

Simulación

0.1 Presentación del Curso.

0.2 Sistemas, modelos y simulación.

0.3 Ejemplos de simulación.

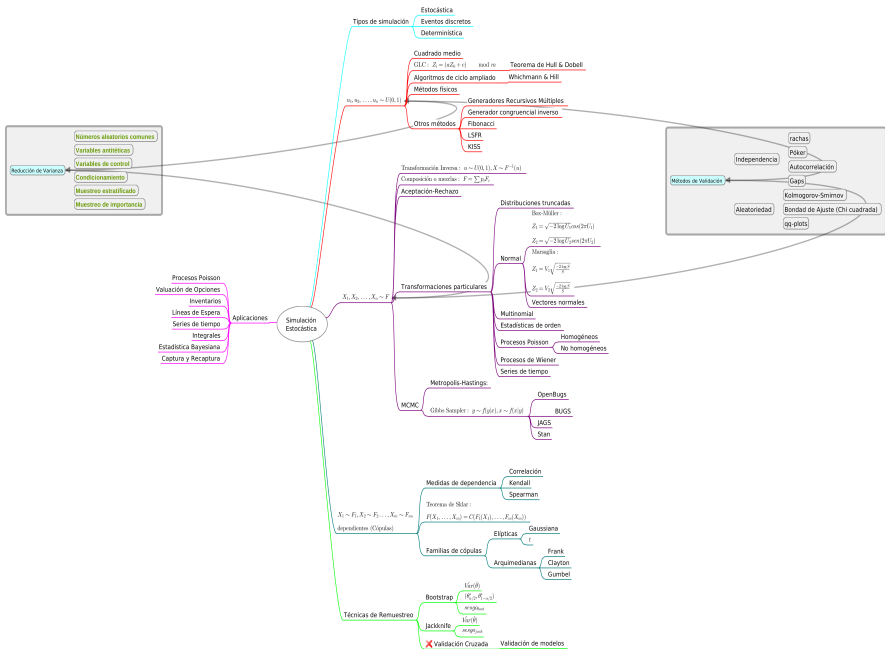
Jorge de la Vega Góngora

Departamento de Estadística,
Instituto Tecnológico Autónomo de México

Clase 1: Viernes 18 de agosto de 2017

0.1 Presentación del Curso.

- Conocimiento general pero sólido, de conceptos estadísticos y probabilísticos.
- Diseño de Algoritmos. Principios generales de programación. Uso de paquetes.
- Conocimiento de R no es fundamental, pero *muuy* conveniente.
- Conocimientos de:
 - Distribuciones de variables aleatorias y sus momentos.
 - Cálculo (integración, diferenciación y convergencia).
 - Bases de procesos estocásticos: cadenas de Markov, procesos de Wiener, procesos Poisson.
 - Estimación de parámetros.
 - Para las aplicaciones: no requerido pero conveniente: inferencia Bayesiana, Derivados financieros.



Plataforma para el curso

- La plataforma para comunicación del curso será **Piazza**. Ahí encontrarán:
 - Syllabus y reglas del curso
 - Lecturas complementarias
 - Tareas y sus soluciones.
- La evaluación considera:
 - dos exámenes parciales: 30 %
 - tareas: 30 %
 - asistencia y participación en clase: 10 %
 - proyecto final (Entrega y presentación) 30 %
 - La fecha del examen final es la fecha de la presentación del proyecto.
 - El proyecto será evaluado por el grupo y por el profesor (40 % y 60 % respectivamente), pero...
 - *A mi criterio, dependiendo del desempeño del grupo, el proyecto final puede sustituirse por un examen final.*

Mis objetivos de enseñanza

- Reforzar los conceptos estadísticos básicos para ser aplicados adecuada y correctamente en un análisis de simulación.
- Desarrollar competencias para la adecuada modelación matemática de fenómenos empíricos.
- Interpretar y reportar adecuadamente los resultados y las conclusiones de una investigación, análisis, mediante el uso de tablas y gráficas apropiadas.
- Sembrar en ustedes la curiosidad de conocer más acerca de las técnicas de simulación y que desarrollen habilidades para aplicar los métodos y las técnicas en sus vidas profesionales y personales.

Mis objetivos de enseñanza

- Reforzar los conceptos estadísticos básicos para ser aplicados adecuada y correctamente en un análisis de simulación.
- **Desarrollar competencias para la adecuada modelación matemática de fenómenos empíricos.**
- Interpretar y reportar adecuadamente los resultados y las conclusiones de una investigación, análisis, mediante el uso de tablas y gráficas apropiadas.
- Sembrar en ustedes la curiosidad de conocer más acerca de las técnicas de simulación y que desarrollen habilidades para aplicar los métodos y las técnicas en sus vidas profesionales y personales.

Mis objetivos de enseñanza

- Reforzar los conceptos estadísticos básicos para ser aplicados adecuada y correctamente en un análisis de simulación.
- Desarrollar competencias para la adecuada modelación matemática de fenómenos empíricos.
- Interpretar y reportar adecuadamente los resultados y las conclusiones de una investigación, análisis, mediante el uso de tablas y gráficas apropiadas.
- Sembrar en ustedes la curiosidad de conocer más acerca de las técnicas de simulación y que desarrollen habilidades para aplicar los métodos y las técnicas en sus vidas profesionales y personales.

