

# SUMÁRIO

# I

## LÓGICA PROPOSICIONAL

# 1 SINTAXE

## 2 SEMÂNTICA

### 3 PROBLEMA DA SATISFATIBILIDADE

# II

## LÓGICA DE PRIMEIRA ORDEM

Enquanto a Lógica Proposicional tem como base proposições, onde enunciados são inteiramente representados por variáveis, Gottlob Frege buscou, em 1879, obter uma linguagem simbólica mais rica, que representa enunciados na qual os objetos mencionados nesses enunciados tenham uma representação própria. Observe as seguintes sentenças declarativas abaixo.

1. Se o unicórnio é lenda, é imortal, mas se não é lenda, é mamífero.
2. O unicórnio, se é imortal ou mamífero, é chifrudo.
3. O unicórnio, se é chifrudo, é bruxaria.

Queremos saber: o unicórnio é lenda? É bruxaria? É chifrudo? Vamos representar as sentenças na lógica proposicional na seguinte forma:

- $l$  = “O unicórnio é lenda.”
- $i$  = “O unicórnio é imortal.”
- $m$  = “O unicórnio é mamífero.”
- $c$  = “O unicórnio é chifrudo.”
- $b$  = “O unicórnio é bruxaria.”

1.  $(l \rightarrow i) \wedge (\neg l \rightarrow m)$
2.  $(i \vee m) \rightarrow c$
3.  $c \rightarrow b$

Basta saber então, se  $\{1, 2, 3\}$  acarreta em  $l$ ,  $c$  ou  $b$ . Podemos usar algum dos métodos algorítmicos que resolvem SAT para resolver esse problema. Agora, vejamos as sentenças abaixo.

4. O jumento é primo do unicórnio.
5. Todo primo do unicórnio é chifrudo.
6. Algum primo do unicórnio não é bruxaria.
7. A fêmea do jumento é chifruda.

Na lógica proposicional, cada uma das sentenças tem que ser representada por uma variável. Isso implica em perda de expressividade, pois não podemos representar conceitos como “primo de”, “todo”, “algum”, “fêmea de”. Sendo assim, queremos usar símbolos que nos permitam representar os objetos e as relações entre eles. Temos:

**Objetos**  $j$ : jumento;  $u$ : unicórnio;  $f(j)$ : fêmea do jumento

**Predicados e relações**  $L(x)$ :  $x$  é lenda;  $I(x)$ :  $x$  é imortal;  $M(x)$ :  $x$  é mamífero;  $C(x)$ :  $x$  é chifrudo;  $B(x)$ :  $x$  é bruxaria;  $P(x, y)$ :  $x$  é primo de  $y$

Adicionalmente, usamos os símbolos  $\forall x$  para representar “para todo  $x$ ” e  $\exists x$  para “existe  $x$ ”. Assim, podemos representar as sentenças 1 a 7 como:

1.  $(L(u) \rightarrow I(u)) \wedge (\neg L(u) \rightarrow M(u))$
2.  $(I(u) \vee M(u)) \rightarrow C(u)$
3.  $C(u) \rightarrow B(u)$
4.  $P(j, u)$
5.  $\forall x(P(x, u) \rightarrow C(x))$
6.  $\exists x(P(x, u) \wedge \neg B(x))$
7.  $C(f(j))$

A lógica que lida com esses símbolos é dita **Lógica de Primeira Ordem** ou **Lógica de Predicados**.

## 4 ESTRUTURAS

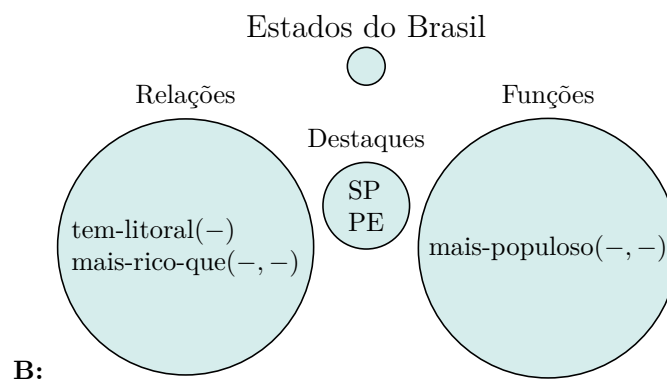
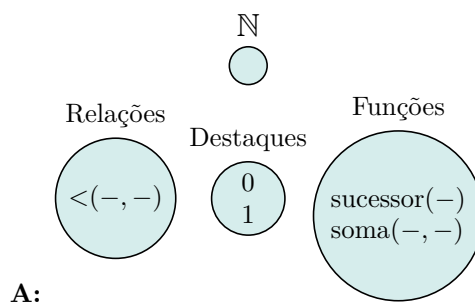
Como vimos, o vocabulário simbólico da lógica de predicados inclui símbolos para representar objetos e predicados, além de símbolos para os conectivos. Assim, a noção de valoração-verdade é incompatível com a lógica de primeira ordem, e precisamos enriquecê-la para algo que nos permita atribuir valores aos objetos e predicados. Tomamos então, o conceito de **estrutura matemática**.

