Simulación

2. Generación de variables aleatorias.
2.3 Procesos Estocásticos II

Jorge de la Vega Góngora

Departamento de Estadística,
Instituto Tecnológico Autónomo de México

Clase 7

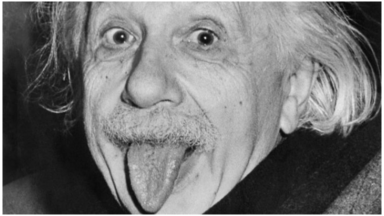
Proceso de Wiener

Antecedentes históricos

- Robert Brown (1773-1858) observó en 1827 partículas de polen en el microscopio y cuando éstas estaban suspendidas en agua se movían sin cesar en forma aleatoria.
- A principios del siglo XX se demostró que el movimiento de las partículas se debía al golpeteo constante de las moléculas del agua sobre las moléculas del polen.

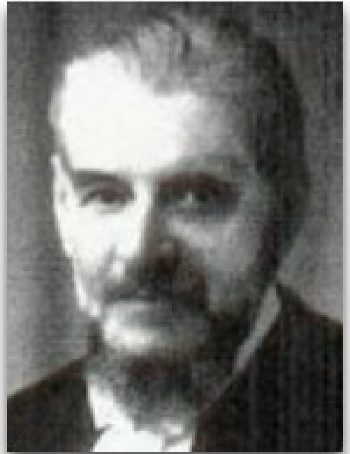
Antecedentes históricos

- En 1905, Einstein (1879-1955) proporciona la formulación matemática del movimiento Browniano, de la cual se deriva que la dispersión promedio del desplazamiento de la partícula en un líquido en un tiempo dado, es proporcional a dicho tiempo.

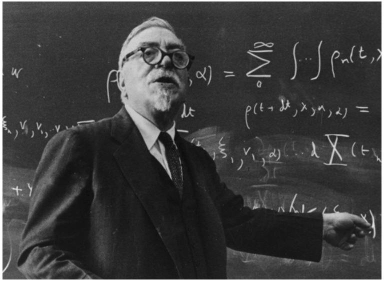


Antecedentes históricos

- En 1900, el matemático francés Louis Bachelier (1870-1946) describió en su tesis doctoral "Theorie de la spéculation" sobre el modelado del comportamiento aleatorio de los precios de las acciones de la Bolsa de París. Se anticipó a Einstein, pero su trabajo fue reconocido hasta 1960.



Antecedentes históricos



- Norbert Wiener (1894-1964) desarrolló la axiomática del movimiento Browniano en términos de filtraciones, estableciendo un contexto más formal para los movimientos Brownianos.

Procesos de Wiener (1923)

- Después de Bachelier y Einstein, Norbert Wiener fue uno de los primeros matemáticos en considerar el movimiento Browniano y lo estudió a fondo para formalizarlo. Entonces el movimiento Browniano o proceso de Wiener son en nuestro contexto, sinónimos.
- El proceso de Wiener es un ejemplo de un proceso Markoviano de espacio y parámetro continuo.

Proceso de Wiener

Se dice que un proceso estocástico $\{Z_t, t \in [0,T]\}$ sigue un **proceso de Wiener** (o proceso Browniano) si

1. $Z_0 = 0$
2. $\forall 0 \leq s < t \leq T$, $Z_t - Z_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$
3. $\{Z_t, t \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios independientes:
   - *incrementos estacionarios*: si $s, t > 0$, $Z_{t+s} - Z_s$ tiene la misma distribución que Z_t.
   - *incrementos independientes*: Si $0 \leq q < r \leq s < t$, entonces $Z_t - Z_s \perp\!\!\!\perp Z_r - Z_q$.
4. La función $t \mapsto Z_t$ es continua en $[0,T]$ con probabilidad 1.

A partir de la normalidad del proceso, el comportamiento está completamente definido. Como resultado, se puede ver, por ejemplo, que

- $Z_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ ya que $Z_t - Z_0 = Z_{t-0} = Z_t$.
- $\text{Var}(Z_t - Z_s) = t - s$ cuando $t \geq s$, ya que $Z_t - Z_s = Z_{t-s} - Z_0 = Z_{t-s}$ por incrementos estacionarios.
- $\text{Cov}(Z_t, Z_s) = \text{mín}\{s, t\}$

Solución.

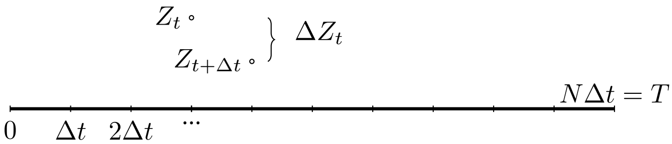
En general $\text{Cov}(Z_t, Z_s) = E(Z_t Z_s) - E(Z_t)E(Z_s) = E(Z_t Z_s)$.
Si $s < t$, podemos escribir en forma de incrementos $Z_t = (Z_t - Z_s) + Z_s$ para obtener:

$$
\begin{aligned}
E(Z_t Z_s) &= E(Z_s(Z_t - Z_s + Z_s)) \\
&= E(Z_s(Z_t - Z_s)) + E(Z_s^2) \\
&= E(Z_s)E(Z_t - Z_s) + \text{Var}(Z_s) = s
\end{aligned}
$$

Y por simetría, si $t < s$, $E(Z_t Z_s) = t$. Así que $\text{Cov}(Z_s, Z_t) = \text{mín}\{s, t\}$. $\square$

Simulación de un proceso Wiener I

- Para poder analizar cómo simular el proceso de Wiener, discretaizaremos el intervalo considerando particiones del intervalo de tiempo $[0, T]$ con N puntos equidistantes de ese intervalo $\{0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots, N\Delta t = T\}$.



