Herramientas matemáticas y estadísticas
Primera parte

Curso Propedéutico Especialidad en Divulgación de la Economía

Jorge de la Vega Góngora

Museo Interactivo de Economía

Sesiones 7 a 9

Temas I

1. Introducción

2. Módulo 7: Herramientas Matemáticas I
   - Conjuntos y Sistemas Numéricos
     - Conjuntos
     - Conjuntos Numéricos
   - Propiedades de los números reales
     - Reglas generales del álgebra
     - Propiedades de los exponentes
     - Desigualdadades
     - Intervalos
   - Expresiones algebráicas
     - Polinomios y ecuaciones
     - Órden en números reales

3. Módulo 8. Herramientas Matemáticas II
   - El plano Cartesiano
   - Relaciones y funciones
   - Gráficas de funciones
   - Funciones lineales
   - Funciones cuadráticas
   - Funciones crecientes y decrecientes

Temas II

- Exponenciales y logaritmos

4. Módulo 9. Herramientas Matemáticas III
   - Optimización aplicada básica
   - Aplicaciones a la economía
   - Conceptos básicos de finanzas
     - Interés
     - Valor presente y valor futuro
     - Tasa de crecimiento
     - Aversión al riesgo y diversificación
     - Tipos de riesgos

Introducción

Introducción: Comentarios Iniciales

- Probablemente muchos de los resultados que se presentan en esta sección ya son bien conocidos de algunos de ustedes. La intención es poner en un sólo lugar los conceptos importantes que pueden requerir más adelante.
- Adicionalmente se incorporarán algunos ejercicios para practicar los resultados.
- Es muy importante destacar lo siguiente:

La única manera real de aprender bien matemáticas es practicar y practicar, resolviendo muchos tipos de problemas.

¿Porqué hay matemáticas en economía?

Respuesta corta:

para asegurarnos de que nuestra opinión es correcta, para garantizar que nuestras conclusiones se derivan de nuestras premisas y que no hemos dejado cabos sueltos que cuelgan de nuestros argumentos. (Dani Rodrik)

Respuesta larga: El resto de la lámina y la siguiente

- Las nociones matemáticas tienen que ver con relaciones entre conceptos, así como cantidades y sus variaciones:
  - Como se relaciona la pobreza a factores como: ingreso, educación, acceso a servicios, etc.
  - Una cosecha pobre $\Longrightarrow$ aumento de precio
  - Tasas de interés variables $\Longrightarrow$ cambio en los interéses a pagar

  Para las nociones básicas de la economía, usualmente basta la aritmética.

Una pregunta básica II

- En general, las matemáticas nos permiten medir magnitudes, así como establecer relaciones entre ellas, por ejemplo, la relación entre las variables siguientes:

$$Y = C + G + I + Nx$$

- Conforme se formalizan los razonamientos económicos, y se desarrollan teorías para explicarlos, comienzan a relacionarse una gran cantidad de conceptos.
- Las matemáticas permiten crear modelos para explicar esas teorías.
- Los economistas construyen modelos a través de representaciones matemáticas de las variables que afectan a los mercados y describen comportamientos de individuos para comprender mejor cómo funcionan e interactúan.

Lecturas adicionales

Algunas lecturas adicionales que pueden ayudar a responder la pregunta:

- Use of Mathematics in Economy
- Relación entre la matemática y la economía
- Matemáticas como recurso para economía
- Los alumnos que huían de las matemáticas
- Las matemáticas en la economía: Logros, dificultades, perspectivas
- Why Aspiring Economists Need Math

Textos de referencia:

- Alpha C. Chiang: *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*, 4a. ed. Mc. Graw Hill, México
- Knuth Sydsaeter & Peter Hammond & Andrés Carvajal: *Matemáticas para el análisis económico*, 2a. ed. Pearson, México
- Díaz Mata, Alfredo & Victor Manuel Aguilera: *Matemáticas Financieras* , 5a. ed. Mc. Graw Hill
- Villalobos, José Luis: *Matemáticas Financieras*, 3a. ed. Prentice Hall

Módulo 7: Herramientas Matemáticas I

Conjuntos I

El concepto de conjunto es tan básico que cuesta trabajo definirlo.

Conjunto

- Un **conjunto** es una colección de objetos (sus **elementos**). Si A es un conjunto, '$a \in A$' significa que a es un elemento de A.
- Usualmente hay dos formas de especificar un conjunto:
  - listando sus elementos entre llaves. NO siempre es posible.
  - A través de propiedades que permiten definir de manera no ambigua a sus elementos. Si P es una propiedad, entonces $\{a|P\}$ es el conjunto de todos los elementos a que tienen la propiedad P.

Ejemplo

Podemos definir un conjunto A asociado con los resultados de lanzar un dado, con la propiedad siguiente: P='resultado par'. Entonces podemos denotar a A de dos maneras:

1. $A = \{a|a \text{ es un número par obtenido al lanzar un dado}\}$, o
2. $A = \{2, 4, 6\}$

Conjuntos II

Ejemplo 2

En las reglas, circulares y otros documentos normativos con frecuencia se utilizan de manera implícita o explícita los conjuntos. Por ejemplo, el siguiente es un párrafo de la Circular 25/2017 de Banco de México sobre modificaciones a las reglas de operaciones derivadas (Circular 4/2012):

4. CONTRAPARTES AUTORIZADAS

Las Entidades podrán llevar a cabo Operaciones Derivadas con cualquier persona. Para estos efectos, las Entidades deberán contar con los respectivos Códigos LEI emitidos a su nombre, los cuales deberán estar vigentes al momento de la celebración de las Operaciones Derivadas respectivas. Adicionalmente, **las Entidades, los Fondos de Inversión, las Sofomes y los Almacenes Generales de Depósito***, previamente a la celebración de una Operación Derivada con cualquiera de las contrapartes que se indican a continuación, deberán recabar de ella su correspondiente Código LEI vigente al momento de dicha celebración:*

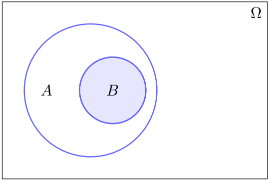
a) Otras **Entidades, Fondos de Inversión, Sofomes y Almacenes Generales de Depósito, así como instituciones de seguros, sociedades operadoras de fondos de inversión, sociedades de inversión especializadas de fondos para el retiro, sociedades financieras de objeto múltiple no reguladas, uniones de crédito, organismos de fomento y Entidades Financieras del Exterior***, y*

b) **Fideicomisos, así como personas morales distintas de las Entidades Financieras del Exterior***, en caso de que el importe nocional de dicha Operación Derivada, sumado a aquellos otros de las demás Operaciones Derivadas vigentes al momento de la celebración referida que, en su caso, esa misma contraparte haya celebrado con la institución financiera de que se trate, supere un monto equivalente en moneda nacional a 35 millones de UDIS, calculado con base en el valor de la UDI del día que corresponda.*

Operaciones con conjuntos I

- El conjunto con todos los elementos, en un contexto particular, se denomina **conjunto universal** o simplemente **universo** y se denota con la letra griega Ω.
- El conjunto sin elementos es el **conjunto vacío** y se denota con el símbolo $\varnothing$.
- Si cada elemento de un conjunto B es elemento de A, entonces B **es un subconjunto de** A y escribimos $B \subset A$.

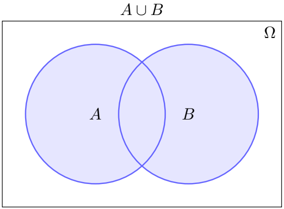
$B \subset A$



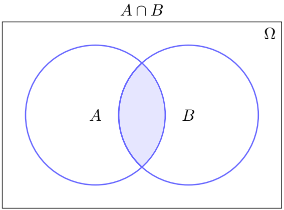
- El **conjunto potencia** de un conjunto A es el conjunto de todos los subconjuntos de A: $\mathcal{P}(A) = \{B | B \subset A\}$. Noten que este es un conjunto cuyos elementos son conjuntos, en particular, $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$ y $A \in \mathcal{P}(A)$.

Operaciones con conjuntos II

- La **unión** de dos conjuntos A y B se define como el conjunto $A \cup B = \{x | x \in A \text{ o } x \in B\}$.

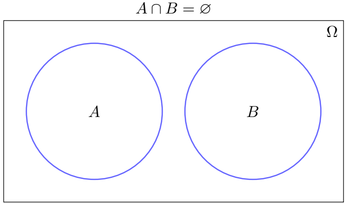


- La **intersección** de dos conjuntos A y B se define como el conjunto $A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}$.

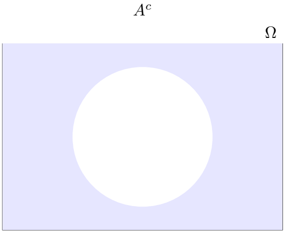


Operaciones con conjuntos III

- Dos conjuntos son **disjuntos** si $A \cap B = \varnothing$.

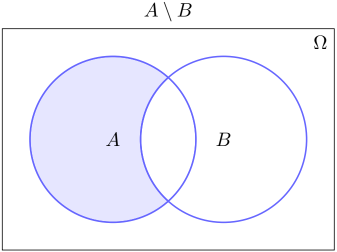


- El **complemento** de A es el conjunto de todos los elementos que no están en A: $A^c = \{x | x \notin A\}$.



Operaciones con conjuntos IV

- La **diferencia** de dos conjuntos es: $A \setminus B = \{a|a \in A \text{ y } a \notin B\}$.



