

# Simulación para Riesgos

## 2. Generación de variables aleatorias.

### 2.3 Procesos Estocásticos

Jorge de la Vega Góngora

Departamento de Estadística,  
Instituto Tecnológico Autónomo de México

Viernes 6 de octubre de 2017

# Procesos estocásticos

# Procesos estocásticos

- Un proceso estocástico es un modelo matemático del comportamiento en el tiempo de un fenómeno aleatorio.
- En simulación es una herramienta fundamental para modelar diferentes tipos de situaciones, y prácticamente todos los modelos de generación de variables aleatorias nos sirven para simular fenómenos aleatorios complejos:
  - Modelos de mercado: precios de activos, tasas de interés, tipos de cambio, índices bursátiles, etc.
  - Modelos de series de tiempo: precipitación mensual, estado de un proceso industrial, etc.
  - Modelos de inventarios, líneas de espera.
  - Sistemas dinámicos.
  - Fenómenos físicos: emisión de partículas radioactivas, etc.
- Una de las principales características de un proceso estocástico es que permite modelar *dependencia* de variables aleatorias, a diferencia del supuesto de una muestra aleatoria en estadística, así como de *comportamientos límite*.

# Procesos estocásticos

Sea  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espacio de probabilidad donde  $\Omega$  es un espacio muestral,  $\mathfrak{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra sobre  $\Omega$  y  $P : \mathfrak{F} \rightarrow [0, 1]$  es una medida de probabilidad. Sea  $\mathfrak{T}$  un conjunto de índices (finito o infinito).

## Proceso Estocástico

Un *proceso estocástico* es una función  $X : \Omega \times \mathfrak{T} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\forall t \in \mathfrak{T}$ ,

$$X_t : \omega \mapsto X(\omega, t) \equiv X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

es una función  $\mathfrak{F}$ -medible (i.e. es una variable aleatoria).

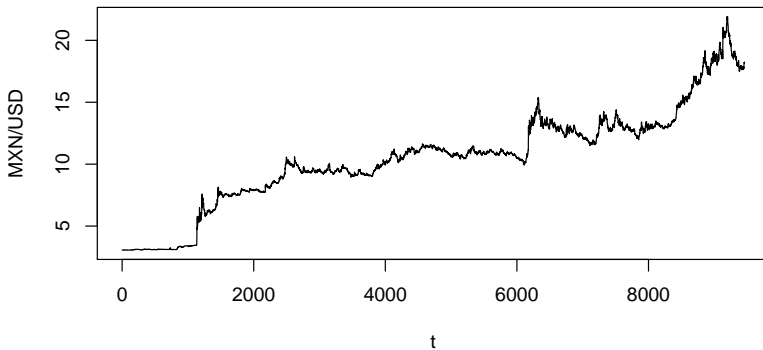
- En la mayoría de las notaciones se obvia el uso del espacio muestral, y entonces se denota a la variable aleatoria como  $X_t$ .
- Para una  $\omega$  dada,  $t \mapsto X(\omega, t) : T \rightarrow \mathbb{R}$  es una *función muestral* o *realización* del proceso. Usualmente estas realizaciones es lo que estudian las series de tiempo.
- Se interpreta a  $t$  como tiempo y se le llama a  $y_t$  el estado del proceso al tiempo  $t$ . Si el conjunto de índices es un intervalo, se dice que el proceso es de *parámetro continuo*, mientras que si es un conjunto numerable, se dice que el proceso es de *parámetro discreto*.

## Ejemplos de realizaciones de procesos estocásticos: series de tiempo

- Una serie de tiempo es una realización de un proceso estocástico donde el conjunto de índices  $\mathcal{T} = T$  es un conjunto de valores reales positivos.
- La serie de tiempo que toma  $T$  valores se puede representar como la sucesión  $y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_T}$ , o bien, con la siguiente expresión:  $\{y_t\}_{t \in T}$ .
- Usualmente, una serie de tiempo se visualiza mediante la gráfica  $\{(t, y_t)\}$  y uniendo los puntos que son consecutivos en el tiempo (aunque en realidad esto es una simplificación que es muy burda en ocasiones).