### Estrutura Matemática

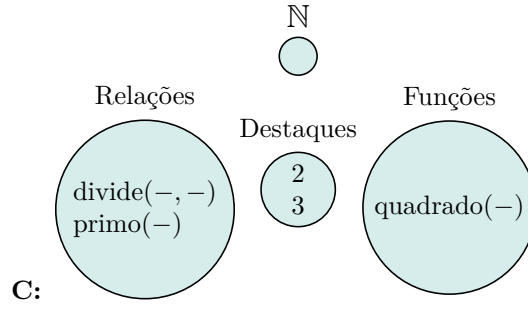
Uma estrutura  $A$  é definida por 4 componentes:

- Conjunto de objetos chamado de **domínio** ou **universo** de  $A$  – denotado por  $dom(A)$ .
- Subconjunto de elementos de  $dom(A)$  considerados **destaques** ou **constantes**.
- Conjunto de **relações** sobre  $dom(A)$ , cada uma com sua aridade.
- Conjunto de **funções** sobre  $dom(A)$ , cada uma com sua aridade.

Para ilustrar o conceito, eis três exemplos:







Uma vez definida uma estrutura, podemos criar um vocabulário simbólico sobre a estrutura que nos permita codificar sentenças na lógica de predicados. Tal vocabulário deve dizer quão rica ou simples é a estrutura, envolvendo o número de relações, destaques e funções. Chamamos esse vocabulário de **assinatura** da estrutura.

#### Assinatura

Seja  $A$  uma estrutura. A assinatura  $L$  de  $A$  é definida pelos seguintes componentes:

- Quantidade de símbolos de destaques e os símbolos.
- Quantidade de símbolos de relações  $n$ -árias, onde  $n \in \mathbb{N}$ , e os símbolos.
- Quantidade de símbolos de funções  $n$ -árias, onde  $n \in \mathbb{N}$ , e os símbolos.

$A$  é dita  $L$ -Estrutura.

A assinatura diz respeito somente à quantidade de símbolos. A definição dos mesmos é feita na **linguagem**. Mas, por simplicidade, unimos os dois conceitos. Assim, podemos definir a assinatura de  $A$  como:

- 2 símbolos de destaques:  $a$  e  $b$ ;
- 1 símbolo de relação binária:  $R$ ;
- 1 símbolo de função unária:  $f$ ;
- 1 símbolo de função binária:  $g$ .

Uma vez definidos os símbolos, precisamos dizer o que eles representam em uma estrutura, para que possamos avaliar as sentenças que usam esses símbolos. Tal processo chama-se **interpretação**.

#### Interpretação

Seja  $L$  uma assinatura e  $A$  uma  $L$ -Estrutura. A interpretação de  $L$  em  $A$  é uma associação de cada símbolo de  $L$  a um elemento de cada componente de  $A$ , tal que:

- A cada símbolo  $c$  de constante, associa-se um elemento destacado do domínio de  $A$  (notação  $c^A$ ).
- A cada símbolo  $R$  de relação de aridade  $n$ , associa-se uma relação de  $A$  de aridade  $n$  (notação  $R^A$ ).
- A cada símbolo  $f$  de função de aridade  $n$ , associa-se uma função de  $A$  de aridade  $n$  (notação  $f^A$ ).

Assim, podemos tomar a seguinte interpretação da assinatura de  $A$  em  $A$ :

- $a^A = 0$  e  $b^A = 1$ ;
- $R^A = <(-, -)$ ;

- $f^A = \text{sucessor}(-)$  e  $g^A = \text{soma}(-, -)$ .

