

Uma aproximação prática à Relatividade Numérica

Willians O. Barreto Acevedo

wobarreto@gmail.com

Universidad de Los Andes, Venezuela

Universidade do Estado de Rio de Janeiro, Brasil

Terceira Escola do Programa da Pós Graduação em Física,
Fevereiro 10-14, 2020

Resumo

A partir de uma perspectiva prática vamos apresentar a Relatividade Numérica desde um caso simples. Tentaremos ir até o mais complexo possível, no contexto da turma e que uma semana de aulas (10 tempos) nos pode permitir. Vamos fazer isso a partir de uma formulação característica da Relatividade Numérica, usando métodos numéricos que levaram aos códigos de Pittsburgh e de Rio. Assim, usaremos as técnicas de diferenças finitas e de Galerkin-Colocação para mostrar como resolver numericamente a equação de onda com ou sem gravitação. As aulas serão mais práticas que teóricas, acompanhadas de ferramentas como Docker, Jupyter Notebooks, GitLab. A dinâmica e o conteúdo estarão a tono com as correntes e tendências da computação científica e serviços na nuvem. Vamos tentar enxergar ao final qual é a conexão de nosso modelo didático e computacional com certos desafios observacionais da atualidade.

Sumário

1	Introdução	5
2	Geometria plana	8
2.1	Equação de onda esférica e sua solução analítica	8
2.2	Conservação da energia	10
2.3	Paralelogramo nulo	11
2.4	Galerkin-Colocação	17
2.5	Testes de convergência	18
2.6	Onda não esférica	19
2.6.1	Simetria axial	19
2.6.2	Sem simetria	20
3	Geometria curva estática	22
3.1	Equação de onda não esférica e linear	22
3.2	Solução numérica usando o código Pitt	24
3.3	Testes	25
3.3.1	Conservação da energia	25
3.3.2	Modos quase-normais do buraco negro	27
4	Geometria curva e dinâmica	28
4.1	Equações de Einstein-Klein-Gordon	28
4.2	Solução usando o código Rio	33

4.3 Colapso gravitacional até um buraco negro	34
5 O futuro do minicurso	35
Apêndices	37
A Sobre o ambiente computacional	37
B Formalismo $\tilde{\theta}$ (<i>eth</i>)	38
C Métrica de Bondi-Sachs 3D e sua interpretação 2+1: casos particulares 2D e 1D.	47
D Sistemas de Einstein-Klein-Gordon 3D e 2D	49
Referências	56

1. Introdução

Na atualidade achamos que os problemas mais importantes (e complexos) da Relatividade Numérica são as simulações de:

- Sistemas binários compactos ([1] e suas referências);
- Espaço tempos assintoticamente anti-de Sitter para fazer aplicações holográficas [2].

Há um tempo aprendemos que para resolver um problema difícil é bom procurar a versão mais simples dele e resolvê-la. Neste curso iremos fazer isto, estaremos indo do mais simples ao mais complicado. Estudaremos a evolução de uma onda sem ou com gravitação, estática ou dinâmica. Seja em uma, duas ou três dimensões espaciais. Seja usando diferenças finitas ou métodos espectrais. Sempre na formulação característica da Relatividade Numérica (RN).

A formulação característica é estruturalmente hiperbólica [3] e como consequência disso é estável para implementações numéricas. Daí que as formulações padrão da Relatividade Numérica, a de Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakanura (BSSN) [4] e a de Chesler-Yaffe (CY) [5], sejam também hiperbólicas. Os problemas mais complexos da RN, buracos negros binários, emissão e detecção da radiação gravitacional e todo o problema da dualidade inerente ao Princípio Holográfico têm a ver com a formulação característica originalmente proposta por Bondi e colaboradores [6].

Qual é o problema mais simples, que pode levar aos problemas fundamentais da atualidade? Talvez seja a evolução de uma onda esférica (problema 1D) num espaço-tempo plano (sem gravitação). Se estamos querendo resolver um problema rápido, numericamente e não precisamos muita precisão, o método das diferenças finitas é ótimo. Se precisamos resolver

com uma alta precisão e maior generalidade, os métodos espectrais são uma excelente escolha, mas podem ser caros computacionalmente.

É assim que nos vamos começar com a evolução de uma onda esférica usando características nulas, diferenças finitas e métodos espectrais de Galerkin-Colocação. Isto leva aos códigos mais gerais para estudar o colapso gravitacional de um campo escalar como fonte material. Vamos fazer três tipos de evoluções:

1. Sem gravitação;
2. Com gravitação estática;
3. Com gravitação dinâmica, até a formação de um buraco negro.

A estratégia em geral será:

- ::: Equação escrita em coordenadas nulas sainte (entrante)
- ::: Solução analítica, semi-numérica ou numérica;
- ::: Solução com diferenças finitas;
- ::: Solução com Galerkin-Colocação;
- ::: Testes;

para cada caso. E em cada caso vamos mostrar as possíveis extensões para 2D e 3D, e fazer propostas como tarefas fora da aula.

Vamos usar ferramentas computacionais de software livre e comentaremos um caso interessante de licença comunitária (de Portland Group Inc.). Usaremos Python e eventualmente Fortran 90, Jupyter Notebooks e ambientes virtuais com Docker, Vagrant com Virtual Box. (Ver o apêndice A sobre a instalação do ambiente computacional virtual.)

A Dinâmica das aulas será a seguinte:

- 30 minutos de teoria;
- 1 hora de prática usando o ambiente computacional virtual e Jupyter Notebooks; mostrando as versões Python e Fortran 90;
- Exercícios para fora da sala; e comentários sobre a próxima aula.
- Antes e depois de cada aula o material do minicurso (apostila e códigos) será disponibilizado no Gitlab.

A semana toda da Escola o Professor ficará na sala 3007D nas tardes depois de cada aula ou disponível no e-mail, monitorando o minicurso.

2. Geometria plana

Um universo sem gravitação é plano, mas ainda há muitas coisas que podemos aprender. Vamos ver em breve um tipo de situações simplificadas que podem nos ajudar na compreensão da realidade.