Mis objetivos de enseñanza

- Reforzar los conceptos estadísticos básicos para ser aplicados adecuada y correctamente en un análisis de simulación.
- Desarrollar competencias para la adecuada modelación matemática de fenómenos empíricos.
- Interpretar y reportar adecuadamente los resultados y las conclusiones de una investigación, análisis, mediante el uso de tablas y gráficas apropiadas.
- Sembrar en ustedes la curiosidad de conocer más acerca de las técnicas de simulación y que desarrollen habilidades para aplicar los métodos y las técnicas en sus vidas profesionales y personales.

0.1 Naturaleza de la simulación.

¿Qué vamos a estudiar en este curso?

Simulación

La *simulación* es la *imitación* del comportamiento de un proceso, sistema o fenómeno del mundo real en el tiempo o en el espacio, *usualmente bajo condiciones controladas*.

- **Simulación Monte Carlo** o estocástica: modela fenómenos sujetos a incertidumbre. El modelo probabilístico puede ser parametrizado o ajustado usando datos reales.
- **Simulación de Eventos Discretos**: modela la operación de un sistema como una sucesión de eventos en el tiempo. Cada evento ocurre en un instante particular del tiempo y marca un cambio de estado en el sistema.
- El énfasis de este curso es en las *técnicas de simulación estocástica*
- Campos de aplicación: sistemas físicos, biológicos, sociales, industriales, financieros, económicos, etc.
- Otro nombre para este curso en varios programas: **Statistical Computing**

¿Qué vamos a estudiar en este curso?

Simulación

La *simulación* es la *imitación* del comportamiento de un proceso, sistema o fenómeno del mundo real en el tiempo o en el espacio, *usualmente bajo condiciones controladas*.

- **Simulación Monte Carlo** o estocástica: modela fenómenos sujetos a incertidumbre. El modelo probabilístico puede ser parametrizado o ajustado usando datos reales.
- **Simulación de Eventos Discretos**: modela la operación de un sistema como una sucesión de eventos en el tiempo. Cada evento ocurre en un instante particular del tiempo y marca un cambio de estado en el sistema.
- El énfasis de este curso es en las *técnicas de simulación estocástica*
- Campos de aplicación: sistemas físicos, biológicos, sociales, industriales, financieros, económicos, etc.
- Otro nombre para este curso en varios programas: **Statistical Computing**

¿Qué vamos a estudiar en este curso?

Simulación

La *simulación* es la *imitación* del comportamiento de un proceso, sistema o fenómeno del mundo real en el tiempo o en el espacio, *usualmente bajo condiciones controladas*.

- **Simulación Monte Carlo** o estocástica: modela fenómenos sujetos a incertidumbre. El modelo probabilístico puede ser parametrizado o ajustado usando datos reales.
- **Simulación de Eventos Discretos**: modela la operación de un sistema como una sucesión de eventos en el tiempo. Cada evento ocurre en un instante particular del tiempo y marca un cambio de estado en el sistema.
- El énfasis de este curso es en las *técnicas de simulación estocástica*
- Campos de aplicación: sistemas físicos, biológicos, sociales, industriales, financieros, económicos, etc.
- Otro nombre para este curso en varios programas: **Statistical Computing**

¿Qué vamos a estudiar en este curso?

Simulación

La *simulación* es la *imitación* del comportamiento de un proceso, sistema o fenómeno del mundo real en el tiempo o en el espacio, *usualmente bajo condiciones controladas*.

- Simulación Monte Carlo o estocástica: modela fenómenos sujetos a incertidumbre. El modelo probabilístico puede ser parametrizado o ajustado usando datos reales.
- Simulación de Eventos Discretos: modela la operación de un sistema como una sucesión de eventos en el tiempo. Cada evento ocurre en un instante particular del tiempo y marca un cambio de estado en el sistema.
- El énfasis de este curso es en las *técnicas de simulación estocástica*
- Campos de aplicación: sistemas físicos, biológicos, sociales, industriales, financieros, económicos, etc.
- Otro nombre para este curso en varios programas: **Statistical Computing**

¿Qué vamos a estudiar en este curso?

Simulación

La *simulación* es la *imitación* del comportamiento de un proceso, sistema o fenómeno del mundo real en el tiempo o en el espacio, *usualmente bajo condiciones controladas*.

- Simulación Monte Carlo o estocástica: modela fenómenos sujetos a incertidumbre. El modelo probabilístico puede ser parametrizado o ajustado usando datos reales.
- Simulación de Eventos Discretos: modela la operación de un sistema como una sucesión de eventos en el tiempo. Cada evento ocurre en un instante particular del tiempo y marca un cambio de estado en el sistema.
- El énfasis de este curso es en las *técnicas de simulación estocástica*
- Campos de aplicación: sistemas físicos, biológicos, sociales, industriales, financieros, económicos, etc.
- Otro nombre para este curso en varios programas: **Statistical Computing**

Ejemplos de aplicaciones de la simulación

Aplicaciones típicas de la simulación estocástica en Finanzas y economía:

- Valuación de instrumentos financieros bajo escenarios económicos, eg. valuación de bonos carreteros, opciones y derivados en general, cálculo de valores esperados, etc.
- Estimación de trayectorias de indicadores económicos o índices (inflación, PIB, IPC, curvas de volatilidad implícita, curvas de tasas) usando modelos econométricos, bajo la presencia de shocks exógenos.
- Estimación de intervalos de variación (fan charts) de indicadores
- Comportamiento esperado de ciertos instrumentos sujetos a riesgo de crédito, basados en las probabilidades de default asociadas.