- El **producto cartesiano** de dos conjuntos A y B se define como el conjunto de pares de elementos de A y B:

$$A \times B = \{(a,b)|a \in A, b \in B\}$$

Ejercicio de práctica

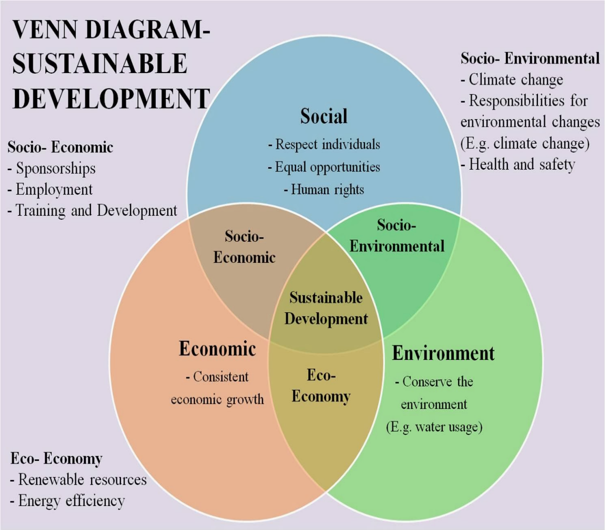
La oficina de Turismo de Cancún está realizando un estudio acerca de los empleados del sector restaurantero de la entidad. Se tiene una muestra valida de 692 empleados, con datos referentes a su género, estado civil y lugar de origen:

- 300 empleados son hombres
- 230 empleadas(os) son casadas(os)
- 370 son originarias(os) de Cancún
- 150 son hombres y están casados
- 180 son hombres originarios de Cancún
- 90 empleadas(os) originarios de Cancún están casadas(os)
- 10 hombres solteros no son originarios de Cancún

Determinar:

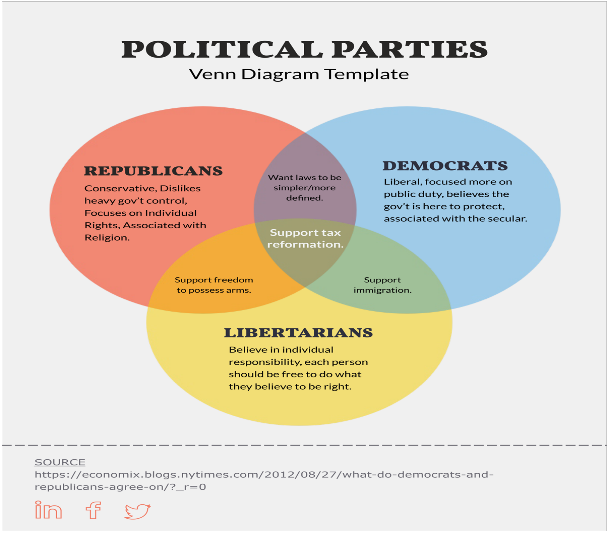
- El número de hombres casados y originarios de Cancún
- El número de mujeres casadas y que no son originarios de Cancún
- El número de mujeres solteras y que no son originarias de Cancún.

Usos prácticos de conjuntos en Divulgación de la Economía I



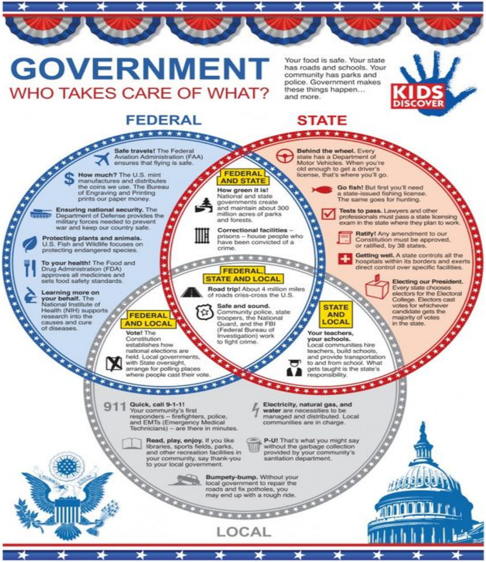
fuente: http://muiwo2014g55.blogspot.com/2014/02/venn-diagram-sustainable-development.html

Usos prácticos de conjuntos en Divulgación de la Economía II



Fuente:https://www.formtema.com/venn-diagram-template/venn-diagram-template-5/

Usos prácticos de conjuntos III



Fuente: https://www.pragmaticmom.com

Conjuntos Numéricos

Conjuntos de números I

- Hay números de distintos tipos, usualmente se agrupan en los siguientes conjuntos:

  Naturales $\mathbb{N}$ son los números que se utilizan para contar: $0, 1, 2, 3, \ldots$.

  Enteros $\mathbb{Z}$ son números que surgen al hacer operaciones de adición y sustracción de números naturales: $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

  Racionales $\mathbb{Q}$ son números de la forma a/b, donde a y b son enteros y b es diferente de 0. Por ejemplo:

  $$\frac{1}{2} = 0.5, -\frac{10}{11}, \frac{0}{1} = 0, -1.26 = \frac{126}{100}$$

  Formalmente, se puede definir

  $$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

  Irracionales $\mathbb{I}$ todos los números que no son racionales. Muchos números famosos son irracionales: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, π, $e = 2.7182818284...$, $\phi = 1.6180339887498948...$, etc.

  Reales $\mathbb{R}$ Son los números racionales y los irracionales.

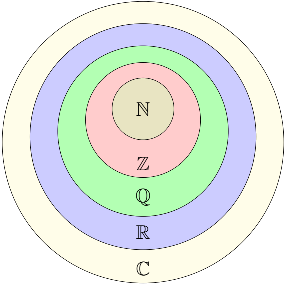
Conjuntos de números II

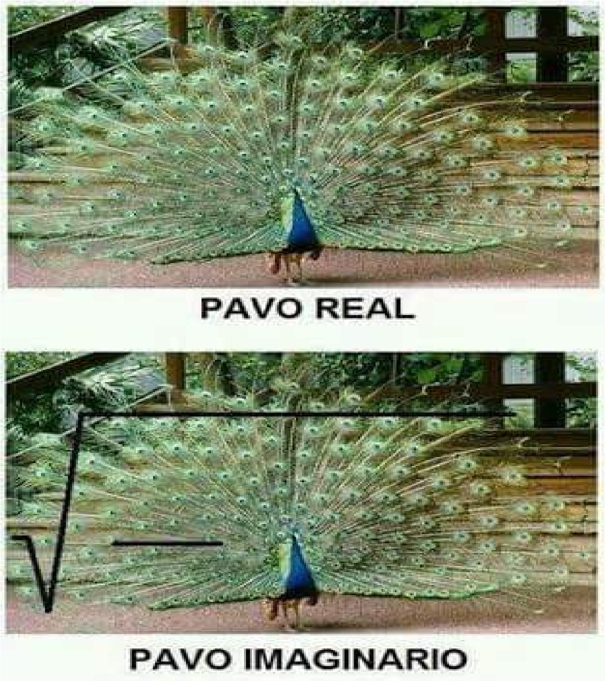
Imaginarios $\mathbb{C}$ o complejos, son números de la forma $a + bi$ donde a y b son números reales, y el símbolo i denota a $\sqrt{-1}$.

La relación entre estos conjuntos numéricos es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} &= \mathbb{R} \\ \mathbb{R} &\subset \mathbb{C} \end{aligned}$$

Los conjuntos numéricos surgen de diferentes modos tanto en la economía como en la estadística.




PAVO REAL
PAVO IMAGINARIO

Sistema Decimal I

Casi todo el mundo usa el sistema decimal, o base 10, para escribir números. Prácticamente todos los números naturales, enteros y racionales se pueden escribir usando un sistema posicional usando 10 como el número base, y los dígitos $0, 1, 2 \ldots, 9$.

Ejemplo

- $1984 = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$
- Los puntos decimales también nos permiten expresar los números racionales:

$$
\begin{aligned}
3.1415 &= 3 \cdot 10^0 + 1/10^1 + 4/10^2 + 1/10^3 + 5/10^4 \\
&= 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4}
\end{aligned}
$$

- Cada fracción decimal finita es un número racional, pero no todos los números racionales se pueden escribir como una fracción decimal finita. Por ejemplo: $1/3 = 0.333\ldots$.

Sistema Decimal II

- Si una fracción decimal es un número racional, siempre será periódica: después de un cierto lugar en la expansión decimal, los números comienzan a repetirse:

$$11/70 = 0.15714285714285\ldots$$

- Los números irracionales, no tienen un periodo completo, como el número π o $\sqrt{2}$:
- A la fecha, no se sabe si $2^{\sqrt{2}} + 3^{\sqrt{3}}$ es irracional o racional!
- Pregunta: ¿Hay más números racionales o irracionales?

Un caso especial: división por cero

Las cuatro operaciones aritméticas siempre entre números reales siempre resultan en un número real, excepto que no se permite hacer división por cero.

División por cero

$\frac{a}{0}$ **no** está definida, para cualquier $a \in \mathbb{R}$

¡Ojo! No se debe confundir este caso con $\frac{0}{a} = 0$ para cualquier $a \neq 0$.

Si se supone que $a/0$ está definido, entonces rápidamente se cae en contradicciones.

Reglas generales del álgebra

Aquí se listan las reglas básicas de las operaciones algebraicas: conmutatividad, asociatividad, distributiva e inversas de la adición y multiplicación.