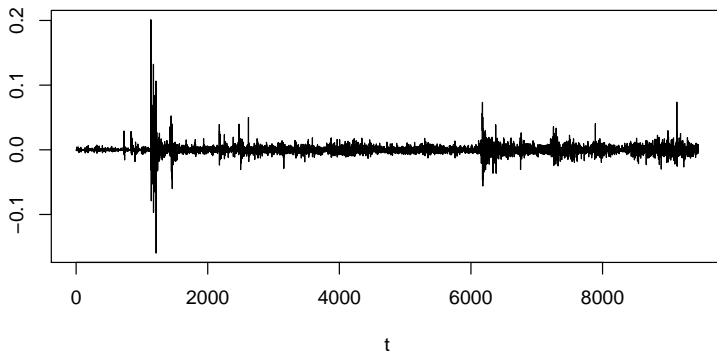
# Ejemplos: tipos de cambio

## Tipo de cambio diario



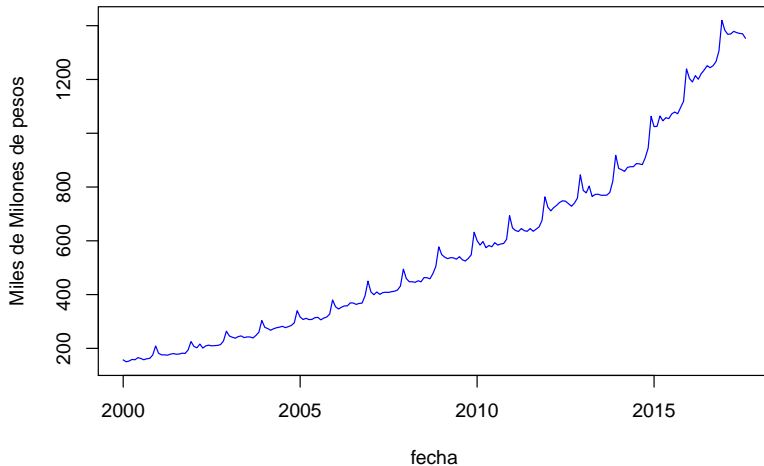
# Ejemplos: cambios en tipos de cambio

diferencias del logaritmo del tipo de cambio



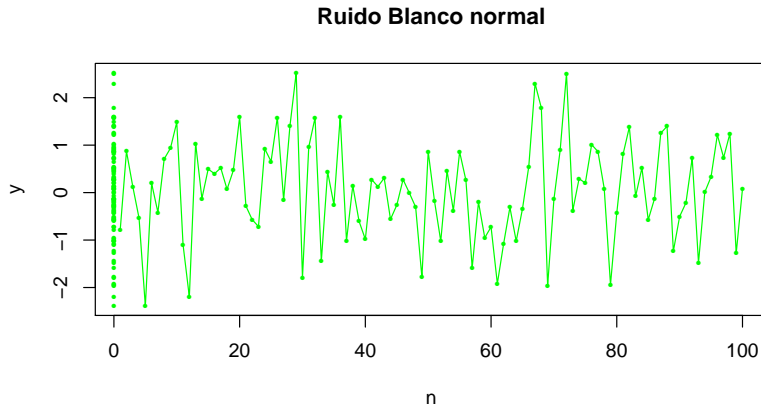
# Ejemplos: Billetes y monedas

## Billetes y monedas en circulación 2000–2016



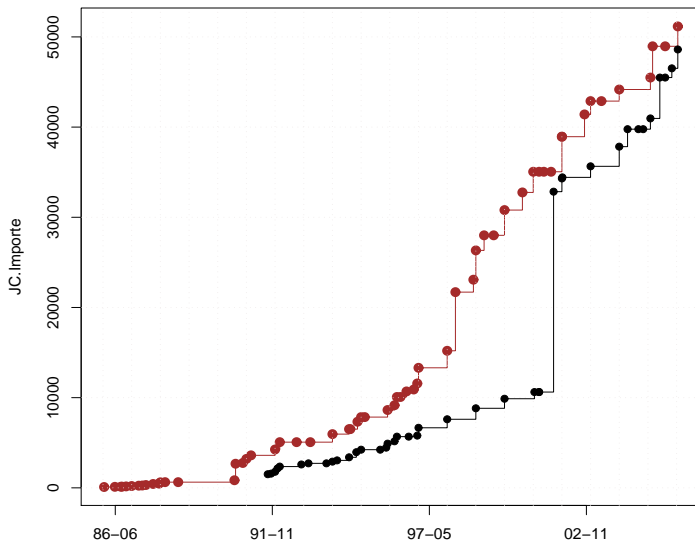


# Ejemplos: Ruido Blanco



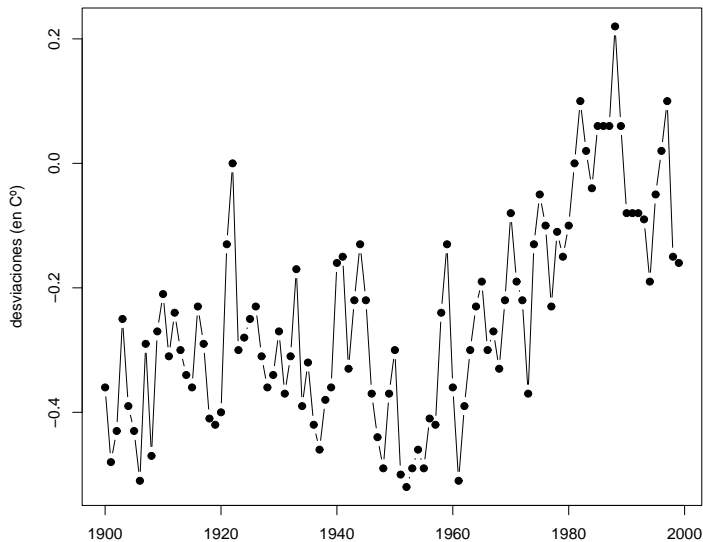
## Ejemplos

Carreras salariales



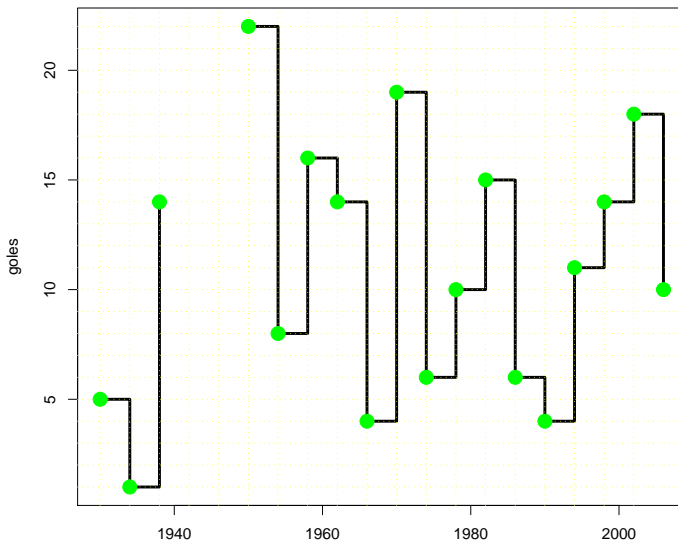
## Ejemplos

Desviaciones de la temperatura global promedio (1900–2000)



## Ejemplos

Goles de Brasil en mundiales (1930–2006)



# Otros ejemplos

- Otras situaciones prácticas que dan origen a las series de tiempo:
  - Ventas mensuales de vehículos de una agencia.
  - Número de desempleados en el tiempo (Índices de empleo).
  - Calidad de aire o agua.
  - Población de una ciudad o un país.
  - Proporción de células cancerígenas en un órgano cada semana.
  - Demanda mensual o trimestral de cualquier producto.
  - Índices de las diferentes bolsas de valores, o bien, los precios de productos financieros.
- Las fuentes de las series de tiempo pueden ser muy variadas, muchas son de origen industrial (en los procesos de producción), o bien, de naturaleza económica, física, financiera, médica, etc.

# Descripción de un proceso estocástico

- Una forma de describir un proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \in \mathfrak{T}}$  es especificar la distribución conjunta de  $n$  variables  $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$  para cualquier  $n$  y cualquier conjunto  $t_1, t_2, \dots, t_n$ :

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n)$$

Claramente esta manera de describir el proceso es muy compleja, pues requiere especificar una gran cantidad de funciones de distribución conjunta y de marginales.

- Otra forma de describir un proceso estocástico consiste en determinar una fórmula para el valor  $X_t = X(t)$  del proceso en cada punto  $t$  en términos de una familia de variables cuyas distribución es conocida. Por ejemplo, considerar  $X(t) = A \cos(wt) + B \sin(wt)$ , donde  $w$  es una constante y  $A, B \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $A \perp\!\!\!\perp B$ . Usualmente estos procesos corresponden a *series de tiempo*.

