Sumário

I

Lógica Proposicional

1 Sintaxe

2 Semântica

3 Problema da Satisfatibilidade

II

Lógica de Primeira Ordem

Enquanto a Lógica Proposicional tem como base proposições, onde enunciados são inteiramente representados por variáveis, Gottlob Frege buscou, em 1879, obter uma linguagem simbólica mais rica, que representa enunciados na qual os objetos mencionados nesses enunciados tenham uma representação própria. Observe as seguintes sentenças declarativas abaixo.

1. Se o unicórnio é lenda, é imortal, mas se não é lenda, é mamífero.
2. O unicórnio, se é imortal ou mamífero, é chifrudo.
3. O unicórnio, se é chifrudo, é bruxaria.

Queremos saber: o unicórnio é lenda? É bruxaria? É chifrudo? Vamos representar as sentenças na lógica proposicional na seguinte forma:

- l = "O unicórnio é lenda."
- i = "O unicórnio é imortal."
- m = "O unicórnio é mamífero."
- c = "O unicórnio é chifrudo."
- b = "O unicórnio é bruxaria."

1. $(l \to i) \wedge (\neg l \to m)$
2. $(i \vee m) \to c$
3. $c \to b$

Basta saber então, se $\{1, 2, 3\}$ acarreta em l, c ou b. Podemos usar algum dos métodos algorítmicos que resolvem SAT para resolver esse problema. Agora, vejamos as sentenças abaixo.

4. O jumento é primo do unicórnio.
5. Todo primo do unicórnio é chifrudo.
6. Algum primo do unicórnio não é bruxaria.
7. A fêmea do jumento é chifruda.

Na lógica proposicional, cada uma das sentenças tem que ser representada por uma variável. Isso implica em perda de expressividade, pois não podemos representar conceitos como "primo de", "todo", "algum", "fêmea de". Sendo assim, queremos usar símbolos que nos permitam representar os objetos e as relações entre eles. Temos:

Objetos j: jumento; u: unicórnio; $f(j)$: fêmea do jumento

Predicados e relações $L(x)$: x é lenda; $I(x)$: x é imortal; $M(x)$: x é mamífero; $C(x)$: x é chifrudo; $B(x)$: x é bruxaria; $P(x, y)$: x é primo de y

Adicionalmente, usamos os símbolos $\forall x$ para representar "para todo x" e $\exists x$ para "existe x". Assim, podemos representar as sentenças 1 a 7 como:

1. $(L(u) \to I(u)) \wedge (\neg L(u) \to M(u))$
2. $(I(u) \vee M(u)) \to C(u)$
3. $C(u) \to B(u)$
4. $P(j, u)$
5. $\forall x(P(x, u) \to C(x))$
6. $\exists x(P(x, u) \wedge \neg B(x))$
7. $C(f(j))$

A lógica que lida com esses símbolos é dita **Lógica de Primeira Ordem** ou **Lógica de Predicados**.

4 Estruturas

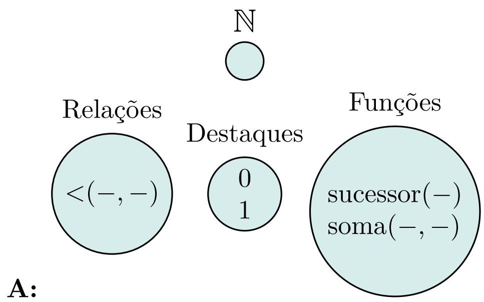
Como vimos, o vocabulário simbólico da lógica de predicados inclui símbolos para representar objetos e predicados, além de símbolos para os conectivos. Assim, a noção de valoração-verdade é incompatível com a lógica de primeira ordem, e necessitamos enriquecê-la para algo que nos permita atribuir valores aos objetos e predicados. Tomamos então, o conceito de **estrutura matemática**.