Ejemplos de aplicaciones de la simulación

Aplicaciones típicas de la simulación estocástica en Finanzas y economía:

- Valuación de instrumentos financieros bajo escenarios económicos, eg. valuación de bonos carreteros, opciones y derivados en general, cálculo de valores esperados, etc.
- Estimación de trayectorias de indicadores económicos o índices (inflación, PIB, IPC, curvas de volatilidad implícita, curvas de tasas) usando modelos econométricos, bajo la presencia de shocks exógenos.
- Estimación de intervalos de variación (fan charts) de indicadores
- Comportamiento esperado de ciertos instrumentos sujetos a riesgo de crédito, basados en las probabilidades de default asociadas.

Ejemplos de aplicaciones de la simulación

Aplicaciones típicas de la simulación estocástica en Finanzas y economía:

- Valuación de instrumentos financieros bajo escenarios económicos, eg. valuación de bonos carreteros, opciones y derivados en general, cálculo de valores esperados, etc.
- Estimación de trayectorias de indicadores económicos o índices (inflación, PIB, IPC, curvas de volatilidad implícita, curvas de tasas) usando modelos econométricos, bajo la presencia de shocks exógenos.
- Estimación de intervalos de variación (fan charts) de indicadores
- Comportamiento esperado de ciertos instrumentos sujetos a riesgo de crédito, basados en las probabilidades de default asociadas.

Ejemplos de aplicaciones de la simulación

Aplicaciones típicas de la simulación estocástica en Finanzas y economía:

- Valuación de instrumentos financieros bajo escenarios económicos, eg. valuación de bonos carreteros, opciones y derivados en general, cálculo de valores esperados, etc.
- Estimación de trayectorias de indicadores económicos o índices (inflación, PIB, IPC, curvas de volatilidad implícita, curvas de tasas) usando modelos econométricos, bajo la presencia de shocks exógenos.
- Estimación de intervalos de variación (fan charts) de indicadores
- Comportamiento esperado de ciertos instrumentos sujetos a riesgo de crédito, basados en las probabilidades de default asociadas.

Ejemplos de aplicaciones de la simulación

- Aplicaciones de la teoría de valores extremos (EVT):
 - a. Distribución de las pérdidas máximas de compañías de seguros.
 - b. Variaciones en rendimientos en portafolios de inversión.
 - c. Escenarios con cálculos de valores en riesgo (VaR).
 - d. Modelos Bayesianos jerárquicos de riesgos. Ayuda al cálculo de integrales complicadas de las distribuciones posteriores.
- Aplicaciones a los Negocios:
 - Diseño de los procesos de Negocio
 - Medición de la eficiencia de un proceso
 - Comparación de configuraciones de procesos (costo, eficacia)

Ejemplos de aplicaciones de la simulación

Aplicaciones relevantes a la estadística:

- Estimación de integrales
- Valores extremos
- Pruebas de hipótesis e intervalos de confianza.
- Estadística Bayesiana
- Optimización

Ventajas y desventajas de la simulación

• Ventajas

- Sustituye el desarrollo de modelos analíticos muy complicados o incluso imposibles.
- Permite visualizar el comportamiento de un sistema.
- Usualmente los costos de la simulación son menores a los ahorros que genera.
- A process cannot be understood by stopping it. Understanding must move with the flow of the process, must join it and flow with it (Frank Herbert, *Dune*)

• Desventajas

La simulación se utiliza como sustituto del pensamiento analítico, pero el principio "go with the flow, not against it" debe ser aplicado. Incluso cuando se usan herramientas computacionales para simular, los modelos deben ser diseñados cuidadosamente para que los resultados sean los más adecuados posibles.

Ventajas y desventajas de la simulación

• Ventajas

- Sustituye el desarrollo de modelos analíticos muy complicados o incluso imposibles.
- Permite visualizar el comportamiento de un sistema.
- Usualmente los costos de la simulación son menores a los ahorros que genera.
- A process cannot be understood by stopping it. Understanding must move with the flow of the process, must join it and flow with it (Frank Herbert, *Dune*)

• Desventajas

La simulación se utiliza como sustituto del pensamiento analítico, pero el principio "garbage in, garbage out" aplica. La simulación produce resultados solo si se ingresan datos correctos. Si se ingresan datos incorrectos, el resultado será incorrecto, pero parecerá ser un resultado correcto.

Ventajas y desventajas de la simulación

● Ventajas

- Sustituye el desarrollo de modelos analíticos muy complicados o incluso imposibles.
- Permite visualizar el comportamiento de un sistema.
- Usualmente los costos de la simulación son menores a los ahorros que genera.
- A process cannot be understood by stopping it. Understanding must move with the flow of the process, must join it and flow with it (Frank Herbert, *Dune*)

● Desventajas

La desventaja principal es la complejidad del desarrollo de modelos de simulación. El desarrollo de un modelo de simulación puede ser muy costoso y requiere de un personal altamente capacitado. Además, la simulación puede ser muy lenta y requiere de una gran cantidad de recursos computacionales. Sin embargo, la simulación puede ser muy útil para entender el comportamiento de un sistema y para tomar decisiones basadas en datos.

