

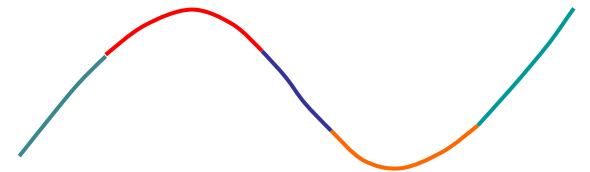
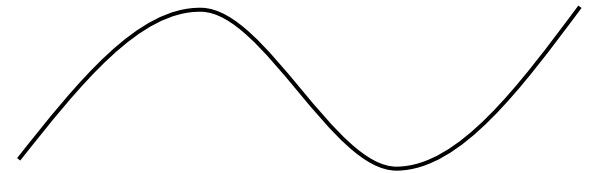
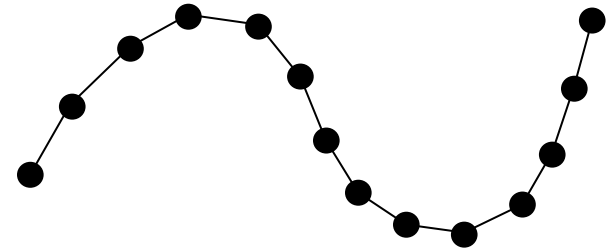
Computação Gráfica

Curvas e Superfícies

Luis Rivera

Modelagem de Curvas

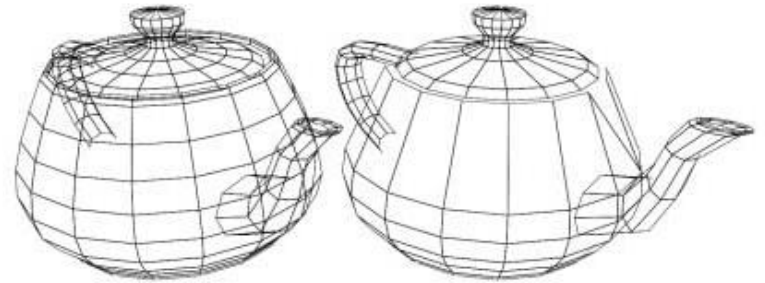
- Conjunto de pontos
 - ♦ Utiliza área de armazenamento
 - ♦ Segmentos de retas entre pontos
 - Curva aproximada...
- Curva analítica
 - ♦ Utiliza de 1 ou mais equações
 - ♦ Exata e compacta
 - ♦ Não usa área de armazenamento
 - ♦ Facilita cálculo de novos pontos
 - ♦ fácil transformação geométrica
 - ♦ Paramétricas e no paramétricas



- $y = 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1$
- $f(t) = (2t^3 + t^2 - 4, 3t^3 - 2t - 3)$

Curvas em Objetos

- Representação simplificada de objetos
 - ♦ Contornos
 - Bezier: Projectos Renault
 - ♦ Definição de malhas
 - ♦ Características internas
 - Contornos de sombras
 - Arrugas, etc.
- Formas de objetos
 - ♦ Letras
 - ♦ Objetos irregulares



3D

Curvas e Superfícies Paramétricas

- Comum usar CURVA PARAMÉTRICA
 - ♦ Fácil desenho da curva/superfície (aproximada)
 - ♦ Fácil segmentar
 - Segmento a ser usado
 - ♦ Manipulação algébrica mais simples
- Curva em 3D
 - ♦ $C(t) = [C_x(t) \ C_y(t) \ C_z(t)]^T$
- Superfície em 3D
 - ♦ $S(u, v) = [S_x(u, v) \ S_y(u, v) \ S_z(u, v)]^T$

Não-paramétrica:

- Explícita: $F(x) = y$
 - $y^2 = 4 - x^2$
- Implícita: $F(x, y) = 0$
 - $y^2 + x^2 - 4 = 0$

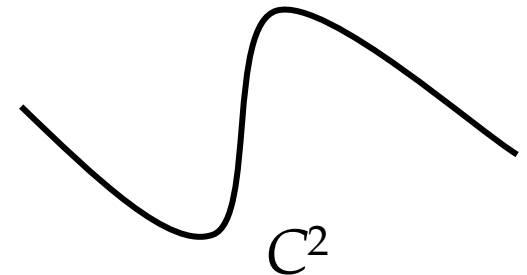
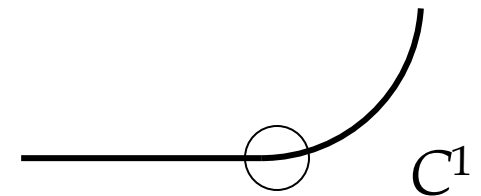
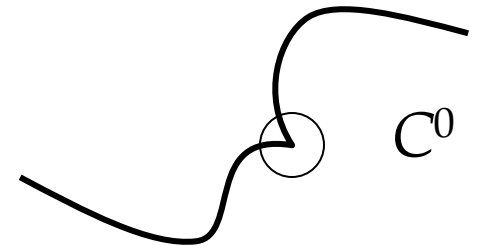
Paramétrica:

$$F(t) = (f_x(t), f_y(t))$$
$$f_x(t) = 2\cos(t)$$
$$f_y(t) = 2\sin(t)$$

Características

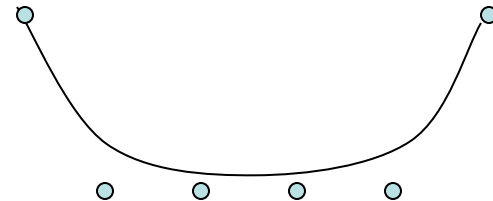
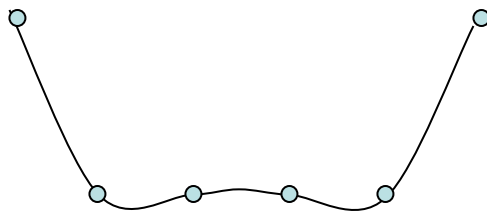
Continuidade e Suavidade

- Curvas e Superfícies “suaves”
 - ♦ Continuidade: $C^0 \rightarrow$ sem “saltos”
 - ♦ Continuidade: $C^1 \rightarrow$ tangentes variam suavemente
 - ♦ Continuidade: $C^k \rightarrow k$ -ésimas derivadas contínuas
- Alternativamente, G^k : continuidade geométrica
 - ♦ Independente de parametrização
 - ♦ Assumir curva parametrizada por comprimento de arco



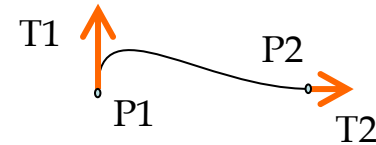
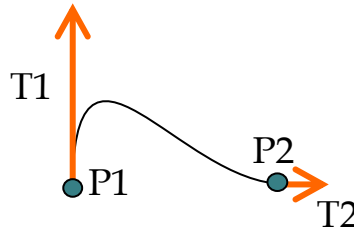
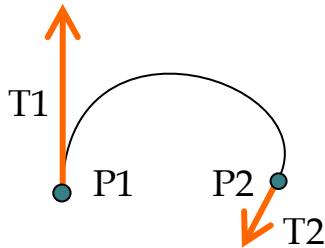
Interpolação x Aproximação