Reglas del álgebra

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces:

(a) $a + b = b + a$

(b) $(a + b) + c = a + (b + c)$

(c) $a + 0 = a$

(d) $a + (-a) = 0$

(e) $ab = ba$

(f) $(ab)c = a(bc)$

(g) $1 \cdot a = a$

(h) $aa^{-1} = 1$ para $a \neq 0$

(i) $(-a)b = a(-b) = -ab$

(j) $(-a)(-b) = ab$

(k) $a(b + c) = ab + ac$

(l) $(a + b)c = ac + bc$

Propiedades de los exponentes I

Propiedades generales de los exponentes

$$
\begin{aligned}
a^0 &= 1, a \neq 0 \\
a^n \cdot a^m &= a^{n+m} \\
a^n / a^m &= a^{n-m} \\
(a^n)^m &= a^{n \cdot m} \\
(a \cdot b)^n &= a^n \cdot b^n \\
\left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} = a^n \cdot b^{-n} \\
\sqrt[n]{a} &= a^{1/n} \\
a^{p/q} &= (a^{1/q})^p = (\sqrt[q]{a})^p
\end{aligned}
$$

Propiedades de los exponentes II

Ejemplos

- $\sqrt[3]{8} = 8^{1/3} = (2^3)^{1/3} = 2^{3/3} = 2^1 = 2.$
- $(\frac{1}{5})^{-2} = (5^{-1})^{-2} = 5^2 = 25.$
- $\frac{3^{n+2}}{3^{n-2}} = 3^{n+2-(n-2)} = 3^4 = 81.$
- $\sqrt{\frac{16}{x^6}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{x^6}} = \frac{4}{x^{6/2}} = \frac{4}{x^3}.$
- $(-\frac{27}{8})^{2/3} = (-1)^{2/3}(27/8)^{2/3}.$

Usualmente las reglas se aplican a situaciones específicas cuando se está simplificando un modelo, cuando se calculan pendientes (derivadas, razones de cambio, integrales, etc.) Su utilidad se manifiesta como pasos prácticos en problemas más complejos.

Ejercicio de práctica

- Si z designa la demanda de café en toneladas por año y p es el precio de la tonelada, la relación aproximada entre ellos para un cierto periodo de tiempo es:

  $$z = 694.500p^{-0.3}$$

  Escribir la fórmula usando raíces.
- Calcular $625^{0.75}$ y $32^{-3/5}$
- Calcular $\frac{4 \cdot 3^{1/5}}{\sqrt[6]{81}}$

Desigualdades I

En matemáticas, y especialmente en economía, las desigualdades son tan frecuentes como las igualdades. Por eso es importante comprender cómo operar desigualdades.

A continuación se listan las principales propiedades de las desigualdades:

d.1 Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a + b > 0$ y $a \cdot b > 0$

d.2 $a \geq b$ significa que $a - b \geq 0$.

d.3 Si $a > b$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces $a + c > b + c$

d.4 $a \geq b$ y $b \geq c \implies a \geq c$

d.5 $a \geq b$ y $c > 0 \implies ac \geq bc$

d.6 $a \geq b$ y $c < 0 \implies ac \leq bc$

d.7 $a \geq b$ y $c \geq d \implies a + c \geq b + d$

Intervalos

- Si a y b son dos números reales diferentes, entonces $a < b$ o $b < a$. Los números que están entre a y b definen un intervalo. Si $a < b$, podemos definir los intervalos incluyendo o no los puntos finales:

Notación	Nombre del intervalo:	El intervalo consiste de los números que satisfacen:
(a, b)	abierto de a a b	$a < x < b$
$[a, b]$	cerrado de a a b	$a \leq x \leq b$
$(a, b]$	semiabierto por la izquierda de a a b	$a < x \leq b$
$[a, b)$	semiabierto por la derecha de a a b	$a \leq x < b$
$(a\infty)$	abierto no acotado	$x > a$
$(-\infty, b)$	abierto no acotado	$x < b$
$[a\infty)$	cerrado no acotado	$x \geq a$
$(-\infty, b]$	cerrado no acotado	$x < b$

En algunos papers económicos, hay restricciones entre variables económicas que se muestras como desigualdades:

Proposition 1. *A unique short-run equilibrium exists. In particular,*

- *if* $b - v - c \leqslant sN^1$, *then* $M_*^0 = N^0$ and $M_*^1 = N^1$;
- *if* $sN^1 < b - v - c \leqslant d + sN^1$, *then*

$$M_*^0 = N^0\left(1 - \lambda + \lambda\frac{v + c + sN^1}{b}\right) \quad (< N^0 \text{ if } N^0 \neq 0); \quad \text{and} \quad M_*^1 = N^1;$$

Valor absoluto

Si a es un número real, se denomina **valor absoluto** a la distancia del número a al 0. Esto quiere decir que el valor absoluto de un número siempre es mayor o igual a 0.

Valor absoluto y distancia

- $|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$
- La distancia entre a y b en la línea está dada por $|a-b|$

Ejemplos

- $|13| = 13$, $|-5| = 5$, $|0| = 0$. También se pueden tener desigualdades combinadas con el valor absoluto, que es muy común: Si $a \geq 0$, $|x| \leq a$ significa que $-a \leq x \leq a$.
- La distancia entre 4 y 8 es $|4-8| = |8-4| = 4$, mientras que la distancia entre -4 y 4 es $|-4-4| = |4-(-4)| = |4+4| = 8$.

Ejercicio de práctica

1. Probar que si $a \geq 0$ y $b \geq 0$ entonces $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$
2. Hallar todos los números x tales que $|3x - 2| \leq 5$

Expresiones algebráicas I

- Usualmente, cuando sustituímos letras por números en operaciones matemáticas, estamos haciendo uso del álgebra. Varias de las expresiones que hemos usado hasta este momento son algebráicas.

Ejemplos

- Una expresión algebraica es la identidad del producto interno bruto:

$$Y = C + G + I + Nx$$

- Otros ejemplos de expresiones algebráicas son los **polinomios**, como el siguiente:

$$3xy - 5x^2y^3 + 2xy + 6y^3x^2 - 3x + 5yx$$

- Cada uno de los símbolos que están entre las operaciones aritméticas se llaman **términos**. Los números de cada término (3, -5, 2, 6, -3 y 5) son los **coeficientes** de los términos.
- Dos términos donde lo único que es diferente es el coeficiente, como en $-5x^2y^3$ y $6y^3x^2$ (el orden del producto no importa) son **términos del mismo tipo** y se pueden simplificar.

Expresiones algebráicas II

- La manera de simplificar una expresión algebráica, es agregar todos los términos que son del mismo tipo. Por ejemplo, en la expresión anterior,

$$3xy - 5x^2y^3 + 2xy + 6y^3x^2 - 3x + 5yx = x^2y^3 + 10xy - 3x$$

Polinomios

Las expresiones algebráicas se pueden clasificar de la siguiente manera:

monomios: es una expresión algebráica que consta de un sólo término:

$$3a \qquad -5b \qquad \frac{x^2y}{4n^2}$$

binomios: consta de dos términos:

$$a+b \qquad x-y \qquad a^2-b^2$$

trinomios: expresión algebráica de tres términos:

$$ax^2+bx+c \qquad 5x^2-6y^3+\frac{a^2}{3}$$

polinomios: cualquier expresión algebráica que consta de más de un término. Los binomios, trinomios,etc son polinomios. El **grado absoluto de un polinomio** es el grado de su término de mayor grado (su mayor exponente). Por ejemplo, el siguiente polinomio tiene un grado absoluto de 7 y es de sexto grado con respecto a a y de cuarto grado con respecto a x:

$$a^6+a^4x^7-a^2x^4$$

Algunas identidades importantes

Las siguientes expresiones se llaman **identidades** porque son válidas para cualquier valor de las variables: son dos maneras de expresar el mismo término. A veces para las identidades se usa el símbolo '$\equiv$' en lugar del símbolo '$=$'.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &\equiv a^2+2ab+b^2\\ (a-b)^2 &\equiv a^2-2ab+b^2\\ (a+b)(a-b) &\equiv a^2-b^2\end{aligned}$$

Estas identidades aparecen con mucha frecuencia, tanto en estadística como en economía.

Ejercicios de práctica

Simplificar las expresiones siguientes:

- $(a^{1/3} - b^{1/3})(a^{2/3} + a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3})$
- $\frac{bx^{1/2} - (x-a)b\frac{1}{2}x^{-1/2}}{(bx^{1/2})^2} \quad (x > 0)$

Ecuaciones I

Ecuación

Una **ecuación** es una igualdad, en donde hay una o varias cantidades desconocidas (incógnitas) y que sólo es verdadera para algunos valores de esas incógnitas.

- Hay muchos tipos de ecuaciones en economía, con una o con más variables, o conjuntos de ecuaciones que deben cumplirse simultáneamente; algunas son fáciles de resolver, otras imposibles.
- La mejor manera de aprender a resolver ecuaciones, es aplicar las reglas que hemos visto hasta ahora, de manera sistemática, y resolver muchos, muchos problemas.
- El orden, cuidado y disciplina son fundamentales para poder resolver las ecuaciones con éxito y reducir posibles errores.
- En ocasiones, el problema más difícil no es resolver la ecuación, sino en plantear el problema específico.
- A continuación resolveremos algunos ejemplos.

Ecuaciones II

Ejemplo

Resolver la ecuación $3x + 10 = x + 4$.

$$
\begin{aligned}
3x + 10 &= x + 4 \\
3x + 10 - 10 &= x + 4 - 10 \quad \text{(restar 10 de ambos lados)} \\
3x &= x - 6 \\
3x - x &= x - x - 6 \quad \text{(restar } x \text{ de ambos lados)} \\
2x &= -6 \\
\frac{2x}{2} &= \frac{-6}{2} \quad \text{(dividir por 2 de ambos lados)} \\
x &= -3
\end{aligned}
$$

Ya con experiencia, es posible simplificar el proceso:

$$3x + 10 = x + 4 \iff 3x - x = 4 - 10 \iff 2x = -6 \iff x = -3$$

Ecuaciones III

Ejemplo

Resolver la ecuación $6p - \frac{1}{2}(2p-3) = 3(1-p) - \frac{7}{6}(p+2)$

$$\begin{aligned} 6p - p + \frac{3}{2} &= 3 - 3p - \frac{7}{6}p - \frac{7}{3} \\ 36p - 6p + 9 &= 18p - 7p - 14 \\ 55p &= -5 \\ p &= -\frac{5}{55} = -\frac{1}{11} \end{aligned}$$

Ecuaciones IV

Ejemplo

Una empresa manufactura un bien que cuesta producir \$400 por unidad. Además, la empresa tiene costos fijos de \$40,000. Cada unidad se vende en \$1500. ¿Cuántas unidades se deben vender para tener una utilidad de \$290,000?