Ventajas y desventajas de la simulación

• Ventajas

- Sustituye el desarrollo de modelos analíticos muy complicados o incluso imposibles.
- Permite visualizar el comportamiento de un sistema.
- Usualmente los costos de la simulación son menores a los ahorros que genera.
- A process cannot be understood by stopping it. Understanding must move with the flow of the process, must join it and flow with it (Frank Herbert, *Dune*)

• Desventajas

- La simulación requiere un conocimiento profundo del sistema que se está simulando.
- La simulación puede ser muy costosa, especialmente si se requiere un gran número de repeticiones.
- La simulación puede ser muy lenta, especialmente si se requiere un gran número de repeticiones.
- La simulación puede ser muy compleja, especialmente si se requiere un gran número de repeticiones.

Ventajas y desventajas de la simulación

- Ventajas

- Sustituye el desarrollo de modelos analíticos muy complicados o incluso imposibles.
- Permite visualizar el comportamiento de un sistema.
- Usualmente los costos de la simulación son menores a los ahorros que genera.
- **A process cannot be understood by stopping it. Understanding must move with the flow of the process, must join it and flow with it (Frank Herbert, *Dune*)**

Ventajas y desventajas de la simulación

• Ventajas

- Sustituye el desarrollo de modelos analíticos muy complicados o incluso imposibles.
- Permite visualizar el comportamiento de un sistema.
- Usualmente los costos de la simulación son menores a los ahorros que genera.
- **A process cannot be understood by stopping it. Understanding must move with the flow of the process, must join it and flow with it**
(Frank Herbert, *Dune*)

• Desventajas

- En ocasiones se utiliza como sustituto del pensamiento analítico.
- Aplica el principio: “garbish in, garbish out”.
- Necesita aplicar correctamente conceptos estadísticos (como diseño de experimentos), así como de experiencia, para obtener las conclusiones correctas.
- **Run it again!** (Star Trek)

Ventajas y desventajas de la simulación

• Ventajas

- Sustituye el desarrollo de modelos analíticos muy complicados o incluso imposibles.
- Permite visualizar el comportamiento de un sistema.
- Usualmente los costos de la simulación son menores a los ahorros que genera.
- **A process cannot be understood by stopping it. Understanding must move with the flow of the process, must join it and flow with it**
(Frank Herbert, *Dune*)

• Desventajas

- En ocasiones se utiliza como sustituto del pensamiento analítico.
- Aplica el principio: “garbish in, garbish out”.
- Necesita aplicar correctamente conceptos estadísticos (como diseño de experimentos), así como de experiencia, para obtener las conclusiones correctas.
- **Run it again!** (Star Trek)

Ventajas y desventajas de la simulación

• Ventajas

- Sustituye el desarrollo de modelos analíticos muy complicados o incluso imposibles.
- Permite visualizar el comportamiento de un sistema.
- Usualmente los costos de la simulación son menores a los ahorros que genera.
- **A process cannot be understood by stopping it. Understanding must move with the flow of the process, must join it and flow with it**
(Frank Herbert, *Dune*)

• Desventajas

- En ocasiones se utiliza como sustituto del pensamiento analítico.
- Aplica el principio: “garbish in, garbish out”.
- Necesita aplicar correctamente conceptos estadísticos (como diseño de experimentos), así como de experiencia, para obtener las conclusiones correctas.
- **Run it again!** (Star Trek)

Ventajas y desventajas de la simulación

• Ventajas

- Sustituye el desarrollo de modelos analíticos muy complicados o incluso imposibles.
- Permite visualizar el comportamiento de un sistema.
- Usualmente los costos de la simulación son menores a los ahorros que genera.
- **A process cannot be understood by stopping it. Understanding must move with the flow of the process, must join it and flow with it**
(Frank Herbert, *Dune*)

• Desventajas

- En ocasiones se utiliza como sustituto del pensamiento analítico.
- Aplica el principio: “garbish in, garbish out”.
- Necesita aplicar correctamente conceptos estadísticos (como diseño de experimentos), así como de experiencia, para obtener las conclusiones correctas.
- **Run it again!** (Star Trek)

Ventajas y desventajas de la simulación

• Ventajas

- Sustituye el desarrollo de modelos analíticos muy complicados o incluso imposibles.
- Permite visualizar el comportamiento de un sistema.
- Usualmente los costos de la simulación son menores a los ahorros que genera.
- **A process cannot be understood by stopping it. Understanding must move with the flow of the process, must join it and flow with it**
(Frank Herbert, *Dune*)

