Transformaciones Geométricas

Luis Rivera

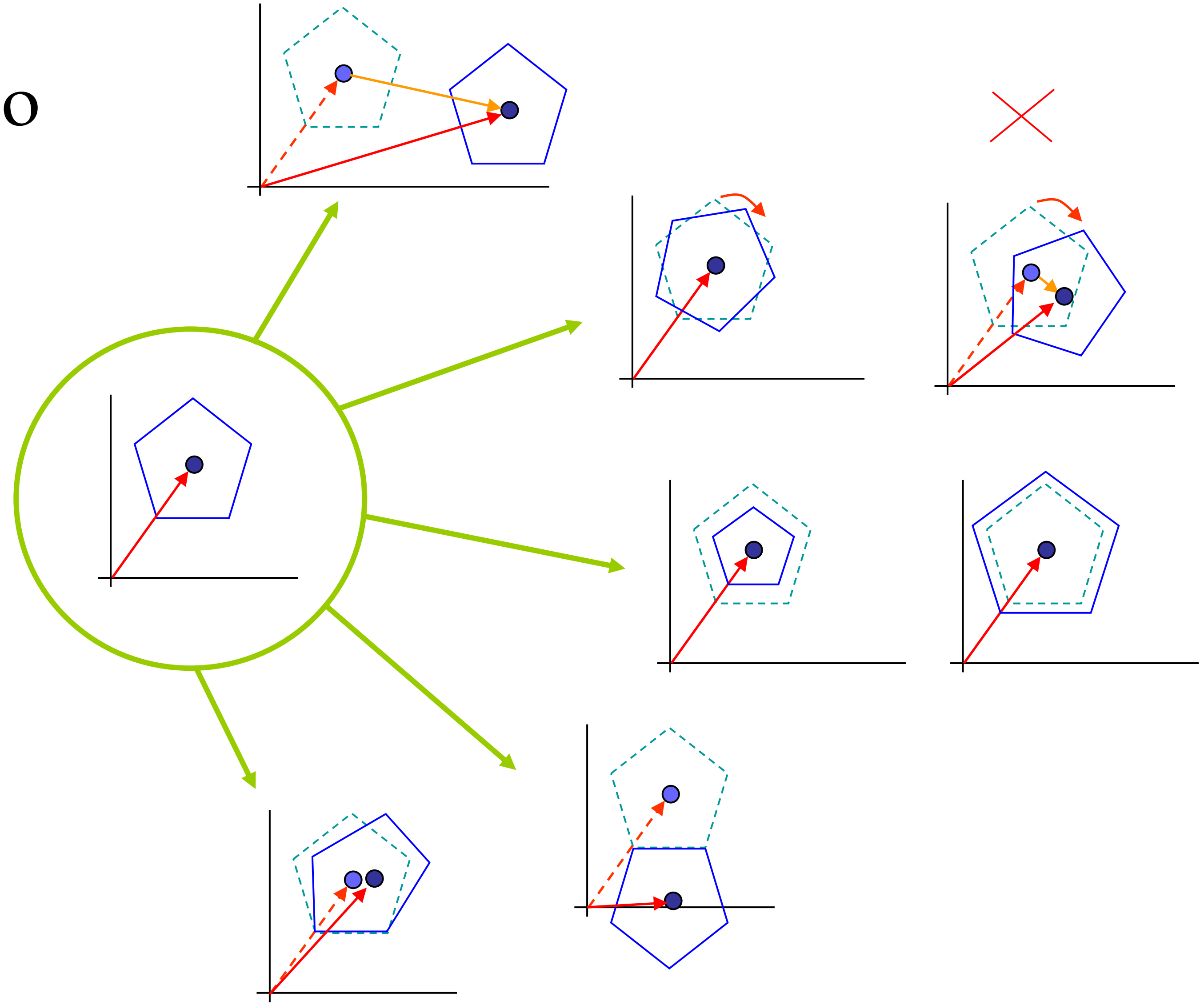
Um Exemplo de OpenGL

```
#include <GL/glut.h>
#include <GL/gl.h>
#include <iostream>
using namespace std;

void drawPoint(int x, int y) {
      x = x - 250;
      y = 250-y;
      glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT);
      glColor3v(vcor);
      glPointSize(10);
      glBegin(GL_POINTS);
      glVertex2f(x , y);
      glEnd();
      glFlush();
}

void mouse(int bin, int state , int x , int y) {
      if(bin == GLUT_LEFT_BUTTON &amp;&amp;
      state == GLUT_DOWN) drawPoint(x,y);
}
```

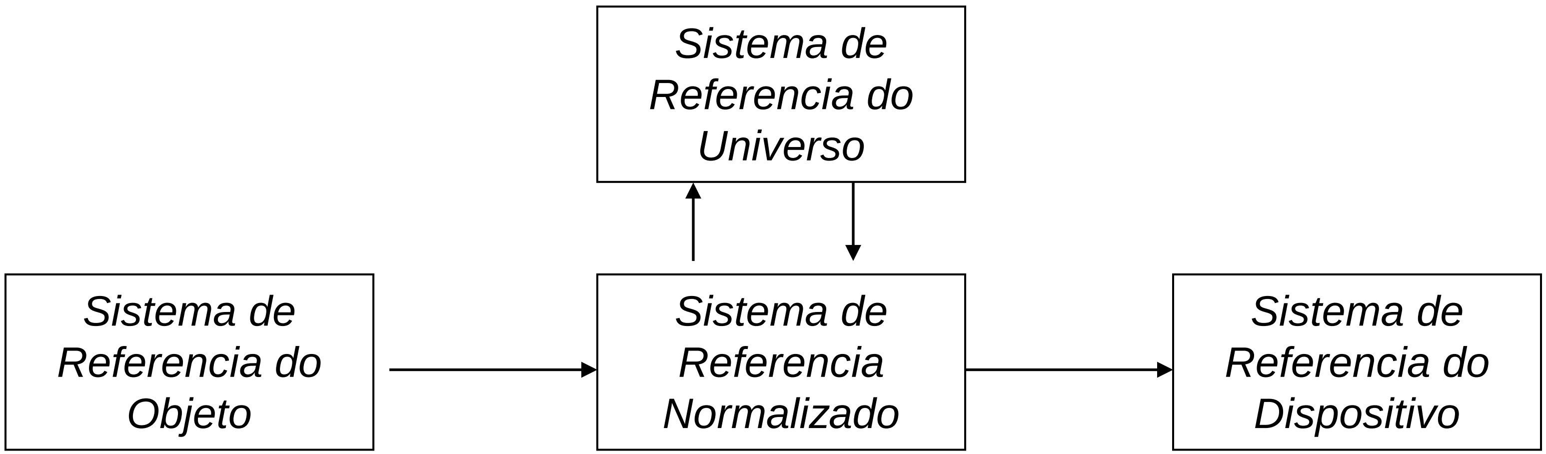
```
void display (void){}

void init (void)
{
  glClearColor (1.0, 1.0, 0.0, 0.0);
  glMatrixMode(GL_MODELVIEW);
  glLoadIdentity();
  glFlush();
}
int main (int argc,char** argv){
          glutInit(&amp;argc,argv);
          glutInitDisplayMode(GLUT_SINGLE |
         GLUT_RGB);
          glutInitWindowSize(500,500);
          glutInitWindowPosition(0,0);
          glutCreateWindow("My Window");
         glutMouseFunc(mouse);
         glutMotionFunc(drawSquare);
          glutDisplayFunc(display);
          init();
          glutMainLoop();
          return 0;
}
```

