Simulación

5. Cópulas
Estimación de Cópulas

Jorge de la Vega Góngora

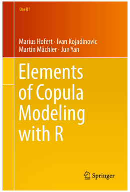
Departamento de Estadística,
Instituto Tecnológico Autónomo de México

Clase 12

Características del paquete

- El paquete `copula` desarrollada por Hofert, et al (2006) provee una plataforma para la modelación multivariada de cópulas. Incluye, para las cópulas elípticas (normal, t), y arquimedianas (Clayton, Frank, Gumbel), los siguientes métodos:

- evaluación de densidad/distribución
- generación de números aleatorios de la cópula
- visualización
- Ajuste de modelos basados en cópulas, utilizando máxima verosimilitud.
- La cópula de valores extremos sólo está implementada para el caso bivariado.
- El libro de la derecha fue recién publicado en 2018



- Otro paquete importante es el paquete `fCopulae` de Tobias Setz, como parte de los paquetes financieros de `Rmetrics`, que complementa los modelos de cópula para incluir las cópulas de Valor Extremo, y la cópula Empírica.

Clases definidas en el paquete `copula` I

Hay básicamente dos *clases* (estructuras):

`copula` para definir cópulas:

$$C(u_1, \ldots, u_p) = F(F_1^{-1}(u_1), \ldots, F_p^{-1}(u_p))$$

donde F y F_i son dadas.

`mvdc` para definir distribuciones multivariadas a partir de cópulas:

$$F(x_1, \ldots, x_p) = C(F_1(x_1), \ldots, F_p(x_p))$$

donde C y F_i son dadas.

Clase copula I

La clase `copula` considera las subclases

- `ellipCopula`, incluye `normalCopula` y `tCopula`. Como se vió en clase, basta con definir la matriz de correlaciones como parámetro de las dos familias, y en el caso de la distribución t además se requieren los grados de libertad (`df`). La matriz de correlaciones define la estructura de dependencia, y se pueden usar las siguientes configuraciones:

  `ar1`: especificación para dependencias autorregresivas, por ejemplo, con $p = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1^2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_1^2 & \rho_1 & 1 \end{pmatrix}$$

  `ex`: exchangeable: todas las variables tienen la misma correlación

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_1 & 1 \end{pmatrix}$$

`toep` Toeplitz: matriz con estructuras diagonales constantes:

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{pmatrix}$$

`un` unstructured: todas las correlaciones son diferentes.

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_3 \\ \rho_2 & \rho_3 & 1 \end{pmatrix}$$

- `archmCopula`, que incluye `claytonCopula`, `frankCopula` y `gumbelCopula`.

Ejemplo 1

Para generar una cópula gaussiana de dimensión 4 de tipo no estructurado, se requiere definir 6 valores de correlaciones:

```
library(copula)
copula.normal4 <- ellipCopula(family = "normal", dim = 4, dispstr = "un",
                  param = c(0.4,0.5,0.2,0,0.3,0.8))
copula.normal4 #objeto de clase normalCopula

Normal copula, dim. d = 4
Dimension:  4
Parameters:
  rho.1    = 0.4
  rho.2    = 0.5
  rho.3    = 0.2
  rho.4    = 0.0
  rho.5    = 0.3
  rho.6    = 0.8
dispstr:  un

u <- rCopula(200,copula.normal4) #genera cuatro observaciones de la cópula construida
cor(u)

          [,1]       [,2]       [,3]      [,4]
[1,] 1.0000000 0.42379500 0.45695076 0.1629576
[2,] 0.4237950 1.00000000 0.02003276 0.2545059
[3,] 0.4569508 0.02003276 1.00000000 0.8074805
[4,] 0.1629576 0.25450586 0.80748053 1.0000000
```

Ejemplo 2

Para generar una cópula t de dimensión 3 de tipo Toeplitz, se requiere definir 2 valores de correlaciones y los grados de libertad:

```
micopula.t3 <- ellipCopula(family = "t", dim = 3, dispstr = "toep",
param = c(0.8,0.5), df = 8)
micopula.t3 #objeto de clase tCopula

t-copula, dim. d = 3
Dimension:  3
Parameters:
  rho.1    = 0.8
  rho.2    = 0.5
  df       = 8.0
dispstr:  toep

rCopula(5,micopula.t3) #genera cuatro observaciones de la cópula construida

           [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 0.54041579 0.7728330 0.6040719
[2,] 0.27700757 0.5912605 0.7120982
[3,] 0.21394691 0.2558834 0.6989475
[4,] 0.08290066 0.1706623 0.2389771
[5,] 0.70286018 0.7772273 0.7937088
```