- Curva suave passando por um conjunto de pontos dados (pontos de controle)
 - ♦ Se polinomial, pode-se usar *interpolação polinomial Lagrangeana*
- Curva suave passando “perto” dos pontos dados (*aproximações*)
 - ♦ Splines



Curvas de Hermite

- Curva definida por:
 - ♦ P1 y P2 = Pontos extremos (inicial e final)
 - ♦ T1 y T2 = Tangentes associadas aos pontos extremos



$$P(t) = a t^3 + b t^2 + c t + d$$

$$P(t) = [t^3 \ t^2 \ t \ 1] C$$

$$P'(t) = 3 a t^2 + 2 b t + c$$

$$P'(t) = [3t^2 \ 2t \ 1 \ 0] D$$

Para $0 \leq t \leq 1$

$$P(0) = d = P1$$

$$P(1) = a + b + c + d = P2$$

$$P'(0) = c = T1$$

$$P'(1) = 3 a + 2 b + c = T2$$

Resolvendo
$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

$$p(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

Curvas de Hermite (dedução)


Seja $P(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ um ponto da curva

$$\rightarrow [x(t) \ y(t) \ z(t)] = [t^3 \ t^2 \ t \ 1] C = [t^3 \ t^2 \ t \ 1] [a \ b \ c \ d]^T$$

$$= [t^3 \ t^2 \ t \ 1] \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix} = [t^3 \ t^2 \ t \ 1] [C_x \ C_y \ C_z]$$

Condições:

$P(0) = P1 = [0 \ 0 \ 0 \ 1] [C_x \ C_y \ C_z]$
$P(1) = P2 = [1 \ 1 \ 1 \ 1] [C_x \ C_y \ C_z]$
$P'(0) = T1 = [0 \ 0 \ 1 \ 0] [C_x \ C_y \ C_z]$
$P'(1) = T2 = [3 \ 2 \ 1 \ 0] [C_x \ C_y \ C_z]$



$$\begin{bmatrix} P1 \\ P2 \\ T1 \\ T2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} [C_x \ C_y \ C_z]$$

$$P = H C \rightarrow C = H^{-1} P \quad \rightarrow \quad C = [C_x \ C_y \ C_z] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P1 \\ P2 \\ T1 \\ T2 \end{bmatrix}$$

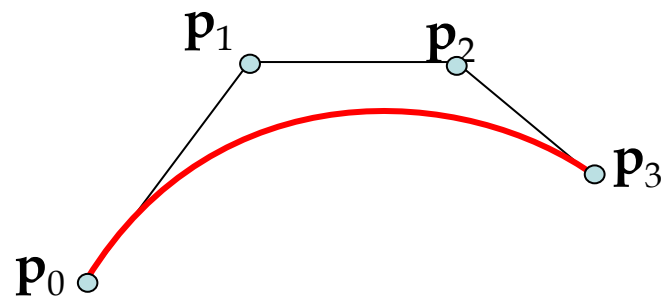
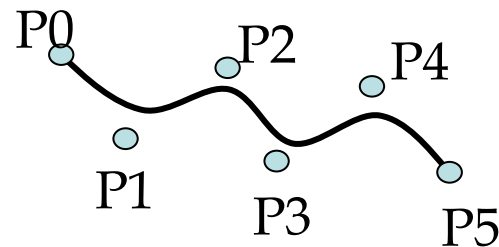
Curva de Bezier

- Usa K pontos de controle
 - ♦ P_0, P_1, \dots, P_{k-1}
 - ♦ Curva cúbica usa P_0, P_1, P_2, P_3 (por segmento)
 - ♦ Relacionado com Hermite
 - Tangentes nos extremos
 - $T_1 = P_1 - P_0$ y $T_2 = P_3 - P_2$
- Definida por

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t), \text{ para } 0 \leq t \leq 1$$