Transformações geométricas

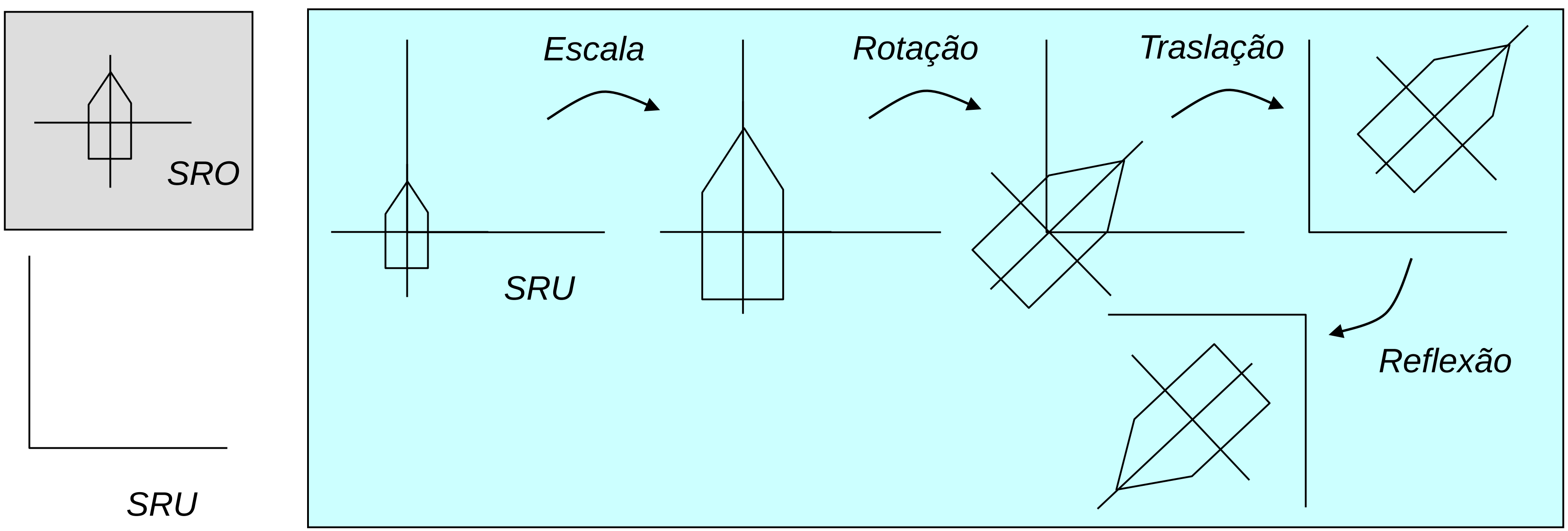
- Translação
- Rotação
- Escala
- Reflexão
- Cisalha



Sistemas de Coordenadas



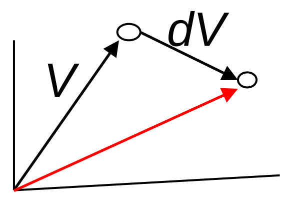
- Transformações entre Sistemas de Coordenadas



Transformações Lineares Bidimensionais

- Origem é ponto fixo.
  - Translação não é transformação linear → transf. afim
- Operações de matrizes, para cada ponto (x, y, z) do objeto

$$T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}$$



V + dV = Vt

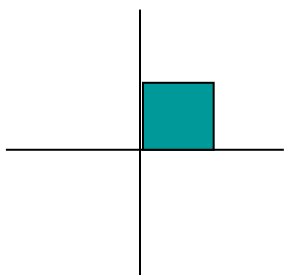
$$T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ c_1 x + c_2 y + c_3 z \end{pmatrix}$$

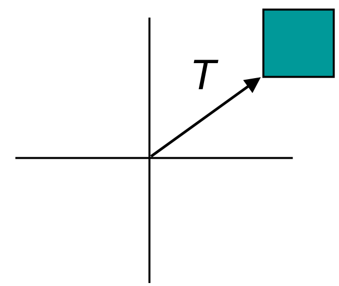
1) T(A+B) = T(A) + T(B)
2) T(sA) = sT(A)
.... Dm: T(V) = V + dV
T(Va + Vb) = (Va+Vb)+dV
=Va + Vb +dV
T(Va) = Va + dV
T(Vb) = Vb + dV
T(Va)+ T(Vb) = Va +Vb +2dV

Translação

$$p' = p + T$$

$$[x', y'] = [x, y] + [Tx, Ty]$$





$$[x', y'] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} ????$$

$$[x', y', z'] = [x, y, z] + [Tx, Ty, Tz]$$

Translação

Transformação Linear??

$$T(p_1) = p_1 + T \qquad T(p_2) = p_2 + T$$

$$\boxed{T(p_1 + p_2) = T(p_1) + T\left(p_2\right)???}$$

$$\boxed{T(p_1 + p_2) = \left(p_1 + T\right) + \left(p_2 + T\right) = p_1 + p_2 + 2T}$$

Errado??

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + T_x \\ y_1 + y_2 + T_y \\ m \end{bmatrix}$$

????

Translação TL?

$$[x', y'] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} ????$$

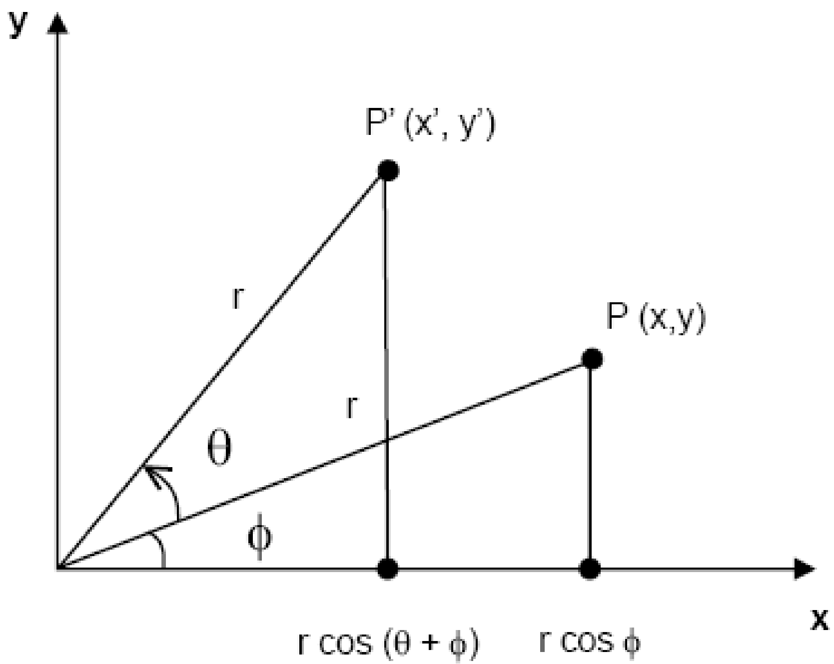
$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + T_x \\ y + T_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformada Afim

$$[x', y'] = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x & T_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + T_x & y + T_y \end{bmatrix}$$