# Procesos de Markov

## Propiedad de Markov

La propiedad de Markov se refiere a que la probabilidad de que un sistema físico esté en un estado determinado en el tiempo  $t$  puede deducirse del conocimiento en el tiempo  $s$ , para  $s < t$ , y no depende de la historia del sistema antes del tiempo  $s$

## Procesos de Markov

Un Proceso de Markov es un proceso  $\{X_t \in S, t \in T\}$  que cumple con la propiedad de Markov:

$$P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n, X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_0}) = P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n)$$

El proceso de Markov es *homogéneo*, si no depende de  $n$ :

$$P(X_{t_{n+1}} = j | X_{t_n} = i) = P(X_{t_1} = j | X_{t_0} = i) = p_{ij}$$

# Tipos de procesos markovianos

- Dependiendo de la estructura del espacio de estados  $S$  y del espacio parametral  $T$ , se tienen diferentes tipos de procesos estocásticos:
  - $S$  discreto,  $T$  discreto: Cadenas de Markov
  - $S$  discreto,  $T$  continuo: Cadenas de Markov de parámetro continuo
  - $S$  continuo,  $T$  discreto: Procesos de Markov de parámetro discreto
  - $S$  continuo,  $T$  continuo: Procesos de Markov



# Cadenas de Markov

- En el caso de las cadenas de Markov con un espacio de estados finito,  $S = \{1, 2, \dots, N\}$ , el proceso queda especificado por las probabilidades  $p_{ij}$ , que cumplen las siguientes propiedades:
  - 1  $p_{ij} \geq 0$ ,
  - 2  $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$ , para  $1 \leq i \leq N$
- Las probabilidades de transición se pueden acomodar en una matriz de dimensión  $n \times N$ :

$$\mathbf{P} = (p_{ij}).$$

- Si el espacio de estados es discreto pero no finito, entonces, la matriz de transiciones es una matriz infinita.

## Ejemplo de Cadena de Markov: Modelo simple de inventario

Consideren el inventario de un almacén de un sólo producto, y los siguientes supuestos:

- No hay demanda no satisfecha.
- $X_n$  = número de artículos en stock al inicio del periodo  $n$
- $D_n$  = número de artículos demandados durante el periodo  $n$ .  
Supongamos  $D_n \sim \text{Poisson}(k)$  donde  $k < M$ .
- El número de artículos en stock al final del periodo es  $\max\{X_n - D_n, 0\}$ .
- Como política de inventario, se reordena al final de cada periodo si  $X_n - D_n \leq 1$  y en ese caso se reabastece para alcanzar tamaño  $M$ . Entonces:

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - D_n & \text{si } X_n - D_n \geq 2 \\ M & \text{si } X_n - D_n \leq 1 \end{cases}$$

Se puede verificar entonces que  $\{X_n\}$  es una cadena de Markov.