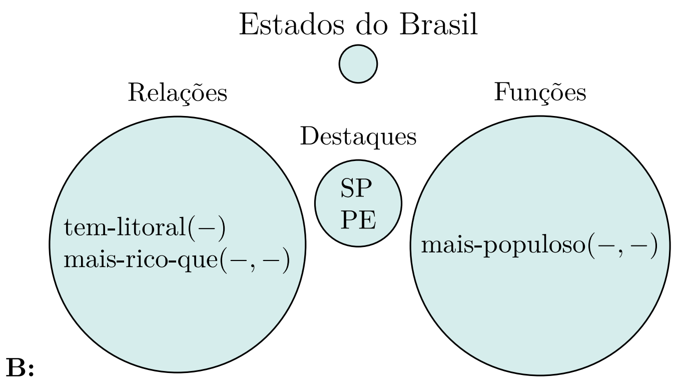
Estrutura Matemática

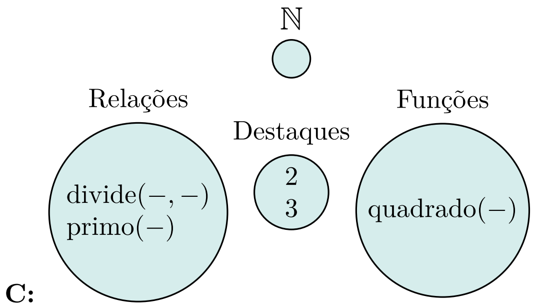
Uma estrutura A é definida por 4 componentes:

- Conjunto de objetos chamado de **domínio** ou **universo** de A – denotado por $dom(A)$.
- Subconjunto de elementos de $dom(A)$ considerados **destaques** ou **constantes**.
- Conjunto de **relações** sobre $dom(A)$, cada uma com sua aridade.
- Conjunto de **funções** sobre $dom(A)$, cada uma com sua aridade.

Para ilustrar o conceito, eis três exemplos:







Uma vez definida uma estrutura, podemos criar um vocabulário simbólico sobre a estrutura que nos permita codificar sentenças na lógica de predicados. Tal vocabulário deve dizer quão rica ou simples é a estrutura, envolvendo o número de relações, destaques e funções. Chamamos esse vocabulário de **assinatura** da estrutura.

Assinatura

Seja A uma estrutura. A assinatura L de A é definida pelos seguintes componentes:

- Quantidade de símbolos de destaques e os símbolos.
- Quantidade de símbolos de relações n-árias, onde $n \in \mathbb{N}$, e os símbolos.
- Quantidade de símbolos de funções n-árias, onde $n \in \mathbb{N}$, e os símbolos.

A é dita L-Estrutura.

A assinatura diz respeito somente à quantidade de símbolos. A definição dos mesmos é feita na **linguagem**. Mas, por simplicidade, unimos os dois conceitos. Assim, podemos definir a assinatura de A como:

- 2 símbolos de destaques: a e b;
- 1 símbolo de relação binária: R;
- 1 símbolo de função unária: f;
- 1 símbolo de função binária: g.

Uma vez definidos os símbolos, precisamos dizer o que eles representam em uma estrutura, para que possamos avaliar as sentenças que usam esses símbolos. Tal processo chama-se **interpretação**.

Interpretação

Seja L uma assinatura e A uma L-Estrutura. A interpretação de L em A é uma associação de cada símbolo de L a um elemento de cada componente de A, tal que:

- A cada símbolo c de constante, associa-se um elemento destacado do domínio de A (notação c^A).
- A cada símbolo R de relação de aridade n, associa-se uma relação de A de aridade n (notação R^A).
- A cada símbolo f de relação de aridade n, associa-se uma função de A de aridade n (notação f^A).

Assim, podemos tomar a seguinte interpretação da assinatura de A em A:

- $a^A = 0$ e $b^A = 1$;
- $R^A = <(-,-)$;

- $f^A = \text{sucessor}(-)$ e $g^A = \text{soma}(-,-)$.

Podemos então formalizar sentenças sobre a estrutura A na lógica de predicados:

2 é menor que 3. $R(f(b), f(f(b)))$

Para todo natural x, há um natural y maior que ele. $\forall x \exists y (R(x,y))$

Para todo natural x, a soma entre 1 e x é igual ao sucessor de x. $\forall x (g(b,x) = f(x))$

0 não é sucessor de nenhum natural. $\neg \exists x (f(x) = a)$

Para todo natural x, existem dois naturais cuja soma é x. $\forall x \exists y \exists z (g(y,z) = x)$

4.1 Subestruturas

Como saber se uma estrutura A é subestrutura de uma estrutura B? Se A e B forem simplesmente conjuntos, basta saber se todos os elementos de A também são elementos de B. Mas, considerando os outros componentes das estruturas A e B (relações, destaques e funções), é necessário verificar se esses componentes possuem uma relação entre si que justifique dizer que A está contida em B como estrutura.