Ejemplos 3

Para generar una cópula tipo Clayton bidimensional con parámetro $\theta = 2$:

```
clayton2 <- archmCopula(family = "clayton", dim = 2, param = 2)
clayton2 #el programa llama alpha al parámetro
```

```
Clayton copula, dim. d = 2
Dimension:  2
Parameters:
  alpha   = 2
```

```
contour(clayton2,dCopula) #gráfica de curvas de nivel
```

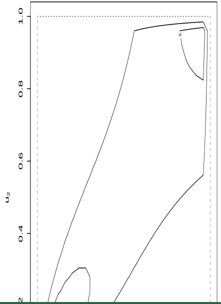


Tabla de cópulas Arquimedianas

Familia	Espacio paramétral θ	$\psi(t)$	$\psi^{-1}(t)$	$C(u,v)$
Clayton	$\theta \geq 0$	$\frac{t^{-\theta}-1}{\theta}$	$(1+\theta t)^{-1/\theta}$	$(u^{-\theta}+v^{-\theta}-1)^{-1/\theta}$
Frank	$\theta \geq 0$	$-\log \frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}$	$-\theta^{-1}\log(1+e^{-t}(e^{-\theta}-1))$	$-\frac{1}{\theta}\log\left(1+\frac{(e^{-\theta u}-1)e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}\right)$
Gumbel	$\theta \geq 1$	$(-\log t)^{\theta}$	$e^{-t^{1/\theta}}$	$\exp\left[-((-\log u)^{\theta}+(-\log v)^{\theta})^{1/\theta}\right]$

Clase `mvdc`

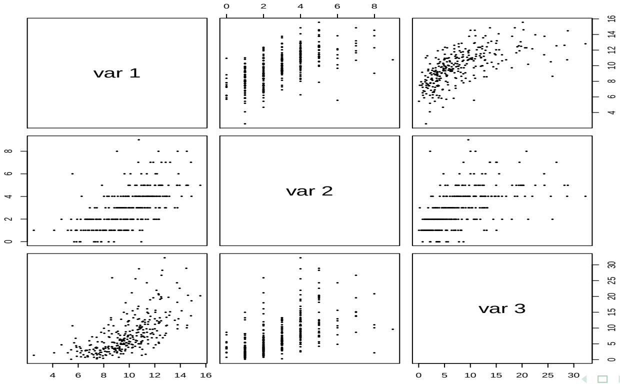
- Esta clase está diseñada para construir distribuciones multivariadas con maginales dadas usando cópulas. Este es el caso que hicimos en la última clase de cópulas, dadas las marginales y una estructura de dependencia, construir una distribución conjunta usando, por ejemplo, la cópula Gaussiana.
  Esta clase tiene tres componentes:

  `copula`: Especifica la cópula a usar para 'pegar' las marginales.
  `margins`: Especifica los nombres de las distribuciones marginales a usar.
  `paramMargins`: una lista de listas, con los parámetros de las distribuciones marginales.

Ejemplo 4 (`mvdc`)

Generar una distribución conjunta con una cópula Frank con parámetro $\theta = 5$ y con marginales $\mathcal{N}(10, 4)$, $\mathcal{P}(3)$ y $\mathcal{G}(2, 4)$.

```
copula.Frank5 <- archmCopula(family = "frank", dim = 3, param = 5)
micopula <- mvdc(copula = copula.Frank5, margins = c("norm","pois","gamma"),
                 paramMargins = list(list(mean=10,sd=2), list(lambda=3), list(shape=2,scale=4)))
u <- rMvdc(300,micopula) #muestra aleatoria
par(mar=c(1,1,1,1));pairs(u,pch=16,cex=0.5)
```



Funciones de distribución y densidad para cópulas I

Para la distribución conjunta creada a partir de la cópula

```
u <- rMvdc(5,micopula)
u # puntos del dominio

          [,1] [,2]      [,3]
[1,]  9.737083    4  8.595679
[2,]  9.209915    1  2.564981
[3,] 10.683198    3 11.202613
[4,] 14.729478    6  5.761111
[5,]  7.328752    4  4.488407

dMvdc(u,micopula) # puntos de la densidad

[1] 2.331190e-03 6.054079e-03 4.645764e-03 9.202222e-06 2.583320e-04

pMvdc(u,micopula) # puntos de la distribución

[1] 0.38287365 0.05997642 0.48802332 0.41975685 0.06741854
```