• Desventajas

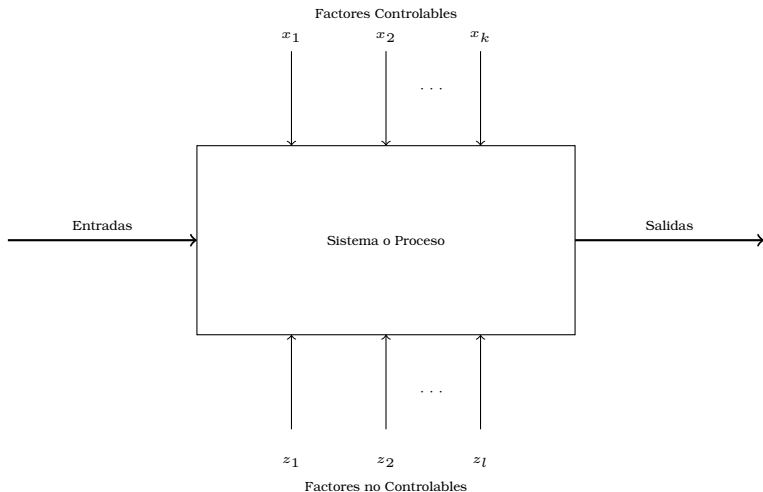
- En ocasiones se utiliza como sustituto del pensamiento analítico.
- Aplica el principio: “garbish in, garbish out”.
- Necesita aplicar correctamente conceptos estadísticos (como diseño de experimentos), así como de experiencia, para obtener las conclusiones correctas.
- **Run it again!** (Star Trek)

0.2 Sistemas, modelos y simulación.

Sistema

Un sistema es un conjunto de objetos que interaccionan de manera conjunta para alcanzar un fin. Un sistema se compone de:

- Entidades: Los objetos de interés en el sistema
- Atributos: las propiedades o características de una entidad.
- Actividad: acciones que ocupan un periodo de tiempo de longitud específica.
- Estado: Una colección de variables que describen el sistema en cualquier momento.
- Evento: Una ocurrencia instantánea que puede cambiar el estado del sistema.
- Endógeno: actividades y eventos que ocurren dentro del sistema
- Exógeno: Actividades y eventos que ocurren con el ambiente.



Ejemplo de Sistema: Bolsa de Valores

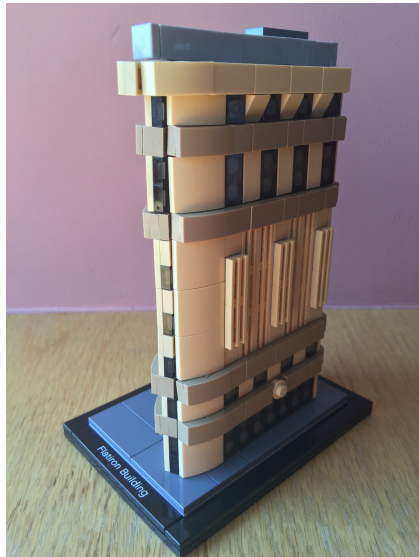
- Entidades: Agentes que participan en la Bolsa: compradores, vendedores y sus acciones.
- Atributos: Comprador, vendedor, posición corta, posición larga, tipo de instrumento, etc.
- Actividad: Un día de operación ordinario (compra-venta de valores).
- Estado: Valor del Índice, posiciones cerradas, abiertas, cortas y largas a las 10:00am.
- Evento: Compra de acciones de Bimbo al doble de precio.
- Endógeno: Compras, ventas.
- Exógeno: Entrada de Wonder Bread al mercado mexicano.

¿Qué es un modelo?

¿Qué es un modelo?



¿Qué es un modelo?



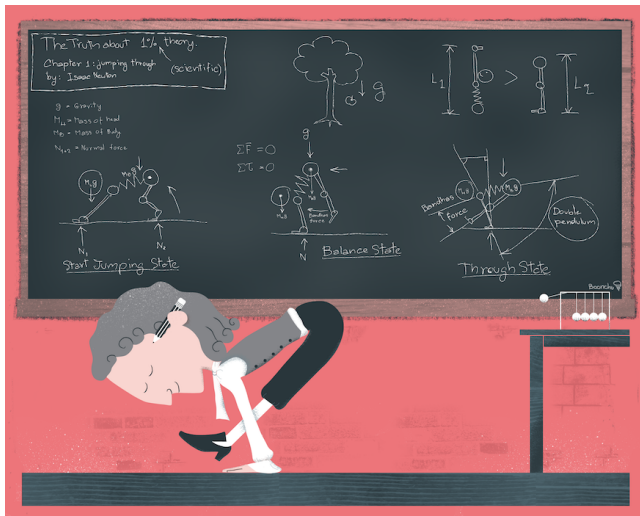
¿Qué es un modelo?



¿Qué es un modelo?

$$y=mx+b$$

¿Qué es un modelo?



¿Qué es un modelo?

- Un **modelo** se puede considerar como una teoría que representa de manera abstracta la realidad.
- El proceso de modelación consta de:
 - Proceso de abstracción: proponer una representación de la realidad, basado en **experiencia** y en la **observación**.



Pablo Picasso: Guernica, 1937

- Deducción a partir del modelo.
 - Verificación, predicción y aplicaciones.
- Los modelos no son únicos
- No hay modelo perfecto

Relevancia de los modelos

Un modelo de simulación busca reproducir lo más fielmente posible las condiciones reales de un fenómeno. Pero siempre hay un intercambio entre complejidad y fidelidad.

“All models are wrong, but some of them are useful”

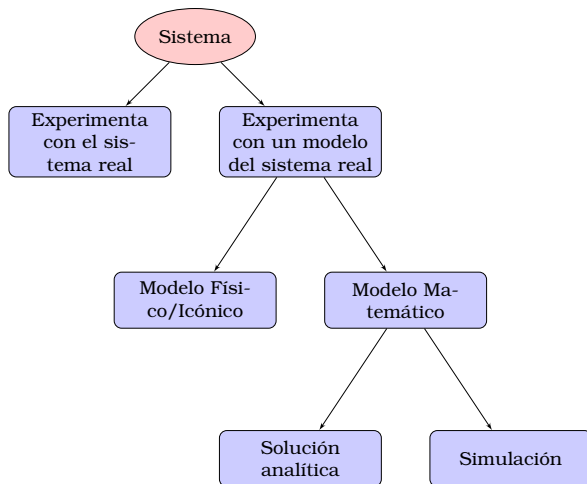
— George Box

Modelo

Modelos

Un Modelo es una construcción conceptual que describe un sistema.