2.1. Equação de onda esférica e sua solução analítica

Algo bem conhecido de Relatividade Restrita é que o espaço-tempo de Minkowski tem a métrica

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (1)$$

se usamos coordenadas retangulares e fazemos a escolha da velocidade da luz $c = 1$. Usando coordenadas esféricas, o mesmo elemento pode ser escrito como

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2)$$

Observe que

$$dt^2 - dr^2 = (dt - dr)(dt + dr) = dvdu = du^2 + 2dudr = dv^2 - 2dvdr \quad (3)$$

onde $u = t - r$ e $v = t + r$.

Agora, sob simetria esférica a equação de onda para um campo escalar $\square\Phi = 0$ pode ser escrito como

$$g_{,uv} = 0, \quad (4)$$

onde $g = r\Phi$ e a vírgula representa a derivada parcial. Todos sabem que a solução desta equação é

$$g = f(v) + h(u) \quad (5)$$

sendo f e h funções arbitrárias dos seus argumentos.

Se usamos as coordenadas (u, r) a equação de onda fica

$$2g_{,ur} - g_{,rr} = 0 \quad (6)$$

e um dado inicial qualquer será

$$g(u = 0, r) = f(r) \quad (7)$$

vai evoluir entrando.

Se usamos as coordenadas (v, r) a equação de onda fica

$$2g_{,vr} + g_{,rr} = 0 \quad (8)$$

e um dado inicial qualquer será

$$g(v = 0, r) = h(r) \quad (9)$$

vai evoluir saindo.

Em geral o comportamento posterior da onda depende das condições estabelecidas nas fronteiras. Por exemplo, a onda

$$\Phi(u, r) = [f(u/2 + r) - f(u/2)]/r \quad (10)$$

será uma onda que viaja inicialmente entrando (*ingoing*), bate no $r = 0$ ao tempo que vai se ecoando no espaço até o infinito-futuro-nulo (\mathcal{I}^+) [7], nomeado de *scri*.

2.2. Conservação da energia

A energia da onda contida no espaço todo e o fluxo de energia ou potência radiada ao infinito podem ser calculadas como

$$E = 2\pi \int_0^\infty r^2 \Phi_{,r}^2 dr, \quad (11)$$

$$\frac{dE}{du} = -4\pi N^2 \equiv P, \quad (12)$$

onde

$$N = -\frac{1}{2}\Phi(u, 0), \quad (13)$$

Perto do \mathcal{I}^+ o campo escalar tem um comportamento

$$\Phi = \frac{Q(u)}{r}. \quad (14)$$

Pode-se mostrar que

$$N = \frac{dQ}{du}. \quad (15)$$

A integral (11) pode ser calculada usando diferenças finitas ou uma quadratura de Gauss-Legendre. Vamos mostrar numericamente que a quantidade

$$E(u) - \int_0^u P(u') du' = E(0), \quad (16)$$

é constante e convergente segundo o método de integração.

No código `mcp_uerj11.ipynb` mostramos a implementação das seções 2.1 e 2.2. As versões `mcp_uerj11.py` e `mcp_uerj11.f90` também estão disponíveis.

2.3. Paralelogramo nulo

Agora, vamos nos focar no esquema da evolução conhecido como o paralelogramo nulo [8], baseado numa solução da equação canônica (4). Se os vértices do paralelogramo Σ da figura 1 estão dados por: $R(u_0, v_0)$; $S(u_0, v_0 + \Delta v)$; $P(u_0 + \Delta u, v_0)$; $Q(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$, a integração da equação (4) leva à seguinte fórmula exata

$$g_Q = g_P + g_S - g_R. \quad (17)$$

O uso da coordenada radial compactificada

$$x = \frac{r}{R + r}, \quad (18)$$

conveniente para lidar com a computação perto do infinito, não permite uma implementação numérica direta do algoritmo (17) do paralelogramo nulo. Em geral, os vértices do paralelogramo nulo não ficam na malha radial computacional a qual é discretizada com uniformidade, como mostra a figura 2. Assim precisamos de interpolações. A mais simples serão os interpolantes de Lagrange de segundo ordem:

$$g_R = \frac{(x_R - x_i)}{(x_{i-1} - x_i)} g_{i-1}^n + \frac{(x_R - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} g_i^n, \quad (19)$$

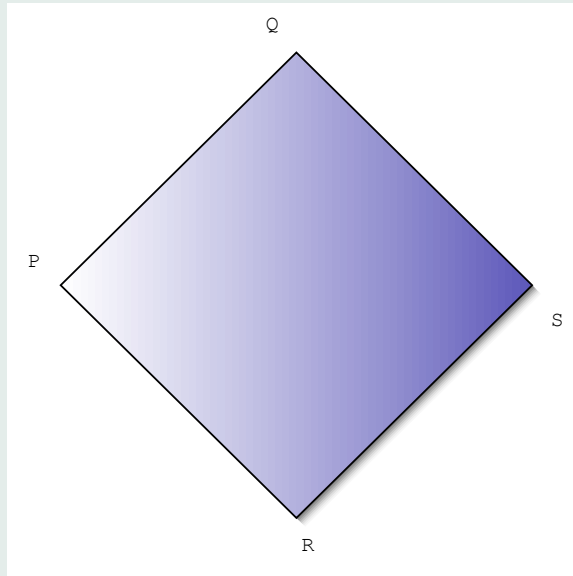


Figura 1: Paralelogramo nulo Σ .

$$g_S = \frac{(x_S - x_{i-1})}{(x_i - x_{i+1})} g_i^n + \frac{(x_S - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} g_{i+1}^n, \quad (20)$$