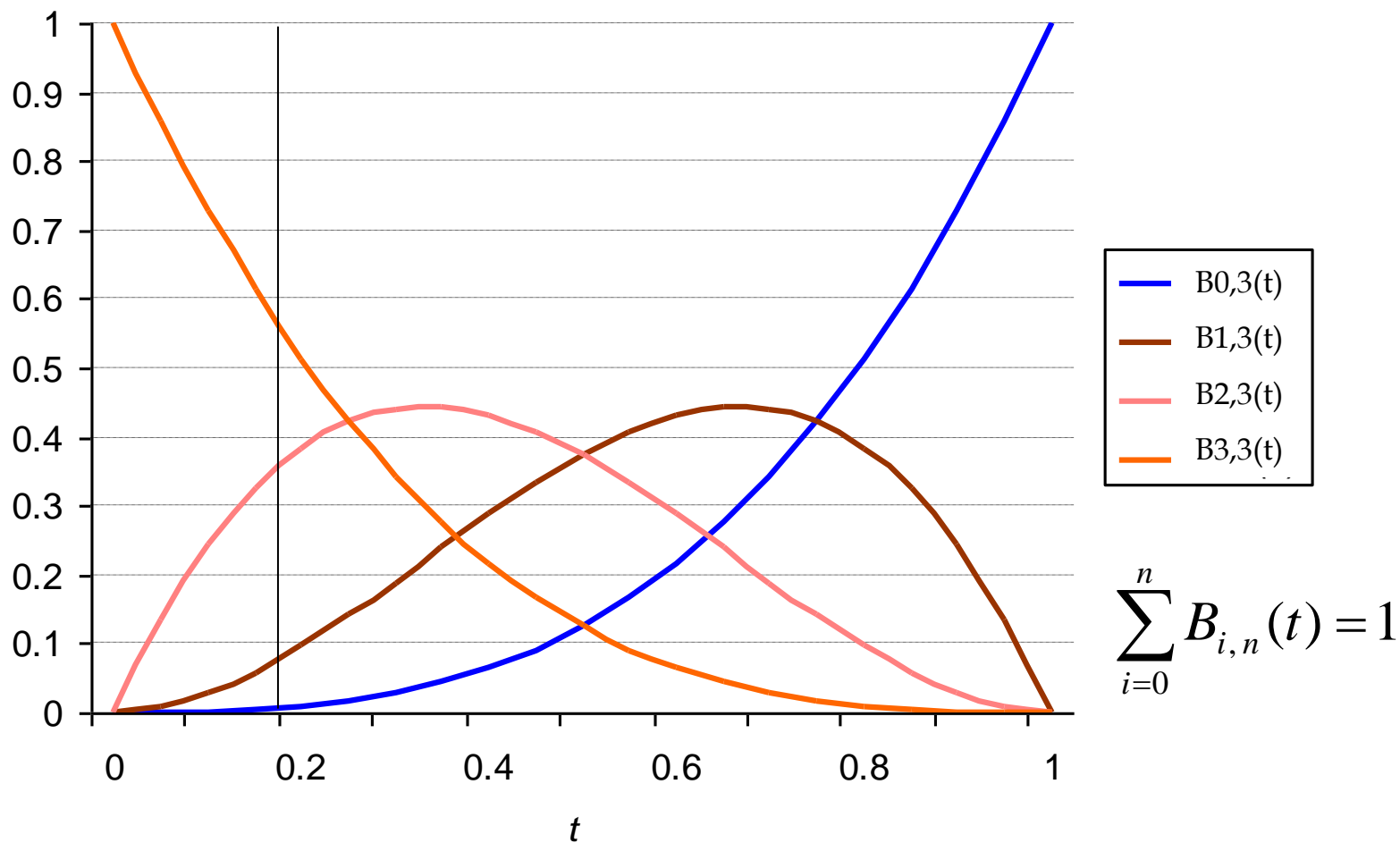
Pol. de Bernstein

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$



Polinômios de Bernstein

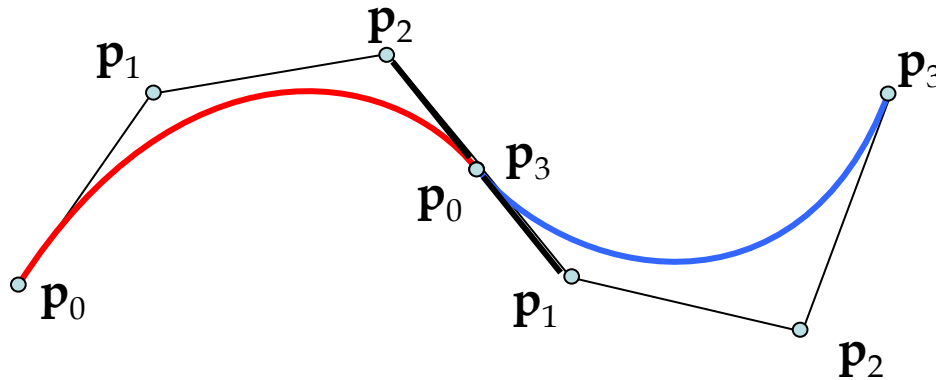
Polinômios de Berstein de grau 3



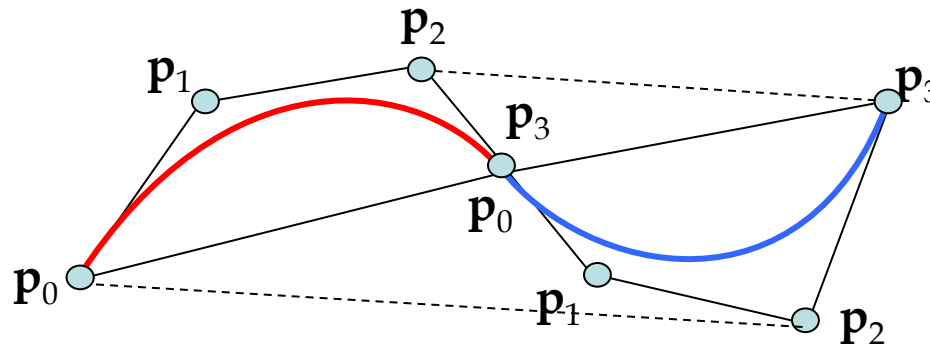
Curvas Bézier

(Propriedades)

- Continuidade C^0 : $\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_0$
- Continuidade C^1 : C^0 e $\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3$ de primeiro = $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$ do segundo
- Continuidade C^2 : C^1 e + restrições sobre \mathbf{p}_1 da primeira e \mathbf{p}_2 da segunda



- Fechado Convexo



Base Bézier

(Forma matricial)

- Um segmento de curva cúbica, para $0 \leq t \leq 1$

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}$$

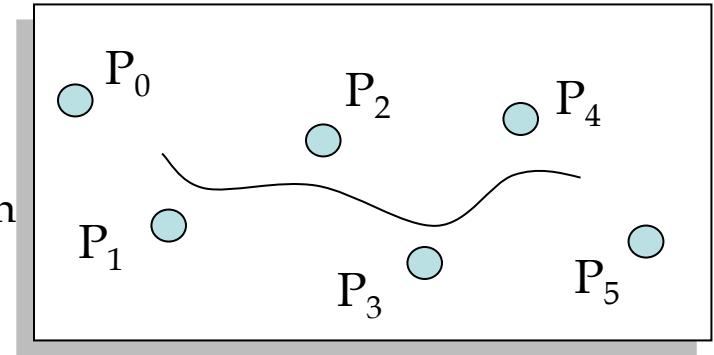
Splines

- A base de Bézier não é apropriada para modelagem de curvas longas
 - ♦ Bézier única: suporte não local
 - ♦ Trechos conectados: restrições não são naturais
- Base alternativa: B-Splines
 - ♦ Polígonos de controle sem restrições adicionais
 - ♦ Suporte local
 - Alteração de um vértice afeta apenas na vizinhança
 - ♦ Existem muitos tipos de Splines
 - Uma B-spline uniforme de grau d tem continuidade C^{d-1}

Curvas B-Splines

- Combinação linear de:
 - ♦ Pontos de controle P_0, P_1, \dots, P_n
 - ♦ Funções bases de ordem k

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i \cdot B_{i,k}(t), \text{ para } 0 \leq t \leq 1$$



