Termos consecutivos de uma P.G.

Numa progressão geométrica $(a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_{p-1};\ a_p;\ a_{p+1};\ \ldots)$, cada termo, a partir do segundo, é média geométrica entre o termo anterior e o termo posterior. Simbolicamente: $a^2{}_p = a_{p-1}.a_{p+1}$

Exercícios Resolvidos – Termos consecutivos de uma P.G.

1ª) Calcule x para que a sequência (3x – 1; 4x; 2x + 6; ...) seja uma P.G. e em seguida obter o quarto termo.

Resolução

(3x – 1; 4x; 2x + 6; ...) é PG ⇔ (4x)2 = (3x – 1)(2x + 6) ⇔ 5x2 – 8x + 3 = 0 $\Leftrightarrow x=\frac{8\pm 2}{10} \Leftrightarrow x=1\ ou\ x=\frac{3}{5}$

$Se\ x=1\ a\ P.G.\ é\ (2;\ 4;\ 8;\ \ldots)\ e\ a_4=16$

$Se\ x=\frac{3}{5}\ a\ P.G.\ é\ \left(\frac{4}{5};\ \frac{12}{5};\ \frac{36}{5};\ \ldots\right)\ e\ a_4=\frac{108}{5}$

$Respostas:\ (x=1\ e\ a_4=16)\ ou\ \left(x=\frac{3}{5}\ e\ a_4=\frac{108}{5}\right)$

2ª) A sequência (1; 1; 2; 3; 5; …) em que, a partir do terceiro termo, cada termo é a soma dos dois termos que o precedem, é conhecida como sequência de Fibonacci. Se do seu quinto e sétimo termo subtrairmos uma mesma quantia inteira e acrescentarmos os valores subtraídos ao seu nono termo, obteremos, nesta ordem, três termos consecutivos de uma progressão geométrica. A razão dessa progressão geométrica é: a) 2 b) 3 c) 5 d) 6 e) 7

Resolução

1) Os 9 primeiros termos da sequência de Fibonacci são:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34

↓ ↓ ↓

a_5 a_7 a_9

2) Subtraindo x do 5º e 7º termos e somando 2x ao 9º termo obtemos, nessa ordem, então: 5 – x; 13 – x; 34 + 2x

3) Se esses três números formam uma progressão geométrica, nessa ordem, então: (13 – x)² = (5 – x) . (34 + 2x) ⇔ 3x² – 2x – 1 = 0 ⇔

$\Leftrightarrow x=\frac{2\pm 4}{6} \Leftrightarrow x=1\ ou\ x=-\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=1\ \ pois\ \ x\in Z$

4) A progressão é, pois, (4; 12; 36; …) e a razão é 3.

Resposta: B

Exercícios Propostos – Termos consecutivos de uma P.G.

Questão 01 Profº Yury Bezerra.

A sequência $\left(2x+5;\ \ x+1;\ \ \frac{x}{2};\ \ldots\right)$, $com\ \ x\in R$, é uma progressão geométrica de termos positivos. O décimo terceiro termo desta sequência é:

a) 2 b) 3^{-10} c) 3 d) 3^{10} e) 3^{12}

Questão 02 Profº Yury Bezerra.

(MACKENZIE) Se p e q são positivos, e se p, pq e $3p$ estão, nesta ordem, em progressão geométrica, então o valor de q^3 é:

a) $\sqrt{3}$ b) 3 c) $3\sqrt{3}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $6\sqrt{3}$

Questão 03 Profº Yury Bezerra.

(UN.FED.TERESINA) Sejam **x** e **y** números positivos. Se os números **3**, **x** e **y** formam, nesta ordem, uma P.G. e se os números **x**, **y** e **9** formam, nesta ordem, uma P.A., então **x + y** é igual a:

a) $\frac{43}{4}$ b) $\frac{47}{4}$ c) $\frac{45}{4}$ d) $\frac{49}{4}$ e) $\frac{50}{4}$

Questão 04 Profº Yury Bezerra.

Adicionando-se uma constante a 20, 50 e 100, obtém-se na ordem dada três termos consecutivos em progressão geométrica. Qual a razão desta progressão?

Exercícios Complementares – Termos consecutivos de uma P.G.

Questão 01 Profº Yury Bezerra.

A sequência (..., x – 2; 2x – 1; 4x + 7; ...) é uma P.G. Determine a razão.

Questão 02 Profº Yury Bezerra.