Para la cópula dada:

Funciones de distribución y densidad para cópulas II

```r
u <- rCopula(5,copula.Frank5)
u # puntos del dominio
```

```
            [,1]       [,2]       [,3]
[1,] 0.006601457 0.06916678 0.08330401
[2,] 0.969578890 0.62500900 0.81280468
[3,] 0.843229252 0.37532813 0.58004430
[4,] 0.877441004 0.79701998 0.84061189
[5,] 0.767579725 0.56614535 0.97496943
```

```r
dCopula(u,copula.Frank5) # puntos de la densidad
```

```
[1] 11.5901822  1.7502539  0.7001787  5.1199340  1.1763200
```

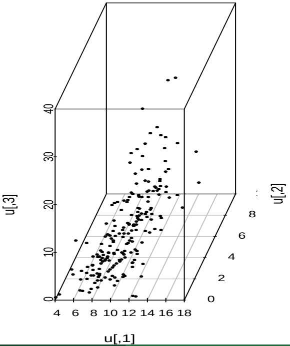
```r
pCopula(u,copula.Frank5) # puntos de la distribución
```

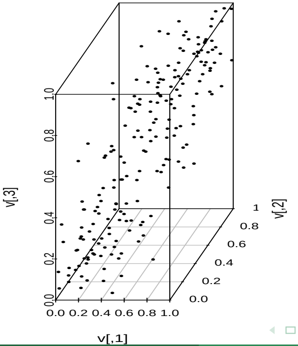
```
[1] 0.0006566509 0.5799389991 0.3211220633 0.6866157909 0.5211955334
```

Gráficas

La siguiente gráfica muestra la realización de una muestra

```
library(scatterplot3d)
par(mfrow=c(1,2),mar=c(1,2,1,1),oma=c(0,0,1,1),mgp=c(2,1,0))
u <- rMvdc(200,micopula)
scatterplot3d(u,cex.symbols=0.5,pch=16)
v <- rCopula(200,copula.Frank5)
scatterplot3d(v,cex.symbols=0.5,pch=16)
```





Contornos de funciones de densidad/distribución I

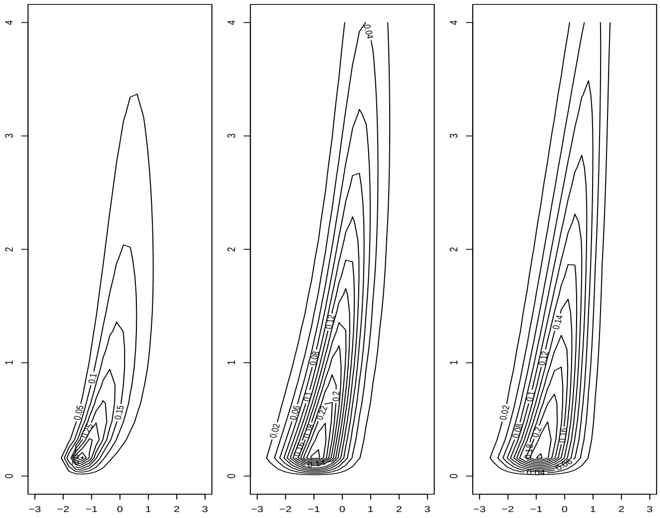
El siguiente código grafica los contornos de densidad de distribuciones bivariadas definidas con las tres cópulas de Clayton, Frank y Gumbel con marginales normales.

```
miMvd1 <- mvdc(copula = archmCopula(family="clayton", param=2), margins = c("norm", "gamma"),
               paramMargins = list(list(mean=0,sd=1), list(shape=1,scale=2)))
miMvd2 <- mvdc(copula = archmCopula(family="frank", param=5.763), margins = c("norm", "gamma"),
                           paramMargins = list(list(mean=0,sd=1), list(shape=1,scale=2)))
miMvd3 <- mvdc(copula = archmCopula(family="gumbel", param=2), margins = c("norm", "gamma"),
                           paramMargins = list(list(mean=0,sd=1), list(shape=1,scale=2)))
```

Los parámetros han sido escogidos para dar una τ de Kendall para las tres distribuciones igual a 0.5.

```
par(mfrow=c(1,3), mar=c(2,2,1,1), oma=c(1,1,0,0), mgp=c(2,1,0))
contour(miMvd1, dMvdc,xlim=c(-3,3), ylim=c(0,4))
contour(miMvd2, dMvdc,xlim=c(-3,3), ylim=c(0,4))
contour(miMvd3, dMvdc,xlim=c(-3,3), ylim=c(0,4))
```