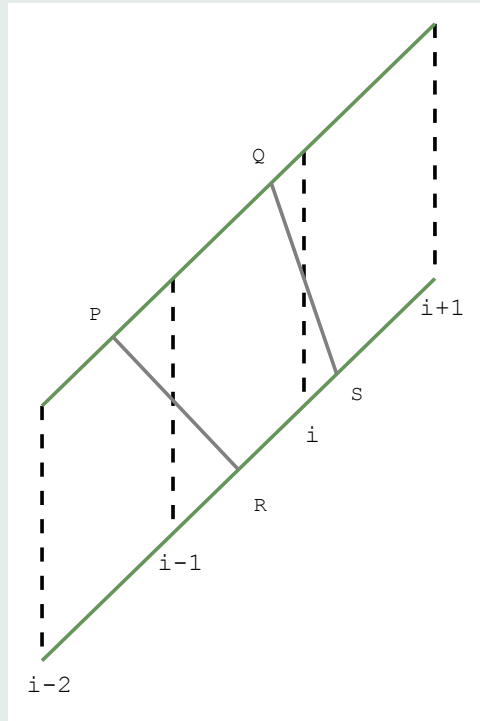


Figura 2: Paralelogramo nulo na malha radial compactificada.

$$g_P = \frac{(x_P - x_{i-1})}{(x_{i-2} - x_{i-1})} g_{i-2}^{n+1} + \frac{(x_P - x_{i-2})}{(x_{i-1} - x_{i-2})} g_{i-1}^{n+1}, \quad (21)$$

$$g_Q = \frac{(x_Q - x_i)}{(x_{i-1} - x_i)} g_{i-1}^{n+1} + \frac{(x_Q - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} g_i^{n+1}, \quad (22)$$

onde o índice n marca a coordenada temporal ($n = 0$ para $u = 0$) e

$$x_P = x_{i-1} - \frac{1}{2} \delta_{i-1},$$

$$x_R = x_{i-1} + \frac{1}{2} \delta_{i-1},$$

$$x_Q = x_i - \frac{1}{2} \delta_i,$$

$$x_S = x_i + \frac{1}{2} \delta_i,$$

$$\delta_{i-1} = \frac{1}{2} (1 - x_{i-1})^2 \Delta u,$$

$$\delta_i = \frac{1}{2} (1 - x_i)^2 \Delta u.$$

É importante apontar que δ_i e δ_{i-1} tem origem na equação da geodésica nula sainte

$$\frac{dr}{du} = -\frac{1}{2},$$

que escrita em termos da coordenada radial compactificada é

$$\frac{dx}{du} = -\frac{1}{2}(1-x)^2.$$

Então, temos

$$g_R = g_{i-1}^n + (g_i^n - g_{i-1}^n) \frac{\delta_{i-1}}{2\Delta x}, \quad (23)$$

$$g_S = g_i^n + (g_{i+1}^n - g_i^n) \frac{\delta_i}{2\Delta x}, \quad (24)$$

$$g_P = g_{i-1}^{n+1} + (g_{i-2}^{n+1} - g_{i-1}^{n+1}) \frac{\delta_{i-1}}{2\Delta x}, \quad (25)$$

$$g_Q = g_i^{n+1} + (g_{i-1}^{n+1} - g_i^{n+1}) \frac{\delta_i}{2\Delta x}, \quad (26)$$

Desta última equação pegamos o valor do campo mais avançado na malha computacional

$$g_i^{n+1} = \frac{(g_Q - \frac{1}{2}g_{i-1}^{n+1}\delta_i/\Delta x)}{(1 - \frac{1}{2}\delta_i/\Delta x)}, \quad (27)$$

onde g_Q é calculada usando a equação (17).

Precisamos um tratamento especial no $i = 1$ (segundo ponto da malha) e no $i = N_x$ (último ponto da malha). Por exemplo, se $g_{i=0}^n = g_P = 0$, pode se aproximar $g_{i=1}^n = g_Q$. Por

outro lado, $g_S = g_{N_x}^{n-1}$, $g_{N_x}^n = g_Q$. Existem diferentes implementações e dependem em geral das condições nas fronteiras.

É conhecido que nos sistemas hiperbólicos a condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) sobre o tamanho do intervalo de tempo Δu é uma condição necessária mas não suficiente para a convergência num esquema explícito de evolução numérica. A condição precisa que o domínio de dependência numérica inclua o domínio de dependência física. Este domínio está definido pelo cone de luz aberto ao passado com vértice no novo ponto, enquanto o domínio de dependência numérica está determinado pelo conjunto discreto de pontos usados no esquema numérico. Se a condição CFL não é satisfeita, a informação física no exterior do domínio numérico poderia não atingir o novo ponto, e a convergência não se consegue. Na prática, a falta de convergência é manifesta pelo crescimento rápido das instabilidades (Teorema de Lax à inversa). Em geral, precisamos que o passo de integração temporal seja menor que a menor das espaciais (radial ou angular). Por exemplo, para simetria esférica

$$\Delta u \leq K \Delta r, \quad (28)$$

onde K é da ordem da unidade.

No código `mcp_uerj12.ipynb` mostramos a implementação da seção 2.3 e 2.2. As versões `mcp_uerj12.py` e `mcp_uerj12.f90` também estão disponíveis.

2.4. Galerkin-Colocação

Na prática, este método consiste em fazer a decomposição [9], [10]

$$g(u, r) = \sum_{n=0}^{p_g} a_n(u) \psi_n(r), \quad (29)$$

com uma escolha da base que satisfaz o comportamento esperado do campo g nas fronteiras

$$\psi_n(r) = \frac{1}{2}[TL_{n+1}(r) + TL_n(r)], \quad (30)$$

onde

$$TL_n(r) = T_n(x), \quad (31)$$

com o mapeamento

$$x = (L_0 - r)/(L_0 + r),$$

sendo $T_n(x)$ os polinômios de Chebyshev e L_0 o parâmetro do mapeamento.