Rotação

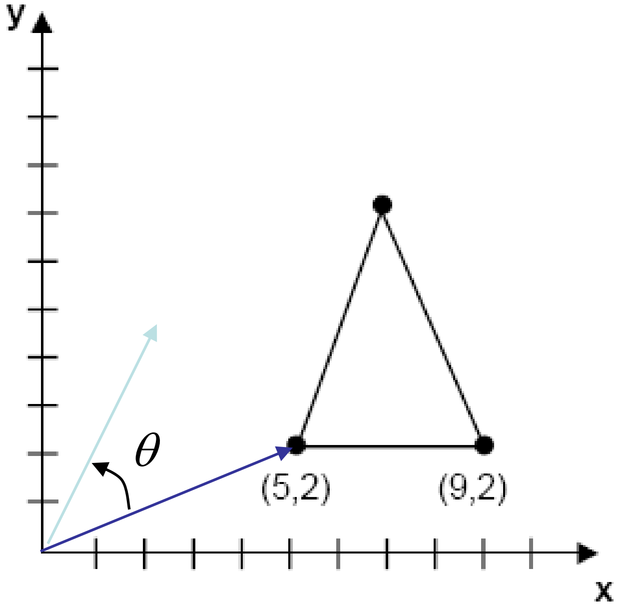


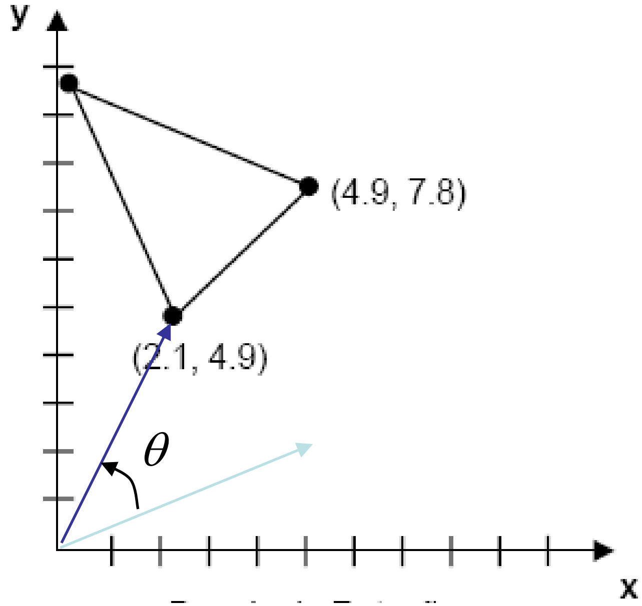
$$x' = r \,.\, \cos(\theta + \phi) = r \,.\, \cos\phi \,.\, \cos\theta - r \,.\, \mathrm{sen}\phi \,.\, \mathrm{sen}\theta$$

$$y' = r \,.\, \mathrm{sen}(\theta + \phi) = r \,.\, \mathrm{sen}\phi \,.\, \cos\theta + r \,.\, \cos\phi \,.\, \mathrm{sen}\theta$$

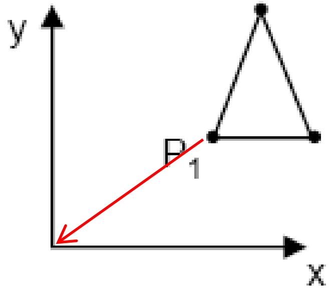
$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x' &= x \cos(\theta) - y \,\mathrm{sen}(\theta) \\ y' &= y \cos(\theta) + x \,\mathrm{sen}(\theta) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

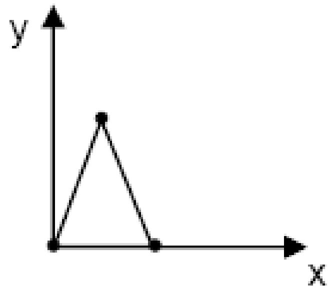
Rotação



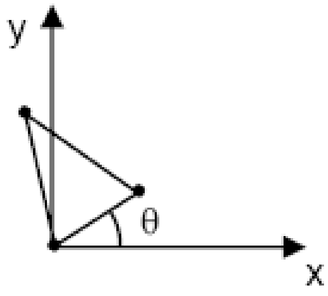


Rotação no eixo: combinação de translação e rotação

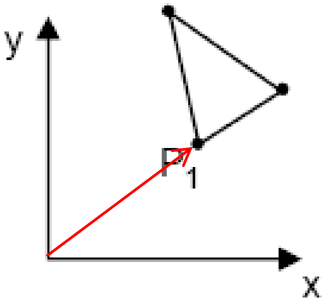




Translada (O)



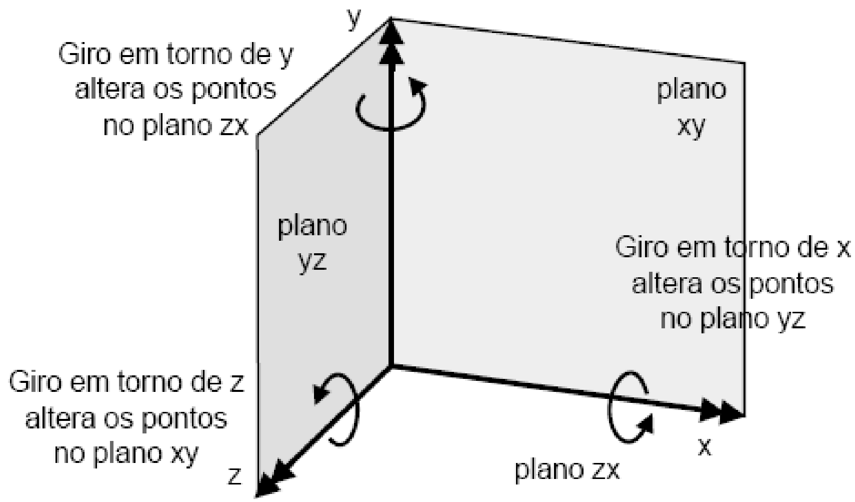
Rotaciona (O)



Translada^{-1} (O)

Rotação

(Euler)



Rotando Z
$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \mathrm{sen}(\alpha) & 0 \\ -\mathrm{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotando X
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & \mathrm{sen}(\beta) \\ 0 & -\mathrm{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

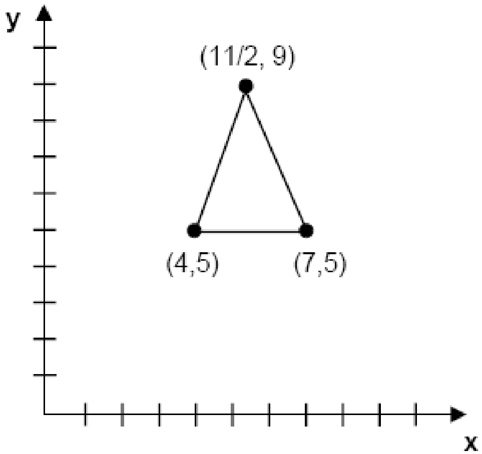
Rotando Y
$$\begin{bmatrix} \cos(\delta) & 0 & -\mathrm{sen}(\delta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{sen}(\delta) & 0 & \cos(\delta) \end{bmatrix}$$

Ex.: Rotar em (10, 20 ,30)

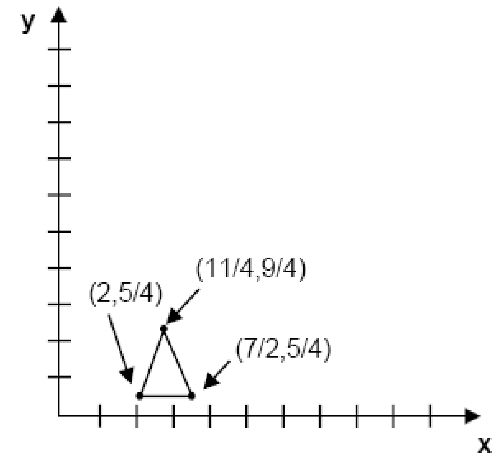
$$[x'\ y'\ z'] = [x\ y\ z] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 10^\circ & \mathrm{sen} 10^\circ \\ 0 & -\mathrm{sen} 10^\circ & \cos 10^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 20^\circ & 0 & -\mathrm{sen} 20^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{sen} 20^\circ & 0 & \cos 20^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\mathrm{sen} 30^\circ & 0 \\ \mathrm{sen} 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ordem de rotação afeta resultado?