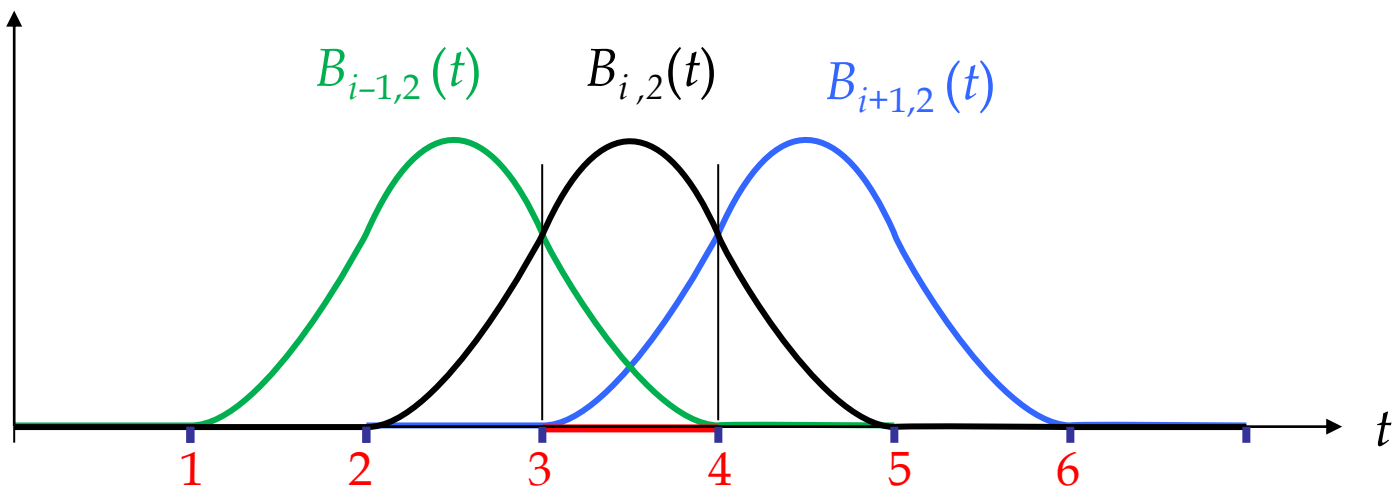
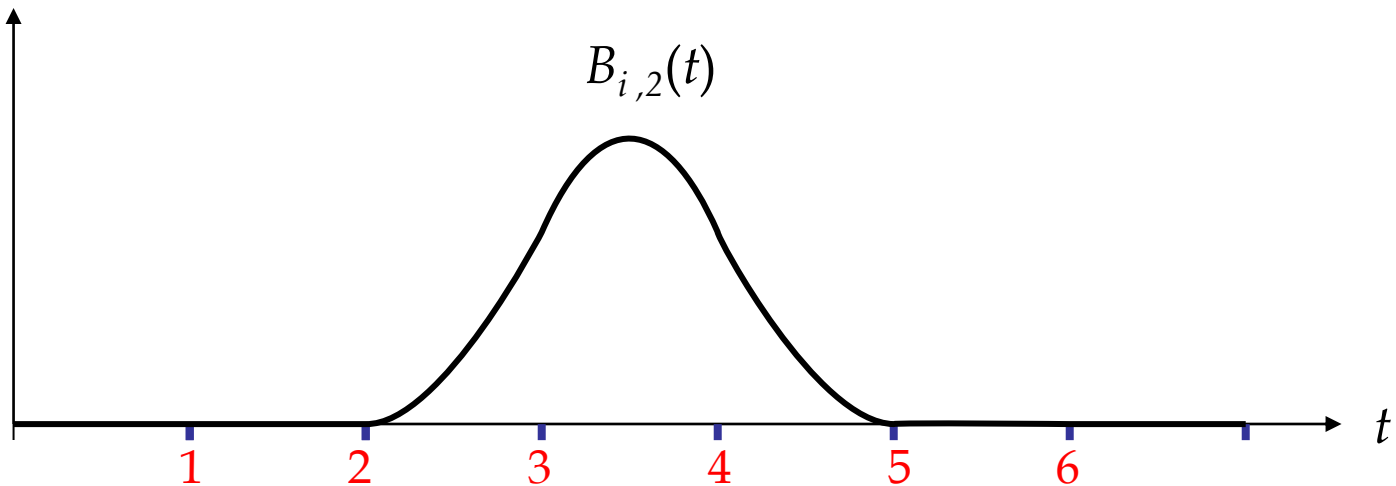
Onde Cox de Boor

$$B_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0, & \text{em outros intervalos} \end{cases}$$
$$B_{i,k}(t) = \left(\frac{1-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} \right) B_{i,k-1}(t) + \left(\frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}} \right) B_{i+1,k-1}(t)$$

- Curva não passa pelos pontos de controle

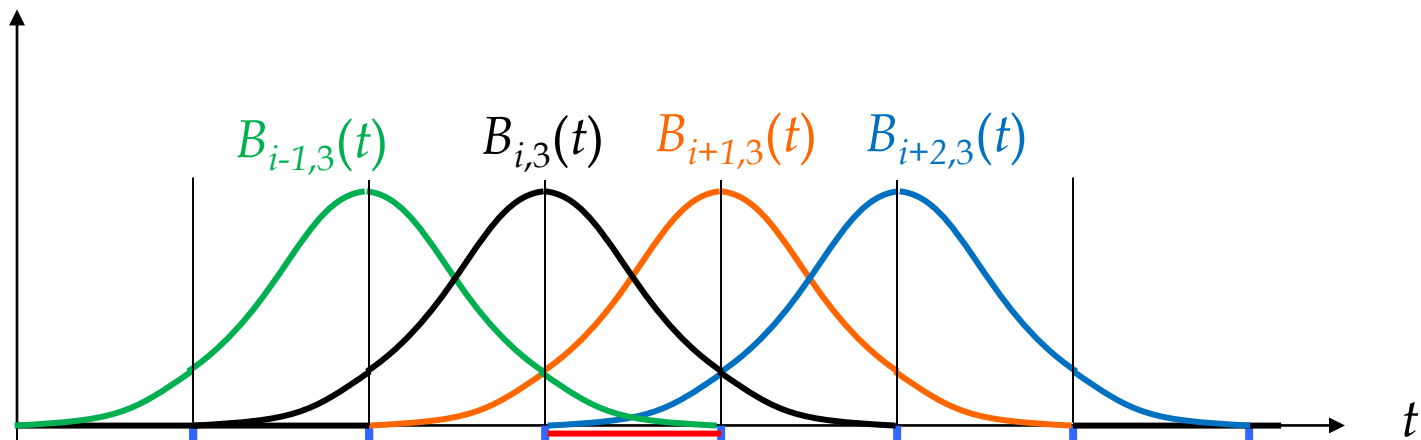
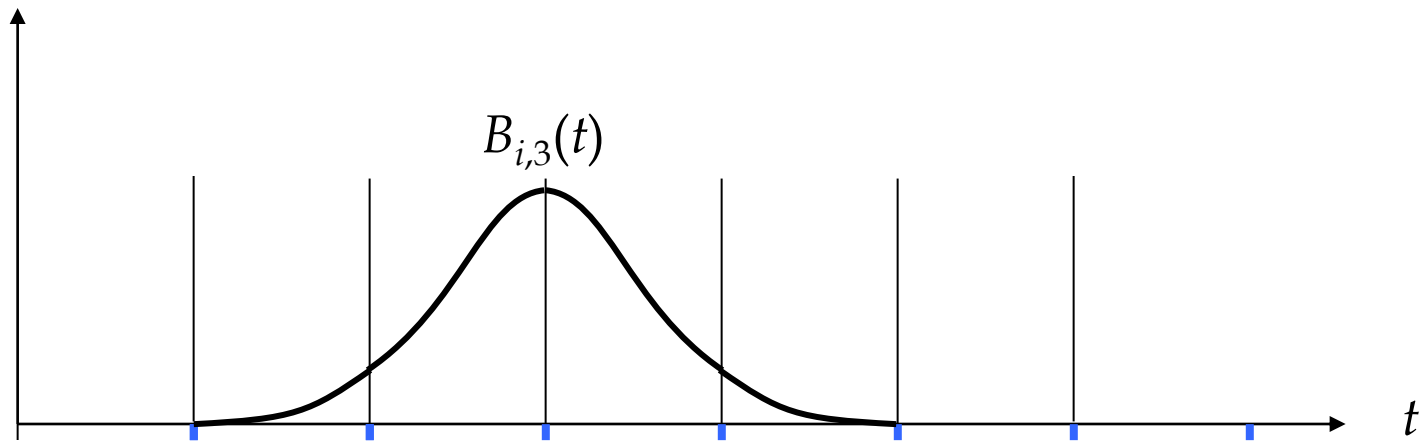
Curvas B-Spline