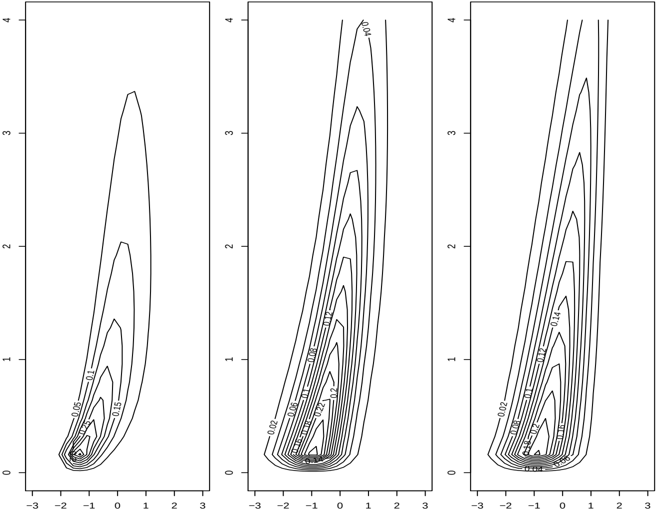
Contornos de funciones de densidad/distribución II



Contornos de funciones de densidad/distribución III

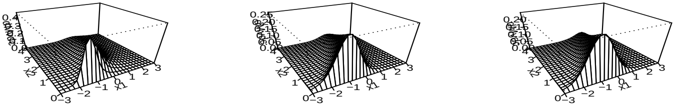
```
par(mfrow=c(1,3), mar=c(2,2,1,1), oma=c(1,1,0,0), mgp=c(2,1,0))
contour(miMvd1, dMvdc,xlim=c(-3,3), ylim=c(0,4))
contour(miMvd2, dMvdc,xlim=c(-3,3), ylim=c(0,4))
contour(miMvd3, dMvdc,xlim=c(-3,3), ylim=c(0,4))
```

Contornos de funciones de densidad/distribución IV



La función `persp` es similar:

```
par(mfrow=c(1,3))
persp(miMvd1, dMvdc,xlim=c(-3,3), ylim=c(0,4))
persp(miMvd2, dMvdc,xlim=c(-3,3), ylim=c(0,4))
persp(miMvd3, dMvdc,xlim=c(-3,3), ylim=c(0,4))
```



2.8 Estimación de cópulas

Introducción

- Dado un conjunto de datos, elegir una cópula para ajustarlos en un problema importante pero difícil y llena de trucos. Tiene dificultades técnicas y trampas con las que hay que ser muy cuidadoso.
- El problema es que la estimación de cópulas implica usualmente que cada marginal debe ser evaluada y conectada a una distribución multivariada estimada.
- A continuación veremos un ejemplo de estimación.
- Usaremos varios paquetes de `R` para realizar el ejercicio. En particular se usarán los paquetes:
  - `Ecdat` para tomar algunos datos,
  - `copula`, que es el paquete principal de donde se obtienen la mayoría de las características,
  - `fGarch` para el uso de la densidad t estandarizada,
  - `MASS` para el uso de las funciones `fitdistr`, `kde2d` y
  - `fCopulae` para funciones adicionales de copulas: `pempiricalCopula`, `ellipticalCopulafit`.

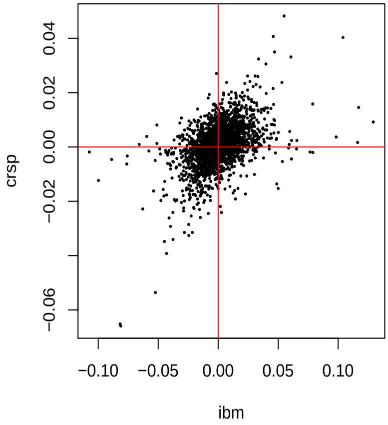
Datos I

- El paquete `Ecdat` es un conjunto de datos Econométricos. Los datos `CRSPday` contiene una base de datos de rendimientos diarios de acciones del Center for Research in Security Prices (CRSP), del 3 de enero de 1969 al 31 de diciembre de 1998.
- Nos vamos a fijar en las dos variables `ibm`, que es el rendimiento de IBM y `crsp` que es un índice ponderado de rendimientos construído por el CRSP.