Os pontos de colocação são

$$x_k = \cos[k\pi/(p_g + 1)], \quad k = 0 \dots p_g + 1, \quad (32)$$

onde a discretização da malha é determinada pela truncagem p_g . Assim, nosso problema consiste na solução do sistema linear

$$\sum_n \psi'_n(r_k) \dot{a}_n(u) = \frac{1}{2} g_{,rr}(u, r_k), \quad (33)$$

para obter um sistema dinâmico $\{\dot{a}_n\}$ e integrar com o método de Runge-Kutta, por exemplo. Ficam faltando só os modos iniciais para a integração no tempo. Para isso fazemos exatamente a mesma coisa. Como $g(0, r)$ é conhecido, então

$$\sum_n \psi_n(r_k) a_n(0) = g(0, r_k) \quad (34)$$

é resolvido como um sistema linear para obter $a_n(u = 0)$. Observe que os sistemas algébricos de equações precisam ser resolvidos só uma vez.

No código `mcp_uerj13.ipynb` mostramos a implementação das seções 2.4 e 2.2. As versões `mcp_uerj11.py` e `mcp_uerj11.f90` também estão disponíveis.

2.5. Testes de convergência

Fazendo a escolha do dado inicial

$$g(0, r) = A_0 e^{-(r-r_0)^2/\sigma^2}, \quad (35)$$

podemos obter os seguintes resultados, dependendo de cada código: i) a evolução do campo escalar; ii) a conservação da energia; iii) a convergência de segundo ordem para método do paralelogramo nulo para qualquer tempo; iv) a convergência exponencial para o método de Galerkin-Colocação para qualquer tempo. Em qualquer caso, a convergência é a solução analítica.

Todo código deve mostrar estes comportamentos para garantir sua confiabilidade. Quando não temos uma solução analítica, precisamos ter uma medida do erro ou da auto-convergência.

E sempre são bem recebidos testes físicos do tipo conservação da energia, ainda no regime não linear.

2.6. Onda não esférica

Apenas por completude destas notas de aula, vamos considerar de um jeito breve o tratamento de ondas não esféricas usando o paralelogramo nulo.

2.6.1. Simetria axial

Se o campo escalar agora depende também de θ a equação de onda se escreve como

$$2g_{,ur} - g_{,rr} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} [\sin \theta g_{,\theta}]_{,\theta}. \quad (36)$$

a qual tem um comportamento singular nos polos. Fazendo $y = -\cos \theta$ regularizamos esta equação

$$2g_{,ur} - g_{,rr} = \frac{1}{r^2} [(1 - y^2)g_{,y}]_{,y} \equiv \mathcal{H} \quad (37)$$

Se usamos o paralelogramo nulo uma solução desta equação seria

$$g_Q = g_P + g_S - g_R + \frac{1}{4} \Delta u (r_Q - r_P + r_S - r_R) \mathcal{H}_C \quad (38)$$

onde

$$\mathcal{H}_C = \frac{1}{2} (H_S + H_P). \quad (39)$$

O procedimento numérico para evoluir o dado inicial é o mesmo desenvolvido na seção 2.3, usando interpolantes de Lagrange.

2.6.2. Sem simetria

Se o campo escalar depende de θ e ϕ a equação de onda se escreve como

$$2g_{,ur} - g_{,rr} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ [\sin \theta \Phi_{,\theta}]_{,\theta} + \frac{1}{\sin \theta} g_{,\phi\phi} \right\}. \quad (40)$$

a qual tem um comportamento singular nos polos que não pode ser resolvido com a escolha $y = -\cos \theta$.

Para a regularização, usamos o tratamento das coordenadas estereográficas que leva ao formalismo *eth* (ver apêndice B), fazendo [11]:

$$\zeta = \tan(\theta/2)e^{i\phi} = q + ip \quad (41)$$

a equação de onda fica

$$2g_{,ur} - g_{,rr} = \eth\eth g/r^2 = (P/2r)^2 (g_{,qq} + g_{,pp}) \equiv \hat{\mathcal{H}} \quad (42)$$

onde

$$\eth = P(\partial_q + i\partial_p)/2 \quad (43)$$

e

$$P^2 = (1 + q^2 + p^2) \quad (44)$$

O procedimento numérico segue como no caso anterior axial, com algumas modificações. Para calcular $\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}g$ no limite da mapa estereográfico, precisamos interpolações bi-cúbicas no mapa oposto para garantir convergência de segunda ordem. De novo, o uso de interpolantes de Lagrange é a escolha mais conveniente, por simplicidade.

3. Geometria curva estática

O próximo caso simples depois do plano é o espaço-tempo curvo estático, conhecido como a solução de Schwarzschild. Em coordenadas nulas esféricas, a métrica sainte fica

$$ds^2 = (1 - 2M/r)dv^2 - dvdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (45)$$

onde M é a massa de Schwarzschild (constante). Agora, a foliação do espaço-tempo está baseada no tempo avançado v (ver figura 3). Vamos considerar o caso de uma onda com simetria axial evoluindo num espaço-tempo que contém um buraco negro esférico. Usamos coordenadas (v, r, θ) para ir além do horizonte de eventos.

3.1. Equação de onda não esférica e linear

Neste caso a equação de onda pode ser escrita como [12]

$$\square^{(2)}g \equiv 2g_{,vr} + [(1 - 2M/r)g_{,r}]_{,r} = \frac{2Mg}{r^3} - \frac{(\sin\theta g_{,\theta})_{,\theta}}{r^2 \sin\theta}. \quad (46)$$

Ainda sendo uma equação linear, não é conhecida uma solução analítica para ela, vamos apresentar uma aproximação semi-numérica.

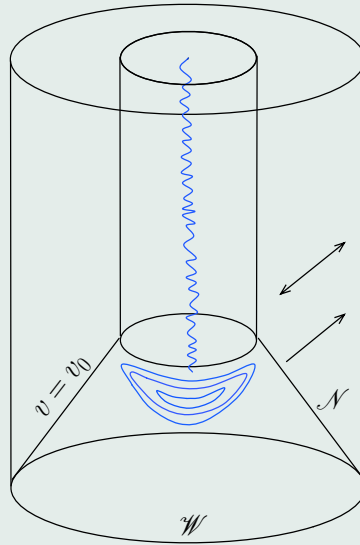


Figura 3: Configuração do problema com geometria curva e estática para um campo escalar com simetria axial.