- La diferencia $\Delta Z = Z_{t+\Delta t} - Z_t$ durante un intervalo de tiempo $\Delta t = (t + \Delta t) - t$ tiene distribución $\mathcal{N}(0, \Delta t)$. Entonces se puede representar como:

$$\Delta Z = \epsilon\sqrt{\Delta t} \qquad \text{donde} \qquad \epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Simulación de un proceso Wiener II

- Las variables $\Delta_1 Z$ y $\Delta_2 Z$ para dos intervalos ajenos $\Delta_1 t$ y $\Delta_2 t$ son independientes. Si $\Delta t = T/N$, entonces el incremento total en $[0, T]$ es la suma de sus componentes:

$$Z_T - Z_0 = \sum_{i}^{N} \epsilon_i \sqrt{\Delta t} \sim \mathcal{N}\left(0, T\right),$$

- Recursivamente, podemos escribir:

$$Z_{t_i} = Z_{t_{i-1}} + \sqrt{\Delta t}\epsilon$$

- Conforme $\Delta t \to 0$, $\Delta Z \to dZ$. Podemos representar un proceso de Wiener en esta notación como $\{dZ\}$.

Ejemplo

En aplicaciones financieras, las unidades de tiempo se miden en años de 365 días.

- Supongamos un periodo de $T = 20$ años. Entonces
  - $\Delta t = 1$ es un año, si la unidad de tiempo base es el año,
  - $\Delta t = 0.5$ si la unidad base es un semestre,
  - $\Delta t = 1/12$ si la unidad base es mensual,
  - Para datos diarios, $\Delta t = 1/365 = 0.0027397$.

  Considerando días, para el periodo dado se tiene una partición con $N = 20 * 365 = 7300$ puntos.
- Para estimar el cambio en la variable Z, es necesario simular una $\epsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$ y multiplicarla por $\sqrt{(1/365)} = 0.0523424$. Por ejemplo:

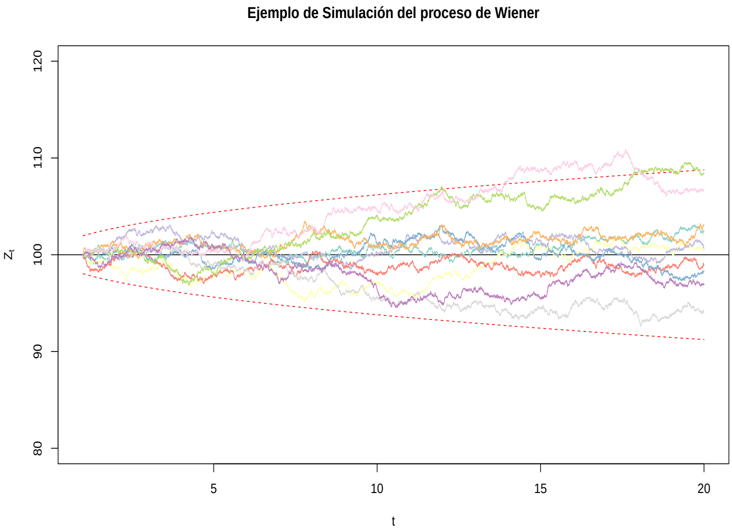
Paso i	Z_{t+i}	ϵ_i	$\Delta Z = 0.052 * \epsilon$	$Z_t = Z_{t+i} + \Delta Z$
0	100	0.45148	0.024	100.024
1	100.024	1.03918	0.054	100.078
2	100.078	0.61771	0.032	100.11
3	100.11	0.53732	0.028	100.138
$\vdots$				
7300	92.47	1.153	0.06035	92.53

- La gráfica generada se muestra a continuación, considerando 10 trayectorias.

Ejemplo I

```r
#Muestra de una trayectoria  en un periodo de T=20 años
#para un año Dt=1, seis meses Dt=0.5, un trimestre Dt=0.25, un mes Dt=1/12 etc.
z0 <- 100 # valor inicial
TT <- 20  # años a simular
Dt <- 1/(365) # partición diaria.
N <- TT/Dt    # número de observaciones (7300)
x <- seq(1, TT, length = N) # genera la partición de 0 a TT con N elementos
plot(x, rnorm(N), ylim = c(80,120), type = "n",
     main = "Ejemplo de Simulación del proceso de Wiener",
         xlab = "t", ylab = expression(Z[t]))
abline(h = 100)

# límites de confianza al 95%
lines(x, 100 + 1.96*sqrt(x), lty = 2, col = "red")
lines(x, 100 - 1.96*sqrt(x), lty = 2, col = "red")

# Genera 10 trayectorias
for(i in 1:10){
        eps <- rnorm(N, mean = 0, sd = 1)
        dz <- eps*sqrt(Dt)
        z <- z0 + cumsum(dz)
        lines(x,z,type="l",col=i)
}
```

Ejemplo II



Ejemplo de Simulación del proceso de Wiener
Z_t
80
90
100
110
120
5
10
15
20
t

Observaciones al ejemplo

- En la gráfica se muestran intervalos de 95 % de confianza para el proceso Z_t.
- En la práctica, una debilidad del proceso de Wiener para modelar trayectorias de precios, es que no muestra crecimiento y se comporta como una caminata aleatoria oscilando alrededor del valor inicial Z_0.
- Para resolver este problema, se puede generalizar el proceso de Wiener a un proceso con una tendencia o *deriva* (*drift*), es decir, una tendencia a alejarse del valor central, así como una varianza dada. Esto es equivalente a considerar la media y la varianza como funciones del tiempo.
- Al incorporar la tendencia en el proceso como función del tiempo, se obtiene una *ecuación diferencial estocástica* (SDE) que son el objeto de estudio del *cálculo estocástico*.