Solución.

Podemos denotar como Q la variable que denota las unidades producidas. Entonces el retorno de la empresa es \$ $150Q$ y el costo total de producción es \$ $(400Q + 40000)$ Como la utilidad es la diferencia entre el retorno total y el costo total obtenemos la siguiente ecuación:

$$150Q - (400Q + 40000) = 290000$$

Resolviendo, la solución es $Q = 300$ unidades.

□

Las ecuaciones simultáneas pueden surgir, entre otras razones, para expresar que ciertas variables económicas están en equilibrio.

Ecuaciones V

Por ejemplo, se puede determinar el precio de equilibrio en un mercado con un sólo bien, que hace que las cantidades demandadas y ofrecidas sean iguales.
El siguiente ejemplo, supone que la relación entre las cantidades demandadas u ofrecidas y el precio del bien en una economía se da a través de una relación "lineal" (más adelante veremos qué significa exactamente).

Ecuaciones VI

Ejemplo de ecuaciones simultáneas

Resolver las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{array}{rcll} Q_d & = & Q_s & \\ Q_d & = & a - bP & \quad (a, b > 0) \\ Q_s & = & -c + dP & \quad (c, d > 0) \end{array}$$

Solución.

Hay tres métodos para resolver ecuaciones simultáneas: por sustitución, por eliminación y usando matrices (no lo vamos a considerar aquí). El método más sencillo en este ejemplo es el de eliminación.
Primero hacemos $Q_s = Q_d = Q$. Luego eliminamos Q usando las dos ecuaciones restantes: $a - bP = -c + dP \iff a + c = (b + d)P \iff P = \frac{a+c}{b+d}$
Falta resolver el valor de Q para este valor de P. Tomando cualquiera de las dos últimas ecuaciones: $Q = a - bP \iff Q = a - b\frac{a+c}{b+d} \iff \frac{ad-bc}{b+d}$.

□

Solución general de ecuaciones lineales simultáneas I

La forma más general de un sistema de ecuaciones lineales simultáeas es:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

donde a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 y c_2 son constantes. El método de eliminación busca encontrar un término común en ambas ecuaciones para restarlas y eliminar ese término común. Eliminemos y. Entonces podemos multiplicar la primera ecuación por b_2 y la segunda ecuación por b_1:

$$\begin{aligned} b_2a_1x + b_2b_1y &= b_2c_1 \\ b_1a_2x + b_1b_2y &= b_1c_2 \end{aligned}$$

Si restamos las ecuaciones término a término, se obtiene:

$$(b_2a_1 - b_1a_2)x = b_2c_1 - b_1c_2,$$

Solución general de ecuaciones lineales simultáneas II

y por lo tanto

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{b_2a_1 - b_1a_2}$$

siempre que $b_2a_1 - b_1a_2 \neq 0$.
Al hacer ahora el ejercicio similar con la variable y, obtenemos que:

$$y = \frac{c_2a_1 - c_1a_2}{b_2a_1 - b_1a_2}$$

Ejercicios de práctica

Resolver las siguientes sistemas de ecuaciones ecuaciones:

- $$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - y &= -1 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 3x + y &= -7 \\ x - 4y &= 2 \end{aligned}$$

- Calcular el precio de equilibrio para los siguientes datos:
  $D = 75 - 3P, \quad O = 20 + 2P$.

Ecuaciones de segundo orden I

- Frecuentemente, nos encontramos con ecuaciones que se pueden escribir de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Para las ecuaciones de esta forma, ya existe una fórmula que nos permite hallar los valores de x que la satisfacen. Esta fórmula se conoce popularmente como 'la fórmula del chicharronero':

Fórmula para polinomios de segundo grado

La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene como solución los siguientes valores de x:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las soluciones son reales y diferentes si $b^2 - 4ac > 0$, o es una solución única si $b^2 - 4ac = 0$ y las soluciones son imaginarias si $b^2 - 4ac < 0$.

NUNCA ME VOY
A OLVIDAR DE TI

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(POCOS ENTENDERÁN)

Ecuaciones polinomiales de orden n

Un ecuación polinomial de orden n se escribe de la forma:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$

Uno de los resultados más importantes de la matemática es el siguiente, que incluso tiene un nombre.

Teorema fundamental del álgebra

Todo polinomio de orden n tiene exactamente n posibles soluciones o raíces, no necesariamente distintas, y pueden ser reales o complejas. Esto equivale a decir que todo polinomio de órden n se puede escribir como:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = k(x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n)$$

para alguna constante k y $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

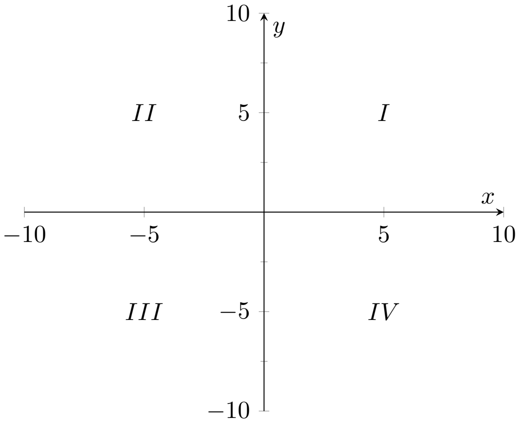
Ejercicios de práctica

- Un granjero tiene 1,000 metros de malla para cercar un terreno rectangular. Si un lado del rectángulo mide x metros, hallar el área cercada cuando $x = 150, 250, 350$ ¿Cuál es la mayor área cercada posible?
- Un objeto cuesta inicialmente \$2,000 y luego su precio aumenta en 5 %. Más adelante el objeto se rebaja un 5 %. ¿Cuál es el precio final?

Módulo 8. Herramientas Matemáticas II

El plano cartesiano

El producto cartesiano del conjunto de los reales consigo mismo define el **plano cartesiano**, que gráficamente es el plano coordenado que utilizamos usualmente para dibujar: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \text{ y } y \in \mathbb{R}\}$.



Relaciones I

A partir de la teoría de conjuntos y del producto cartesiano, es posible definir **relaciones**.

Relación

- Un subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$ se llama una relación de A a B.
- Una relación de A a A se llama una relación en A.

Ejemplo 1

Consideren un conjunto de alternativas de consumo,
$A = \{$Manzana, Plátano, Naranja$\}$ Un ejemplo de relación en A es la relación de preferencias: $R = \{$(Manzana,Plátano), (Plátano,Naranja), (Naranja, Manzana)$\}$ donde $(x, y) \in R$ si x es preferida a y.

Relaciones II

Ejemplo 2

Si A el conjunto de países {Mex, US, UK, Bra} y $B = \{1998, 1999, \ldots, 2015\}$
Podemos definir una relación en $A \times B$ como 'el país x tuvo recesión en los años y' y elementos de esta relación podrían ser
$R = \{(\text{Mex}, 1998), (\text{US}, 2008), (\text{Bra}, 1998), (\text{Bra}, 1999)\}$

Ejemplo 3

La relación R definida en $\mathbb{R}$ como $R = \{(x, y)|x < y\}$ define un subconjunto (o región) del plano cartesiano, ¿cuál es?

Ejemplo 4

Un tipo de relación muy común de la economía es la clasificación de empresas en sectores económicos.

Dominio y rango de una relación

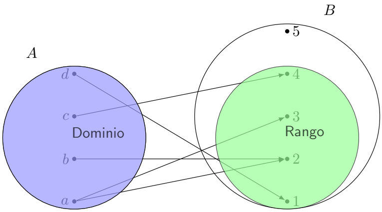
Dominio y Rango de una relación

Si R es una relación de A a B, entonces

- la **relación inversa** R^{-1} de B a A está dada por:

$$R^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in R\}$$

- El conjunto $Rango_R = \{b \in B | (a, b) \in R\}$ se conoce como la **imagen o rango de** A **bajo** R.
- El conjunto $Dominio_R = \{a \in A | (a, b) \in R\}$ es el **dominio** de R.



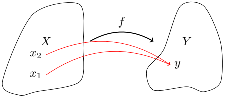
Funciones I

Las funciones son un tipo especial de relación, y son una de las herramientas más importantes de la matemática.

Funciones

Una **función** o **mapeo** f de un conjunto X a un conjunto Y, que se denota como $f : X \to Y$, es una relación de X a Y con la propiedad de que para cada $x \in X$, hay una única $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$.

Esto quiere decir que cada elemento de X sólo puede ir a un único elemento en Y. Bajo esta definición, vemos que la relación de la página anterior no es una función, ya que a va a dos elementos en B (el 2 y el 3). La siguiente relación sí es una función:



En otras palabras, si f es una función, $(x, y_1) \in f$ y $(x, y_2) \in f$ implican que $y_1 = y_2$.

Funciones II

- En una función, el dominio de f es X.
- Como hay un sólo elemento y para una cada x, en lugar de escribir $(x, y) \in f$ se puede escribir $f(x) = y$.
- x es usualmente llamada la **variable independiente**, o **argumento** de f o **variable exógena**; y y es llamada la **variable dependiente** o **respuesta** o **variable endógena**.

Gráficas de funciones I

Una función se puede definir de muchas maneras:

- a través de una fórmula
- a través de una tabla de datos que muestre la relación entre conceptos,
- a través de una gráfica en el plano cartesiano.