Podemos então formalizar sentenças sobre a estrutura  $A$  na lógica de predicados:

2 é menor que 3.  $R(f(b), f(f(b)))$

Para todo natural  $x$ , há um natural  $y$  maior que ele.  $\forall x \exists y (R(x, y))$

Para todo natural  $x$ , a soma entre 1 e  $x$  é igual ao sucessor de  $x$ .  $\forall x (g(b, x) = f(x))$

0 não é sucessor de nenhum natural.  $\neg \exists x (f(x) = a)$

Para todo natural  $x$ , existem dois naturais cuja soma é  $x$ .  $\forall x \exists y \exists z (g(y, z) = x)$

## 4.1 SUBESTRUTURAS

Como saber se uma estrutura  $A$  é subestrutura de uma estrutura  $B$ ? Se  $A$  e  $B$  forem simplesmente conjuntos, basta saber se todos os elementos de  $A$  também são elementos de  $B$ . Mas, considerando os outros componentes das estruturas  $A$  e  $B$  (relações, destaques e funções), é necessário verificar se esses componentes possuem uma relação entre si que justifique dizer que  $A$  está contida em  $B$  como estrutura.

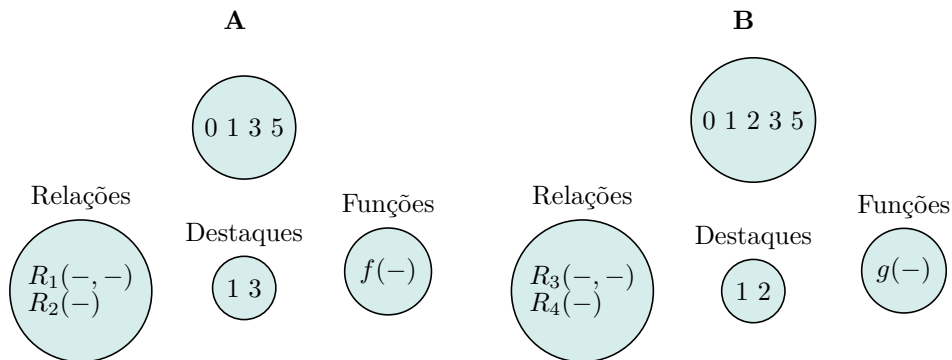
Para definir matematicamente esse possível relacionamento, tomamos emprestado da álgebra a noção de **homomorfismo**: uma função que preserva propriedades.

### Homomorfismo

Sejam  $A$  e  $B$  estruturas de uma mesma assinatura  $L$ . Uma função  $h : \text{dom}(A) \mapsto \text{dom}(B)$  é dita homomorfismo de  $A$  para  $B$  se as condições seguintes forem satisfeitas.

1. Para todo símbolo de constante  $c$  de  $L$ ,  $h(c^A) = c^B$ ;
2. Para todo símbolo de relação  $n$ -ária  $R$  de  $L$  e toda  $n$ -upla  $(a_1, \dots, a_n)$  de elementos de  $A$ ,  $(a_1, \dots, a_n) \in R^A \rightarrow (h(a_1), \dots, h(a_n)) \in R^B$ ;
3. Para todo símbolo de função  $n$ -ária  $f$  de  $L$  e toda  $n$ -upla  $(a_1, \dots, a_n)$  de elementos de  $A$ ,  $h(f^A(a_1, \dots, a_n)) = f^B(h(a_1), \dots, h(a_n))$ .

Para ilustrar esse conceito, tomemos duas estruturas  $A$  e  $B$ :



Suponha que:

$$R_1 = \{(0, 3), (1, 3), (3, 5), (5, 3)\} \quad | \quad R_3 = \{(0, 3), (1, 2), (3, 5), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$R_2 = \{0, 1, 5\} \quad | \quad R_4 = \{0, 1, 2, 3, 5\}$$

$$f(0) = 1, f(1) = 1, f(3) = 2, f(5) = 3 \quad | \quad g(0) = 0, g(1) = 1, g(2) = 2, g(3) = 3, g(5) = 5$$

Seja  $h : \text{dom}(A) \mapsto \text{dom}(B)$  uma função entre as duas estruturas, definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} h(0) &= 1 \\ h(1) &= 1 \\ h(3) &= 2 \\ h(5) &= 3 \end{aligned}$$

$h$  é um homomorfismo de  $A$  para  $B$ ? Vamos verificar cada condição:

1. A 1ª condição diz que os destaques de  $A$  são mapeados para destaques de  $B$ . Notamos que  $h(1) = 1$  e  $h(3) = 2$ . Assim, a 1ª condição é satisfeita e dizemos que  $h$  **preserva destaques**.
2. A 2ª condição diz que se uma tupla de elementos se relaciona em  $A$ , então a tupla contendo os mapeamentos desses elementos se relaciona em  $B$ . Analisando as relações:

$$\begin{aligned} R_1: (0, 3) &\mapsto (h(0), h(3)) = (1, 2) \in R_3 \\ (1, 3) &\mapsto (h(1), h(3)) = (1, 2) \in R_3 \\ (3, 5) &\mapsto (h(3), h(5)) = (2, 3) \in R_3 \\ (5, 3) &\mapsto (h(5), h(3)) = (3, 2) \in R_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2: 0 &\mapsto h(0) = 1 \in R_4 \\ 1 &\mapsto h(1) = 1 \in R_4 \\ 5 &\mapsto h(5) = 3 \in R_4 \end{aligned}$$

Assim, a 2ª condição é satisfeita e dizemos que  $h$  **preserva relações**.

3. A 3ª condição diz que mapear a aplicação de uma função em  $A$  corresponde a mapear primeiro os argumentos e depois aplicar uma função em  $B$ . Analisando as funções:

$$\begin{aligned} h(f(0)) &= g(h(0)) = g(1) = 1 \\ h(f(1)) &= g(h(1)) = g(1) = 1 \\ h(f(3)) &= g(h(3)) = g(2) = 2 \\ h(f(5)) &= g(h(5)) = g(3) = 3 \end{aligned}$$

Assim, a 3ª condição é satisfeita e dizemos que  $h$  **preserva funções**. Por preservar destaques, relações e funções,  $h$  é um homomorfismo de  $A$  para  $B$ .

#### 4.1.1 IMERSÃO

Um homomorfismo  $h : \text{dom}(A) \rightarrow \text{dom}(B)$  é dito **imersão** se:

- $h$  é injetora;
- $h$  satisfaz uma versão mais forte da 2ª condição:  
Para todo símbolo de relação  $n$ -ária  $R$  de  $L$  e toda  $n$ -upla  $(a_1, \dots, a_n)$  de elementos de  $A$ ,  $(a_1, \dots, a_n) \in R^A \leftrightarrow (h(a_1), \dots, h(a_n)) \in R^B$ .

A função  $h$  do exemplo anterior não é uma imersão, uma vez que, não só ela quebra a primeira condição (pois  $h(0) = h(1) = 1$ , implicando que  $h$  não é injetora) como a segunda ( $(5, 5) \notin R_1$ , mas  $(h(5), h(5)) = (3, 3) \in R_2$ ). Além da imersão, existem outras variantes do homomorfismo:

- Uma imersão sobrejetora é dita **isomorfismo**.
- Um homomorfismo  $h : \text{dom}(A) \mapsto \text{dom}(A)$  é dito **endomorfismo** de  $A$ .
- Um isomorfismo  $h : \text{dom}(A) \mapsto \text{dom}(A)$  é dito **automorfismo** de  $A$ .

Agora, podemos remeter ao problema inicial e definir então as condições para que uma estrutura  $A$  seja subestrutura de uma estrutura  $B$ .

##### Subestrutura

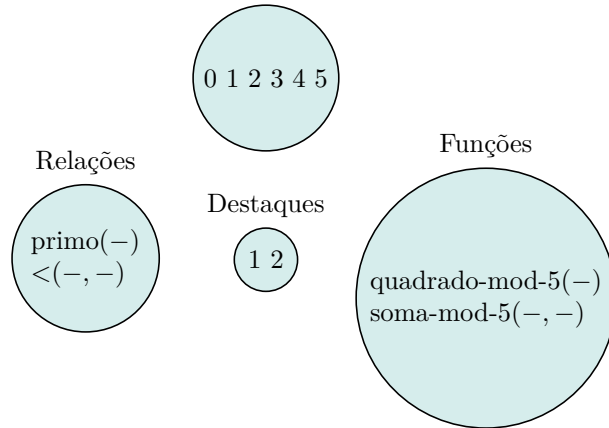
Sejam  $A$  e  $B$  estruturas de mesma assinatura. Dizemos que  $A$  é subestrutura de  $B$  se:

1.  $\text{dom}(A) \subseteq \text{dom}(B)$
2. A função identidade  $i : \text{dom}(A) \mapsto \text{dom}(B) \mid i(x) = x$  é uma imersão.