Proceso generalizado de Wiener

- Para constantes μ y σ, un proceso es de Wiener X_t con **deriva** (*drift*) μ y **difusión** σ, se denota por $X_t \sim BM(\mu, \sigma^2)$ si $Z_t = \frac{X_t - \mu t}{\sigma}$ es un proceso de Wiener estandar.
- Se puede construir como $X_t = \mu t + \sigma Z_t$. De aquí se sigue que $X_t \sim \mathcal{N}\left(\mu t, \sigma^2 t\right)$ y que X_t resuelve la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \mu\, dt + \sigma\, dZ_t$$

X_t se conoce como un proceso generalizado de Wiener

  - El término $\mu\, dt$ implica que x tiene deriva esperada de μ por unidad de tiempo. Sin el término $\sigma\, dZ$, la ecuación diferencial resultante es fácil de resolver:

$$dx = \mu\, dt \Rightarrow X_t = X_0 + \mu t$$

  - El término $\sigma\, dZ$ agrega "ruido blanco" o volatilidad estocástica a la trayectoria de X_t.
  - La versión discretizada de la ecuación nos da:

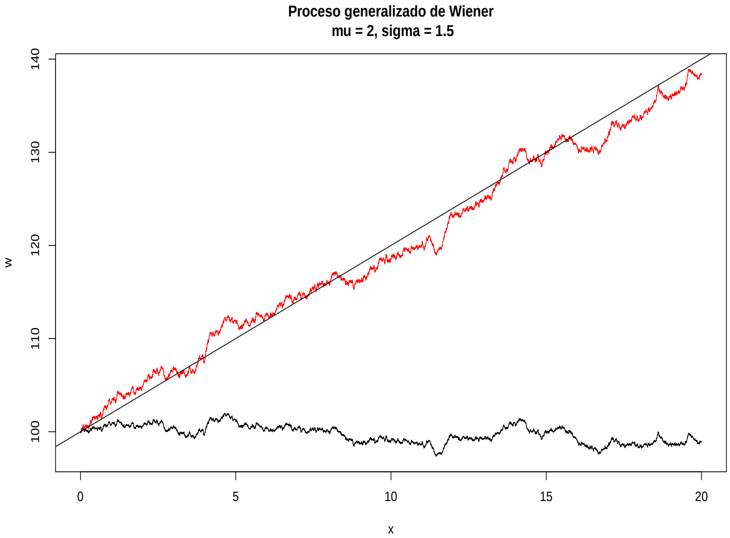
$$\begin{aligned} \Delta X &= \mu \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t} \\ \therefore \quad & \Delta X_t \sim \mathcal{N}\left(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t\right) \end{aligned}$$

Simulación de un proceso generalizado de Wiener I

El siguiente código simula un proceso generalizado de Wiener

```
#Proceso generalizado de Wiener: modifica el anterior
mu <- 2
sigma <- 1.5
z0 <- 100      # valor inicial
TT <- 20       # periodos a simular
Dt <- 1/(365) # partición diaria.
N <- TT/Dt     # número de periodos a simular en el horizonte de TT años
x <- seq(0, TT, length = N + 1)
eps <- rnorm(N, mean = 0, sd = 1)
dz <- eps*sqrt(Dt)
w <- c(z0, z0 + cumsum(mu*Dt + sigma*dz))
z <- c(z0, z0 + cumsum(dz))

# gráfica
plot(x, w, type = "l", col = "red", main = "Proceso generalizado de Wiener\n mu = 2, sigma = 1.5",
ylim = c(min(z), max(w)), xlim = c(0, 20))
lines(x, z, type = "l") #última trayectoria simulada del proceso anterior
abline(coef = c(z0, mu))
abline(h = 0)
```

Simulación de un proceso generalizado de Wiener II



Ejemplo: Aplicación a resultados en deportes (Stern, 1994) I

En un deporte (por ejemplo, basquetbol) entre dos equipos, se puede cuantificar la ventaja del equipo local calculando la probabilidad de que éste equipo gane dado que lidera el partido por k puntos cuando ha transcurrido un porcentaje t del tiempo de duración del juego $(0 \leq t \leq 1)$.

- Para $0 \leq t \leq 1$ Sea $X_t =$ Diferencia en tantos entre el equipo local y el visitante después de que t porcentaje del juego ha transcurrido.
- Se supone que $dX = \mu\, dt + \sigma\, dz$, donde μ representa la ventaja del equipo local por unidad de tiempo y σ^2 es la varianza por unidad de tiempo
- Con datos observados en 493 juegos de la NBA en 1992, se estimó $\hat{\mu} = 4.87$ y $\hat{\sigma} = 15.82$.

Ejemplo: Aplicación a resultados en deportes (Stern, 1994) II

- Si $p(k,t)$ es la probabilidad de que el equipo local gane el juego, dado que se tienen k puntos de ventaja en $t < 1$, ésta se puede calcular como:

$$
\begin{aligned}
p(k,t) &= P(X_1 > 0 | X_t = k) = P(X_1 - X_t > -k) \\
&= P(X_{1-t} > -k) = P(\mu(1-t) + \sigma Z_{1-t} > -k) \\
&= P\left(Z_{1-t} < \frac{k + \mu(1-t)}{\sigma} \right) \\
&= P\left(Z_t < \frac{\sqrt{t}(k + \mu(1-t))}{\sigma\sqrt{1-t}} \right)
\end{aligned}
$$

La última igualdad se cumple porque $Z_t \sim \sqrt{\frac{t}{1-t}} Z_{1-t}$ (¿porqué?).

- Se puede construir una tabla con la siguiente estructura (tarea):

t	$k=-5$	$k=-2$	$k=0$	$k=2$	$k=5$
0					
0.25					
0.5					
0.75					
1					

Puente Browniano

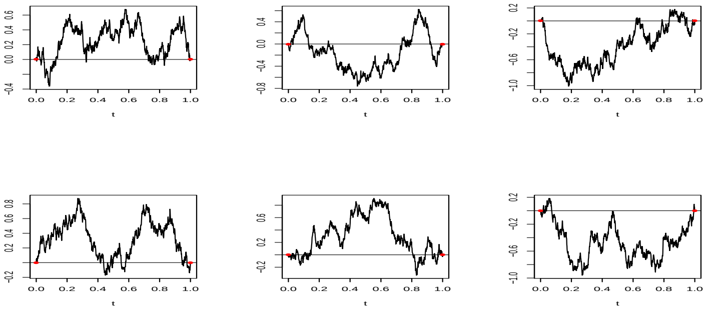
Puente Browniano

Si dZ es un proceso estándar de Wiener, el proceso condicional $\{B_t\}_{t\in[0,1]}|B_1 = 0$ se define como un *puente Browniano*. El puente Browniano tiene valor 0 en los puntos extremos del intervalo $[0,1]$.