Ejemplo

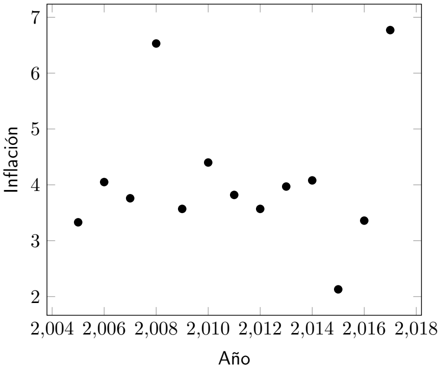
La siguiente tabla muestra la inflación anual dic-dic de 2005 a 2017 en México (datos con base segunda quincena de diciembre de 2010 =100):

Año	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**
Inflación	**3.33**	**4.05**	**3.76**	**6.53**	**3.57**	**4.40**	**3.82**	**3.57**	**3.97**	**4.08**	**2.13**	**3.36**	**6.77**

Fuente: Calculadora de Inflación Inegi

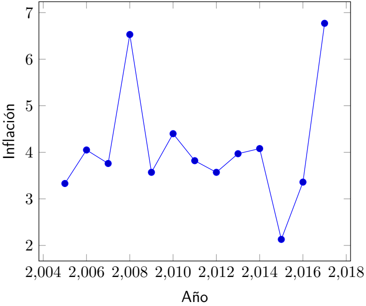
Una gráfica en el plano cartesiano de la función se vería de la siguiente manera:

Gráficas de funciones II



Sin embargo, en la práctica es común unir los puntos, aunque no sean parte de la función, para denotar una sensación de continuidad. Este es un ejemplo de una serie de tiempo.

Gráficas de funciones III

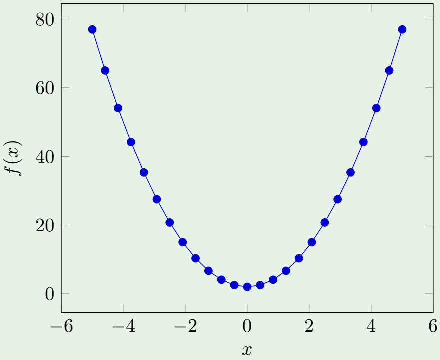


Más adelante, en la sección de estadística, regresaremos a ver qué tipos de gráficas son adecuadas a qué tipo de datos y revisaremos algunos criterios para comunicar mejor visualmente mensajes con datos.

Gráficas de funciones IV

Ejemplo de descripción de una función a través de una fórmula

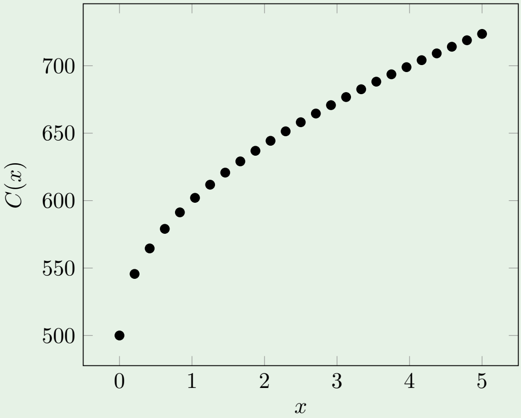
Consideremos la siguiente función $f(x) = 3x^2 + 2$. Podemos obtener su gráfica calculando los pares de puntos $(x, 3x^2 + 2)$ para diversos valores de x:



Gráficas de funciones V

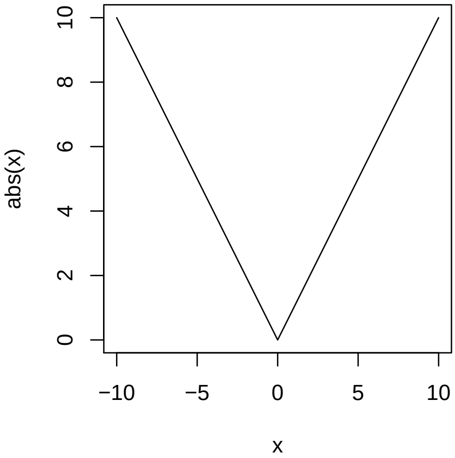
Ejemplo de función de costo

El costo total de producir x unidades de un producto está dado por $C(x) = 100\sqrt{x} + 500$ Notemos que el número de unidades no puede ser negativo y las unidades son números enteros positivos, por lo que el dominio de esta función es $\mathbb{N}$, así que la función va de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$.



Valor absoluto

Podemos pensar en el valor absoluto como una función: $f(x) = |x|$ y hacer su gráfica tabulando valores:



Funciones lineales I

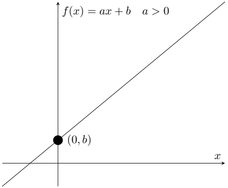
Una **función lineal** es una función de la forma

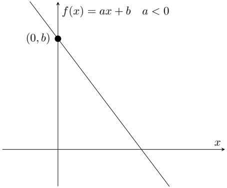
$$y = f(x) = ax + b \quad (a \text{ y } b \text{ son constantes})$$

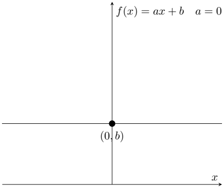
donde la constante b se llama *ordenada al orígen* y a es la *pendiente* de la función. La pendiente de una línea recta está asociada a la los cambios en la variable y por cambios en la variable x: cuando la variable independiente pasa de x a $x+1$, la variable y pasa de $f(x)$ a $f(x+1)$. La *razón de cambio* es entonces:

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} \quad = \quad \frac{a(x+1) + b - (ax+b)}{1} = a$$

Ejemplos de funciones lineales son las siguientes:







Funciones lineales II

Ejemplo

La función $C = 55.73x + 182,100$ indica la función de costo de una empresa de acero. C indica el costo anual y x es la producción de acero en toneladas anuales. La pendiente es 55.73, e indica que por cada tonelada que aumente la producción, el costo se incrementará por $55.73. La constante $182,100 representa el costo fijo anual de producción.

Funciones lineales III

Funciones de oferta y demanda

Consideremos las siguientes ecuaciones de oferta y demanda (en función del precio P):

$$\begin{aligned} D &= a - bP \\ O &= \alpha + \beta P \end{aligned}$$

En las ecuaciones a, b, α y β son parámetros positivos de las funciones de demanda y oferta respectivamente.
El precio de equilibrio P^e es el que hace que la oferta y la demanda sean iguales, $D = O$. Entonces:

$$a - bP^e = \alpha + \beta P^e \implies P^e = \frac{a - \alpha}{\beta + b}$$

La producción de equilibrio es $Q^e = a - bP^e$ por lo que $Q^e = \frac{a\beta + \alpha b}{\beta + b}$.

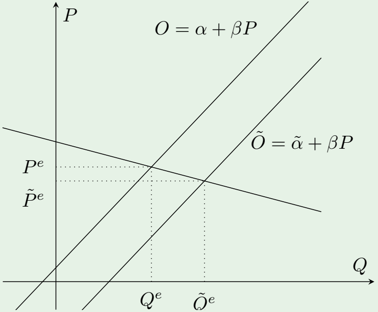
Funciones lineales (cont.)

Funciones de oferta y demanda (cont.)

Supongamos que hay un incremento de la oferta, tal que $O = \tilde{\alpha} + \beta P$, donde $\hat{\alpha} > \alpha$. Entonces el nuevo precio de equilibrio y la nueva producción de equilibrio son:

$$\tilde{P}^e = \frac{a - \tilde{\alpha}}{\beta + b}, \qquad \tilde{Q}^e = \frac{a\beta + \tilde{\alpha} b}{\beta + b}$$

¿Cómo es $\tilde{P}^e$ en relación con P^e? ¿$\tilde{Q}^e$ con relación a Q^e?



Propiedades de la línea recta

La linea recta es una de las funciones más simples, y también de las más usadas en economía. Tienen las siguientes características:

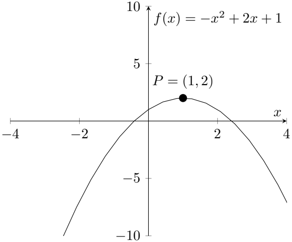
- Bastan dos puntos diferentes para definir una recta. Si $P = (x_1, y_2)$ y $Q = (x_2, y_2)$, entonces la pendiente es $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ siempre que $x_1 \neq x_2$. Para econtrar b, basta recordar que como (x_1, y_1) está sobre la recta, entonces satisface la ecuación
$$y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 + b$$
así que
$$b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1$$
- Si se tiene un punto (x_1, y_1) y la pendiente a conocidas, entonces la recta que pasa por ese punto y tiene esa pendiente es:
$$y - y_1 = a(x - x_1)$$
así que $b = y_1 - a x_1$.
- La ecuación general de una linea recta en el plano es de la forma (con la finalidad de poder incluir rectas verticales):
$$Ax + By + C = 0$$

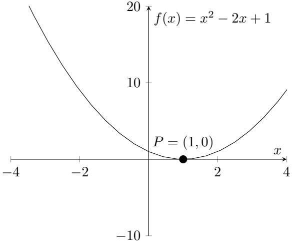
Funciones cuadráticas I

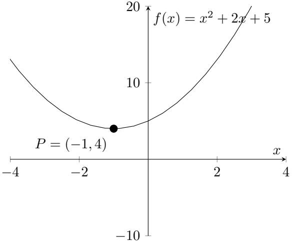
Ya hemos visto ecuaciones de segundo orden, desde el punto de vista de encontrar sus soluciones. Ahora las veremos desde el punto de vista funcional y de su representación gráfica. Una función cuadrática es de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a,\ b \text{ y } c \text{ son constantes y } A \neq 0)$$

Ejemplos de gráficas (llamadas **parábolas**) son las siguientes:







Funciones crecientes y decrecientes

Las siguientes propiedades de funciones son muy importantes.