- Função base B-spline quadrática periódica



Curvas B-Spline

- Função base B-spline cúbica periódica

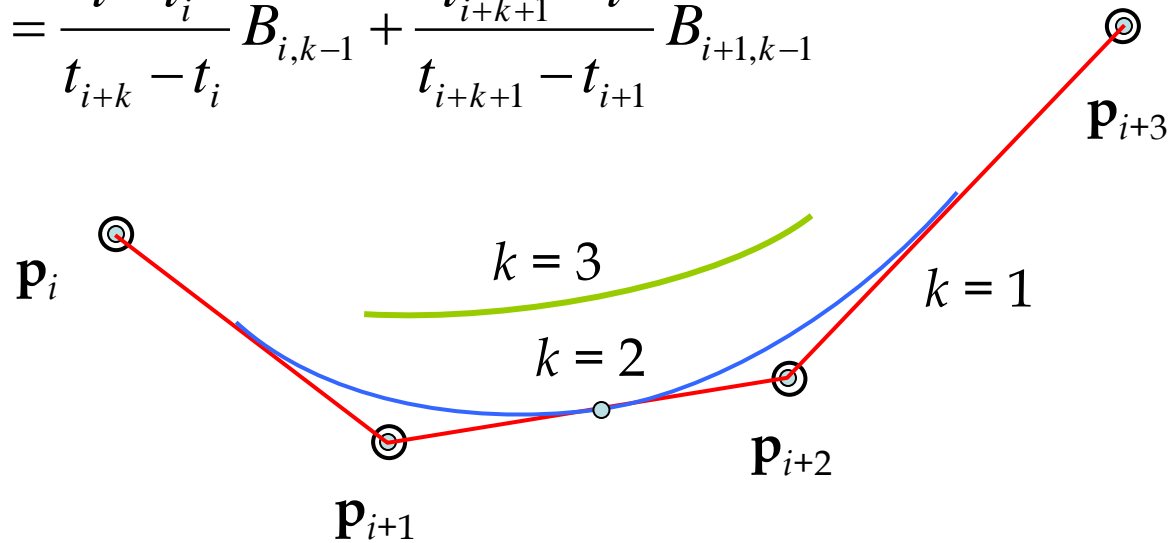


Recurrencia Cox-de Boor

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^m B_{i,k}(t) \mathbf{p}_i$$

$$B_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t_i \leq t < t_{i+1}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$B_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} B_{i,k-1} + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}$$



Propriedades das B-Splines

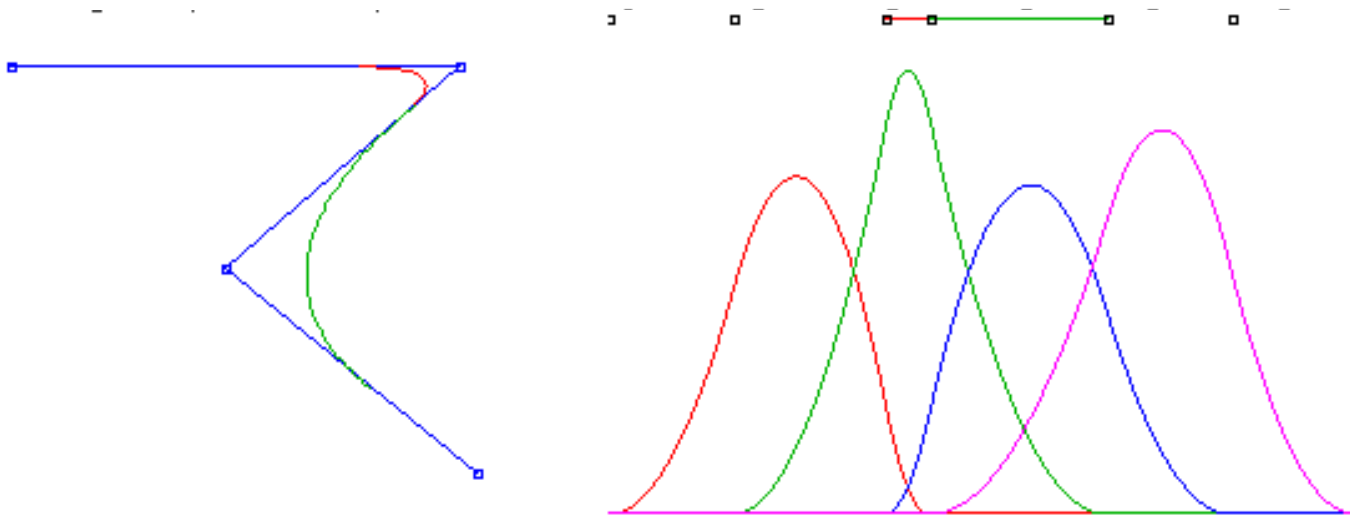
- Dados $n+1$ pontos $(\mathbf{p}_0 \dots \mathbf{p}_n)$, é composta de $(n-d+1)$ curvas Bézier de grau d unidas com continuidade $d-1$ nos $n+d+1$ nós $t_0, t_1, \dots, t_{n+d+1}$
- Cada ponto da curva é afetado por $d+1$ pontos de controle
- Cada ponto de controle afeta $d+1$ segmentos
- Curva restrita ao fecho convexo do polígono de controle

Forma Matricial

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{i-1} \\ \mathbf{p}_i \\ \mathbf{p}_{i+1} \\ \mathbf{p}_{i+2} \end{bmatrix}, \text{ para } 0 \leq t \leq 1$$

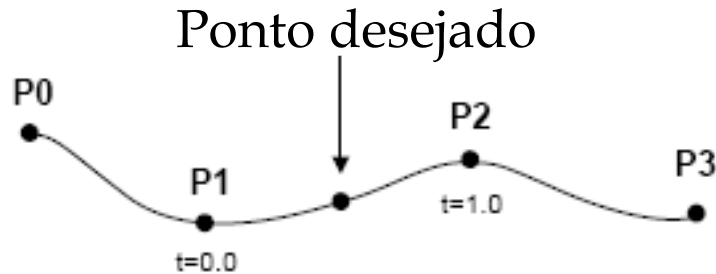
Efeito dos Nodos

- Os intervalos entre nodos influencian a importância dos pontos de controle
 - ♦ Exemplo: B-spline Quádrica