## Ejemplo de Cadena de Markov: Modelo simple de inventario

Con un nivel de reorden de  $M = 5$ , y con una demanda promedio de  $k = 3$  items en el periodo, podemos ver que el espacio de estados es  $S = \{2, 3, 4, 5\}$ . Ahora, si  $X_n - D_n \geq 2$ ,

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_n - D_n = j | X_n = i) = P(D_n = i - j) > 0$$

si  $i \geq j$ .

Y para el otro caso,  $X_n - D_n \leq 1$ , entonces  $X_{n+1} = 5$  y

$$P(X_{n+1} = 5 | X_n = i) = P(X_n - D_n \leq 1 | X_n = i) = P(D_n \geq i - 1)$$

Considerando la distribución Poisson, podemos construir la matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.0498 & 0 & 0 & 0.9502 \\ 0.1494 & 0.0498 & 0 & 0.8008 \\ 0.2240 & 0.1494 & 0.0498 & 0.5768 \\ 0.2240 & 0.2240 & 0.1494 & 0.4026 \end{pmatrix}$$

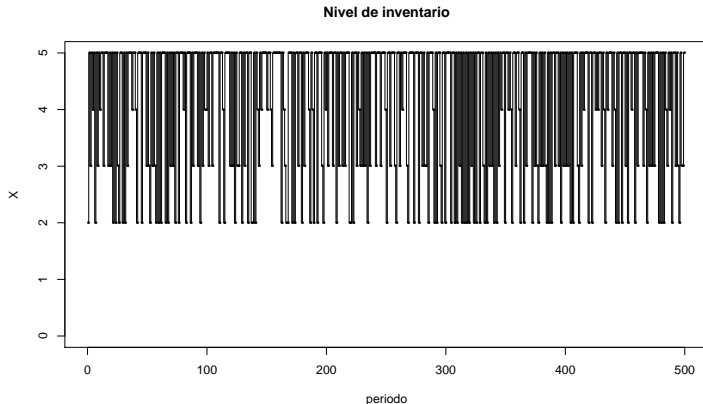
Para  $p_{5,5}$ , noten que el inventario pasa de 5 a 5 si la demanda es 0 o al menos 4.

Simulación de Cadena de Markov,  $M = 5, k = 3$ 

```

set.seed(100)
n <- 500 #numero de simulaciones del proceso
D <- rpois(n,3) #demandas
X <- NULL
X[1] <- sample(2:5,1) #nivel inicial del inventario
for(i in 2:n) X[i] <- ifelse(X[i-1]-D[i-1]>=2, (X[i-1]-D[i-1]), 5)
plot(1:n,X,type="s", main="Nivel de inventario", ylim=c(0,5), xlab="periodo")
points(1:n,X,pch=16,cex=0.5)

```

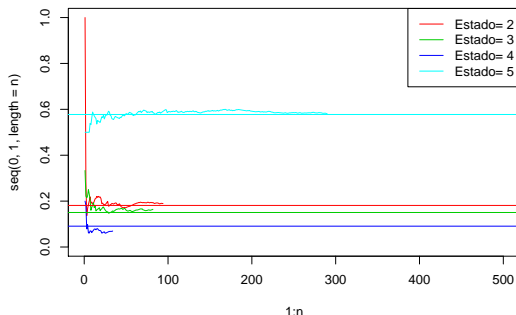


Simulación de Cadena de Markov,  $M = 5, k = 3$ 

- ¿Qué proporción, en promedio, se está en cada estado?

```
table(X)/n
## X
##      2      3      4      5
## 0.188 0.164 0.068 0.580
Z <- list(NULL)
for(i in 2:5) Z[[i]] <- 1:length(X[X==i])/which(X==i)
plot(1:n, seq(0,1,length=n), type="n", main="Proporción de permanencia en cada estado")
for(i in 2:5) lines(Z[[i]], col=i)
abline(h=0.181211, col=2) #probabilidades de equilibrio
abline(h=0.1504296, col=3)
abline(h=0.09080838, col=4)
abline(h=0.577551, col=5)
legend("topright", legend=paste("Estado=", 2:5), col=2:5, lty=rep(1,4))
```

Proporción de permanencia en cada estado



Simulación de Cadena de Markov,  $M = 5, k = 3$ 

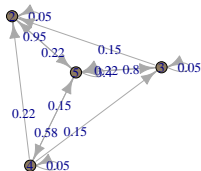
```
library(markovchain)

Loading required package: methods
Package: markovchain
Version: 0.6.9.8-1
Date: 2017-08-15
BugReport: http://github.com/spedygiorgio/markovchain/issues

mcinventario <- new("markovchain", states=as.character(2:5), transitionMatrix =
matrix(data=c(0.0498, 0, 0, 0.9502,
0.1494, 0.0498, 0, 0.8008,
0.2240, 0.1494, 0.0498, 0.5768,
0.2240, 0.2240, 0.1494, 0.4026), byrow=T, nrow=4), name="Inventario")
steadyStates(mcinventario)

      2      3      4      5
[1,] 0.181211 0.1504296 0.09080838 0.577551

plot(mcinventario)
```



## Algoritmo para simular Cadenas de Markov

- En la práctica, surge la necesidad de simular cadenas de Markov porque las matrices de transición son muy grandes o los espacios de estado son enormes.
- En esos contextos, es más práctico generar realizaciones del proceso estocástico.