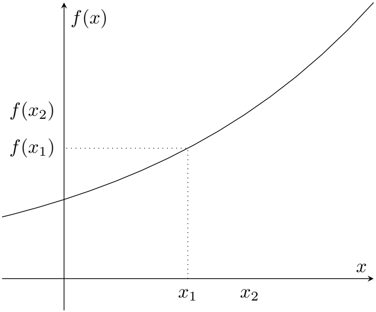
Funciones crecientes y decrecientes

Si $f(x)$ es una función $f(x)$ en el dominio $[a, b]$,

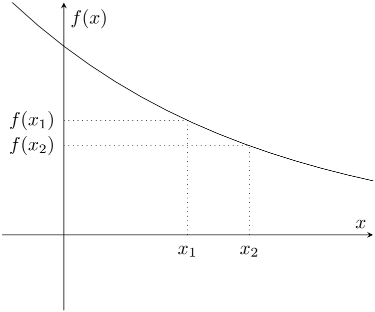
- Se dice que es **creciente** si para cualesquiera dos puntos x_1, x_2, donde $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, se cumple que $f(x_1) \leq f(x_2)$. Es lo mismo que decir que $f(x)$ crece si x crece.
- Se dice que es **decreciente** si para cualesquiera dos puntos x_1, x_2, donde $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, se cumple que $f(x_1) \geq f(x_2)$. Es lo mismo que decir que $f(x)$ decrece si x crece.

Funciones crecientes y decrecientes

Función creciente



Función decreciente



Funciones exponenciales

Funciones exponenciales

Las funciones exponenciales son funciones en las que una **base** constante es elevada a un **exponente** x. La forma general de una función exponencial está dada por:

$$y = a^x, \quad \text{donde } a > 0 \text{ y } a \neq 1.$$

Estas funciones satisfacen las siguientes propiedades:

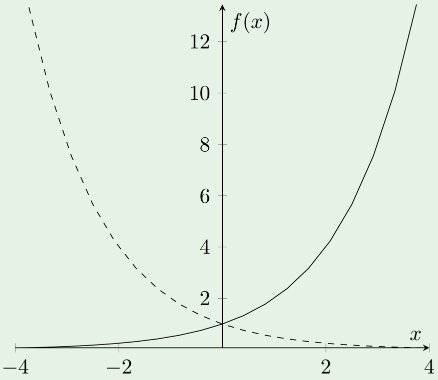
- El dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R}$; el rango de $f(x)$ es el conjunto de los números reales positivos, $\mathbb{R}^+$.
- Para $a > 1$ $f(x)$ es creciente, y para $0 < a < 1$ $f(x)$ es decreciente.
- Para $a > 0$, con $a \neq 1$, $f(0) = 1$.
- Para $a > 1$, $f(x)$ se acerca a 0 conforme x se hace más negativo y para $0 < a < 1$, $f(x)$ tiende a 0 conforme x tiende a ∞.
- Para $a > 1$ $f(x)$ crece sin límite (tiende a ∞) conforme x tiende a ∞. Para $0 < a < 1$, $f(x)$ tiende a ∞ conforme x tiende a $-\infty$.

La base que más se usa en Economía (y matemáticas) es la base e, y la función exponencial más importante es $f(x) = e^x$ que también se denota como $f(x) = \exp(x)$.

Funciones exponenciales

Ejemplos de funciones exponenciales

Las gráficas de las funciones $y = 2^x$ y $y = 2^{-x} = (1/2)^x$ se muestran en el intervalo $[-4, 4]$. ¿Cuál es cuál?



La función exponencial I

Una gráfica muy interesante es:

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Haciendo la tabulación de algunos de sus valores vemos lo siguiente:

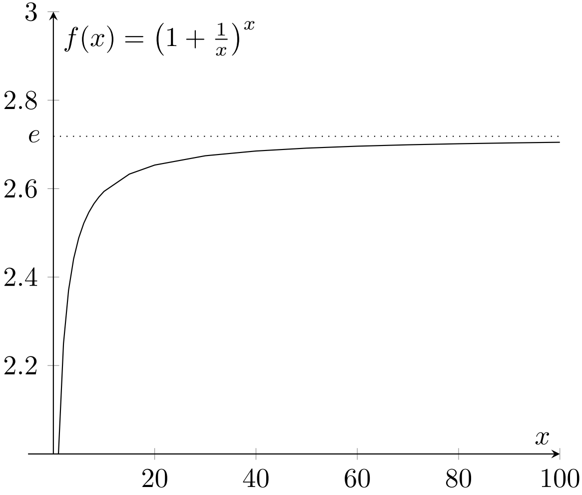
x	$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
1	$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$
10	$\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2.593742460$
100	$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2.704813829$
1000	$\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2.716923932$
10000	$\left(1 + \frac{1}{10000}\right)^{10000} = 2.71815$

Vemos que mientras más grande el valor de x, la función crece y se acerca a un valor fijo. Ese número es el número $e = 2.718281828459045235360287 4$.... Este acercamiento se escribe matemáticamente como un *límite*:

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

La función exponencial II

Podemos ver lo anterior gráficamente:



Logaritmos

Los logaritmos están íntimamente relacionados con las funciones exponenciales. Son útiles para simplificar cálculos que involucran funciones económicas.

Logaritmos

El logaritmo base a de x es el exponente y al que hay que elevar a para obtener el valor de x. En símbolos:

$$y = log_a(x) \iff a^y = x$$

Entonces, como función, $f(x) = log_a(x)$ es la función inversa de la función exponencial.

Por ejemplo, para encontrar $y = log_{10}100$, se debe cumplir $100 = 10^y$. Sabemos que $10^2 = 100$ así que $y = log_{10}100 = 2$.

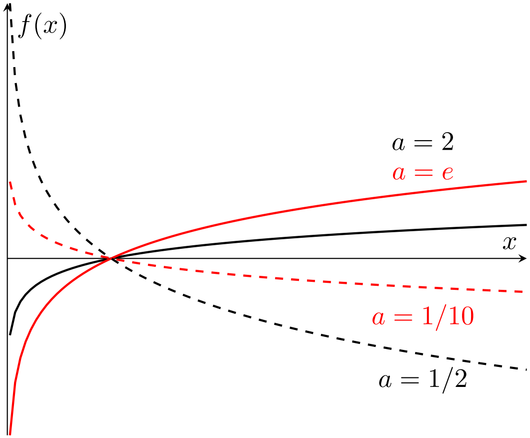
Logaritmos I

Propiedades de la función logaritmo $f(x) = log_a(x)$

- El dominio de la función es $\mathbb{R}^+$ y su rango es $\mathbb{R}$, $log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
- Si $a > 1$, $f(x)$ es creciente. Si $0 < a < 1$, $f(x)$ es decreciente.
- $f(1) = 0$, independientemente de la base.
- $log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$
- $log_a(x/y) = log_a(x) - log_a(y)$
- $log_a(x^n) = nlog_a(x)$
- $log_a(\sqrt[n]{x})s = \frac{1}{n}log_a(x)$

La siguiente gráfica muestra varios ejemplos de la función logarimo con diferentes bases:

Logaritmos II

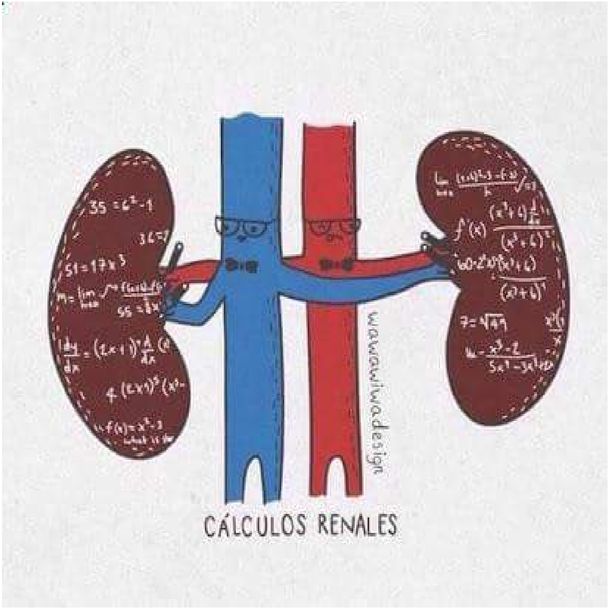


Ejercicios de práctica

- Más adelante revisaremos el concepto de interés compuesto, que tiene la siguiente fórmula:

  $$C_n = C_0(1+i)^n$$

  donde C_0 es el capital inicial, C_n es el capital acumulado después de n periodos, y donde i es la tasa de interés anual. ¿Cómo podemos despejar el número de periodos n? La fórmula obtenida permite calcular cuántos años o periodos tienen que transcurrir para obtener un capital final determinado a partir de un capital inicial.


wawawiwadesign
CÁLCULOS RENALES

Módulo 9. Herramientas Matemáticas III

Optimización

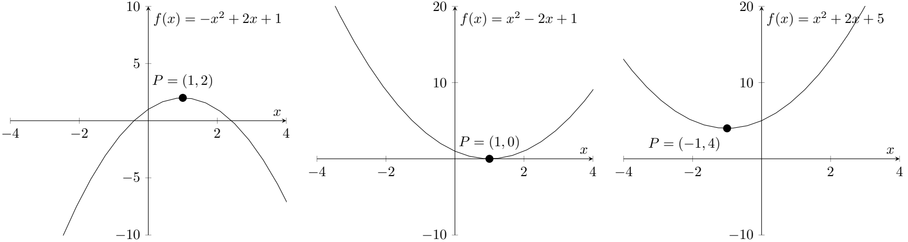
- **Optimizar** significa encontrar la mejor opción dentro de un conjunto de opciones. Usualmente se busca minimizar costos o maximizar ganancias.
- La economía matemática está muy relacionada con el problema de optimización. La economía es la ciencia de la elección, y los problemas de optimización son la forma en la que la elección se expresa matemáticamente.
- Sin embargo, la optimización requiere más herramientas y más conocimiento que el que se puede cubrir en un curso propedéutico. Por esta razón mostraremos algunos casos sencillos y para ciertas funciones que ilustran algunas ideas económicas básicas.

Óptimo de una función cuadrática

En muchos problemas es de interés encontrar el mínimo o máximo de la función cuadrática. La siguiente regla debe aplicarse:

Óptimo de una función cuadrática

Dada la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, entonces el óptimo de $f(x)$ se alcanza en el punto $P = \left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$, siendo un mínimo si $a > 0$ y un máximo si $a < 0$.