O sétimo termo de uma P.G. decrescente, tal que $a_6=32$ e $a_8=2$, é:

a) 8 b) 6 c) 4 d) 3 e) 2

Questão 03 Profº Yury Bezerra.

(FUVEST) O quinto e o sétimo termo de uma P.G. de razão positiva valem respectivamente 10 e 16. O sexto termo desta P.G. é:

a) 13 b) $10\sqrt{6}$ c) $4\sqrt{10}$ d) 40 e) $2\sqrt{10}$

Questão 04 Profº Yury Bezerra.

O segundo termo de uma P.G. crescente tal que $a_1=8$ e $a_3=18$ é igual a:

a) 10 b) 11 c) 12 d) 14 e) 15

Questão 05 Profº Yury Bezerra.

(PUC) Se a sequência (4x, 2x + 1, x – 1, ...) é uma P.G., então o valor de x é:

a) $-\frac{1}{8}$ b) -8 c) - 1 d) 8 e) $\frac{1}{8}$

Questão 06 Profº Yury Bezerra.

(UNIV. CAXIAS DO SUL) Sabendo que a sucessão (x – 2, x + 2, 3x – 2, ...) é uma P.G. crescente, então o quarto termo é:

a) 27 b) 64 c) 32 d) 16 e) 54

Questão 07 Profº Yury Bezerra.

A sequência $\left(2x+5,\ \ x+1,\ \ \frac{x}{2},\ \ldots\right)$, com x ∈ R, é uma progressão geométrica de termos positivos. O décimo terceiro termo desta sequência é:

a) 2 b) 3^{-10} c) 3 d) 3^{10} e) 3^{12}

Questão 08 Profº Yury Bezerra.

(FAAP) Dados os números 1, 3 e 4, nesta ordem, determinar o número que se deve somar a cada um deles para que se tenha uma progressão geométrica.

Questão 09 Profº Yury Bezerra.

Em um triângulo, a medida da base, a medida da altura e a medida da área formam, nessa ordem, uma P.G. de razão 8. Então, a medida da base vale:

a) 4 b) 8 c) 16 d) 1 e) 2

Questão 10 Profº Yury Bezerra.

As medidas do lado, do perímetro e da área de um quadrado estão em progressão geométrica, nessa ordem. A área do quadrado será:

a) 256 b) 64 c) 16 d) 243 e) 729

Questão 11 Profº Yury Bezerra.

Se x – 1, x + 2 e x + 8 estão em progressão geométrica, nessa ordem, então x² resulta igual a:

a) 4 b) 9 c) 16 d) 25 e) 36

Produto dos termos de uma P.G.

1. Termos equidistantes

Definição

Dois termos são chamados equidistantes dos extremos se o número de termos que precede um deles for igual ao número de termos que sucede o outro. Na P.G.

Propriedade

Na progressão geométrica $(a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_p;\ \ldots;\ a_k;\ \ldots;\ a_n)$, se a_p e a_k equidistam de a_1 e a_n então: $a_p.a_k = a_1.a_n$

ou seja: **o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos**.

Exemplos

Na progressão geométrica $(a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots)$ temos:

a) $a_1.a_9 = a_2.a_8$, pois 1 + 9 = 2 + 8

b) $a_1.a_9 = a_3.a_7$, pois 1 + 9 = 3 + 7

c) $a_4.a_6 = a_2.a_8$, pois 4 + 6 = 2 + 8

2. Produto dos n primeiros termos de uma P.G.

Se P_n for o produto dos n primeiros termos da P.G.

$(a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_n;\ \ldots)$ então: $|P_n| = \sqrt{(a_1.a_n)^n}$

Exercícios Resolvidos – Produto dos termos de uma P.G.

1ª) Na P.G. estritamente crescente $(a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots)$, tem-se $a_1 + a_6 = 1025$ e $a_3.a_4 = 1024$. Determine a razão da progressão geométrica.

Resolução

$$\begin{cases} a_1 + a_6 = 1025 \\ a_3.a_4 = 1024 \\ a_3.a_4 = a_1.a_6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_6 = 1025 \\ a_3.a_4 = 1024 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_6 = 1024 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} a_1 = 1024 \\ a_6 = 1 \end{cases}$$

Como a P.G. é estritamente crescente, consideramos $a_1 = 1\ e\ a_6 = 1024$. Sendo $a_6 = a_1.q^5$, tem-se:

$1024 = 1.q^5, \Rightarrow q = \sqrt[5]{2^{10}} \Leftrightarrow q = 4$ **Resposta:** $q = 4$

Exercícios Propostos – Produto dos termos de uma P.G.