A notação é  $A \subseteq B$ .

## 4.1.2 O PROBLEMA DA MENOR SUBESTRUTURA

Seja  $A$  a estrutura a seguir e  $X = \{0, 1, 3\}$  um subconjunto do domínio de  $A$ :



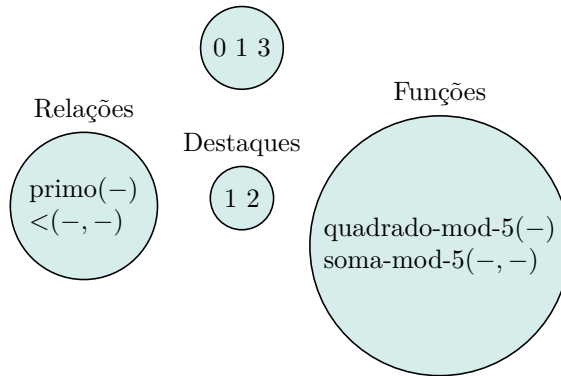
Queremos construir uma subestrutura de  $A$  que contenha o menor número de elementos em seu domínio e que contenha  $X$ . Estamos diante de um problema de otimização:

**Dada:** uma  $L$ -Estrutura  $A$  e um conjunto  $X \subseteq \text{dom}(A)$ ;

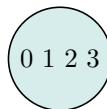
**Pergunta-se:** qual a menor subestrutura  $B$  de  $A$  que contém  $X$ , ou seja,  $B \subseteq A$  e  $X \subseteq \text{dom}(B)$ ?

A notação que usamos para  $B$  é  $\langle X \rangle_A$ . Assim,  $B$  deve conter os mesmos destaques, relações e funções que  $A$  e deve conter  $X$  em seu domínio. Além disso, precisamos adicionar elementos ao domínio de  $B$  para que a definição de estrutura se mantenha consistente.

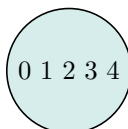
Inicialmente, temos a seguinte estrutura:



Note que ela possui o destaque 2, que não pertence ao domínio. Por definição, o conjunto de destaques é subconjunto do domínio, logo, devemos adicioná-lo a este:



Note também que a função  $\text{quadrado-mod-5}$  aplicada a 3 retorna 4, que não é um elemento do domínio. Por definição, o domínio é fechado sob as funções, assim, devemos adicionar 4 ao domínio:



Dessa forma,  $\langle X \rangle_A$  é a estrutura com domínio  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  e com os mesmos destaques, relações e funções que  $A$ .

Podemos sintetizar o procedimento para construir  $\langle X \rangle_A$  da seguinte forma:

1. Inicialmente, adicione os destaques, funções e relações de  $A$  em  $B$  e faça  $\text{dom}(B) = X$ .
2. Adicione os destaques de  $B$  ao domínio de  $B$ .
3. Repita até que nenhum elemento novo seja adicionado:

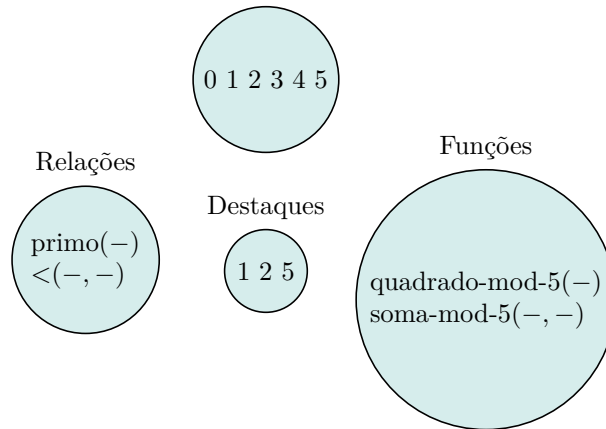
3.1 Adicione os conjuntos imagens das funções de  $B$  ao domínio de  $B$ .

#### 4.1.3 EXTENSÃO DE UMA ESTRUTURA

Quando  $\langle \emptyset \rangle_A = A$ , ou seja, a menor subestrutura de  $A$  construída a partir do conjunto vazio como domínio é a própria  $A$ , todos os elementos de  $A$  são alcançáveis a partir dos destaques e funções de  $A$ .