Escala

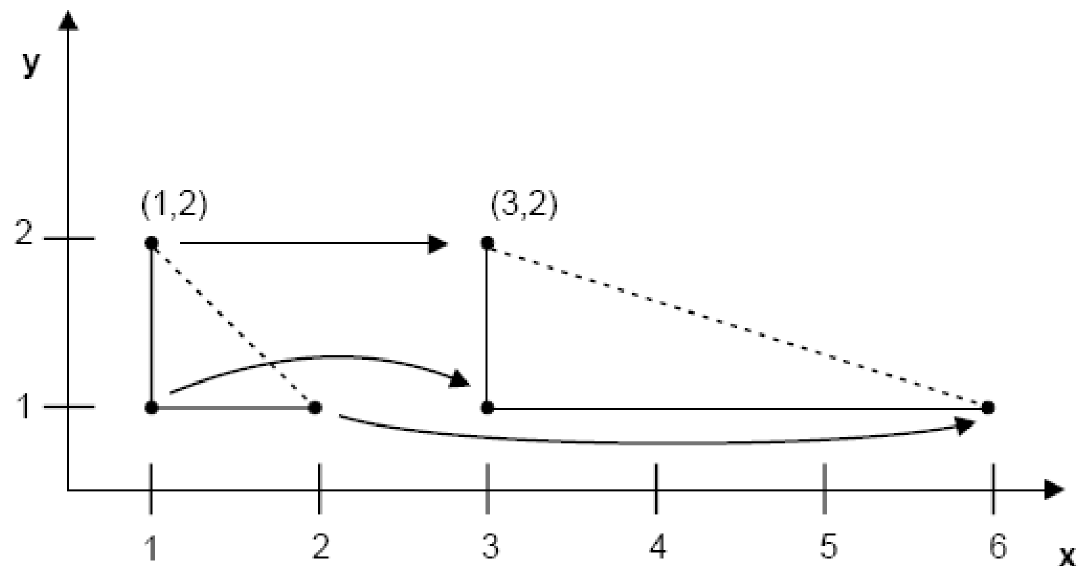


$$[x \quad y]\begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix}$$



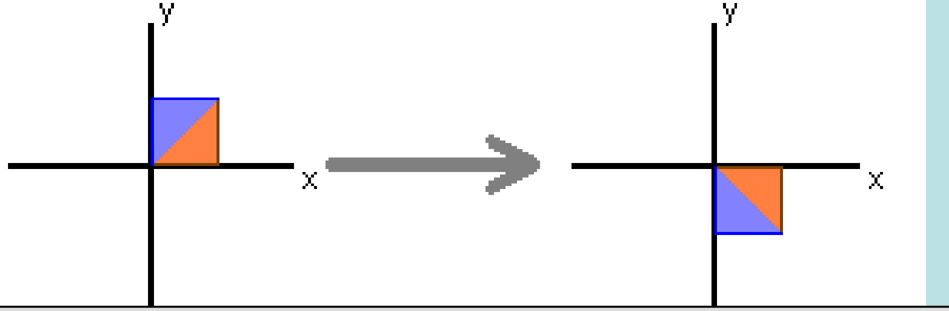
Operação correta: combinação de traslação e escala

$$[x \;\; y \;\; z]\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{bmatrix}$$

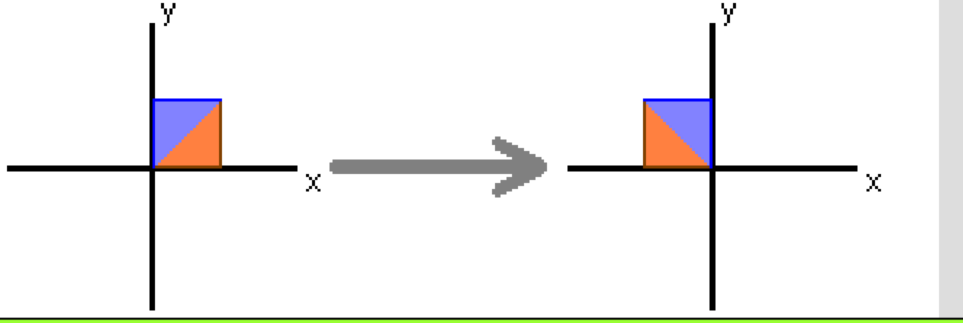


Reflexão

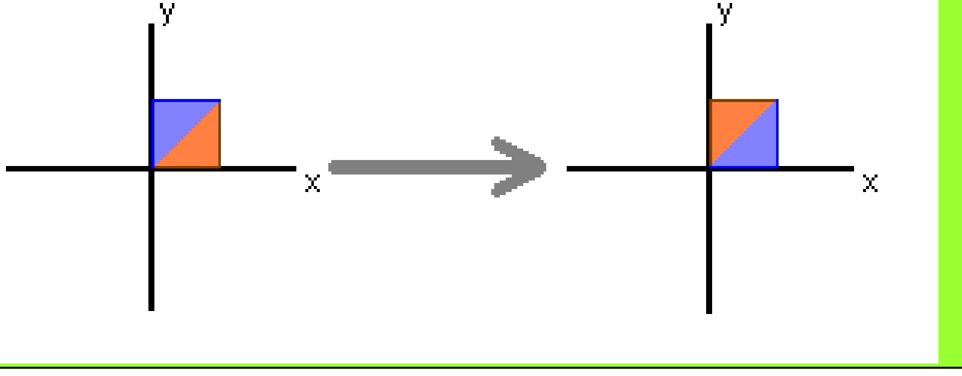
$$Rfl_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



$$Rfl_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$Rfl_{y=x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