3.2. Solução numérica usando o código Pitt

Para uma implementação numérica tipo Pitt, do lado direito podemos proceder como na Seção 2.6.1, com um termo adicional para \mathcal{H} , calculada no centro do paralelogramo nulo

$$\mathcal{H} = \frac{2Mg}{r^3} - \frac{1}{r^2}[(1 - y^2)g_{,y}]_{,y}. \quad (47)$$

O lado esquerdo também não é problema porque se sabe que

$$\int \square^{(2)} g du dr = g_Q - g_P - g_S + g_R, \quad (48)$$

é um invariante conforme. Assim, o algoritmo para o caso plano pode ser implementado, levando em conta que agora a marcha é sainte (para outros detalhes ver Ref. [12]).

Aqui temos duas possibilidades: continuar o tratamento 2D ou fazer um tratamento “1D”. Vamos manter uma atitude simples de evoluir códigos e ideias. Isto levou aos códigos mais gerais.

Uma separação

$$g(v, r, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \chi_l(v, r) P_l(y), \quad (49)$$

em termos do polinômios de Legendre, permite escrever

$$2\chi_{,vr} + [(1 - 2M/r)\chi_{,r}]_{,r} = [2M/r^3 + l(l+1)/r^2]\chi, \quad (50)$$

a qual é uma aproximação “esférica” ao problema axial. Esta é a equação que governa as perturbações escalares de um buraco negro de Schwarzschild [13], escrita em coordenadas

características. Para desenvolver o código vamos usar o esquema de integração como foi usado no código geral (não linear) 2D (axial). Em coordenadas entrantes as folhas $v = \text{constante}$ vai atravessar o horizonte de eventos no $r = 2M$, providenciando um esquema de excisão simples. A marcha do algoritmo faz sua parada em um número de pontos dentro da fronteira, porque o comportamento do campo no interior do horizonte não tem como afetar a solução no exterior. A evolução é feita numa malha radial com dados na fronteira para $r_{\text{out}} > 2M$. Devido à presença desta fronteira exterior as simulações em coordenadas entrantes podem rodar por um tempo limite tipicamente $v \approx 2r_{\text{out}}$, antes de atingir a fronteira e de influenciar a sinal que se está simulando.

3.3. Testes

3.3.1. Conservação da energia

Novamente, apenas por completude, vamos considerar certos aspectos da conservação da energia já que aporta alguns elementos essenciais e porque poderia ser também um ótimo teste para qualquer código.

Existe uma teoria que da suporte à seguinte ideia. A quantidade conservada [14],

$$\mathcal{C} = \int \xi^a T_a^b d\Sigma_b, \quad (51)$$

é a energia se $\xi^a = \delta_v^a$ e $d\Sigma_v = dV$ é o elemento de volume dentro da superfície $v = \text{constante}$, sendo

$$T_{ab} = \nabla_a \Phi \nabla_b \Phi - \frac{1}{2} g_{ab} \nabla^c \Phi \nabla_c \Phi, \quad (52)$$

o tensor de energia-momento do campo escalar sem massa e g_{ab} a métrica do espaço-tempo. Para uma esfera de raio $r = \text{constante}$, \mathcal{C} representa o fluxo de energia através da superfície $d\Sigma_r = r^2 d\Omega$, sendo $d\Omega$ o elemento do ângulo sólido. As componentes relevantes são neste caso [12]

$$T_v^v = \Phi_{,r}^2(1 - 2M/r) + 2\Phi_{,\theta}^2/r^2, \quad (53)$$

$$T_v^r = -2\Phi_{,v}[(1 - 2M/r)\Phi_{,r} + \Phi_{,v}]. \quad (54)$$

Assim

$$E(v) = 2\pi \int [(1 - 2M/r)(r\Phi_{,r})^2 + 2\Phi_{,\theta}^2] dr \sin\theta d\theta, \quad (55)$$

$$P(v) = -4\pi r^2 \int \Phi_{,v}[\Phi_{,v} + (1 - 2M/r)\Phi_{,r}] \sin\theta d\theta. \quad (56)$$

para que tudo de certo nas simulações botamos r_{in} bem perto do buraco negro e $2M < r_{\text{out}} < r_{\mathcal{W}}$, onde $r_{\mathcal{W}}$ é o raio do tubo de universo. Para o fluxo através da fronteira interior (exterior), a integral assim como as derivadas parciais (temporal e radial) devem ser avaliadas no $r_{\text{in(out)}}$. Com estas definições temos a seguinte lei de conservação

$$E(v) + \int_{v_0}^v [P_{\text{in}}(v') - P_{\text{out}}(v')] dv' = \text{constante}. \quad (57)$$

Ela é válida para o caso linear 2D com ou sem a separação (49), com ou sem um buraco negro no interior.

3.3.2. Modos quase-normais do buraco negro

Os modos quase-normais do buraco negro não só seriam um excelente teste para qualquer código se não que também representa *per se* um observável bem relevante [15]. Com eles podemos identificar o tipo de radiação, a massa do buraco negro remanescente e até a estrutura angular. Podemos explorar com código `mcp_uerj21.ipynb` (disponíveis também a versão Python e Fortran 90), uma sequência de uma onda inicial gaussiana sainte para os casos: a) sem massa (plano) e esférico; b) com diferentes massas mesma estrutura angular; c) igual massa, diferente estrutura angular.

4. Geometria curva e dinâmica

Pode-se pensar que o seguinte caso simples seria um campo escalar evoluindo numa geometria curva e estacionária. Esta geometria conhecida como a solução de Kerr (que contem um buraco negro rotante), pode ser estudada se considerarmos a métrica de Bondi-Sachs 3D (ver o apêndice C). Assim não é a seguinte situação mais simples, nosso contexto. Aliás, a métrica de Bondi-Sachs 2D é axial e de reflexão, portanto não inclui rotação.

Vamos estudar um campo escalar sem massa que pode contribuir à dinâmica da geometria do espaço-tempo. Para isso vamos considerar a seguinte métrica em coordenadas nulas e esféricas.

$$ds^2 = e^{2\beta} du[(V/r)du + 2dr] - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (58)$$

onde $V(u, r)$ e $\beta(u, r)$, por causa da simetria esférica.