El siguiente esquema describe maneras de estudiar un sistema.



Tipos de simulación

De acuerdo a ciertas características de un modelo, el tipo de simulación puede ser diferente.

- **Determinístico o estocástico**

- ¿El modelo contiene componentes estocásticos?
- Modelos determinísticos: flujo de pagos de una hipoteca o un crédito a tasa fija (bajo un escenario fijo).
- Modelos estocásticos: Línea de espera.

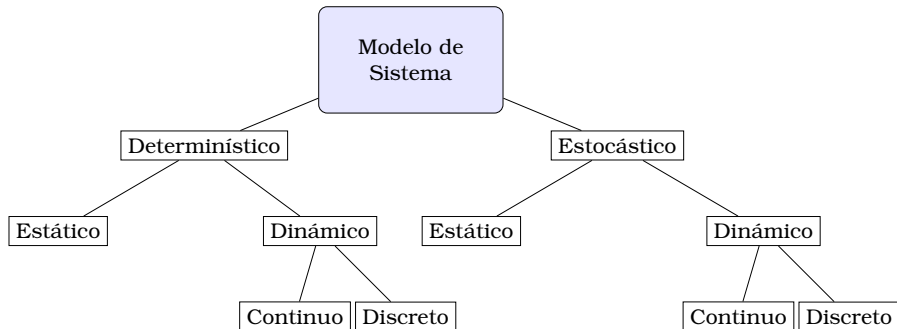
- **¿Estático o dinámico?**

- ¿Es el tiempo una variable significativa?
- Modelos Estáticos: juegos de azar, integración Monte Carlo.
- Modelos Dinámicos: Modelos de inventario.

- **¿Continuo o discreto?**

- ¿El sistema cambia de manera continua o sólo en puntos discretos del tiempo?
- Ejemplos de modelos discretos: modelos de inventarios, colas.
- Ejemplos de modelos continuos: crecimiento de poblaciones, precios de mercado.

Clasificación de modelos/simulación



0.3 Ejemplos de simulación

Simulación de eventos discretos

Este tipo de simulación describe cómo evoluciona en el tiempo un sistema con eventos que ocurren de manera discreta. Las variables de estado cambian debido a la ocurrencia de estos eventos.

Ejemplos comunes de simulación de eventos discretos incluyen:

- Cadenas de Markov
 - Líneas de espera
 - Modelos de inventario
- Flujo en procesos organizacionales
- Toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre
- Evaluación de robustez de políticas públicas.

Ejemplo 1: Línea de espera

- Consideren una unidad de servicio con un sólo servidor (cajero, taquilla, etc.)
- Los clientes se forman para recibir el servicio

Se desea estimar el tiempo promedio de permanencia en la fila, medido como el tiempo que transcurre desde que llega a la fila hasta que comienza a recibir el servicio.

Las variables de estado del sistema son:

- Estado del servidor (libre, ocupado)
- El número de clientes esperando en la fila $\{0, 1, 2, \dots\}$
- El tiempo de llegada de cada persona a la fila
- El tiempo de servicio a cada persona

En este sistema hay dos tipos de eventos relevantes:

- Llegada de un cliente
- Completar el servicio (Partida de un cliente)

Ejemplo 1: Línea de espera

Definiciones:

t_i = Tiempo de llegada del i -ésimo cliente.

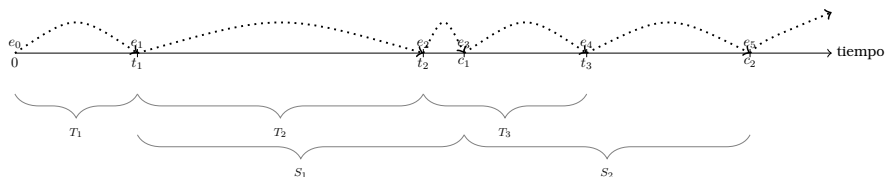
$T_i = t_i - t_{i-1}$ = tiempo de interarribo entre las llegadas del $i - 1$ e i cliente.

S_i = tiempo de servicio del cliente i

D_i = espera en cola del cliente i

$c_i = t_i + D_i + S_i$ = tiempo en que el cliente i completa su servicio y se va.

e_i = tiempo de ocurrencia del i -ésimo evento de cualquier tipo.



Más adelante continuaremos con este modelo.