Catmull-Rom Spline

- Interpolação local de B-Splines
- A curva passa por pontos de controle



- Um ponto é calculado em função dos pontos de controle adjacentes

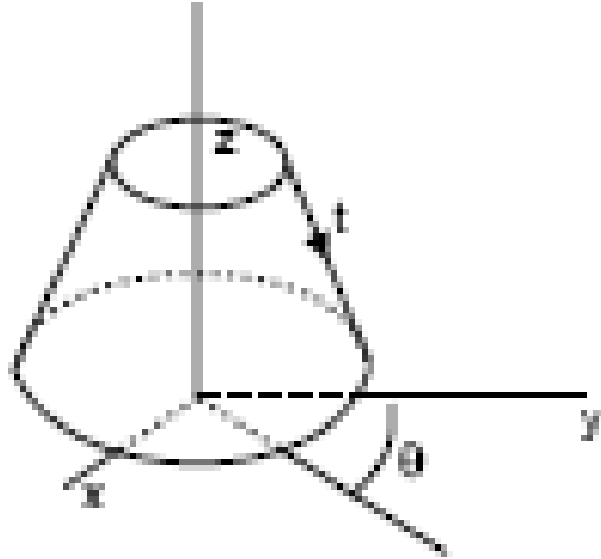
$$q(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

Superfícies



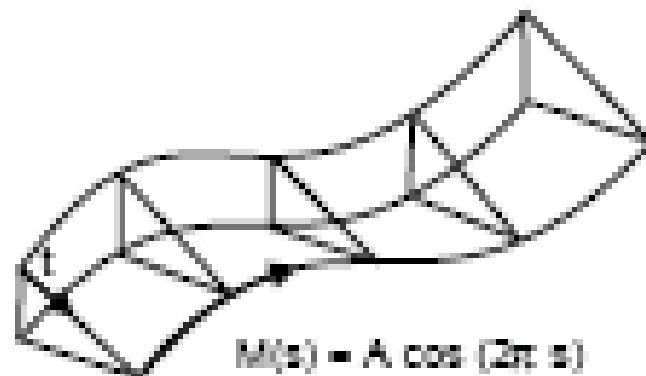
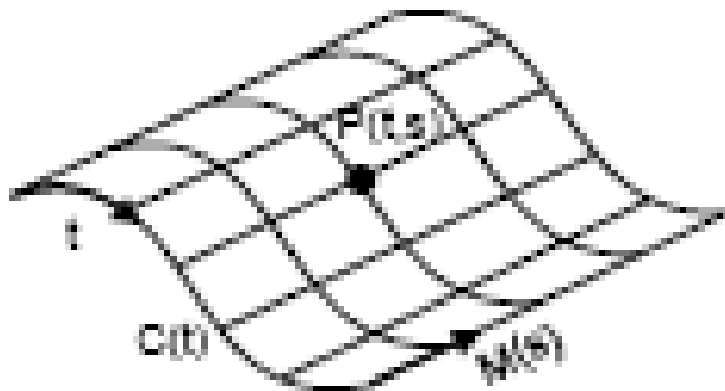
Representação de Superfícies (superfícies de revolução)

- Rotação de uma curva plana em torno de um eixo
- Ponto da superfície de revolução descrito por
 - ♦ $P(t, \text{ang})$
- Podem ser obtidas por qualquer tipo de curva



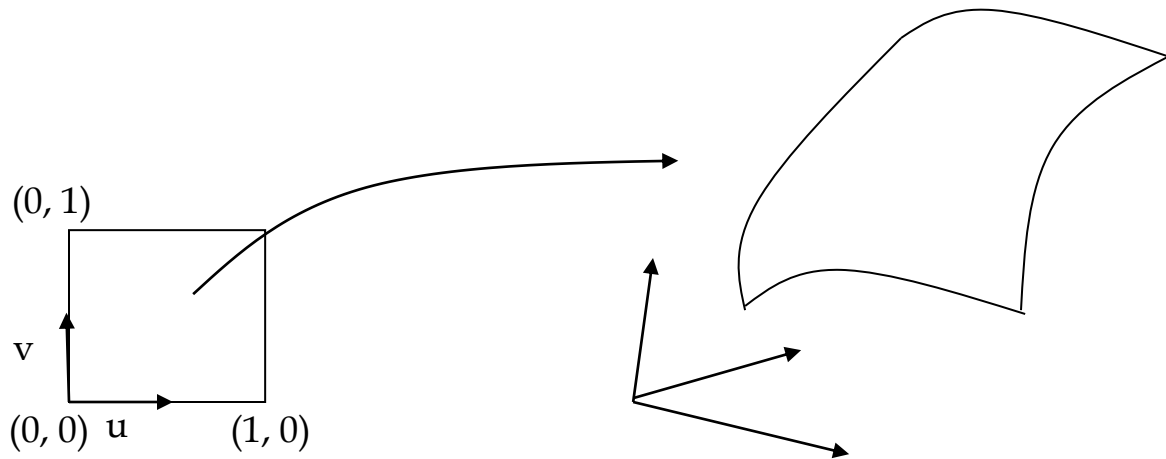
Representação de Superfícies (superfícies de deslocamento)

- Denominada “sweeping” (barredura)
- Movimento de uma curva ou figura plana ao longo de um caminho
- Podem ser obtidas por qualquer tipo de curva



Representação de Superfícies (interpolação Bi-cúbica)

- São formas paramétricas
- Qualquer ponto do interior é definido univocamente
- Cada pedaço (patch) gerada por uma fórmula



Superfícies Paramétricas

Superfície produto tensor: polinomial bivariante expressado em termos de funções bases univariante.

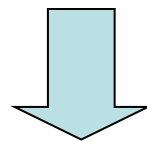
$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} V_{i,j} B_j(v) B_i(u) = S(u, v)$$

Representação matricial

$$B(u) V B(v)^T = S(u, v)$$

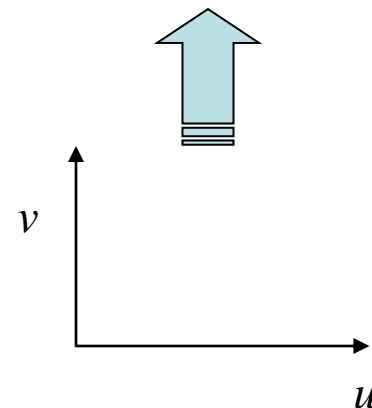
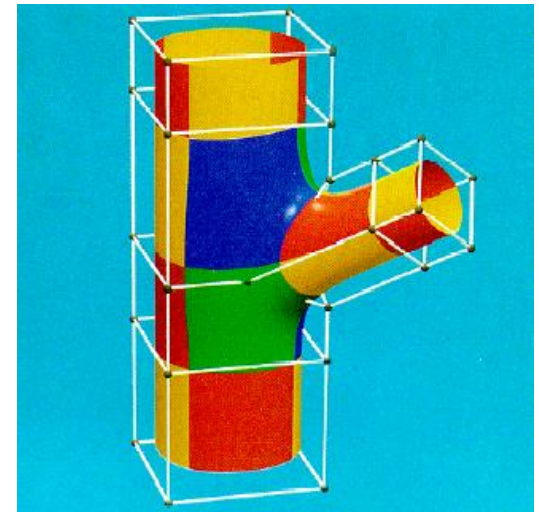
Em função de bases bivariantes