Dentro da simplicidade a ideia é resolver numericamente as equações para a situação mais geral possível. Isto leva aos códigos mais gerais porque a estrutura das equações, ainda sendo um modelo de teste, vai se manter no essencial.

4.1. Equações de Einstein-Klein-Gordon

Se adotarmos as equações de campo de Einstein como um postulado, podemos instrumentalmente calculá-las e usá-las. Podemos dizer que a dinâmica é governada pelas equações de Einstein-Klein-Gordon (EKG)

$$G_{ab} = -8\pi T_{ab}, \quad (59)$$

$$\square\Phi = 0. \quad (60)$$

onde G_{ab} é o tensor de Einstein e T_{ab} é o tensor de energia-momentum para o campo escalar sem massa [Eq. (52)]. Pode-se mostrar que o conjunto de equações é reduzido a [16]

$$\beta_{,r} = 2\pi r\Phi_{,r}^2, \quad (61)$$

$$V_{,r} = e^{2\beta}, \quad (62)$$

$$2(r\Phi)_{,ur} = r^{-1}(rV\Phi_{,r})_{,r}. \quad (63)$$

(Só para ter uma ideia geral das equações no caso 3D e 2D ver o apêndice D.) O problema é resolvido de forma geral fazendo uma especificação do dado inicial $\Phi(u_0, r)$ e das condições de fronteira, a saber, usando a liberdade de calibre, $\Phi \rightarrow \Phi + \text{constante}$, para fazer $\Phi(u_0, \infty) = 0$. Supondo que o dado inicial seja não singular no $r = 0$, $g(u_0, 0)$ e dados assintoticamente planos tal que no \mathcal{I}^+ : $g(u_0, \infty) = Q(u_0)$ e $\partial_r^n g(u_0, \infty) = 0$, para $n \neq 0$, onde $g = r\Phi$ e $Q(u)$ é o momento monopolar escalar. A figura 4 mostra o diagrama de Penrose para o problema EKG 1D como um modelo de teste. Assumindo que o campo escalar pode ser decomposto em potências $1/r$ perto do \mathcal{I}^+

$$\Phi(u, r) = \frac{Q(u)}{r} + \frac{c_{NP}}{r^2} + O(r^{-3}), \quad (64)$$

as equações na hipersuperfície (61) e (62) nos levam a

$$\beta(u, r) = H(u) - \frac{\pi Q^2(u)}{r^2} + O(r^{-3}), \quad (65)$$

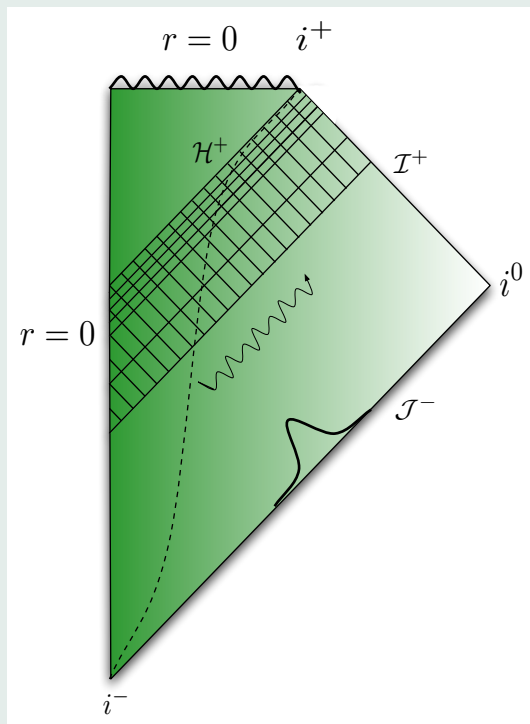


Figura 4: Diagrama de Penrose para o “modelo de teste”EKG 1D.

$$V(u, r) = e^{2H} \left(r - 2M(u) + \frac{\pi Q^2(u)}{r} \right) + O(r^{-3}), \quad (66)$$

onde $H(u)$ e $M(u)$ são funções de integração com uma interpretação física, como vamos ver. Usando a equação de onda (63), leva a $c_{NP,u} = 0$. c_{NP} é a constante de Newman-Penrose para o campo escalar [16].

É fácil demonstrar que a massa de Bondi é

$$M(u) = \frac{1}{2} e^{-2H} r^2 (V/r)_{,r} |_{r=\infty}, \quad (67)$$

para a qual existe uma equação de perda de massa (derivada da equação de campo uu) que é dada por

$$e^{-2H} \frac{dM}{du} = -4\pi N^2, \quad (68)$$

onde

$$N(u) = e^{-2H} \frac{dQ(u)}{du}, \quad (69)$$

é a função *News* escalar. Também pode-se demonstrar que

$$M = 2\pi \int_0^\infty r V e^{2\beta} \Phi_{,r}^2 dr \quad (70)$$

y

$$N = \frac{1}{2} e^{-2H} \int_0^\infty \frac{V}{r} \Phi_{,r} dr. \quad (71)$$

No $r = 0$ adotamos as condições

$$\beta(u, r) = O(r^2) ; V(u, r) = r + O(r^3), \quad (72)$$

tal que a métrica é reduzida à sua forma de Minkowski (em coordenadas polares nulas) ao longo da linha de universo central. A métrica resultante não adota uma forma assintótica de Minkowski no limite $r \rightarrow \infty$ do \mathcal{I}^+ . Como $\beta(u, \infty) = H(u)$, o tempo de Bondi u_B para um sistema de referência de no \mathcal{I}^+ está relacionado com o tempo próprio u ao longo da geodésica central através de

$$\frac{du_B}{du} = e^{2H}. \quad (73)$$

As coordenadas u_B , r , θ e ϕ constituem o sistema de referência padrão de Bondi, cujo elemento de linha é dado pela equação (58) com as seguintes substituições: $V \rightarrow V_B = e^{-2H}V$ e $\beta \rightarrow \beta_B = \beta - H$. O tempo de Bondi é mais apropriado para estudar quantidades assintóticas, como a massa de Bondi e as *News*. O tempo central é melhor para lidar com horizontes. Um horizonte se forma num tempo finito central $u = u_{\mathcal{H}}$, mas num tempo de Bondi infinito, com um desvio ao vermelho dado pela equação (73).