Datos II

```
suppressMessages(library(Ecdat)) #fuente de datos
library(copula)
library(fGarch) #función de densidad t estandarizada

Loading required package: timeDate
Loading required package: timeSeries
Loading required package: fBasics

suppressMessages(library(MASS)) #usa las funciones fitdistr y kde2d
library(fCopulae)  #funciones adicionales de copula (pempiricalCopula y ellipticalCopulaFit)

Loading required package: fMultivar

data(CRSPday,package="Ecdat")
ibm <- CRSPday[,5]; crsp <- CRSPday[,7]
n <- length(ibm); n #número de observaciones

[1] 2528

par(pty = "s"); plot(ibm, crsp, cex = 0.4, pch = 16)
abline(h = 0, v = 0, col="red")
```

Datos III



Marginales propuestas

- A continuación se ajustará una distribución t a cada una de las variables marginales. Los valores que se guardan corresponden a los valores estimados de las distribuciones t marginales. Cada distribución marginal puede ajustar diferentes grados de libertad.
- La función `fitdistr` del paquete `MASS` estima las características de una función de distribución usando máxima verosimilitud (en el caso de la t, su media, escala, y grados de libertad).

```
est.ibm <- as.numeric(fitdistr(ibm,"t")$estimate) #parámetros t: media, escala, gl
est.crsp <- as.numeric(fitdistr(crsp,"t")$estimate)
        #Convierte los parámetros de escala a desviaciones estándar en el caso de la t
est.ibm[2] <- est.ibm[2]*sqrt(est.ibm[3]/(est.ibm[3]-2))
est.crsp[2] <- est.crsp[2]*sqrt(est.crsp[3]/(est.crsp[3]-2))
        #Grados de libertad para cada caso
est.ibm[3]

[1] 4.276156

est.crsp[3]

[1] 3.473982
```

Ajuste de cópula específica I

- Como un ejercicio inicial, supongamos que se quiere ajustar una cópula específica, por ejemplo, una cópula t.
- Para estimar una t-cópula por máxima verosimilitud, se requiere una estimación de la correlación y un valor inicial adecuado.
- Se usarán las densidades t estimadas como valores iniciales. Se define la cópula t con 2 grados de libertad

```
tau <- cor(ibm,crsp,method = "kendall")
omega <- 2/pi*asin(tau)
c(tau,omega)

[1] 0.3308049 0.2146404

copula2 <- tCopula(omega,dim=2,dispstr = "un",df = 2)
```

Ahora hay que ajustar la copula a los datos uniformes transformados:

Ajuste de cópula específica II

```r
#La función pstd es la distribución estándar t
#por el método de máxima verosimilitud
d1 <- cbind(pstd(ibm, mean = est.ibm[1], sd=est.ibm[2],nu=est.ibm[3]),
pstd(crsp, mean = est.crsp[1], sd=est.crsp[2],nu=est.crsp[3]))

fit1 <- fitCopula(copula2,method="ml",optim.method="L-BFGS-B",data=d1,
start=c(omega,5),lower=c(0,2.5),upper=c(0.5,15) )
fit1
```

```
Call: fitCopula(copula, data = data, method = "ml", start = ..3, lower = ..4,
    upper = ..5, optim.method = "L-BFGS-B")
Fit based on "maximum likelihood" and 2528 2-dimensional observations.
Copula: tCopula
 rho.1     df
0.4937 9.8537
The maximized loglikelihood is 362
Optimization converged
```

Cópulas alternas I

Para efectos de comparación, consideremos ahora el ajuste de otras cópulas a los datos:

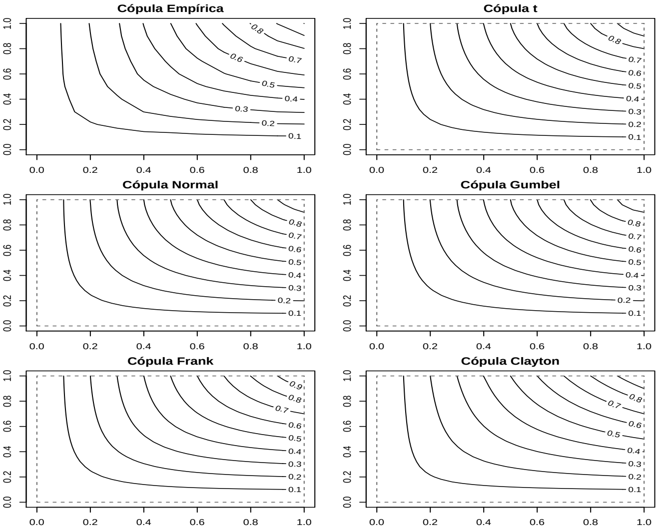
```
#Ajusta copula normal
        fnorm <- fitCopula(data=d1,copula=normalCopula(-0.3,dim=2),
        method="ml",optim.method="BFGS",start=0.5)
#Ajusta Gumbel
        fgumbel <- fitCopula(data=d1,copula=gumbelCopula(3,dim=2),
        method="ml",optim.method="BFGS",start=2)
#Ajusta Frank
        ffrank <- fitCopula(data=d1,copula=frankCopula(3,dim=2),
        method="ml",optim.method="BFGS",start=2)
#Ajusta Clayton
        fclayton <- fitCopula(data=d1,copula=claytonCopula(3,dim=2),
        method="ml",optim.method="BFGS",start=2)
```