Isso não é verdade na estrutura do exemplo anterior, uma vez que 5 é um elemento inalcançável a partir dos destaques e funções disponíveis e é considerado “sem nome” (é impossível representar 5 por meio de símbolos sobre essa estrutura). Dessa forma, podemos estender a estrutura  $A$ , adicionando ao seu conjunto de destaques os elementos inacessíveis de  $A$ . A estrutura resultante  $A'$  é chamada de **extensão** de  $A$  (e  $A$  é dita **reduto** de  $A'$ ).

A extensão da estrutura do exemplo anterior é, portanto:



## 5 SINTAXE

Vimos que, além dos conectivos e parênteses, a lógica de predicados envolve mais quatro tipos de símbolos:

**Constantes e variáveis** São funções de aridade zero e referenciam um objeto do domínio.

**Predicados e relações** Usamos esses símbolos para denotar alguma propriedade de objetos (predicados) ou uma relação entre objetos (relações). Gottlob Frege, o fundador da lógica de predicados, mostrou como esses conceitos podem ser representados por funções proposicionais (ou seja, funções que retornam verdadeiro ou falso) mesmo que, na prática, sejam conjuntos.

**Funções** Símbolos que representam funções de referência indireta, ou seja, servem para referenciar um objeto a partir de outros.

**Quantificadores** Símbolos que denotam quantidade:  $\exists$  para denotar “algum objeto” e  $\forall$  para denotar “todo objeto”.

Assim, o alfabeto  $\Sigma$  da lógica de primeira ordem consiste na união desses quatro tipos de símbolos, acrescidos dos conectivos lógicos e parênteses.

### 5.1 FÓRMULAS

Assim como as expressões legítimas da lógica proposicional são chamadas proposições, as expressões legítimas da lógica de primeira ordem são chamadas **fórmulas**.

A unidade básica de uma fórmula é a **fórmula atômica**, que é uma relação entre objetos. Para representar objetos, tomamos o conceito de **termos**.

#### Termos

Seja  $L$  uma linguagem. O conjunto de termos de  $L$  é definido indutivamente da seguinte forma:

- Todo símbolo de constante  $c$  de  $L$  é um termo;
- Toda variável é um termo;
- Se  $f$  for um símbolo de função  $n$ -ária de  $L$  e se  $t_1, \dots, t_n$  forem termos de  $L$ , então  $f(t_1, \dots, t_n)$  é um termo.

Um termo que não contém variáveis é dito **termo fechado**.

#### Fórmulas Atômicas

Seja  $L$  uma linguagem. Uma fórmula atômica é uma palavra sobre o vocabulário simbólico de  $L$  com um dos dois formatos:

- $R(t_1, \dots, t_n)$ , onde  $R$  é um símbolo de relação  $n$ -ária de  $L$  e  $t_1, \dots, t_n$  são termos de  $L$ ;
- $t_1 = t_2$ , onde  $t_1$  e  $t_2$  são termos de  $L$ .

Uma fórmula atômica que não contém variáveis é dita **sentença atômica**.

E assim, podemos definir indutivamente o conjunto das expressões legítimas da lógica de predicados, chamado de conjunto das **fórmulas bem formadas** ( $FORM$ ).

## Fórmula bem formada

- Toda fórmula atômica é uma fórmula bem formada;
- Se  $\omega$  é uma fórmula bem formada, então  $(\neg\omega)$  é uma fórmula bem formada;
- Se  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são fórmulas bem formadas, então  $(\omega_1 \wedge \omega_2)$  é uma fórmula bem formada.
- Se  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são fórmulas bem formadas, então  $(\omega_1 \vee \omega_2)$  é uma fórmula bem formada.
- Se  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são fórmulas bem formadas, então  $(\omega_1 \rightarrow \omega_2)$  é uma fórmula bem formada.
- Se  $\omega$  é uma fórmula bem formada e  $x$  é uma variável livre de  $\omega$ , então  $(\forall x\omega)$  é uma fórmula bem formada;
- Se  $\omega$  é uma fórmula bem formada e  $x$  é uma variável livre de  $\omega$ , então  $(\exists x\omega)$  é uma fórmula bem formada.

## 6 SEMÂNTICA



## 7 PROBLEMA DA SATISFATIBILIDADE