No caso dinâmico geral, vamos deixar livre o campo escalar no $r = 0$ mediante uma expansão

$$\Phi(u, r) = \Phi_0(u) + r\Phi_1(u) + r^2\Phi_2(u), \quad (74)$$

consistente com as condições (72).

Os primeiros algoritmos numéricos para o campo escalar sem massa e auto-gravitante sob simetria esférica foram desenvolvidos por Goldwirth e Piran [17], Choptuik [18] e Gómez e Winicour [16].

Vamos ver como resolver este problema com o código Rio [19].

4.2. Solução usando o código Rio

É notável que a estrutura algorítmica do código ficou estabelecida na seção 2.4. Só estamos precisando agora fazer uma especificação da base para as funções métricas β e V . Levando em conta o comportamento assintótico e as equações mesmas na hipersuperfície, usamos as bases

$$\chi_n(r) = \frac{1}{4} \left[\frac{(1+2n)}{(3+2n)} \psi_{n+1}(r) + \psi_n(r) \right], \quad (75)$$

$$\zeta_n(r) = 2 \left[\chi_n(r) - \frac{(5+2n)(1+n)^3}{(3+2n)(2+n)^3} \chi_{n+1}(r) \right], \quad (76)$$

para fazer a decomposição

$$\beta(u, r) = \sum_{n=0}^{p_\beta} b_n(u) \zeta_n(r), \quad (77)$$

$$V(u, r) = r \left[1 + \sum_{n=0}^{p_V} c_n(u) \chi_n(r) \right]. \quad (78)$$

Assim, só precisamos resolver do mesmo jeito que foi resolvido a decomposição do dado inicial (como um sistema linear de equações)

$$\sum_n b_n(u) \zeta'_n(r_k) = 2\pi [r(g_{,r}/r - g/r^2)^2]_k, \quad (79)$$

$$\sum_n c_n(u) [\chi_n(r_k) + r_k \chi'_n(r_k)] = e^{2\beta_k} - 1, \quad (80)$$

mesmo sendo equações não lineares. Observe que os pontos de colocação são diferentes a decomposição para o campo escalar, tipicamente $p_g \neq p_\beta = p_V$; isto depende da estabilidade do sistema. Se usarmos diferenças finitas vamos ter uma situação equivalente.

A equação de evolução para o campo escalar fica agora

$$\sum \psi'_n \dot{a}_n(u) = \frac{1}{2} [V_{,r} g_{,r} + g_{,rr} V + gV/r^2 - V g_{,r}/r - gV_{,r}/r]_k / r_k. \quad (81)$$

Os sistemas algébricos de equações só são resolvidos inicialmente, assim só precisamos resolver o sistema dinâmico com um integrador Runge-Kutta, por exemplo, atualizando os modos espectrais b_n e c_n em cada hipersuperfície $u = \text{constante}$.

4.3. Colapso gravitacional até um buraco negro

O sistema assim estabelecido, pode ser explorado até a formação de um buraco negro. Dependendo da amplitude do dado inicial (ou de qualquer outro parâmetro), se pode formar ou não um buraco negro. Isto pode levar ao comportamento crítico gravitacional [20], um dos primeiros resultados relevantes da relatividade numérica. Um horizonte de eventos pode ser calculado olhando o comportamento do desvio ao vermelho ou equivalentemente da expansão de geodésicas nulas

$$\Theta = \frac{V}{r} e^{-2\beta}. \quad (82)$$

O código `mcp_uerj31.ipynb` dá conta disso. As versões em Python e fortran 90 também estão disponibilizadas.

5. O futuro do minicurso

O passado deste minicurso foram minicursos na Venezuela (Universidad Central de Venezuela), na Colômbia (Universidad Nacional (Bogotá) e Universidad del Valle (Cali)). Também foi um dos colóquios do Programa da Pós-graduação do Instituto de Física da UERJ, e já foi este minicurso. Tomara que o futuro seja um curso no segundo período do ano 2020. Dependerá do interesse que poda-se manter na Relatividade Numérica prática. Para ajudar a resolver problemas usando as formulações de BSSN e de CY, usando o aprendizado com os métodos característicos, seja usando diferenças finitas, seja usando métodos espectrais. Acreditamos que ainda há muita Física para brincar nessa área de jogo.

Agradecimentos

Fico grato pela ajuda prestada por Rafael Aranha e José Crespo na revisão destas notas. Além do meu Português, José fez correções agudas e tentou tirar anglicismos dos termos técnicos e científicos que de propósito ainda uso no meu Espanhol. Qualquer besteira que possa se encontrar aqui é de minha total responsabilidade por não fazer direito o que eles me recomendaram. Também agradeço a Braudel Maqueira pelo suporte remoto e a configuração dos ambientes virtuais multiplataforma, particularmente por sua ótima ajuda com o Docker *container* e o Vagrant *environment*. Também minha gratidão para o Henrique de Oliveira, por me facilitar máquina, tempo, protótipos do código de Rio. E sobre tudo por me oferecer amizade e hospitalidade. Para assim ter a oportunidade de organizar o minicurso e estas notas de aula. Meu agradecimento a Beltrán Rodríguez-Mueller e a Carlos Peralta e, mais uma vez, a Braudel Maqueira, pelas dicas e sugestões geradas em nosso habitual *brainstorming* computacional, há mais de 25 anos de parceria e amizade. Finalmente agradeço a Mariana Alcoforado e Ricardo Rodrigues Gomes por estar bem perto destas notas.