Ejemplo 1: Problema de monopolio I

Una empresa es la única vendedora del bien que produce, así que tiene el monopolio. Consideren los siguientes supuestos:

- El costo sigue una función cuadrática: $C = \alpha Q + \beta Q^2$, $Q \geq 0$, donde Q es su nivel de producción y $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ son parámetros.
- Para cada Q, el precio P sigue una función de demanda: $P = a - bQ$ donde $a > 0$ y $b \geq 0$
- El retorno total está dado por $R = PQ = (a - bQ)Q$.
- La ganancia total es
  $\pi(Q) = R - C = (a - bQ)Q - \alpha Q - \beta Q^2 = (a - \alpha)Q - (b + \beta)Q^2$

El monopolista quiere maximizar su ganancia $\pi(Q)$.

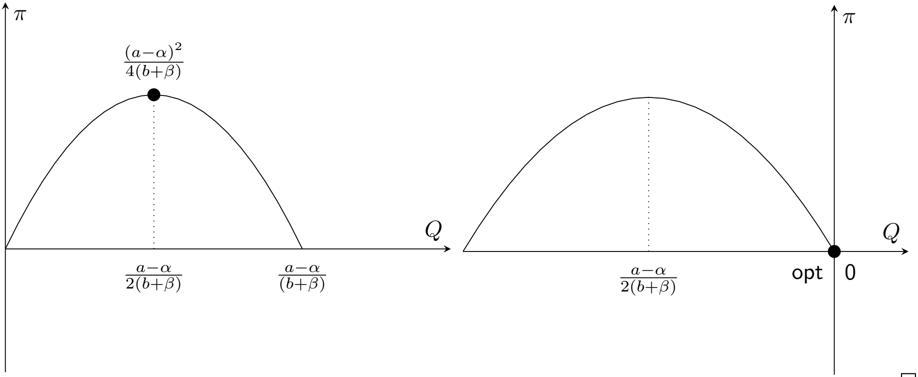
Solución.

De acuerdo a la optimización de funciones cuadráticas que vimos previamente, la máxima ganancia del monopolista se da cuando: $Q^* = \frac{a-\alpha}{2(b+\beta)}$ y el valor máximo de la ganancia es $\pi^* = \frac{(a-\alpha)^2}{4(b+\beta)}$.

Ejemplo 1: Problema de monopolio II

Los valores son válidos si $a > \alpha$. Si $a \leq \alpha$, quiere decir que la empresa no produce y por lo tanto $Q^M = 0$ y $\pi^M = 0$.

Caso $a > \alpha$: Caso $a \leq \alpha$:



□

Conceptos básicos de finanzas

- Revisaremos algunos de los conceptos básicos de las matemáticas financieras y de los problemas que se pueden resolver para tomar decisiones utilizando los conceptos matemáticos vistos previamente y algunos nuevos.
- Veremos el tema del valor del dinero en el tiempo y el precio del dinero.
- Partimos de la siguiente idea fundamental:

Valor del dinero en el tiempo

Un peso el día de hoy vale más que un peso mañana, debido a factores como:

- Consumo
- Riesgo (incertidumbre)
- Inversión
- Inflación
- ¿Otros factores?

- Si decide no utilizar su dinero hoy, debe tener una compensación por diferir su uso en el futuro. A esta decisión se le llama inversión.
  Cuando se decide sobre invertir o no, una empresa o un individuo tiene que decidir cuánto está dispuesto a recibir como compensación o interés, y comparar el valor del dinero hoy con el valor del dinero en el futuro.

Interés I

Tasa de interés

La tasa de interés es la compensación que se recibe por no utilizar hoy recursos económicos y utilizarlos en el futuro.
La tasa de interés es la renta que se paga por disponer una cantidad de dinero por un tiempo determinado. Representa el 'precio' del dinero.

El interés se puede calcular de dos maneras:

- **Interés simple**: es la renta que se paga sobre la cantidad prestada o invertida, y no sobre el interés pasado. Si i es la tasa de interés, C_0 la cantidad inicial y n el número de periodos, el valor final$F$ después de n periodos es

$$C_n = C_0(1 + n \cdot i)$$

- **Interés compuesto**: es la renta que se paga sobre la cantidad prestada incorporando los interéses que ya generados. Bajo las mismas variables que en la definición anterior:

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

Interés II

En la práctica, el interés compuesto es el más utilizado. Consideremos los siguientes ejemplos:

Ejemplo tipos de interés simple y compuesto

Si tienen C_0 =\$600,000 para invertir o prestar en este momento a 5 años, y la tasa de interés es del i =10 % anual, calcular la cantidad final y el interés al final del periodo considerando interés simple y compuesto.

Solución.

- Con interés simple: $C_n = 600,000(1 + 0.1 \times 5) = 900,000$, con un interés acumulado de \$ $300,000$ correspondientes a $60,000$ anuales por 5 años.
- Con interés compuesto: $C_n = 600,000(1 + 0.1)^5 = 966,306$ con un interés de \$ $366,306$ acumulados en un periodo de 5 años de manera compuesta.

□

Tasa de interés equivalente I

- La tasa de interés puede ser mensual, trimestral o de cualquier fracción de tiempo de un año.
- Un interés nominal de 12 % anual pero aplicado mensualmente con un 1 % mensual acumulativo no es lo mismo que un 12 % nominal aplicado anualmente:

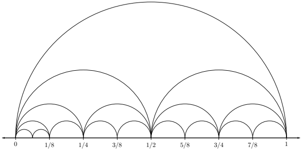
```
(1+.01)^12 #Tasa mensual de 1% durante 12 periodos

## [1] 1.126825

(1+.12) #Tasa anual nominal de 12%

## [1] 1.12
```

- De aquí surgen los conceptos de **tasa anual equivalente** y de **tasa convertible m periodos en el año**:



Tasa de interés equivalente II

- La **tasa anual equivalente** es la tasa anual que corresponde a una tasa convertible m periodos en el año:

$$TAE = (1 + \frac{i^{(m)}}{m})^m - 1$$

  En el ejemplo dado, la tasa convertible mensual es $i^{(12)} = 12\,\%$ y la TAE es $12.6825\,\%$.

- La **tasa convertible** m **periodos en el año** es la tasa de interés que se paga m periodos en un año expresada anualmente.

Interés: Triple igualdad

Triple igualdad

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = e^{\delta}$$

donde:

i es la tasa de interés anual equivalente nominal.

$i^{(m)}$ es la tasa de interés convertible.

δ es la tasa de interés instantánea

Esta ecuación ayuda a comparar ofertas como en el siguiente ejemplo

Comparación de inversiones

Tengo 4 ofertas para invertir mi dinero: ¿cuál me conviene?

1. 2 % mensual
2. 2 % bimestral
3. 3 % trimestral
4. 10 % instantánea

Para comparar, se pueden obtener las TAE de cada inversión.

Comparación de inversiones

```
# Primera inversión:
((1+.24/12)^(12)-1)*100

## [1] 26.82418

# Segunda inversión:
((1+.12/6)^6-1)*100

## [1] 12.61624

# Tercera inversión:
((1+.12/4)^4-1)*100

## [1] 12.55088

# Cuarta inversión:
(exp(.1)-1)*100

## [1] 10.51709
```

Ejemplo

¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para duplicar el capital invertido?

Se quiere calcular cuánto tiempo tiene que transcurrir para que se duplique un capital invertido de \$10,000 a una tasa de interés del 5 % anual.

Solución.

Sabemos que $C_n = C_0(1+i)^n$. De aquí podemos despejar n aplicando logaritmos:

$$\log(C_n) = \log(C_0) + n\log(1+i) \quad \Longrightarrow \quad n = \frac{\log(C_n) - \log(C_0)}{\log(1+i)}$$
$$= \frac{\log(C_n/C_0)}{\log(1+i)}$$
$$= \frac{\log(2)}{\log(1+i)}$$

Ya que $C_n = 20,000$ y $C_0 = 10,000$. En realidad, no requerimos tener el capital inicial cuando sabemos que queremos simplemente que se duplique.
Entonces n será igual (en años) a:

```
log(2)/log(1.05)
```

```
## [1] 14.2067
```

□

Ejercicios de práctica

- ¿Cuántos años se requieren para que \$2,000 invertidos al 5 % anual acumulen \$3,000?
- ¿En cuánto tiempo cualquier cantidad de dinero doblará su valor si es invertido al 12.5 %?
- Si \$4,000 invertidos por 10 años acumulan \$6,000, ¿cuál es la tasa de interés necesaria?
- Encontrar la tasa efectiva equivalente a una tasa de interés del 6 % convertible semestralmente.
- Si una cantidad de dinero se duplica en 9 años colocada a una cierta tasa de interés anual, ¿cuánto tiempo tardará en triplicarse a la misma tasa de interés?

Valor presente y valor futuro I

Valor futuro

Una analista financiera en una compañía de bienes raíces está pensando en recomendar una inversión en un terreno que cuesta \$85,000. Está segura de que el próximo año ese terreno costará \$91,000, una ganancia segura de \$6,000. Dado que la tasa de interés garantizada en el banco es de 10 %, ¿debería la compañía invertir en el terreno?

Solución.

Este ejemplo compara opciones de inversión. Si el dinero es invertido en el Banco, el siguiente año se tendrían:

$$85,000 \times (1 + 0.1) = 93,500$$

Como el Valor futuro es $\$93,500 > \$91,000$, entonces la recomendación es invertir en el Banco.

□

Valor presente y valor futuro II

Valor Futuro

La fórmula general del valor futuro en n periodos es:

$$VF = C_0 \times (1+i)^n$$

donde C_0 es el valor del dinero en el tiempo 0 (hoy) e i es la tasa de interés.