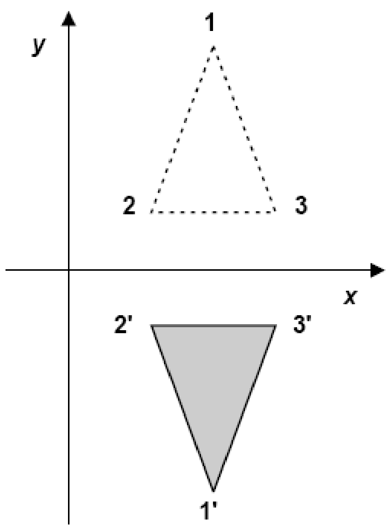


$$Rfl_{??} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Reflexão

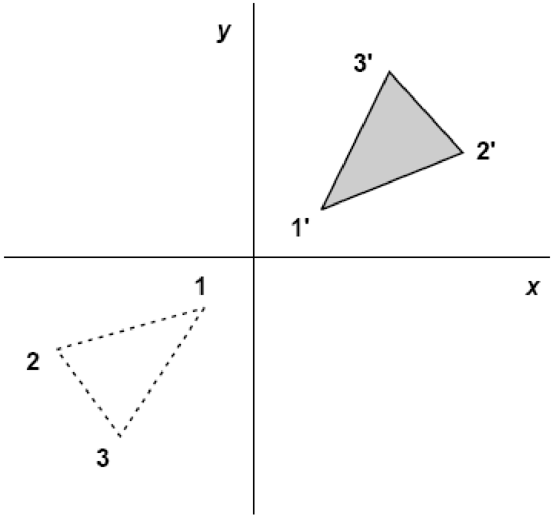
Reflexão respeito ao plano XZ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



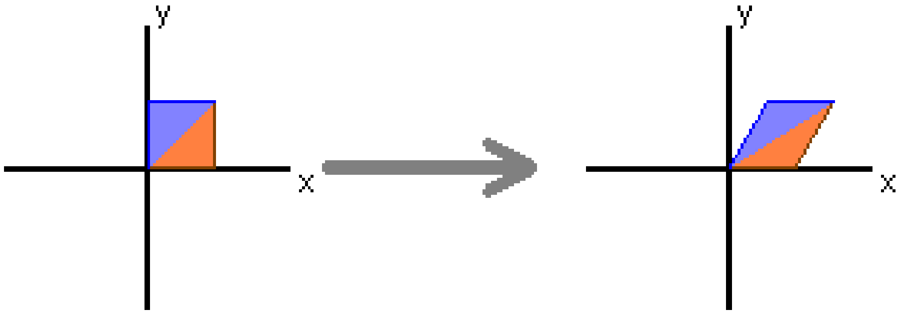
Reflexão respeito aos dois ejes (ex. X e Y)

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

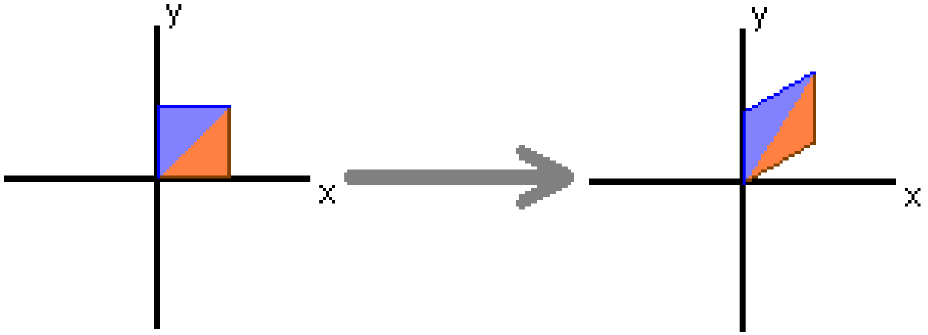


Cisalhamento (*Shearing ou Skew*)

$$C_x = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



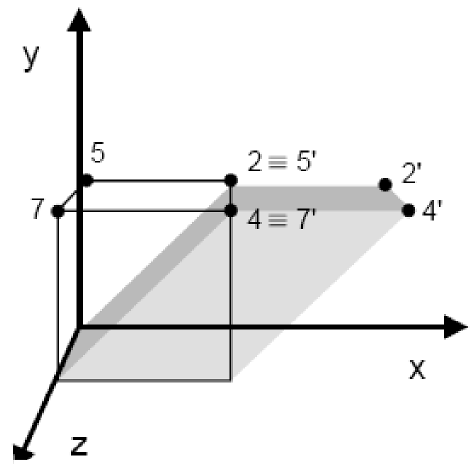
$$C_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$



Cisalhamiento (*Shearing ou Skew*)

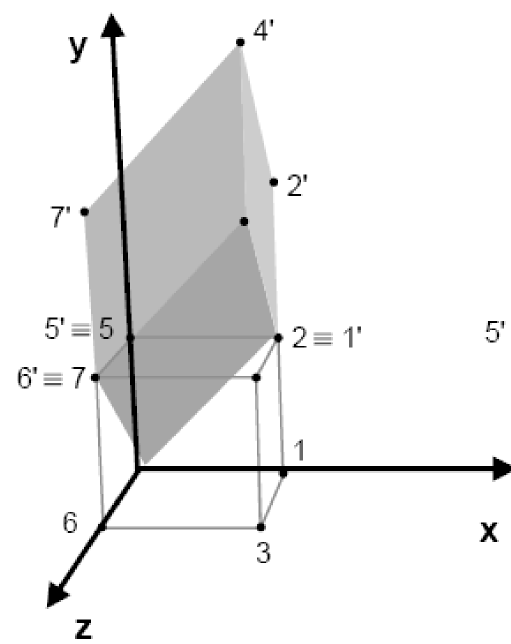
Distorsão em X

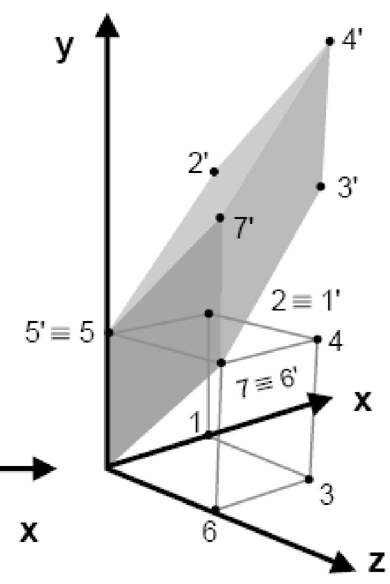
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ S & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad S = 1 \quad}$$