Ejemplo 2. Cálculo de áreas

Tenemos un mapa de México con cierta escala 1:N en una hoja de papel con área A_{rec} .
¿Cómo determinamos el área de la superficie de México?

$$A_{Mx} = R \times A_{Rec} \times e_{Mapa} = R \times A_{rec} \times N$$

donde

$$R = \text{razón entre áreas} = \frac{A_{Mx}}{A_{rec}}$$

$$e_{Mapa} = \text{escala del mapa}$$

$$A_{rec} = \text{Área de rectángulo (conocida)}$$

Al menos dos posibles alternativas:

- Solución destructiva

- Corta el mapa en m pequeñas piezas al azar. De acuerdo al color dominante del trozo, se clasifica en blanco o en gris.
- Mezcla las piezas
- Extrae una muestra al azar con reemplazo y registra el número de piezas grises (m_{Mx})
Con probabilidad 1, cuando $m \rightarrow \infty$

$$\frac{m_{Mx}}{m} \rightarrow R = \frac{A_{Mx}}{A_{rec}}$$

- Solución no destructiva: ...

Ejemplo 2. Cálculo de áreas

Tenemos un mapa de México con cierta escala 1:N en una hoja de papel con área A_{rec} .
¿Cómo determinamos el área de la superficie de México?

$$A_{Mx} = R \times A_{Rec} \times e_{Mapa} = R \times A_{rec} \times N$$

donde

$$R = \text{razón entre áreas} = \frac{A_{Mx}}{A_{rec}}$$

$$e_{Mapa} = \text{escala del mapa}$$

$$A_{rec} = \text{Área de rectángulo (conocida)}$$

Al menos dos posibles alternativas:

- Solución destructiva
 - Corta el mapa en m pequeñas piezas al azar. De acuerdo al color dominante del trozo, se clasifica en blanco o en gris.
 - Mezcla las piezas
 - Extrae una muestra al azar con reemplazo y registra el número de piezas grises (m_{Mx})
Con probabilidad 1, cuando $m \rightarrow \infty$

$$\frac{m_{Mx}}{m} \rightarrow R = \frac{A_{Mx}}{A_{rec}}$$

- Solución no destructiva: ...

Ejemplo 2. Cálculo de áreas

Tenemos un mapa de México con cierta escala 1:N en una hoja de papel con área A_{rec} .
¿Cómo determinamos el área de la superficie de México?

$$A_{Mx} = R \times A_{Rec} \times e_{Mapa} = R \times A_{rec} \times N$$

donde

$$R = \text{razón entre áreas} = \frac{A_{Mx}}{A_{rec}}$$

$$e_{Mapa} = \text{escala del mapa}$$

$$A_{rec} = \text{Área de rectángulo (conocida)}$$

Al menos dos posibles alternativas:

- Solución destructiva
 - Corta el mapa en m pequeñas piezas al azar. De acuerdo al color dominante del trozo, se clasifica en blanco o en gris.
 - Mezcla las piezas
 - Extrae una muestra al azar con reemplazo y registra el número de piezas grises (m_{Mx})
Con probabilidad 1, cuando $m \rightarrow \infty$

$$\frac{m_{Mx}}{m} \rightarrow R = \frac{A_{Mx}}{A_{rec}}$$

- Solución no destructiva: ...

Ejemplo 2. Cálculo de áreas

Tenemos un mapa de México con cierta escala 1:N en una hoja de papel con área A_{rec} .
¿Cómo determinamos el área de la superficie de México?

$$A_{Mx} = R \times A_{Rec} \times e_{Mapa} = R \times A_{rec} \times N$$

donde

$$R = \text{razón entre áreas} = \frac{A_{Mx}}{A_{rec}}$$

$$e_{Mapa} = \text{escala del mapa}$$

$$A_{rec} = \text{Área de rectángulo (conocida)}$$

Al menos dos posibles alternativas:

- Solución destructiva
 - Corta el mapa en m pequeñas piezas al azar. De acuerdo al color dominante del trozo, se clasifica en blanco o en gris.
 - Mezcla las piezas
 - Extrae una muestra al azar con reemplazo y registra el número de piezas grises (m_{Mx})
Con probabilidad 1, cuando $m \rightarrow \infty$

$$\frac{m_{Mx}}{m} \rightarrow R = \frac{A_{Mx}}{A_{rec}}$$

- Solución no destructiva: ...

Ejemplo 2. Cálculo de áreas

Tenemos un mapa de México con cierta escala 1:N en una hoja de papel con área A_{rec} .
¿Cómo determinamos el área de la superficie de México?

$$A_{Mx} = R \times A_{Rec} \times e_{Mapa} = R \times A_{rec} \times N$$

donde

$$R = \text{razón entre áreas} = \frac{A_{Mx}}{A_{rec}}$$

$$e_{Mapa} = \text{escala del mapa}$$

$$A_{rec} = \text{Área de rectángulo (conocida)}$$

Al menos dos posibles alternativas:

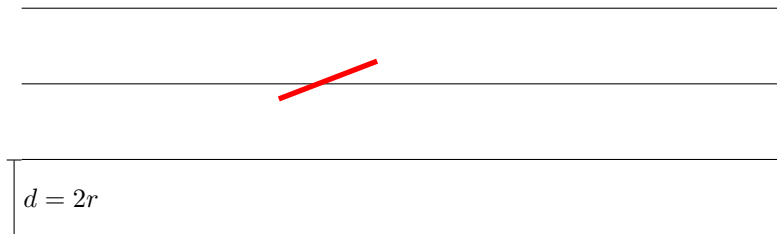
- Solución destructiva
 - Corta el mapa en m pequeñas piezas al azar. De acuerdo al color dominante del trozo, se clasifica en blanco o en gris.
 - Mezcla las piezas
 - Extrae una muestra al azar con reemplazo y registra el número de piezas grises (m_{Mx})
Con probabilidad 1, cuando $m \rightarrow \infty$

$$\frac{m_{Mx}}{m} \rightarrow R = \frac{A_{Mx}}{A_{rec}}$$

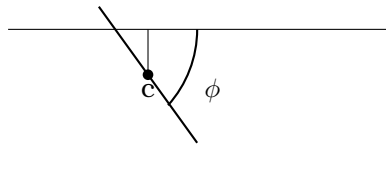
- Solución no destructiva: ...