Valor Presente

La fórmula general del valor presente de n periodos es:

$$VP = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

donde C_n es el valor del dinero en el tiempo n e i es la tasa de interés.

Ejemplo y Ejercicio: Ecuación de valor

La **ecuación de valor** establece la relación de dos series de obligaciones valuadas en una misma fecha (fecha de valuación). Por ejemplo, resuelvan la siguiente condición

- B se compromete a pagar a A \$50,000 al final de 5 años, a cambio de recibir \$10,000 hoy, \$15,000 en dos años y una cantidad x al final del cuarto año, que permita que la operación sea equitativa para ambos, a una tasa del 5 % anual.

Números índice I

- La mayoría de los indicadores económicos provienen de encuestas, censos o registros administrativos y se presentan ya sea en unidades monetarias, de volumen u otras.
- En casi todos los casos, el dato por sí mismo en un periodo dado no tiene mucha relevancia; lo importante es *cómo ha cambiado a lo largo del tiempo*, *cómo se compara con otro país o cómo se comporta como proporción de alguna otra variable*.
- Los **números índice** se utilizan para expresar varios tipos de actividad económica, como: producción, precios, salarios, productividad, etc.

Números índice

- Los números índice son funciones que transforman una variable a un indicador que sirven para medir el crecimiento en el tiempo de esa variable de manera estandarizada.
- reflejan el crecimiento de la variable con respecto al valor que toman en un periodo base, típicamente un año o el promedio de años consecutivos, al que usualmente se le asigna el valor inicial de 100.

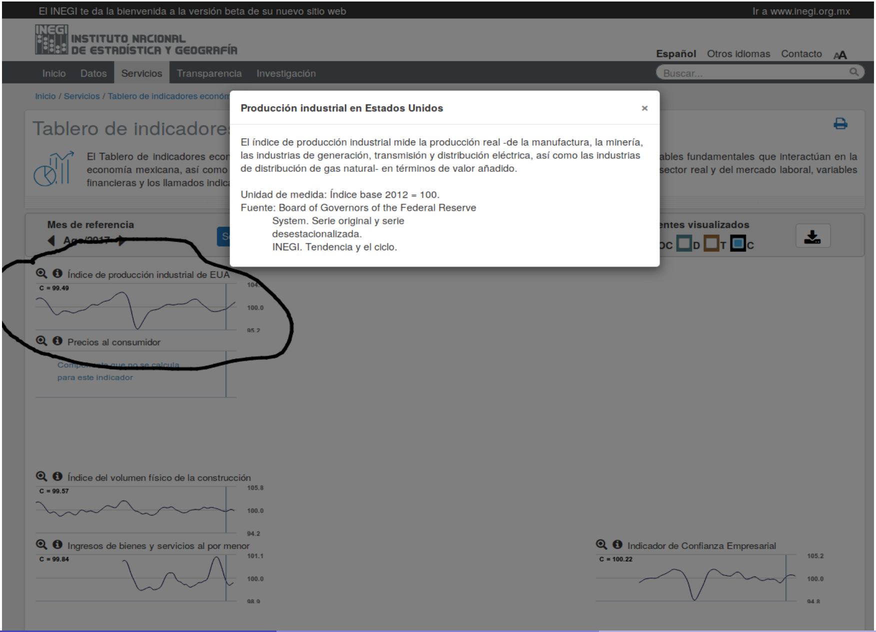
Números índice II

Ejemplo

- Un índice con valor de 100 en el periodo base y en otro periodo con valor de 95, quiere decir que el indicador para ese periodo (mes, trimestre, año) es 5 % menor al periodo base.
- Uno de 114 significa que el indicador es 14 % mayor al periodo base.
- La fórmula para el cambio porcentual entre dos periodos es:

$$\frac{I_2 - I_1}{I_1} = \frac{I_2}{I_1} - 1$$

Ejemplo: Tablero indicadores INEGI



Cambio de base o normalización

- Un índice puede *cambiarse de base* o *normalizarse* para facilitar un análisis en particular, o para estandarizar un conjunto de índices a una fecha particular. Un cambio de base no afecta las tasas de crecimiento.

Ejemplo de normalización de un índice

Supongamos que se tiene un índice con los siguientes valores mensuales, y que tienen base Ene=100:

```
x

##    Ene    Feb    Mar    Abr    May    Jun
## 100.00 105.00 109.20 112.48 119.22 125.19
```

Para cambiar el índice a base Feb=100, debemos multiplicar toda la serie por la constante que cumple $c \times 105 = 100$, o sea $c = 100/105 = 0.9524$

```
(100/105)*x

##      Ene      Feb      Mar      Abr      May      Jun
##  95.2381 100.0000 104.0000 107.1238 113.5429 119.2286
```

Índices reales

- Es muy común deflactar un índice nominal (precios corrientes) para tomar en cuenta el efecto de la variación de precios.
- **Deflactar** consiste en dividir un índice por otro índice de precios para reflejar unicamente las variaciones reales de algún tipo de actividad económica o lo que se conoce como "precios constantes".

Conversión a precios constantes

Supongamos que se x un índice nominal (a precios corrientes) con los siguientes valores mensuales, p es un índice de precios y que tienen base Ene=100:

```
x
```

```
##    Ene    Feb    Mar    Abr    May    Jun
## 100.00 105.00 109.20 112.48 119.22 125.19
```

```
p
```

```
##   Ene   Feb   Mar   Abr   May   Jun
## 100.0 102.1 103.8 104.9 106.2 107.5
```

Entonces el índice real a precios constantes a enero se calcula como:

```
100*x/p
```

```
##      Ene      Feb      Mar      Abr      May      Jun
## 100.0000 102.8404 105.2023 107.2259 112.2599 116.4558
```

Riesgo I

- Riesgo proviene del latín *risicare*, que significa atreverse o transitar por un camino peligroso. Usualmente se refiere a los peligros (pero también a las oportunidades) que se presentan en diferentes ámbitos.
- Usualmente el riesgo es interpretado como la *consecuencia* de un evento fortuito que nos genera una pérdida. Dicha pérdida puede medirse en términos monetarios, pero también en otras escalas (por ejemplo, reputacional).
- El origen de los riesgos se debe a la combinación de posibles causas o factores que generan el evento de riesgo:
  - factores humanos
  - organizacionales
  - de equipamiento/TI
  - externos
  - de mercado, etc.
- Otras definiciones de riesgo consideran al riesgo como la 'posibilidad' o *probabilidad* de ocurrencia de un evento fortuito con impacto negativo, y otras más como al evento mismo.

Riesgo II

- En todas las definiciones de riesgo hay por lo menos tres componentes básicos: una **medida de probabilidad**, una **medida de impacto o pérdida** y un **conjunto de eventos de riesgo**.


Nuclear Power Plant
Spider Farm
WHAT COULD POSSIBLY GO WRONG?

Factores de riesgo I

Factores de riesgo:

Son el conjunto de atributos o variables (usualmente aleatorias) $X_1, X_2, \ldots X_n$ que se encuentran asociadas (en términos funcionales) a un riesgo. En términos formales, los eventos de riesgo son el *espacio muestral* $\Omega = \{X_i | X_i$ es factor de riesgo,$i = 1 \ldots, n\}$.

Ejemplo

En medicina, para el riesgo de infarto, los factores de riesgo que se consideran típicamente son las siguientes variables:

- $X_1 =$ Edad
- $X_2 = 1$, si la persona es fumadora, 0 en otro caso
- $X_3 =$ peso
- $X_4 =$ Tipo de alimentación
- $X_5 = 1$ Si la persona hace ejercicio, 0 en otro caso
- $X_6 =$ horas de sueño por semana
- $\ldots$

Aversión al riesgo

Las personas pueden actuar diferente o tener diferentes preferencias ante la exposición a riesgos:

- Algunas personas les gusta sentir la adrenalina ante un riesgo, y están dispuestos a asumirlos para obtener posiblemente un beneficio, aunque exista también la posibilidad de una gran pérdidas: estas personas usualmente son **amantes del riesgo**.
- Las personas que son **neutras ante el riesgo** son aquellas que son indiferentes ante situaciones de alto o bajo riesgo, siempre y cuando tengan las misma expectativa de ganancias.
- Las personas que son **aversas al riesgo** preferirán siempre las opciones con menor riesgo, aunque no les generen necesariamente altas ganancias.

Situación de riesgo

Si a una persona se le deja elegir entre $100 inmediatamente o $200 o nada, dependiente un volado (si cae sol, se lleva los $200 y nada si cae águila), ¿qué acción elige cada tipo de persona?

Tipos de Riesgo I

Existen diferentes tipos de riesgos que se pueden clasificar en las siguientes categorías:

- **Riesgo de mercado**: la pérdida que puede sufrir un inversionista debido a la diferencia en los precios que se registran en el mercado o en movimientos de las variables relevantes del mercado (tasas de interés, tipos de cambio, etc.)
- El **riesgo de crédito**, que se define como la pérdida potencial producto del inclumplimiento de un compromiso de pago de un crédito.
- **Riesgo de liquidez**: las pérdidas que puede sufrir una institución al requerir mayor cantidad de recursos para financiar sus activos a un coto posiblemente inaceptable. El riesgo de liquidez se refiere también a la imposibilidad de transformar en efectivo un activo o portafolios.
- **Riesgo legal**: se refiere a la pérdida que se sufre en caso de que exista incumplimiento de una contraparte y no se pueda exigir vía jurídica, cumplir con los compromisos de pago.
- **El riesgo operativo** se refiere a fallas en los sistemas, procesos, en los modelos o en las personas que ejecutan esos procesos o sistemas. También se refiere a las pérdidas por fraudes o por falta de capacitación de algún empleado en la organización.

Tipos de Riesgo II

- El **riesgo de reputación** es el relativo a las pérdidas de credibilidad que podrían resultar como consecuencia de un desprestigio de una institución por errores, fraudes en la ejecución de una operación.