Distorsão em 2 direções

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[b = 1]{a = 1}$$





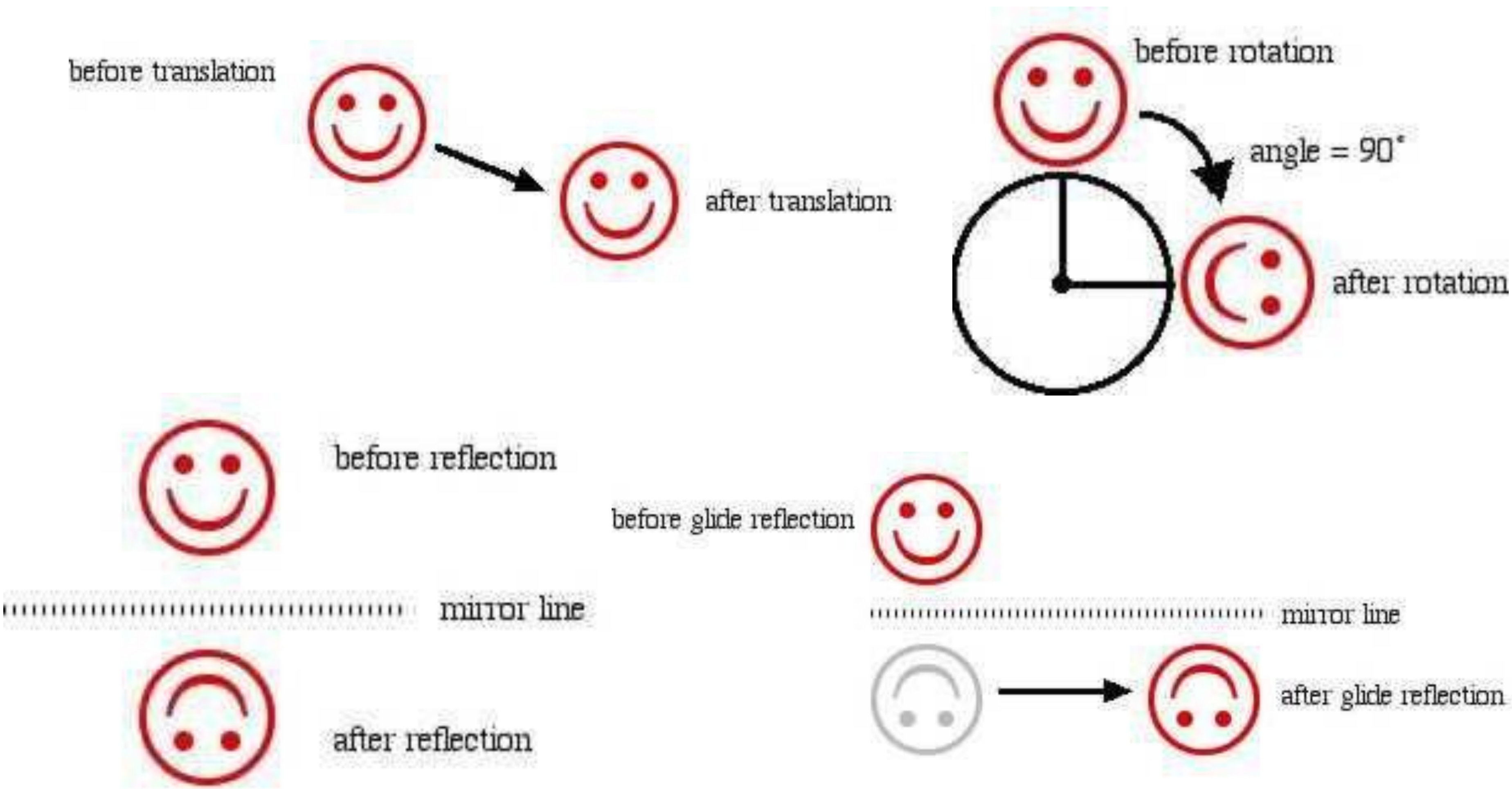
Transformações Rígidas

- Rotações, Reflexões y Traslações.
  - Preservam ângulos e dimensões.
  - Matrizes Ortonormais.
  - Inversa é a matriz transposta ($T^{-1} = T^{T}$).
  - Isometrias do Espaço Euclideano

$$a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1$$

$$ac + bd = 0, ad - bc = 1$$

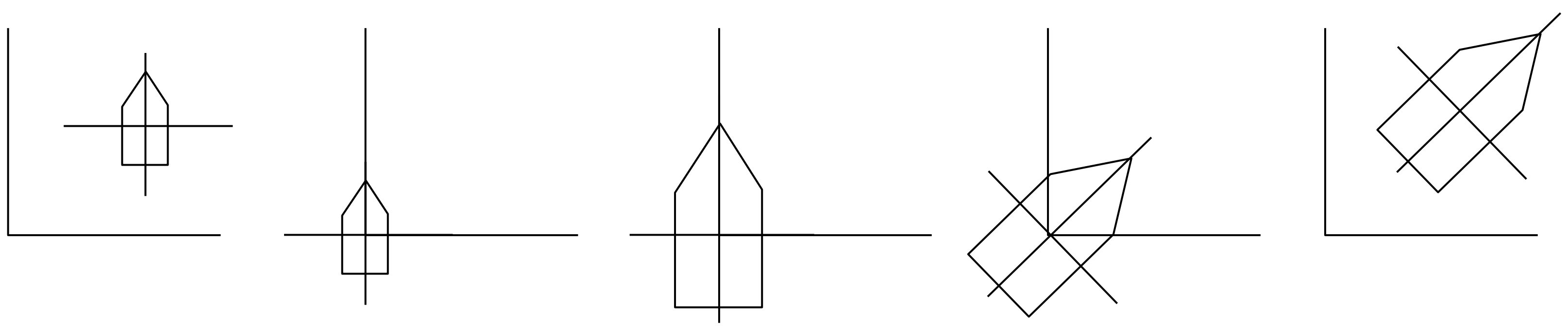
Isometrias do Plano



Composição de Transformações

- Sequência de transformações de um ponto *P* arbitrário:
  - T: Translação de *P* para origem.
  - R, S, E: Rotação, *Shear*, Escala.
  - Outras transformações desejadas.
  - T^{-1}: Translação inversa.

$$P' = P\,[\,T.\ R\ .\ S\ .\ E\ .\ O\,]\ T^{-1}$$



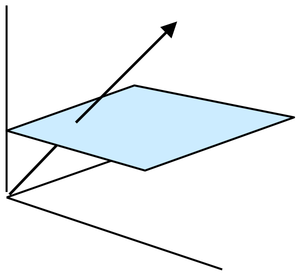
P *T* *E* *R* $T^{-1} = P'$

Trabalho bonus

- Na sala de aula
  - Dados o programa
    - testeMouse02.c (gera polígono e mouseMotion)

Transformadas Homogêneas

- Fácil Transformações Shear, Reflexão, Rotação, e Escala – uma única matriz
  - Translação realizado por separado
    - Não é transformada Linear
- Em 3D,
  - Ponto P = [x, y, z] ➔ P′ = [X, Y, Z, M]
  - P = [x, y, z, 1] = [X/M, Y/M, Z/M, 1]
  - P e P′ são equivalentes se P = (1/M) P′



Transformadas Homogêneas

Rotação

$$[x \quad y \quad z \quad 1] = [x' \quad y' \quad z' \quad 1]\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 & 0 \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Escala

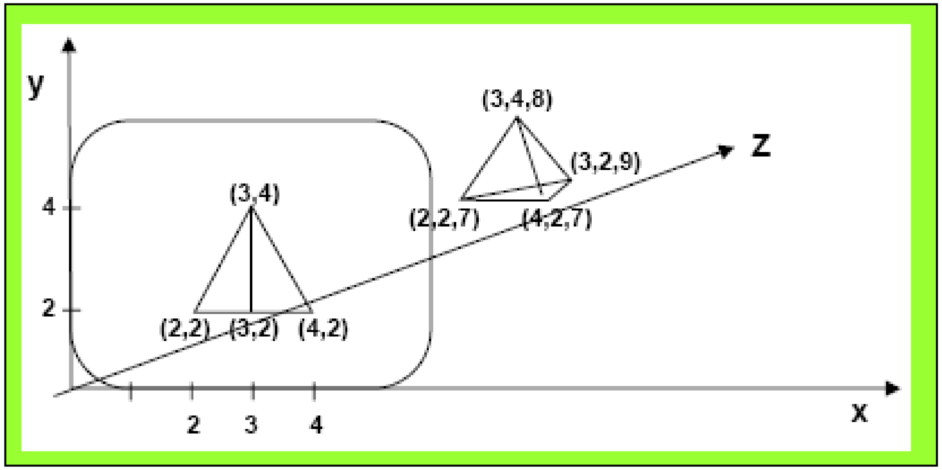
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