Las copulas estimadas se compararán contra la cópula empírica y se verá si hay alguna estimación que quede cerca a la cópula que se obtiene de los datos.

Comparación gráfica I

```
u <- d1
dem <- pempiricalCopula(u[,1],u[,2])
par(mfrow=c(3,2),mar=c(2,2,2,2))
contour(dem$x,dem$y,dem$z,main="Cópula Empírica")
contour(tCopula(fit1@estimate[1],df=round(fit1@estimate[2],0)),pCopula,main="Cópula t")
contour(normalCopula(fnorm@estimate),pCopula,main="Cópula Normal")
contour(gumbelCopula(fgumbel@estimate),pCopula,main="Cópula Gumbel")
contour(frankCopula(ffrank@estimate),pCopula,main="Cópula Frank")
contour(claytonCopula(fclayton@estimate),pCopula,main="Cópula Clayton")
```

Comparación gráfica II

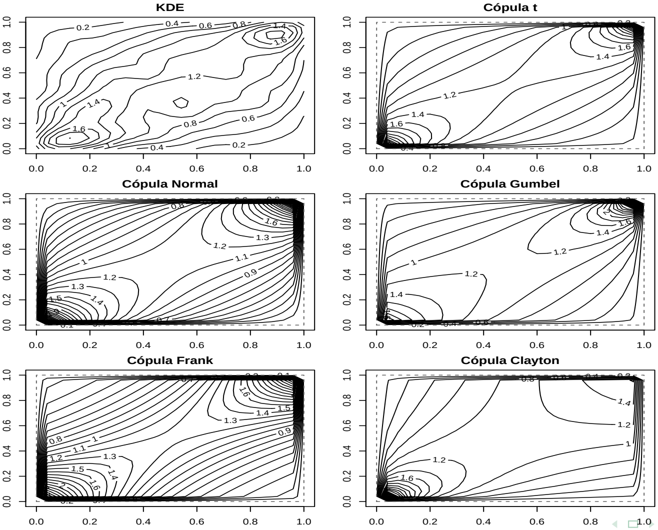


Comparación de estimación bivariada con distribuciones paramétricas I

En el siguiente conjunto de gráficas se comparará la estimación de la densidad bivariada entre las diferentes estimaciones paramétricas

```
par(mfrow=c(3,2),mar=c(2,2,2,2))
contour(kde2d(u[,1],u[,2]),main="KDE")
contour(tCopula(fit1@estimate[1],df=fit1@estimate[2]),dCopula,
main="Cópula t",nlevels=25)
contour(normalCopula(fnorm@estimate),dCopula,main="Cópula Normal",nlevels=25)
contour(gumbelCopula(fgumbel@estimate),dCopula,main="Cópula Gumbel",nlevels=25)
contour(frankCopula(ffrank@estimate),dCopula,main="Cópula Frank",nlevels=25)
contour(claytonCopula(fclayton@estimate),dCopula,main="Cópula Clayton",nlevels=25)
```

Comparación de estimación bivariada con distribuciones paramétricas II



Evaluación a través de AIC

Por último, podemos comparar los AIC. Recuerden que AIC =

```
#AIC Normal
2*length(fnorm@estimate)-2*fnorm@loglik

[1] -692.3688

#AIC Gumbel
2*length(fgumbel@estimate)-2*fgumbel@loglik

[1] -624.4514

#AIC frank
2*length(ffrank@estimate)-2*ffrank@loglik

[1] -648.5734

#AIC Clayton
2*length(fclayton@estimate)-2*fclayton@loglik

[1] -584.2204

#AIC t
2*length(fit1@estimate)-2*fit1@loglik

[1] -719.9693
```