### Algoritmo para simular cadenas de Markov

Si  $\alpha$  es la distribución inicial y  $\mathbf{P}$  es la matriz de transición, entonces para generar  $n$  transiciones  $X_0, X_1, \dots, X_n$ :

- 1 Genera  $X_0$  de acuerdo a  $\alpha$
- 2 Para cada  $i$ , suponiendo que  $X_{i-1} = j$ , seleccionar  $= \mathbf{P}[j, \cdot]$  y generar  $X_i$  de acuerdo a  $\cdot$ .

## Ejemplo de Cadena de Markov: Juego básico

- Supongamos un juego con tablero circular con celdas marcadas del 1 al 10.
- Comenzando con  $X_0 = 1$ , se lanza un dado y se avanza ese número de casillas.
- Sea  $X_n$  = número de la casilla en el  $n$ -ésimo movimiento

El problema consiste en identificar el espacio de estados, y la matriz de transiciones.

En el laboratorio se simulará el proceso un determinado número de jugadas y se calcularán las frecuencias de observación de cada casilla.



## Procesos con incrementos independientes

Esta clase de procesos sirve de base para construir otros procesos que se aplican a la estimación de precios de derivados.

### Procesos con incrementos independientes

Un proceso de parámetro continuo  $\{X_t, t \geq 0\}$  tiene *incrementos independientes* si  $X_0 = 0$  y para cualquier elección de índices  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , las  $n$  variables aleatorias

$$X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

son independientes.

Si  $X_{t_2+h} - X_{t_1+h}$  tiene la misma distribución que  $X_{t_2} - X_{t_1}$  para cualquier  $t_2, t_1$  y  $h > 0$ , entonces el proceso es de *incrementos estacionarios independientes*

Ejemplos son el proceso de Wiener, que provee un modelo para el movimiento Browniano.

# Procesos de Wiener (1923)

Norbert Wiener fue uno de los primeros matemáticos en considerar el movimiento Browniano.

## Proceso de Wiener

Se dice que un proceso estocástico  $\{Z_t, t \geq 0\}$  sigue un proceso de Wiener si

- 1  $\{Z_t, t \geq 0\}$  tiene incrementos estacionarios independientes.
- 2  $\forall t > 0, Z_t$  tiene distribución normal
- 3  $\forall t > 0, E(Z_t) = 0$

A partir de la normalidad del proceso, el comportamiento está completamente definido. Como resultado, se puede ver que

- $E(Z_t - Z_s) = 0$ . Fácil de verificar.
- $\text{Var}(Z_t - Z_s) = \sigma^2 |t - s|$  para alguna constante  $\sigma^2 > 0$ .

### Solución.

Consideremos que  $s < t$ . Como  $Z_t - Z_s$  tiene la misma distribución que  $Z_{t-s} - Z_0$  y  $Z_0 = 0$ , entonces la distribución de  $Z_t - Z_s$  es la misma que la de  $Z_{t-s}$ . Esto implica que

$$\text{Var}(Z_{t+s}) = \text{Var}(Z_t) + \text{Var}(Z_s)$$

Entonces la ecuación funcional  $f(t+s) = f(t) + f(s)$  se cumple. La solución a esta ecuación es  $f(t) = ct$ , para alguna  $c \geq 0$ . Por lo tanto  $f(t) = \text{Var}(Z_t) = \sigma^2 t$ .

□

# Simulación de un proceso Wiener

- El cambio de nivel  $\Delta Z = Z_{t+\Delta t} - Z_t$  durante un intervalo de tiempo  $\Delta t = t + \Delta t - t$  está dado por

$$\Delta Z = \epsilon \sqrt{\Delta t} \quad \text{donde} \quad \epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

- Los valores de cambios  $\Delta_1 Z$  y  $\Delta_2 Z$  para dos intervalos ajenos  $\Delta_1 t$  y  $\Delta_2 t$  son independientes. Para un intervalo  $(0, T]$ , sea  $N = T/\Delta t$  el número de subintervalos de longitud  $\Delta t$ , entonces el incremento total es:

$$Z(T) - Z(0) = \sum_i^N \epsilon_i \sqrt{\Delta t} \sim \mathcal{N}(0, T),$$

conforme  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta Z \rightarrow dZ$

## Ejemplo

Usualmente en las aplicaciones financieras se considera a  $t$  como el tiempo, y las unidades de tiempo se miden en años de 360 días.