- Es fácil probar que para un puente Browniano, $E(B_t) = 0$ para $t \in [0,1]$ y $\text{Cov}(B_t, B_s) = \text{mín}\{s,t\} - st$.
- Por otra parte, se puede probar que el proceso $B_t = Z_t - tZ_1$ para $t \in [0,1]$ es un puente Browniano si $\{Z_t\}$ es un proceso estándar de Wiener. Con este resultado, se obtiene un método para simular un puente Browniano a partir de un proceso de Wiener.

Para simular un puente Browniano:

```
par(pty = "s"); par(mfrow = c(2, 3)); par(mar = c(1, 3, 1, 3))
n <- 1000             # número de puntos en partición
t <- seq(0, 1, length  =n) # partición del [0,1]
for(i in 1:6){
        Z <- c(0, cumsum(rnorm(n-1)))/sqrt(n)
        B <- Z - t*Z[n]
        plot(t, B, type = "l")
        abline(h = 0); points(c(0, 1), c(0, 0), col = "red", pch = 16)
}
```



Proceso de Wiener geométrico I

Para modelar fenómenos de ciertas aplicaciones como en el contexto financiero, se requieren modelos un poco más elaborados o complejos.

- Supongamos que S_t representa el precio de un instrumento financiero en el tiempo t.
- El rendimiento del instrumento es el cambio porcentual en el precio, así que, cuando no hay volatilidad, se debería cumplir la siguiente ecuación, bajo un escenario de tasas constantes:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu\, dt$$

La ecuación diferencial anterior tiene solución dada por $S_t = S_0 e^{\mu\, t}$ con S_0 una constante que representa el precio del activo en el tiempo inicial.

Proceso de Wiener geométrico II

- Introduciendo volatilidad, el precio de un instrumento financiero se puede ver como la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dz \iff dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dz$$

  donde μ es el rendimiento en la unidad de tiempo considerada y σ es la volatilidad en esa unidad de tiempo. Esta ecuación representa un proceso de Wiener geométrico.

- La solución a esta ecuación se obtiene a través del cálculo estocástico, como veremos más adelante.

Ejemplo

Supongamos que una acción que no paga dividendos tiene un rendimiento anual de 15 % y una volatilidad anual de 30 %, con precio al tiempo $t = 0$ de $S_0 = 100$. Entonces su ecuación se puede expresar como:

$$\frac{dS}{S} = 0.15dt + 0.30dz$$

En versión discreta,

$$\frac{\Delta S}{S} = 0.15\Delta t + 0.30\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

Para una semana, $\Delta t = 7/365 = 0.0192$. Entonces

$$\Delta S = 100(0.15(0.0192) + 0.30\sqrt{0.0192}\epsilon = 0.288 + 4.155\epsilon$$

Entonces, el incremento del precio en una semana es una variable aleatoria con distribución $\mathcal{N}\left(0.288, 4.155^2\right)$

Proceso de Wiener geométrico

Sea $\{Z_t | t \geq 0\}$ un proceso generalizado de Wiener con tendencia μ y volatilidad σ^2. El proceso $\{S_t | t \geq 0\}$ definido como solución a la ecuación:

$$dS = \mu S\, dt + \sigma S\, dz$$

es un proceso de Wiener geométrico.

Lema de Itô (1954)

El proceso de Itô extiende el proceso generalizado de Wiener:

$$dS = a\,dt + b\,dz$$

permitiendo que las constantes a y b sean funciones tanto del tiempo como del propio proceso S:

$$dS = a(S,t)\,dt + b(S,t)\,dz$$

Lema de Itô

Si G es una función de S y t, entonces G sigue un proceso de Itô dado por la expresión:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial S}bdz$$

El lema de Itô es útil para encontrar procesos de funciones del proceso subyacente de interés.

Ejemplo: Aplicaciones a rendimientos I

- En el caso de rendimientos, un modelo más adecuado que el proceso de Wiener geométrico es de la forma $G = log(S)$ donde S es un proceso geométrico: $dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dz$. En este caso,

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \qquad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

  Por el lema de Itô aplicado a $dS = \mu S dt + \sigma S dt$,

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dz$$

  Por lo tanto:

$$d \log S = (\mu - \sigma^2/2)dt + \sigma dz$$

  que es un proceso de Wiener generalizado.

Ejemplo: Aplicaciones a rendimientos II

- Noten entonces que S, el proceso de Wiener geométrico es lognormal, por lo tanto, se puede escribir como:
$$S_t = S_0 e^{Z_t}$$
donde Z_t es un proceso generalizado de Wiener con deriva μ y varianza σ^2.
- Para simular, usamos la versión discretizada:
$$S(t+\Delta t) = S(t)\,\text{exp}[(\mu - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}], \quad \epsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$$