Ejemplo 3. Estimación de π : Problema de la aguja de Buffon (1733)

Una aguja de longitud r se lanza en un piso con duelas, que son de ancho d ($r \leq d$). ¿Cuál es la probabilidad de que la aguja “lanzada al azar” intersecte una orilla de la duela?



Ejemplo 3. Buffon



- Sea c el punto del centro de la aguja a la duela más cercana.
- Noten que con largo de aguja r , $0 \leq c \leq d$ y $0 \leq \phi \leq \pi/2$. Podemos suponer que ambas son variables aleatorias uniformes e independientes.
- $\text{sen}\phi = \frac{c}{r/2} \implies c = \frac{r}{2}\text{sen}\phi$
- La aguja cruza si y sólo si $c \leq \frac{r}{2}\text{sen}\phi$
- Entonces $P[\text{cruce}] = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\frac{r}{2}\text{sen}\phi} \frac{4}{d\pi} dc d\phi = \frac{2r}{\pi d} = \frac{1}{\pi}$

Ejemplo 3. Buffon

Un posible mecanismo de estimación:

- Lanza una aguja “aleatoriamente” N veces.
- Sea X = No. de cruces. Entonces $\hat{p}_N = \frac{X}{N}$, y por lo tanto $\hat{\pi} = \frac{1}{\hat{p}_N}$.

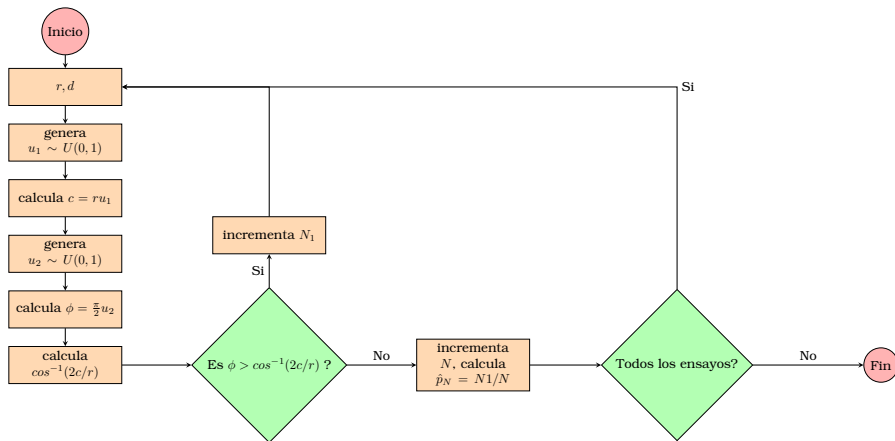
Además, sabemos que $X|N \sim \text{Bin}(N, p)$, así que $\text{Var}(\hat{p}_N|N) = \frac{p(1-p)}{N}$.
Para N grande, por el teorema del límite central:

$$\sqrt{N}(\hat{p}_N - p) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, p(1-p))$$

Un estimador de la varianza de \hat{p}_N es $\frac{\hat{p}_N(1-\hat{p}_N)}{N}$ y un intervalo de confianza para p es:

$$\hat{p}_N \pm z_{1-\alpha/2} \left(\frac{\hat{p}_N(1-\hat{p}_N)}{N} \right)^{1/2}$$

Ejemplo 3. Aguja de Buffon: simulación



Ejemplo 3. Aguja de Buffon: simulación

#Este programa estima la probabilidad de que una aguja intersekte una línea en un piso de duela

#Definición de parámetros

N <- 2000 #Número de simulaciones

alfa <- 0.05 #nivel de significancia

z <- qnorm(1-alfa/2) #cuantil de la distribución normal

NI <- rep(1,N) #indicadora para las agujas que tocan el límite de la duela

r <- 10 #longitud de la aguja

d <- 15 #ancho de la duela

#Inicio de la simulación

u1 <- runif(N, min = 0, max = d/2)

u2 <- runif(N, min = 0, max = pi/ 2)

*prob <- ifelse(r/2*cos(u2) >= u1,1,0)*

prob <- cumsum(prob)/1:N

*lim.inf <- prob - z*sqrt(prob*(1-prob)/1:N)*

*lim.sup <- prob + z*sqrt(prob*(1-prob)/1:N)*

#Gráfica

plot(1:N, prob, type = "l", ylim = c(0,1), xlab = "No. de simulaciones",

main = "Cálculo de probabilidad con N=2000 lanzamientos")

lines(1:N, lim.inf, col = "red", lty = 2)

lines(1:N, lim.sup, col = "red", lty = 2)

*abline(h = 2*r/(pi*d), col = "blue", lwd = 2)*

*text(100, 2*r/(pi*d)+1, as.character(2*r/(pi*d)))*

Ejemplo 3. Aguja de Buffon: simulación

Cálculo de probabilidad con $N=2000$ lanzamientos