- Supongamos un periodo de  $T = 20$  años. Si la unidad de tiempo es un año, entonces  $\Delta t = 1$  si partimos anualmente,  $\Delta t = 0.5$  si semestral,  $\Delta t = 1/12$  mensual, etc.
- Para datos diarios,  $\Delta t = 1/360 = 0.0027778$  y  $N = 7200$ .
- Para estimar el cambio en la variable  $Z$ , es necesario simular una  $\epsilon$  con distribución normal estándar y multiplicarla por  $\sqrt{(1/360)}$ .  
Por ejemplo:

Paso $i$	$Z_{t+i-1}$	$\epsilon_i$	$\Delta Z = 0.053 * \epsilon$	$Z_t = Z_{t+i-1} + \Delta Z$
1	100.00	2.07851	0.11	100.11
2	100.11	0.93299	0.049	100.159
3	100.159	-0.00786	0	100.158
4	100.158	-0.09023	-0.005	100.154
⋮				
7200	92.47	1.153	0.06077	92.531

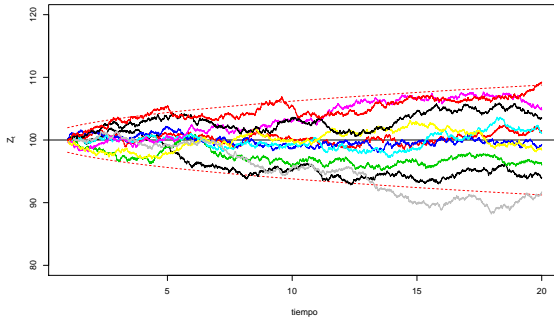
- La gráfica generada se muestra a continuación, considerando 10 trayectorias.

## Ejemplo

```
#Muestra de una trayectoria en un periodo de T=20 años
#para un año Dt=1, seis meses Dt=0.5, un trimestre Dt=0.25, un mes Dt=1/12 etc.
z0 <- 100
TT <- 20 #periodos a simular
Dt <- 1/(360) #partición diaria.
N <- TT/Dt
x <- seq(1,TT,length=N)
plot(x,rnorm(N), ylim=c(80,120),type="n", main="Ejemplo de proceso de Wiener",
      xlab = "tiempo", ylab = expression(Z[t]))
abline(h = 100)
#límites de confianza la 95%
lines(x, 100 + 1.96*sqrt(x), lty = 2, col = "red")
lines(x, 100 - 1.96*sqrt(x), lty = 2, col = "red")

for(i in 1:10){
  eps <- rnorm(N, mean = 0, sd = 1)
  dz <- eps*sqrt(Dt)
  z <- z0 + cumsum(dz)
  lines(x,z,type="l",col=i)
}
```

Ejemplo de proceso de Wiener



## Observaciones al ejemplo

- En la gráfica se muestran intervalos de 95 % de confianza para el proceso  $Z_t$ .
- Una debilidad del proceso de Wiener para replicar precios del mercado es que oscila en torno al valor inicial, mientras que los precios se pueden alejar sistemáticamente de un valor inicial.
- Para resolver este problema, se generaliza el proceso de Wiener a un proceso con una *deriva*, es decir, una tendencia a alejarse del valor central.

# Proceso generalizado de Wiener

- Un **proceso generalizado de Wiener** para una variable  $x$  se define en términos de  $dZ$  como

$$dx = adt + bdZ$$

con  $a, b$  constantes.

- El término  $adt$  implica que  $x$  tiene deriva (drift) esperada de  $a$  por unidad de tiempo. Sin el término  $bdZ$ :

$$dx = adt \Rightarrow x = x_o + at$$

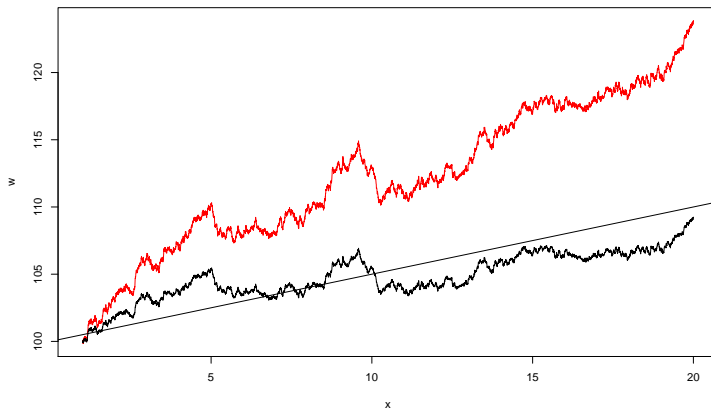
- El término  $bdZ$  agrega "ruido blanco" a la trayectoria de  $x$ . En términos de pequeños cambios (versión discreta):

$$\begin{aligned}\Delta x &= a\Delta t + b\epsilon\sqrt{\Delta t} \\ \therefore \Delta x &\sim \mathcal{N}(a\Delta t, b^2\Delta t)\end{aligned}$$

# Simulación de un proceso generalizado de Wiener

```
#Proceso generalizado de Wiener: modifica el anterior
a <- 0.5
b <- 1.5
dz <- eps*b*sqrt(Dt)
w <- z0 + cumsum(a*Dt + dz)
plot(x, w, type="l", col="red", main="Proceso generalizado de Wiener\n a=0.5, b=1.5")
lines(x, z, type="l") #última trayectoria simulada del proceso anterior
abline(coef = c(z0,a))
```

Proceso generalizado de Wiener  
a=0.5, b=1.5





## Procesos de Conteo

El proceso Poisson está asociado a funciones de conteo de eventos aleatorios en el tiempo. Ejemplos de estas funciones están dados por:

- Llegada de clientes a una estación de servicio, donde el servicio puede estar dado por personas o por máquinas.
- La ocurrencia de accidentes, errores, fallas de sistema y eventos similares asociados con riesgos.
- La llegada de un electrón al ánodo, emitido desde un cátodo de un tubo de vacío.