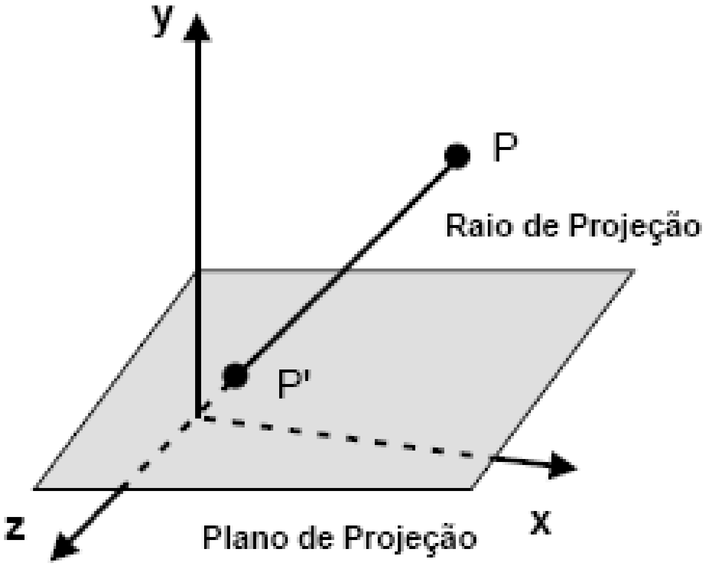
Traslação

$$[x' \ y' \ z' \ 1] = [x \ y \ z \ 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{bmatrix}$$

Projeções Geométricas

- Permitem a visualização 2D de objetos 3D
  - Projeção no plano
  - Raio projeção
  - Centro de projeção





Plano de projeção*: plano de imagem 2D*

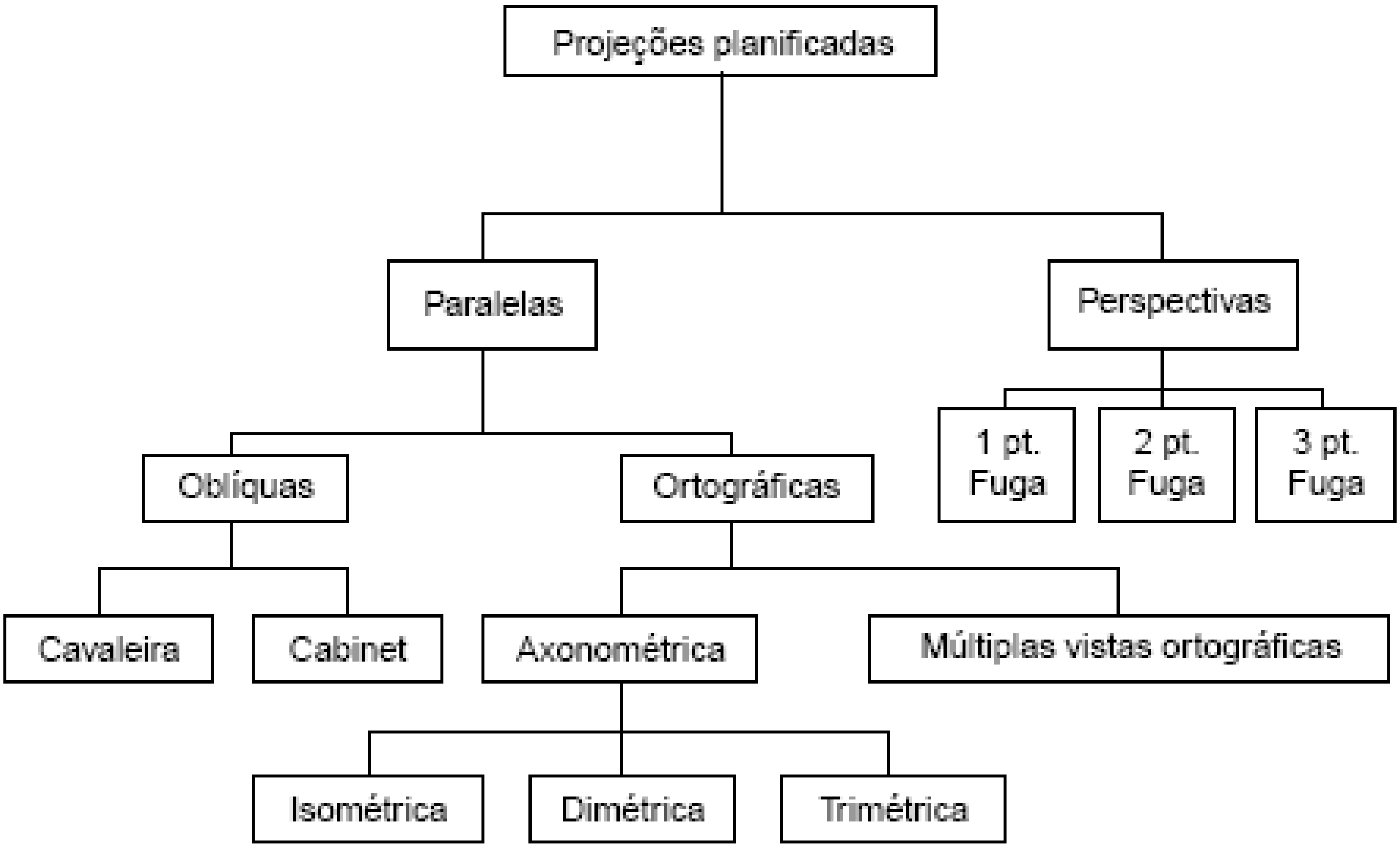
Raio de Projeção*: raio pasando por P (do objeto) e por um ponto do plano*

Centro de projeção*: ponto de convergencia (ex. Origem)*

Efeito

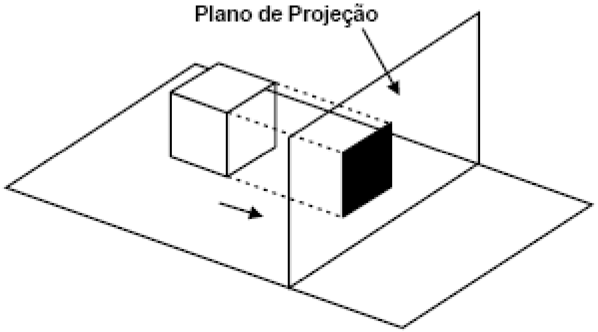
Projeção Perspectiva e pontos de fuga?