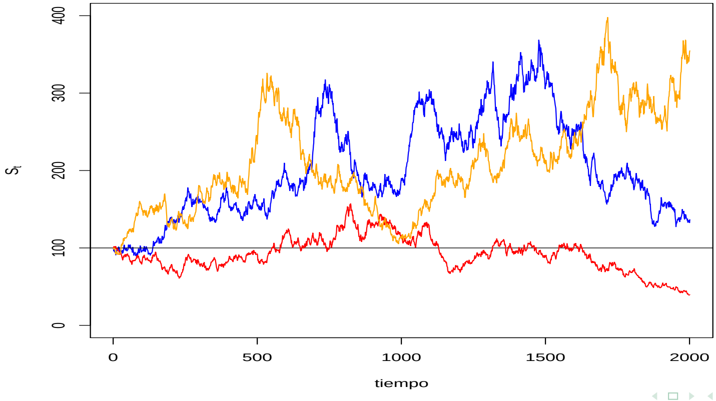
Código para simular un proceso lognormal o proceso de Wiener geométrico

```
BGeo <- function(n, TT, mu, sigma, S0 = 100){
# Función para generar un proceso Browniano Geométrico
# n es el número de puntos de partición del intervalo [0,TT]
# mu es el drift y sigma la volatilidad
dt <- TT/n #incremento de los intervalos para cubrir [0,TT]
S <- S0 #valor inicial
for(i in 2:(n+1)){ S <- append(S, S[i-1]*exp((mu - sigma^2/2)*dt + sigma*sqrt(dt)*rnorm(1))) }
return(S)
}

# Por ejemplo:
BGeo(n = 100, TT = 1, mu = 0.1, sigma = 0.3, S0 = 100)

  [1] 100.00000  99.33864  95.48619  97.16218 100.14262 101.78981 103.53846
  [8] 102.46856  98.75715  94.69429  97.92890  96.42960  96.98574  94.81777
 [15]  93.60803 101.12107 103.18143 108.80000 108.72584 113.16076 112.40363
 [22] 121.81791 125.49791 134.64035 134.26742 133.78305 134.04180 130.12001
 [29] 129.47235 126.86453 129.38968 129.43114 128.19615 131.93132 135.50339
 [36] 143.05656 144.42526 145.99951 150.56234 151.28961 146.32049 146.58657
 [43] 144.09719 143.94428 147.16838 149.01154 155.89559 158.42985 161.51398
 [50] 156.44623 161.05574 164.75692 161.05541 161.72463 171.81054 167.90404
 [57] 164.62084 167.65601 160.39891 158.87511 157.25144 166.04506 160.86765
 [64] 159.43641 151.50155 149.38752 147.60816 150.61874 153.14177 147.54083
 [71] 155.77082 153.03075 153.08804 151.58380 163.16013 166.05044 163.45374
 [78] 156.59495 162.06079 162.17884 165.86610 164.54588 168.69676 172.46315
 [85] 170.18849 158.01703 153.73942 147.77642 150.56466 145.98512 139.77145
 [92] 137.98117 140.79175 144.22391 144.98180 145.46097 143.56595 149.09253
 [99] 148.25651 152.83491 159.16422
```

Ejemplo

Consideremos tres realizaciones independientes del precio de un instrumento con valor inicial $S_0 = 100$, rendimiento 0.1 y volatilidad de 0.3: Considerando la función Bgeo de la lámina anterior:

```
plot(BGeo(2000, 10, 0.1, 0.3, 100), type = "l", ylim = c(0, 400), col = "blue",
         xlab = "tiempo", ylab = expression(S[t])); abline(h = 100)
lines(BGeo(2000, 10, 0.1, 0.3, 100), col = "red")
lines(BGeo(2000, 10, 0.1, 0.3, 100), col = "orange")
```



Aplicación de los procesos geométricos: valuación de derivados

Activos financieros derivados

Productos derivados

Un derivado es un contrato sobre características de un activo financiero, que se denomina *activo subyacente*.
Los activos subyacentes pueden ser otros activos financieros o bienes como el oro, o productos como el petróleo, o bien, precios o tasas de otros instrumentos.

Ejemplos de derivados incluyen las opciones, los swaps, los futuros o forwards, y los warrants.

Opciones I

Opciones

Las opciones son instrumentos financieros que le dan al poseedor o comprador (posición larga) el derecho, mas no la obligación, de comprar, vender, recibir, entregar, activar o desactivar otros activos (instrumentos, derivados, efectivo, etc.), a cambio de pagar una prima al vendedor (posición corta).

Para poder valuar y delimitar los beneficios de la opción, se necesita definir cada uno de los siguientes conceptos, entre otros:

- subyacente
- precio de ejercicio (strike)
- barreras (absorbentes, reflejantes)
- tipo de ejercicio (americana, europea, asiatica, bermuda)
- tiempo a vencimiento
- tiempo a liquidación
- Mercado donde se intercambia (Chicago, local, Bloomberg, Reuters)
- Tipos de garantías (para el vendedor)

Opciones básicas

- Las opciones son los instrumentos que dan a su tenedor el derecho para comprar o vender un activo en un precio específico hasta una fecha de vencimiento indicada. El precio específico de la entrega se conoce como el *precio de ejercicio* y es denotado por K.
- Las opciones para comprar son *opciones call*, las opciones para vender son las *opciones put*. Las opciones solamente son ejercidas si generan beneficios.
- Los *forwards* por el contrario, implican la obligación de comprar o vender y pueden generar beneficios o pérdidas.

Call Europeo

Una opción Call con un precio de ejercicio X y fecha terminal T le da al tenedor el derecho de *comprar* el subyacente a un precio X en el tiempo T.

1. En la fecha T, el call puede estar 'dentro el dinero': Si el precio del subyacente $S_T > X$
   - Compra el subyacente a X y véndelo al precio del mercado S_T
   - Obtienes una ganancia de $S_T - X > 0$
   - ¡Ejerce la opción para obtener una ganancia!
2. En la fecha T, el call puede estar 'fuera del dinero': el precio del subyacente $S_T < X$.
   - Puedes comprar el subyacente en X y revenderlo por S_T
   - Obtienes una ganancia de $S_T - X < 0$
   - ¡Si se ejerce la opción se puede llegar a una pérdida!
   - Es mejor no ejercer la opción, se tiene una ganancia de 0.

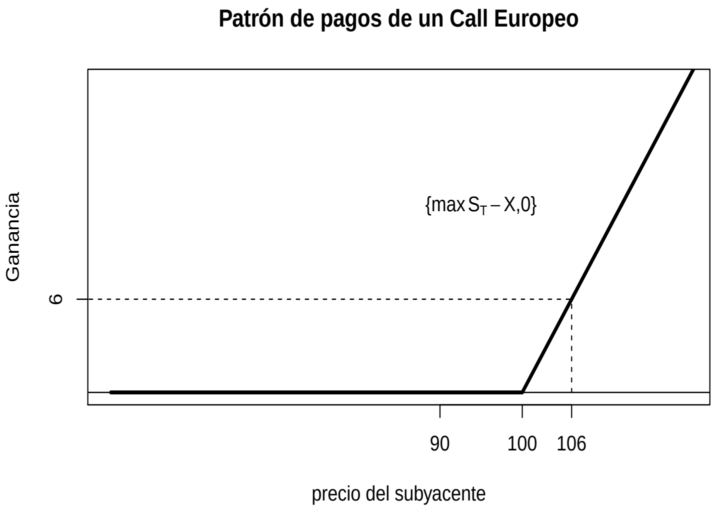
Ejemplo de opciones Call

Una opción call con precio de ejercicio \$100 y fecha terminal Junio 30, 2017 le da el derecho al tenedor de comprar el subyacente a un precio de \$100 en Junio 30, 2017.

