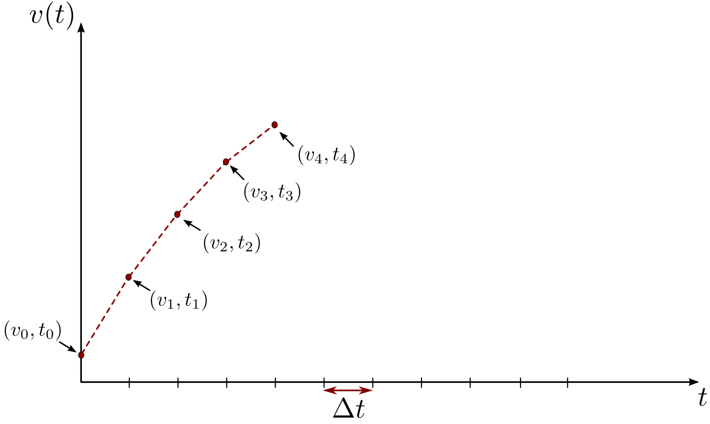
$v(t)$
(v_0, t_0)
t
Δt

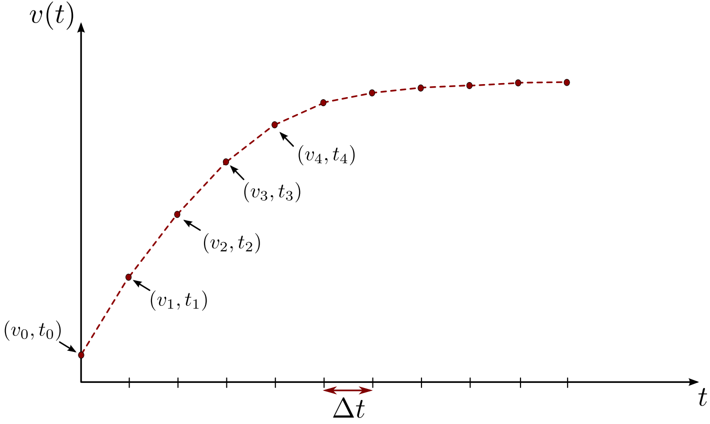

$v(t)$
(v_1, t_1)
(v_0, t_0)
t
Δt



$v(t)$
(v_2, t_2)
(v_1, t_1)
(v_0, t_0)
Δt
t


$v(t)$
(v_3, t_3)
(v_2, t_2)
(v_1, t_1)
(v_0, t_0)
Δt
t


$v(t)$
(v_4, t_4)
(v_3, t_3)
(v_2, t_2)
(v_1, t_1)
(v_0, t_0)
t
Δt


$v(t)$
(v_4, t_4)
(v_3, t_3)
(v_2, t_2)
(v_1, t_1)
(v_0, t_0)
t
Δt

Algoritme for Eulers metode

for $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, N-1$:

1. Bruk de forrige resultatene x_i og v_i for å regne ut akselerasjonen: $a_i = F(x_i, v_i, t_i)/m$.
2. Regn ut den nye farten: $v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t$.
3. Regn ut den nye posisjonen: $x_{i+1} = x_i + v_i \Delta t + \frac{1}{2} a_i \Delta t^2$.

Algoritme for Eulers metode

for $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, N-1$:

1. Bruk de forrige resultatene x_i og v_i for å regne ut akselerasjonen: $a_i = F(x_i, v_i, t_i)/m$.
2. Regn ut den nye farten: $v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t$.
3. Regn ut den nye posisjonen: $x_{i+1} = x_i + v_i \Delta t + \frac{1}{2} a_i \Delta t^2$.

$$\Downarrow$$

```
for i in range(N):
    a[i] = F(x[i], v[i], t[i])/m
    v[i+1] = v[i] + a[i]*dt
    x[i+1] = x[i] + v[i]*dt + 0.5*a[i]*dt**2
```

$t_i \Rightarrow$ `t[i]` $\quad v_i \Rightarrow$ `v[i]` $\quad r_i \Rightarrow$ `r[i]`