Projeções Geométricas
(Classificação)



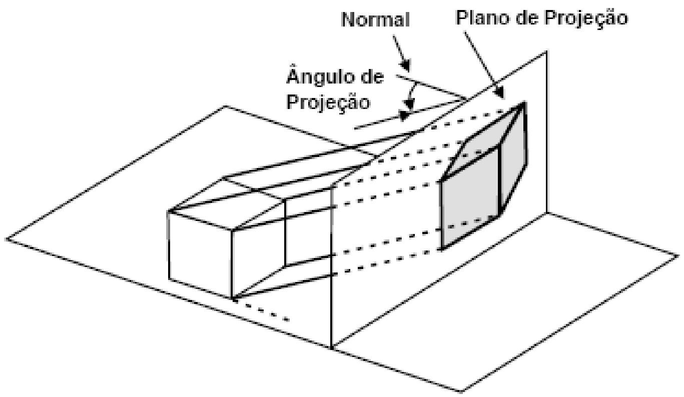
Classes de Projeções

Projeção Paralela Ortográfica
(Centro de projeção no infinito)

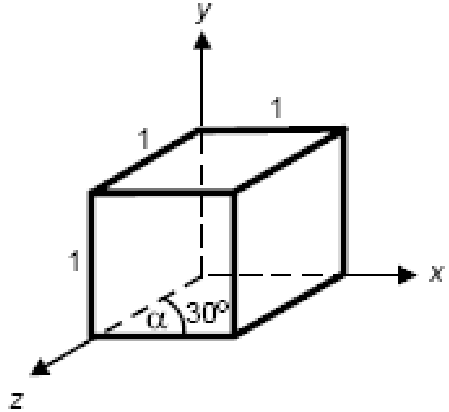


$$[x' \; y' \; z' \; 1] = [x \; y \; z \; 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projeção Paralela Obliqua
(Raios de Projeção obliquas ao plano de projeção)

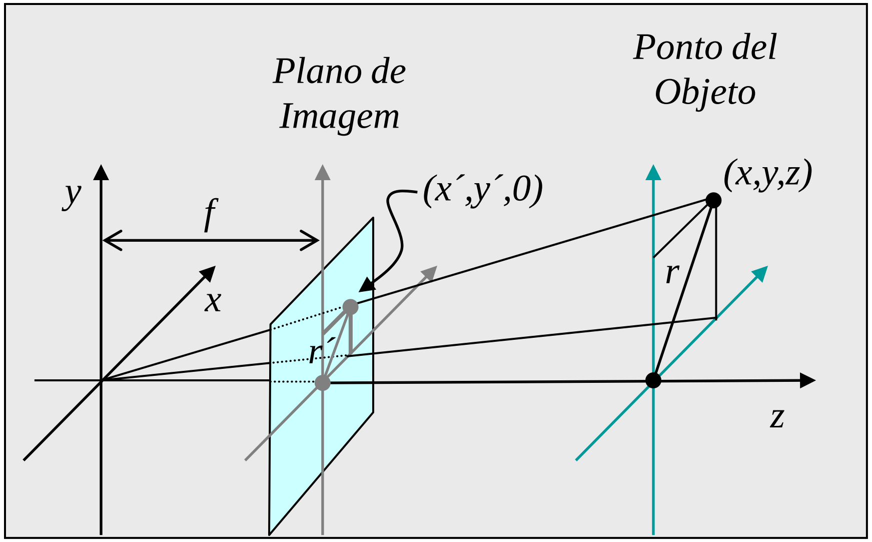


Projeção Paralela Obliqua Cavaleira



Projeção Perspectiva

- Representação do espaço 3D: da forma vista por olho humano



$$\frac{f}{z} = \frac{r'}{r} \Longrightarrow \frac{x'}{x} = \frac{f}{z} = \frac{y'}{y}$$

$$x' = \frac{f}{z} x \qquad y' = \frac{f}{z} y$$

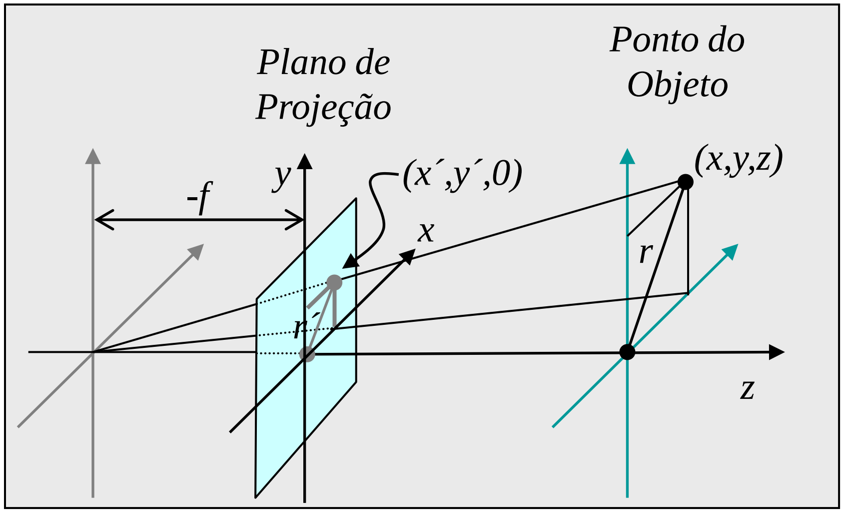
$$[x \quad y \quad z \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [x \quad y \quad z \quad z/f]$$

$$[x' \quad y' \quad z' \quad w] \Rightarrow \left[\frac{f}{z}x \quad \frac{f}{z}y \quad f \quad 1\right] \Longrightarrow (x' \quad y' \quad z') \Rightarrow \left(\frac{f}{z}x \quad \frac{f}{z}y \quad f\right)$$

Projeção Perspectiva

(Plano de projeção em z = f)

- *Plano de projeção está em Z = 0 (Translação em (0,0,f))*
- *Centro de Projeção em Z = -f*



$$x' = \frac{f}{z-f}x$$

$$y' = \frac{f}{z-f}y$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & -z/f+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & w \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{(-z/f+1)}x & \frac{1}{(-z/f+1)}y & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow (x' \quad y') \Rightarrow \left(\frac{1}{(-z/f+1)}x \quad \frac{1}{(-z/f+1)}y \right)$$

Projeção Perspectiva
(Projeção em qualquer plano)

- *Se centro de projeção em qualquier (fx, fy, fz)*

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -f_x & -f_y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/f_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- *Se Plano de projeção em X = 0, y = 0 (respectivamente)*

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/f_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/f_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

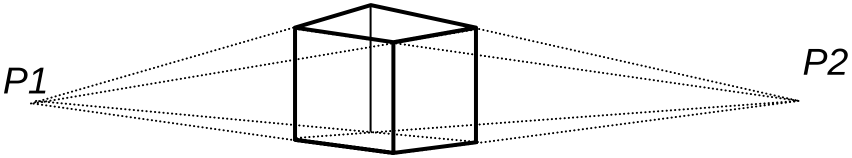
Projeção Perspectiva

(Dois ou Três Pontos de Projeção = Pontos de Fuga)

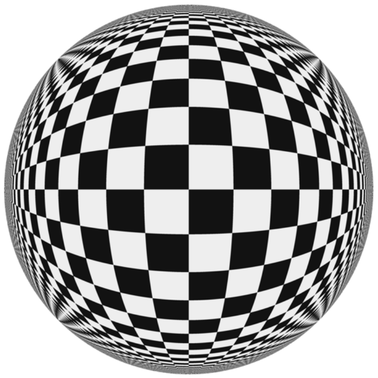
- *Dois pontos de projeção*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/f_x \\ 0 & 1 & 0 & -1/f_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/f_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/f_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/f_y \\ 0 & 0 & 1 & -1/f_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- *Três pontos de projeção*



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/f_x \\ 0 & 1 & 0 & -1/f_y \\ 0 & 0 & 1 & -1/f_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Cámara Virtual

- Observador
  - Ponto de observação
    - Posição da cámera: (x, y, z)
    - Orientação (vetor view up)
    - Posição do foco (D em direção C)
    - Clipping planes (direção focal perpendicular)