1. Si el precio del subyacente $S_T > 100$, ejerce la opción y obtiene un pago de $S_T - 100 > 0$
2. Si el precio del subyacente $S_T \leq 100$, es mejor no ejercer la opción y obtener ganancia de 0.

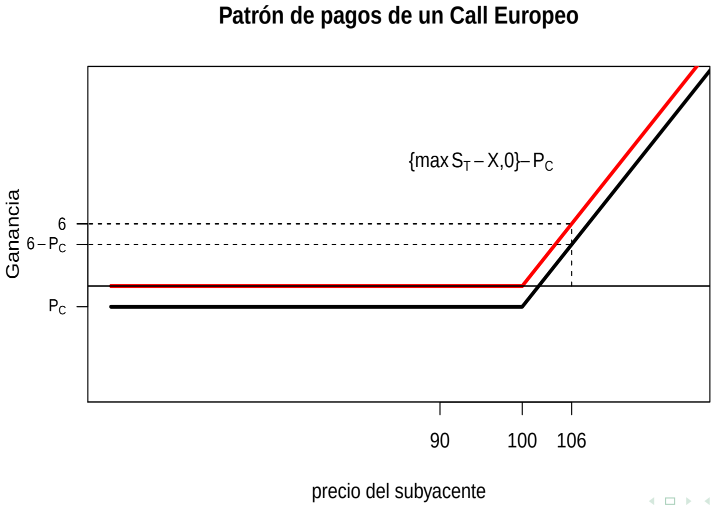
Precio del subyacente	80	90	100	110	120
Ganancia de la opción $\max(S_T - 100, 0)$	0	0	0	10	20

Gráfica de un Call



Gráfica de un Call

En realidad, recuerden que necesitan comprar el call a algún precio P_C



Cómo valuar opciones europeas

- El comprador de una opción Call *espera* tener ganancias, en la fecha de expiración:

$$e^{-r_f T}\mathsf{E}\left[\max\{S_T - X, 0\}\right] - P_C \geq 0$$

- El vendedor de la opción Call tiene ganancias esperadas:

$$P_C - e^{-r_f T}\mathsf{E}\left[\max\{S_T - X, 0\}\right] \geq 0$$

- Tanto el comprador como el vendedor están de acuerdo en hacer su transacción si ambos tienen ganancias esperadas de cero:

$$P_C = e^{-r_f T}\mathsf{E}\left[\max\{S_T - X, 0\}\right]$$

Con esta condición, ya es posible estimar a través de MonteCarlo, el valor esperado de la opción.

Algoritmo MC para valuar opciones call europeas

1. Para $j = 1, \ldots, N$
   - 1.a Simular el precio del subyacente $S_{t,j}$ de $t = 0$ a $t = T$ para cada j, y obtener el valor de la opción en T: $C_{T,j} = \text{máx}\{S_{T,j} - K, 0\}$.
   - 1.b Descuenta el valor usando la tasa que corresponda para descontar a valor presente: ya sea tasa variable:

$$C_{0,j} = \exp\left\{-\int_0^T r_u du\right\} C_{T,j}$$

   o tasa fija:

$$C_{0,j} = \exp(-rT)C_{T,j}$$

2. Obtener el precio descontado promedio

$$\hat{C}_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} C_{0,j}$$

con error estándar $se(\hat{C}_0) = \frac{\sigma_{\hat{C}_{0,j}}}{\sqrt{N}}$ y $\hat{\sigma}_{C_0} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum(C_{0,j} - \hat{C}_0)^2}$

En el caso de una opción europea en particular

$$\hat{C}_0 = \exp(-rT)\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} \text{máx}\{S_{T,j} - K, 0\} = \exp(-rT)\hat{E}(\text{máx}\{S_T - K, 0\})$$

Ejemplo de valuación I

Consideremos una opción sobre una acción cuyo valor actual es $S_0 = \$1.00$ La opción expira en T días y el precio strike es K. Consideramos una tasa de interés constante r anual y el precio se comporta como hemos visto, con un movimiento Browniano geométrico con volatilidad anual σ. La siguiente función calcula el precio del Call Europeo.

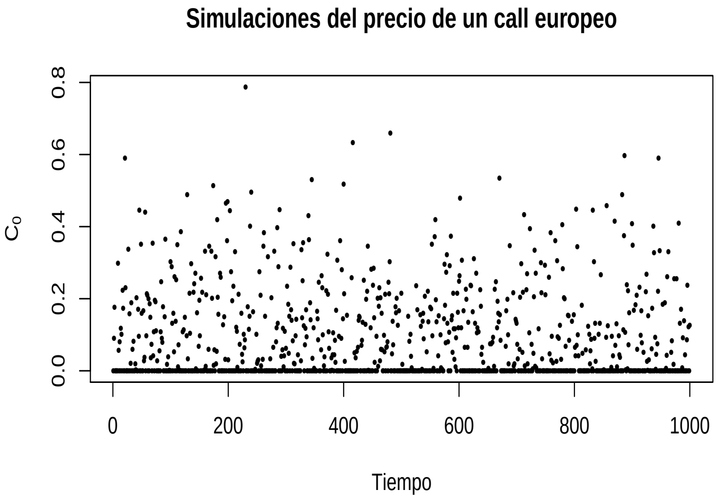
```
pcalleur <- function(S0,TT,K,mu,sigma){
                                # calcula el valor de un call europeo con los parámetros dados.
                                p <- BGeo(n=TT,TT=250,mu=mu/250,sigma=sigma/sqrt(250),S0=S0) #considerando 250 días hábiles en un año
                                return(exp(-TT/250)*max(p[TT]-K,0))
                        }
```

Ahora podemos simular varias corridas para determinar el valor de la opción: si $r = 0.005$, $T = 63$, $\sigma = 0.30$, $K = 1$, $S_0 = 1$:

Ejemplo de valuación II

```
z <- z1 <- NULL
for (i in 1:1000){ z<- append(z, pcalleur(S0 = 1, TT = 63, K = 1, mu = 0.05, sigma = 0.2))}
PC <- mean(z); c(PC, PC + c(-1,1)*sd(z))

[1]  0.08821953 -0.03689465  0.21333371

for (i in 1:10000){ z1<- append(z1,pcalleur(S0 = 1, TT = 63, K = 1, mu = 0.05, sigma = 0.2))}
PC1 <- mean(z1); c(PC1, PC1 + c(-1,1)*sd(z1))

[1]  0.08425457 -0.03508495  0.20359409

plot(z, pch = 16, cex = 0.5, main = "Simulaciones del precio de un call europeo",
         ylab = expression(C[0]), xlab = "Tiempo")
```

Ejemplo de valuación III



Valor en Riesgo

Definición de Valor en Riesgo

Definición de VaR

El valor en Riesgo (VaR) es una medida estadística de riesgo que estima la pérdida máxima que podría registrar un portafolio de activos en un intervalo de tiempo dado y con cierto nivel de probabilidad y de confianza.