El proceso estocástico de conteo subyacente  $\{N_t, t \geq 0\}$  donde  $N_t$  representa el número de eventos que ocurren en el intervalo  $(0, t]$  sirve para describir ese tipo de eventos. El espacio de estados corresponde al de los números enteros positivos  $(\mathbb{Z}^+)$ .

Para entender bien el proceso Poisson, necesitamos revisar dos tipos de variables aleatorias: la distribución exponencial y la distribución Poisson.

# Proceso de Poisson

## Proceso Poisson

Un proceso de conteo  $\{N_t, t \geq 0\}$  es un proceso Poisson con media (o intensidad)  $\lambda$  si se cumplen los siguientes supuestos:

- 1  $\{N_t, t \geq 0\}$  tiene incrementos estacionarios independientes
- 2  $\forall s < t$  el número  $N_t - N_s$  de conteo en el intervalo  $(s, t)$  sigue una distribución Poisson con media  $\lambda(t - s)$ :

$$P(N_t - N_s = k) = \exp^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!}$$

y

$$E(N_t - N_s) = \lambda(t - s), \quad \text{Var}(N_t - N_s) = \lambda(t - s)$$

- Hay otras formas de obtener el proceso Poisson, considerando la Ley de los eventos raros y suponiendo un conjunto de axiomas, o bien considerando la distribución de los tiempos de interarribo.

## Distribución exponencial y tiempos de interarribo

- En un proceso de conteo  $\{N_t, t \geq 0\}$  que cuenta el número de ocurrencias de un evento en el intervalo  $(0, t]$ , los puntos en donde ocurren los eventos usualmente son aleatorios y se representan por los tiempos  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$
- Las variables  $T_1 = \tau_1, T_2 = \tau_2 - \tau_1, \dots, T_n = \tau_n - \tau_{n-1}$  son los *tiempos de interarribo*.
- Usualmente se supone que los tiempos  $\tau_i$  son variables aleatorias con distribución exponencial.

### Proceso Poisson a partir de tiempos de interarribo

Sean  $T_1, T_2, \dots, T_n$   $\text{indep} \sim \exp(\lambda)$  tiempos de interarribo y  $\tau_n = \sum_{i=1}^n T_i$  es el instante en el que ocurre el  $n$ -ésimo evento. El proceso de Poisson de intensidad  $\lambda$  se puede definir como

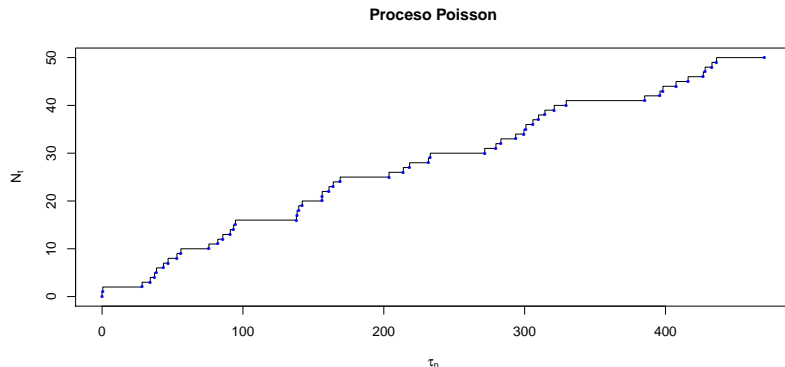
$$N_t = \max\{n | \tau_n \leq t\}, t \geq 0$$

Es importante notar que en esta definición,

$$N(t) = n \iff \tau_n \leq t < \tau_{n+1}$$

# Ejemplo de Simulación de Proceso Poisson

```
n <- 50
lambda = 10
TA <- rexp(n,rate=1/lambda)
tau <- cumsum(TA) #tiempos en donde ocurren los eventos
Nt <- 1:length(tau) # proceso de conteo
plot(c(0,tau), c(0,Nt), type="S",main="Proceso Poisson",
      xlab=expression(tau[n]), ylab=expression(N[t]))
points(c(0,tau), c(0,Nt), pch=16, cex=0.5, col="blue")
```



# Algoritmo de simulación Procesos Poisson

A partir de uniformes:

- 1 Genera  $u_1, u_2, \dots, u_n \sim \mathcal{U}(0, 1)$  independientes.
- 2 Calcula  $T_i = -\frac{1}{\lambda} \log u_i$
- 3 incrementa  $N(\tau_i)$  en cada  $\tau_i = \sum_{k=1}^i T_k$

## Proceso de Poisson no homogéneos

En la vida real es común que los eventos no ocurran de manera homogénea en el tiempo. Por ejemplo, en un restaurante, la llegada de clientes varia conforme son los tiempos de los alimentos. En estos casos es mejor considerar un proceso en donde la tasa de arribo varía con el tiempo.