$$\sum_{i,j} V_{i,j} B_{i,j}(v, u) = S(u, v)$$



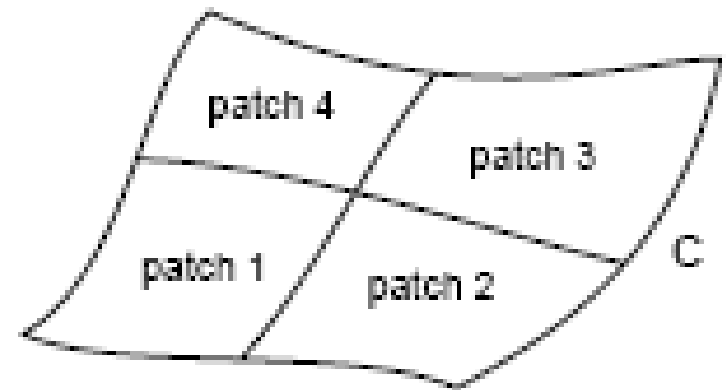
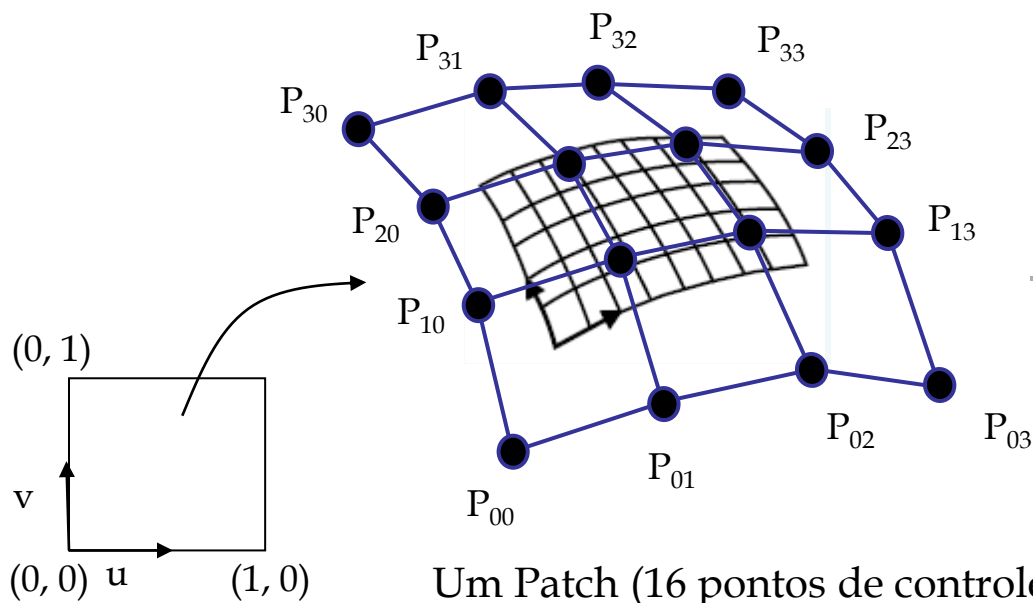
Notação matricial

$$\mathbf{B}(v, u) \mathbf{V} = S(u, v)$$



Superfícies Paramétricas

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} P_{i,j} B_j(v) B_i(u) = S(u, v)$$



Superfícies de Hermite

- Extensão da formulação de Hermite
- Interior gerada pelas funções combinadas (blending function)

$$P(u,v) = S \ H \ G_H \ H^T \ T^T$$

onde $S = [u^3, u^2, u, 1]$, $T = [v^3, v^2, v, 1]$, H matriz de Hermite (matriz das curvas) e G_H

$$G_H = \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & \frac{\partial P}{\partial u}(0,0) & \frac{\partial P}{\partial u}(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) & \frac{\partial P}{\partial u}(1,0) & \frac{\partial P}{\partial u}(1,1) \\ \frac{\partial P}{\partial v}(0,0) & \frac{\partial P}{\partial v}(0,1) & \frac{\partial^2 P}{\partial v \partial u}(0,0) & \frac{\partial^2 P}{\partial v \partial u}(0,1) \\ \frac{\partial P}{\partial v}(1,0) & \frac{\partial P}{\partial v}(1,1) & \frac{\partial^2 P}{\partial v \partial u}(1,0) & \frac{\partial^2 P}{\partial v \partial u}(1,1) \end{bmatrix}$$

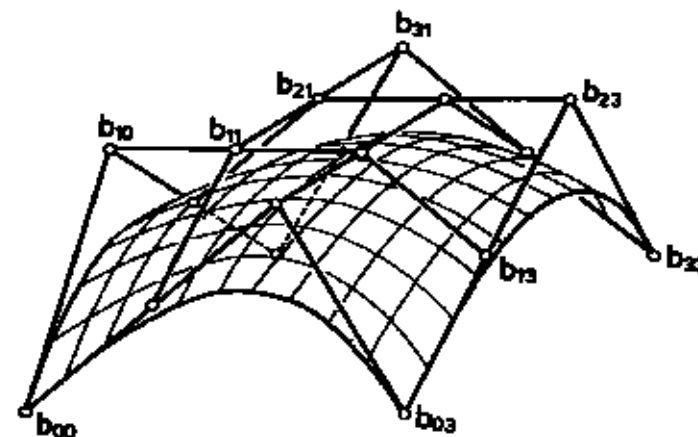
Superfícies Bézier

- Extensão das curvas de Bezier

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{i,j} B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) \quad 0 \leq u, v \leq 1$$

onde $B_{i,j}$ é matriz de vértices de controle, $B_{i,n}(u)$ e $B_{j,m}(v)$ são funções de Bernstein

$$S(u, v) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} M_B G_B M_B^T \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$M_B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_B = \begin{bmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & P_{0,3} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} \\ P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} \\ P_{3,0} & P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3} \end{bmatrix}$$