Definición de Valor en Riesgo

Definición de VaR

El valor en Riesgo (VaR) es una medida estadística de riesgo que estima la pérdida máxima que podría registrar un portafolio de activos en un intervalo de tiempo dado y con cierto nivel de probabilidad y de confianza.

- Esta metodología fue promovida y difundida en J.P. Morgan en 1994, que desde entonces se ha convertido en un estándar a nivel mundial para medir riesgos financieros en general.

Definición de Valor en Riesgo

Definición de VaR

El valor en Riesgo (VaR) es una medida estadística de riesgo que estima la pérdida máxima que podría registrar un portafolio de activos en un intervalo de tiempo dado y con cierto nivel de probabilidad y de confianza.

- Derivado de este concepto de medición y administración de riesgo, se creó *RiskMetrics*, que salió de J.P. Morgan, para mejorar la metodología de medición de riesgo.

Definición de Valor en Riesgo

Definición de VaR

El valor en Riesgo (VaR) es una medida estadística de riesgo que estima la pérdida máxima que podría registrar un portafolio de activos en un intervalo de tiempo dado y con cierto nivel de probabilidad y de confianza.

- Virtualmente, en todas las instituciones financieras se ha adoptado el VaR como la medición de riesgo fundamental diaria.

Ejemplo: Calculo del Var

El Valor en Riesgo corresponde al cuantil de nivel α de la distribución de pérdidas y ganancias

- Consideremos los datos:

```
precios <- read.csv("~/Dropbox/data/Book data/datosVaR.csv",sep=" ",header=T)
head(precios)

      fecha  sp500 ftse100 nikkei225   cac40 dax100 usd.bp usd.yen usd.eur
1 01-Ene-97 740.74  4118.5  19361.35 2315.73 422.62 1.7125  0.0086  1.3002
2 02-Ene-97 737.01  4057.4  19361.35 2256.97 417.76 1.6943  0.0087  1.2969
3 03-Ene-97 748.03  4089.5  19361.35 2282.76 419.28 1.6865  0.0086  1.2772
4 06-Ene-97 747.65  4106.5  19446.00 2306.67 422.32 1.6930  0.0086  1.2794
5 07-Ene-97 753.23  4078.8  18896.19 2301.69 422.64 1.6946  0.0087  1.2794
6 08-Ene-97 748.41  4087.5  18680.38 2331.62 424.86 1.6880  0.0086  1.2714
```

- Ahora consideremos sus rendimientos ($r_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$):

```
n <- dim(precios)[1]
rendimientos <- (precios[2:n,-1]-precios[1:(n-1),-1])/precios[1:(n-1),-1]
rendimientos <- cbind(fecha=precios[-1,1],rendimientos)
head(rendimientos)

      fecha        sp500       ftse100    nikkei225        cac40
2 02-Ene-97 -0.005035505 -0.0148354984  0.000000000 -0.025374288
3 03-Ene-97  0.014952307  0.0079114704  0.000000000  0.011426824
4 06-Ene-97 -0.000508001  0.0041569874  0.004372112  0.010474163
5 07-Ene-97  0.007463385 -0.0067454036 -0.028273681 -0.002158956
6 08-Ene-97 -0.006399108  0.0021329803 -0.011420821  0.013003489
7 09-Ene-97  0.008604909 -0.0001223242 -0.032467755  0.007488356
        dax100        usd.bp     usd.yen       usd.eur
2 -0.0114996924 -0.0106277372  0.01162791 -0.0025380711
3  0.0036384527 -0.0046036711 -0.01149425 -0.0151900686
4  0.0072505247  0.0038541358  0.00000000  0.0017225180
5  0.0007577193  0.0009450679  0.01162791  0.0000000000
6  0.0052526973 -0.0038947244 -0.01149425 -0.0062529311
```

Ejemplo: Calculo del Var (cont.)

- Si suponemos que nuestro portafolio de inversión tiene la siguiente composición (en USD):

sp500	ftse100	nikkei225	cac40	dax100	usd.bp	usd.yen	usd.eur
3000	1000	100000	3000	1500	2000	11000	9000

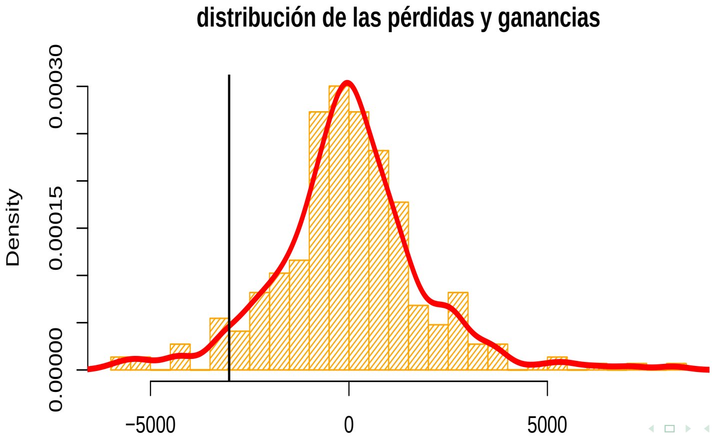
- La posición de pérdidas y ganancias (en USD) estará dada por el producto del vector de posiciones por los rendimientos de cada día:

```
w0 <- c(3000,1000,100000,3000,1500,2000,11000,9000)
pyg <- as.data.frame(as.matrix(rendimientos[,-1]) %*% w0)
pyg <- cbind(fecha=rendimientos[,1],PyG=pyg)
head(pyg)
```

```
      fecha          V1
2 02-Ene-97   -39.50555
3 03-Ene-97  -179.84820
4 06-Ene-97   505.35344
5 07-Ene-97 -2687.26652
6 08-Ene-97 -1302.75952
7 09-Ene-97 -3192.93274
```