Questão 01 Profº Yury Bezerra.

A progressão geométrica (a_1, 2, a_3, ...) é tal que $a_4.a_{12} = 46$. O décimo quarto termo desta progressão vale:

a) 46 b) $\sqrt{46}$ c) 23 d) $\sqrt{23}$ e) 40

Questão 02 Profº Yury Bezerra.

Numa P.G. estritamente decrescente, sabe-se que $a_1 + a_{10} = -513$ e $a_4.a_7 = 512$. Determine a razão da P.G.

Questão 03 Profº Yury Bezerra.

Calcular o produto dos 10 primeiros termos da progressão geométrica (– 1, 2, – 4, ...).

Questão 04 Profº Yury Bezerra.

Calcule o produto dos 25 elementos iniciais da P.G. (– 1, – 2, – 4, ...).

Questão 05 Profº Yury Bezerra.

O produto dos 19 termos iniciais da P.G. alternante, em que o 10º termo é 2, vale:

a) 2^{19} b) -2^{19} c) -2^{18} d) 2^{18} e) 2

Exercícios Complementares – Produto dos termos de uma P.G.

Questão 01 Profº Yury Bezerra.

A progressão geométrica $(a_1,\ a_2,\ 6,\ \ldots)$ é tal que $a_6.a_{10} = 570$. Calcule o 13º termo desta progressão.

Questão 02 Profº Yury Bezerra.

O produto dos 10 primeiros termos da progressão geométrica (1, 2, 4, ...) é:

a) 2^{10} b) 2^{21} c) 2^{45} d) 2^{40} e) 2^{30}

Questão 03 Profº Yury Bezerra.

O produto dos 13 primeiros termos da progressão geométrica estritamente crescente em que $a_1 = -9$ e $a_{13} = -\frac{1}{9}$ é:

a) 1 b) – 1 c) 11 d) – 11 e) 2^{26}

Questão 04 Profº Yury Bezerra.

Determine o produto dos n primeiros termos da sequência (n, n², n³, ...), com n > 0.

Questão 05 Profº Yury Bezerra.

Calcule o produto dos 21 primeiros termos da P.G. (2, 6, 18, ...).

Questão 06 Profº Yury Bezerra.

(FUVEST) Uma progressão geométrica tem primeiro termo igual a 1 e razão igual a $\sqrt{2}$. Se o produto dos termos dessa progressão é 2^{39}, então o número de termos é igual a:

a) 12 b) 13 c) 14 d) 15 e) 16

Questão 07 Profº Yury Bezerra.

O produto dos dez primeiros termos da progressão geométrica (1; – 3; 9; …) é:

a) 3^{45} b) -3^{45} c) 3^{90} d) -3^{90} e) 9^{10}

Questão 08 Profº Yury Bezerra.

Multiplicando-se os nove primeiros termos da progressão geométrica (2; – 4; 8; …), obtém-se:

a) 2^{45} b) -2^{45} c) 4^{90} d) -4^{90} e) -2^{40}

Questão 09 Profº Yury Bezerra.

Considere os dez primeiros termos da progressão geométrica (a_n) em que o primeiro termo é $a_1 = 2$ e a razão é q = 3. Se P_i é o produto dos termos de ordem ímpar, isto é, $P_i = a_1.a_3.a_5.a_n.a_9$ e P_n é o produto dos termos de ordem par $(P_p = a_2.a_4.a_6.a_8.a_{10})$, então $\frac{P_p}{P_i}$ resulta em:

a) 9 b) 27 c) 81 d) 243 e) 729

Questão 10 Profº Yury Bezerra.

O produto dos oito primeiros termos da progressão geométrica (– 16; – 8; – 4; …) é:

a) 256 b) – 256 c) 16 d) – 16 e) – 8

Questão 11 Profº Yury Bezerra.

Na multiplicação dos vinte primeiros termos da progressão geométrica (10; 10^2; 10^3; …), obtém-se:

a) 10^{200} b) 10^{205} c) 10^{208} d) 10^{210} e) 10^{212}

Questão 12 Profº Yury Bezerra.

Na progressão geométrica $(a_n) = (a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots)$ de termos estritamente positivos, tem-se $a_9.a_{12} = 2$. Então, o produto dos vinte primeiros termos dessa sequência é:

a) 128 b) 256 c) 512 d) 1024 e) 2048