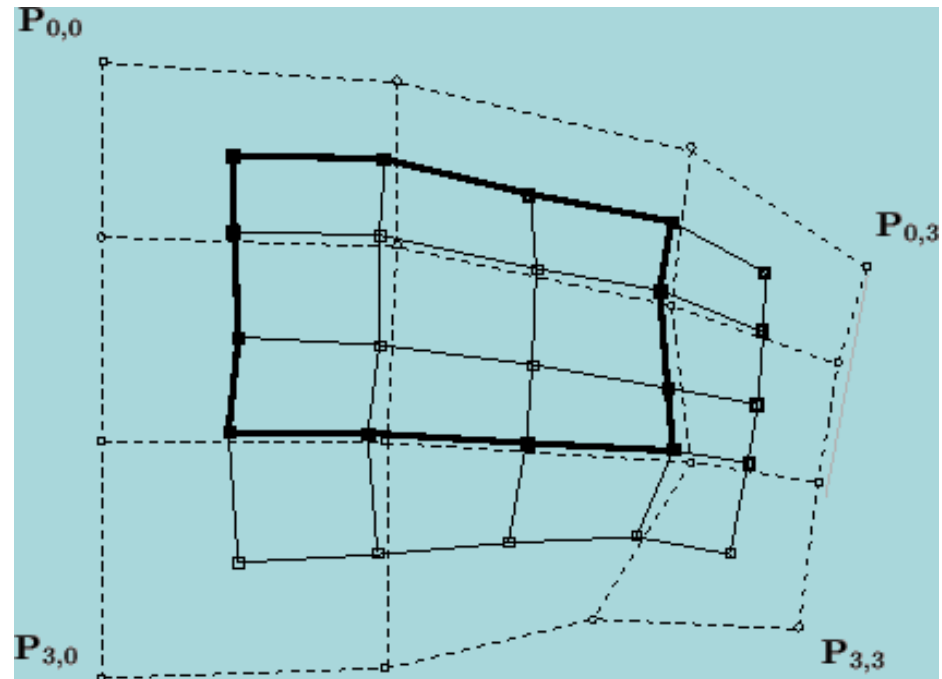
Superfícies B-Spline

- Extensão das curvas B-Spline

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \cdot M \cdot G \cdot M^T \cdot \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{0,0} & \mathbf{P}_{0,1} & \mathbf{P}_{0,2} & \mathbf{P}_{0,3} \\ \mathbf{P}_{1,0} & \mathbf{P}_{1,1} & \mathbf{P}_{1,2} & \mathbf{P}_{1,3} \\ \mathbf{P}_{2,0} & \mathbf{P}_{2,1} & \mathbf{P}_{2,2} & \mathbf{P}_{2,3} \\ \mathbf{P}_{3,0} & \mathbf{P}_{3,1} & \mathbf{P}_{3,2} & \mathbf{P}_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$M = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

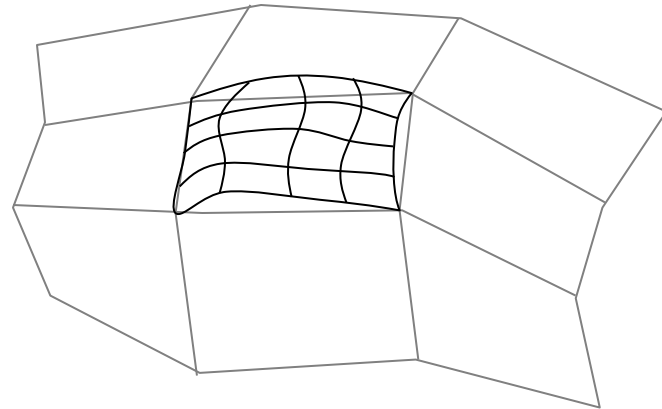


Surfaces Catmull-Rom Spline

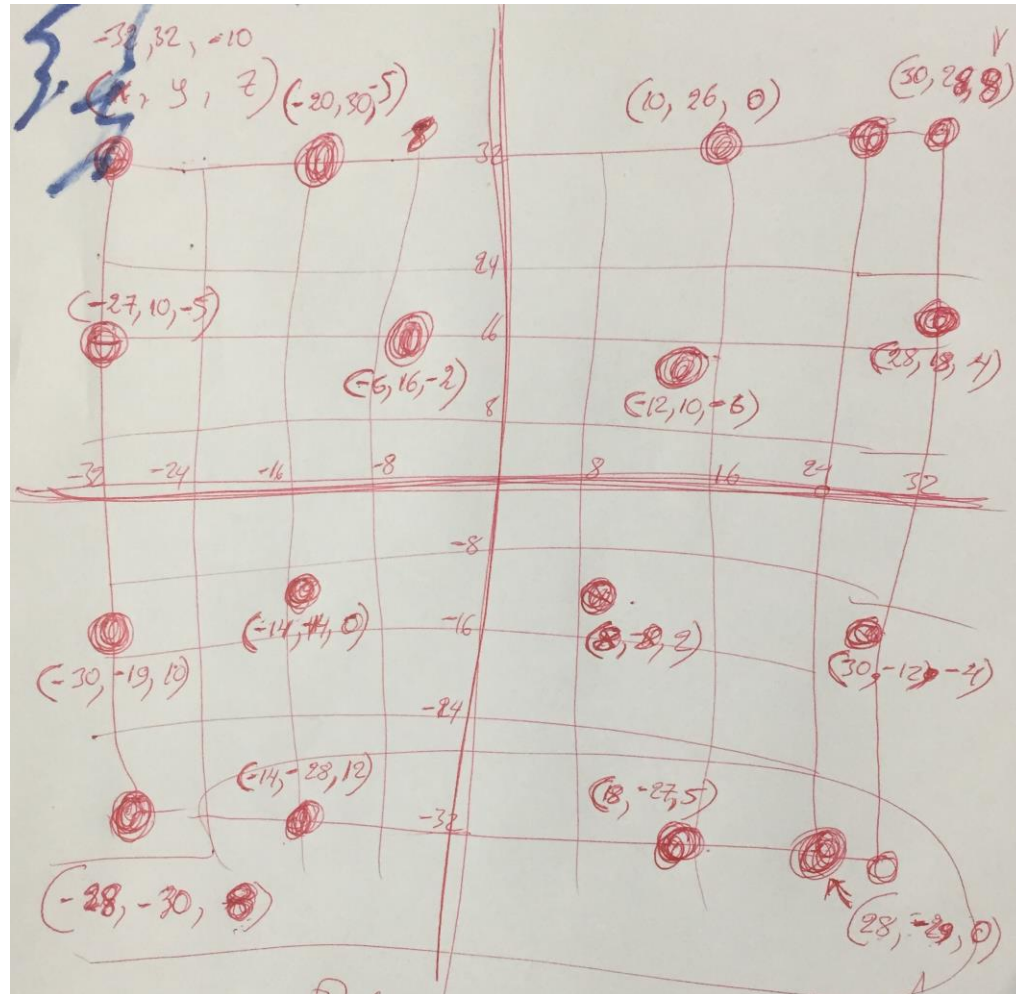
$$S(u, v) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \cdot M \cdot G \cdot M^T \cdot \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{0,0} & \mathbf{P}_{0,1} & \mathbf{P}_{0,2} & \mathbf{P}_{0,3} \\ \mathbf{P}_{1,0} & \mathbf{P}_{1,1} & \mathbf{P}_{1,2} & \mathbf{P}_{1,3} \\ \mathbf{P}_{2,0} & \mathbf{P}_{2,1} & \mathbf{P}_{2,2} & \mathbf{P}_{2,3} \\ \mathbf{P}_{3,0} & \mathbf{P}_{3,1} & \mathbf{P}_{3,2} & \mathbf{P}_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$M = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Geração de pontos de controle



Gerado