Gráfica del VaR

```
hist(pyg[,2],breaks=40,density=30,col="orange",main="distribución de las pérdidas y ganancias",xlab="PyG",prob=T)
lines(density(pyg[,2],na.rm=T),col="red",lwd=4)
var05 <- quantile(pyg[,2],.05,na.rm=T)
abline(v=var05,lwd=2)
```



Método de Monte Carlo para calcular el VaR

- El método de Monte Carlo se aplica a casos en que se quiere calcular el VaR de productos derivados, como futuros, opciones y swaps. En derivados muy complejos, es el método más eficaz para medir el riesgo.
- En este modelo, generamos precios de acuerdo al modelo de Proceso de Wiener geométrico que hemos visto antes para calcular los precios futuros de los instrumentos en el portafolio y se usan para calcular las pérdidas y ganancias.
- Uno de sus inconvenientes es que requiere el uso intensivo de la computadora, y puede llegar a ser un problema serio en portafolios que son muy grandes.

Generación de escenarios

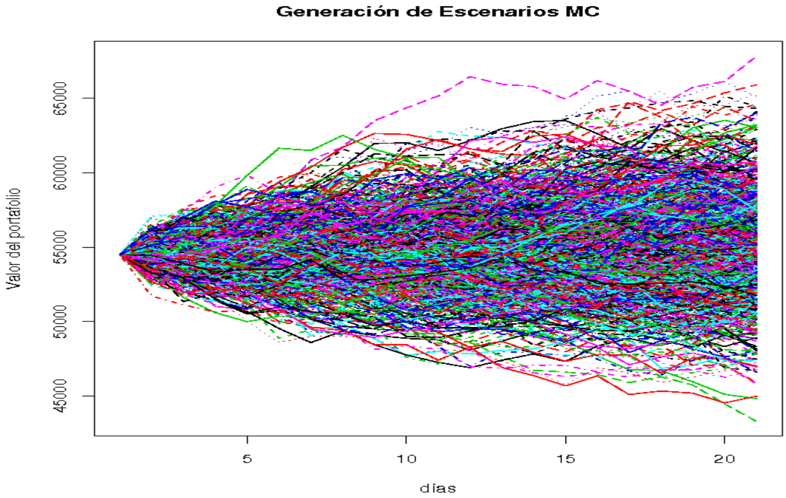
- La ecuación del modelo para el rendimiento del portafolio es recursiva. Para crear escenarios sobre las pérdidas y ganancias de valor del portafolio, se generan números aleatorios normales y se calcula la fórmula del valor del portafolio para cada día que se está simulando.
- Con los datos obtenidos se puede construir una tabla como la siguiente:

día	Valor del Portafolio	ϵ	PyG
0	54,498.00		
1	54,209.00	-0.40663	-289.00
2	54,070.23	-0.21405	-138.77
3	53,384.53	-0.92730	-685.69
...	...	...	...
19	55,186.28	-1.08720	-836.79
20	54,252.31	-1.22843	-933.97

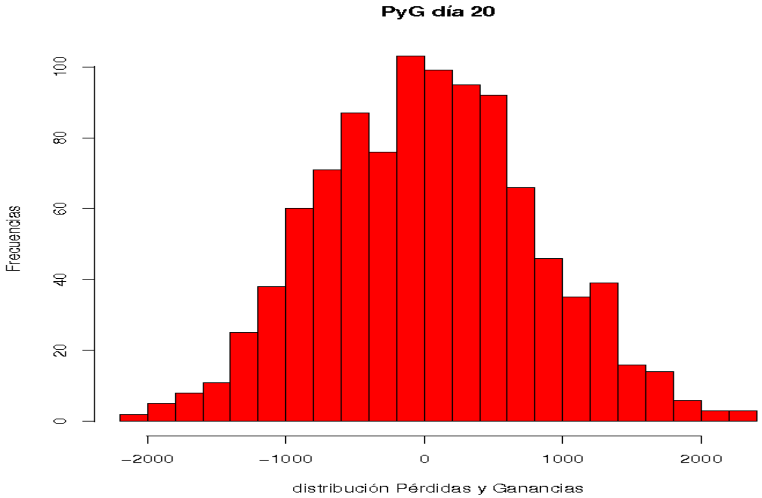
Generación de escenarios

- La tabla anterior muestra los resultados para *un solo* escenario. Cada trayectoria que se genera es llamada escenario en la administración de riesgos.
- Para calcular el VaR, se requiere generar un gran número de *escenarios*. En la práctica es usual simular $B = 1,000$ o más.
- Las trayectorias de valores del portafolio se muestran en la siguiente página. Con estos escenarios, se grafíca un histograma de las pérdidas y ganancias estimadas para el portafolio el día 20. Este histograma corresponde a una estimación de la distribución real de las pérdidas y ganancias que se pueden esperar.

Escenarios de valores del portafolio.



Histograma de Pérdidas y Ganancias.



- El valor en Riesgo es simplemente el cuantil que se requiera de la distribución de las pérdidas y ganancias estimadas.
- En nuestro ejemplo, podemos calcular varios cuantiles para comparar:

```
> quantile(PyG[20,],c(0.01,0.02,0.05,0.10))
1%         2%         5%        10%
-1639.583 -1483.272 -1204.660  -947.672
```

- Entonces, bajo condiciones normales del mercado, la pérdida que no será excedida en 99 % de los casos es \$1,639. En este sentido es la máxima pérdida esperada (en 99 % de los casos).
- Para calcular el VaR, podemos usar los precios y calcular las pérdidas y ganancias, o también es posible que usemos la distribución de los rendimientos esperados del portafolio.