### Proceso Poisson no homogéneo (PPNH)

$\{N_t, t \geq 0\}$  es un proceso Poisson no homogéneo con función de intensidad  $\lambda(t)$ ,  $t \geq 0$  si

- $N_0 = 0$
- $\forall t > 0, N_t \sim \mathcal{P} \left( \int_0^t \lambda(s) ds \right)$
- $\forall 0 \leq t_1 \leq \dots < t_m$ , los incrementos  $N_{t_{i+1}} - N_{t_i}$  son independientes.
- Aunque los incrementos son independientes, no son necesariamente estacionarios.
- Un proceso de Poisson no homogéneo es un proceso de Markov
- Si  $0 \leq s < t$ ,  $N_t - N_s \sim \mathcal{P} \left( \int_s^t \lambda(u) du \right)$

# Simulación

Hay varias formas de generar un PPNH (ver por ejemplo: Radhakrishna). Consideraremos el método de *adelgazamiento* (thinning). La idea básica es ‘envolver’ un proceso Poisson no homogéneo con uno que sí sea homogéneo en un intervalo de tiempo. El proceso es equivalente al método de aceptación y rechazo. Supongan que queremos simular las primeras  $T$  unidades de tiempo de un proceso  $N_t^*$ .

- ❶ Encuentra  $\lambda$  tal que  $\lambda(t) \leq \lambda \forall t \leq T$
- ❷ Asigna  $n \leftarrow 0$ ;  $n^* \leftarrow 0$ ;  $\tau \leftarrow 0$ ;  $\tau^* \leftarrow 0$
- ❸ Genera  $w \sim \exp(\lambda)$  y asigna  $\tau \leftarrow \tau + w$ ;  $n \leftarrow n + 1$
- ❹ Genera  $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$ . Si  $u \leq \frac{\lambda(\tau)}{\lambda}$ , actualiza  $n^* \leftarrow n^* + 1$  y  $\tau^* \leftarrow \tau$ .
- ❺ regresa al paso 2.

# Ejemplo. Simulación de un PPNH

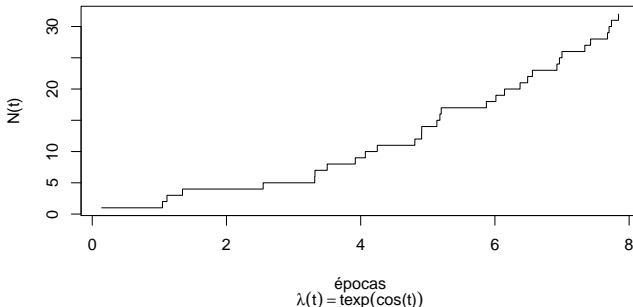
Consideren simular un proceso Poisson no homogéneo con funcion de intensidad  $\lambda(t) = te^{\cos(t)}$ .

```
lambdat <- function(t){t*exp(cos(t))}

poisson.nohomogeneo <- function(lambdat,n){
  lambda <- 5 #mayoriza la función lambdat
  TT <- rexp(n,lambda) #genera variables exponenciales para los tiempos.
  s <- cumsum(TT) #acumula los tiempos en el vector s
  u <- runif(n) #obten n uniformes
  ss <- s[u <= lambdat(s)/lambda] #obten los tiempos que cumplen la condición de aceptación
  Ns <- 1:length(ss) # Conteo
  plot(ss, Ns, type = "s", xlab = "épocas", ylab = "N(t)", main = "Simulacion de un proceso Poisson no homogéneo",
    sub = expression(lambda(t) == t*exp(paste("cos","(t)"))))
  return(list(epocas = ss, cuenta= Ns))
}

x <- poisson.nohomogeneo(lambdat,50)
```

Simulacion de un proceso Poisson no homogéneo





## ¿Porqué thinning funciona para PPNH?

La prueba de que thinning funciona se basa en el siguiente resultado que establece las características para dos procesos Poisson no homogéneos que se construyen con la misma condición del algoritmo dado.

### Teorema (Lewis & Shedler, 1979)

Considerar un PPNH con función de intensidad  $\lambda_u(t)$ ,  $t \geq 0$ . Suponer que  $T_1^*, \dots, T_n^*$  son variables aleatorias que representan eventos de tiempo para ese PPNH y que quedan en el intervalo  $(0, t_0]$ . Sea  $\lambda(t)$  una función de intensidad tal que  $0 \leq \lambda(t) \leq \lambda_u(t) \forall t \in [0, t_0]$ . Si el  $i$ -ésimo evento de tiempo  $T_i^*$  es borrado independiente de los otros con probabilidad  $1 - \lambda(t)/\lambda_u(t)$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , entonces los eventos restantes de tiempo forman un PPNH con función de intensidad  $\lambda(t)$  en el intervalo  $(0, t_0]$ .

La aplicación para nuestro caso supone que el proceso que cubre al PPNH tiene  $\lambda_u(t) = \lambda$  es constante, y por lo tanto es un proceso Poisson homogéneo.