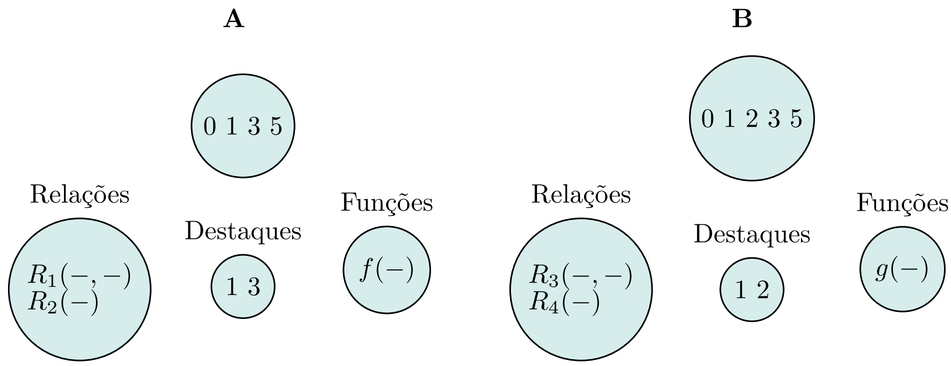
Para definir matematicamente esse possível relacionamento, tomamos emprestado da álgebra a noção de **homomorfismo**: uma função que preserva propriedades.

Homomorfismo

Sejam A e B estruturas de uma mesma assinatura L. Uma função $h : dom(A) \mapsto dom(B)$ é dita homomorfismo de A para B se as condições seguintes forem satisfeitas.

1. Para todo símbolo de constante c de L, $h(c^A) = c^B$;
2. Para todo símbolo de relação n-ária R de L e toda n-upla $(a_1, ..., a_n)$ de elementos de A, $(a_1, ...a_n) \in R^A \rightarrow (h(a_1), ..., h(a_n)) \in R^B$;
3. Para todo símbolo de função n-ária f de L e toda n-upla $(a_1, ..., a_n)$ de elementos de A, $h(f^A(a_1, ...a_n)) = f^B(h(a_1), ..., h(a_n))$.

Para ilustrar esse conceito, tomemos duas estruturas A e B:



Suponha que:

$R_1 = \{(0,3), (1,3), (3,5), (5,3)\}$ | $R_3 = \{(0,3), (1,2), (3,5), (2,3), (3,2)\}$

$R_2 = \{0,1,5\}$ | $R_4 = \{0,1,2,3,5\}$

$f(0) = 1, f(1) = 1, f(3) = 2, f(5) = 3$ | $g(0) = 0, g(1) = 1, g(2) = 2, g(3) = 3, g(5) = 5$

Seja $h : dom(A) \mapsto dom(B)$ uma função entre as duas estruturas, definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} h(0) &= 1 \\ h(1) &= 1 \\ h(3) &= 2 \\ h(5) &= 3 \end{aligned}$$

h é um homomorfismo de A para B? Vamos verificar cada condição:

1. A 1ª condição diz que os destaques de A são mapeados para destaques de B. Notamos que $h(1) = 1$ e $h(3) = 2$. Assim, a 1ª condição é satisfeita e dizemos que h **preserva destaques**.

2. A 2ª condição diz que se uma tupla de elementos se relacionam em A, então os mapeamentos desses elementos se relacionam em B. Analisando as relações:

   R_1**:** $(0, 3) \mapsto (h(0), h(3)) = (1, 2) \in R_3$
   $(1, 3) \mapsto (h(1), h(3)) = (1, 2) \in R_3$
   $(3, 5) \mapsto (h(3), h(5)) = (2, 3) \in R_3$
   $(5, 3) \mapsto (h(5), h(3)) = (3, 2) \in R_3$

   R_2**:** $0 \mapsto h(0) = 1 \in R_4$
   $1 \mapsto h(1) = 1 \in R_4$
   $5 \mapsto h(5) = 3 \in R_4$

   Assim, a 2ª condição é satisfeita e dizemos que h **preserva relações**.

3. A 3ª condição diz que mapear a aplicação de uma função em A corresponde a mapear primeiro os argumentos e depois aplicar uma função em B. Analisando as funções:

   $$\begin{aligned} h(f(0)) &= g(h(0)) = g(1) = 1 \\ h(f(1)) &= g(h(1)) = g(1) = 1 \\ h(f(3)) &= g(h(3)) = g(2) = 2 \\ h(f(5)) &= g(h(5)) = g(3) = 3 \end{aligned}$$

   Assim, a 3ª condição é satisfeita e dizemos que h **preserva funções**. Por preservar destaques, relações e funções, h é um homomorfismo de A para B.

5 Sintaxe

6 Semântica

7 Problema da Satisfatibilidade