Apêndices

A. Sobre o ambiente computacional

- O ideal seria que cada participante possa configurar uma portátil com o ambiente computacional;
- O sistema operacional recomendado é Ubuntu 18.04 LTS com o Docker e o Git instalados;
- Para quê o Docker? Uma imagem pública do *container* com o ambiente computacional pré-instalado que se precisa para o minicurso, está em dockerhub: wbarreto/mcp_uerj:0.1. Uma vez instalado o docker fazer:

```
> docker run -ti --name mcp --rm -p 0.0.0.0:8888:8888 wbarreto/mcp_uerj:0.1
```

 (entra no ambiente de jupyter notebook seguindo as instruções)

```
> docker exec -ti mcp bash
```

 (entra no ambiente de uma máquina virtual para compilar com o gfortran, rodar com python; não é um ambiente gráfico).
Neste ambiente, o participante poderá usar Jupyter notebooks, o qual permite usar Python e as bibliotecas que se precisam (Numpy, Scipy, Matplotlib). Ao mesmo tempo, o participante poderia fazer compilações com gfortran dos códigos disponibilizados assim como códigos escritos no Python para executar a partir da linha de comandos.
- Para quê o Git? As notas do minicurso e os códigos podem ser clonados e atualizados do Gitlab.

```
> git clone https://www.gitlab.com/wobarreto/mcp_uerj_2020  
> git pull
```

- Outras opções:

1. Qualquer outro sistema operacional (Linux, Windows, OsX) com o docker e o git instalados;
2. Um flash drive (pendrive) bootável com o Ubuntu 18.04 e o docker e o git instalados;
3. Sala de máquinas (se for possível) disponibilizada com o docker e o git prontos em cada computador.

Se ao final o participante não pode configurar o ambiente computacional segundo o recomendado, pode instalar o Jupyter Notebooks via Anaconda em qualquer sistema operacional, assim como Python 3.7.3 e bibliotecas, assim como gfortran 7.4.0. Também existe uma alternativa para instalar o Docker via Vagrant e Virtual Box. Nesse caso, o professor também fornecerá o *script* de instalação para o Vagrant.

B. Formalismo $\tilde{\theta}$ (*eth*)

O elemento de linha para uma esfera unitária, em coordenadas esféricas se escreve

$$d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (\text{B.1})$$

Se definimos as coordenadas estereográficas

$$\zeta = \tan(\theta/2) e^{i\phi} = q + ip, \quad (\text{B.2})$$

o elemento anterior se pode escrever como

$$d\sigma^2 = \frac{4}{P^2} d\zeta d\bar{\zeta} = \frac{4}{P^2} (dq^2 + dp^2), \quad (\text{B.3})$$

onde a barra indica conjugação complexa e

$$P^2 = (1 + \zeta\bar{\zeta}) = (1 + q^2 + p^2). \quad (\text{B.4})$$

É claro que estamos realizando uma representação regular, tirando o polo sul ($\theta = \pi$), e por meio da transformação $\zeta \rightarrow 1/\zeta$ tiramos o polo norte. É claro também que existe uma zona de solapamento entre ambos mapas coordenados.

A métrica da esfera unitária pode se representar em termos da díade [21]

$$m_{AB} = m_{(A}\bar{m}_{B)}, \quad (\text{B.5})$$

onde $m^A m_A = 0$ e $m_A \bar{m}^A = 2$. Explicitamente se pode escrever

$$m = P\partial_{\bar{\zeta}} = \frac{P}{2} (\partial_q + i\partial_p). \quad (\text{B.6})$$

Na região de solapamento entre o hemisfério Norte e Sul, pode se demonstrar que

$$m_N^A = e^{i\alpha} m_S^A = -\frac{\bar{\zeta}_S}{\zeta_S} m_S^A. \quad (\text{B.7})$$

A transformação unitária da díade é de peso espinorial 1.

A díade permite escrever qualquer campo vetorial sobre a esfera em termos de um campo escalar complexo

$$V = m^A V_A. \quad (\text{B.8})$$

Na região de solapamento

$$V_N = V_S e^{i\alpha}, \quad (\text{B.9})$$

tem peso espinorial 1. Um campo tensorial sobre a esfera, W_{AB} , pode ser representado por meio de campos escalares. Decompomos W_{AB} , em sua parte simétrica de traça nula, sua traça e sua parte anti-simétrica.

$$W_{AB} = T_{AB} + \frac{W}{2} m_{AB} + i \frac{U}{2} m_{[A} \bar{m}_{B]}, \quad (\text{B.10})$$

onde

$$W = m^{AB} W_{AB}, \quad (\text{B.11})$$

$$U = i m^{[C} \bar{m}^{D]} W_{CD}, \quad (\text{B.12})$$

$$T_{AB} = W_{AB} - \frac{W_{22} + W_{33}}{2} \delta_{AB}. \quad (\text{B.13})$$

W e U não dependem da escolha da base; são campos de peso de spin 0.

Com T_{AB} construímos um campo escalar de peso espinorial 2.

$$T = m^A m^B T_{AB}. \quad (\text{B.14})$$

É claro que

$$T_N = e^{2i\alpha} T_S. \quad (\text{B.15})$$

Assim, um tensor arbitrário de tipo $(0, 2)$ pode se decompor em dois campos reais de peso espinorial 0 e outro de peso espinorial 2. Estes campos escalares constituem a representação irredutível do grupo unitário das transformações da base do objeto tensorial W_{AB} .

Agora, para um campo escalar de peso espinorial 0 temos

$$\nabla_A \psi = \partial_A \Psi. \quad (\text{B.16})$$

Construímos o campo escalar de peso espinorial 1 por meio de

$$\eth \Psi = m^A \partial_A \Psi. \quad (\text{B.17})$$

Se observa que \eth acrescenta o fator de spin na unidade.

Para um campo vetorial, a derivada covariante referida à esfera unitária é

$$\nabla_A V_B = \partial_A V_B - \Gamma_{AB}^C V_C \quad (\text{B.18})$$

onde

$$\Gamma_{AB}^C = \frac{1}{2} m^{CD} (\partial_A m_{DB} + \partial_B m_{AD} - \partial_D m_{AB}). \quad (\text{B.19})$$

As combinações

$$\eth V = m^A m^B \nabla_A V_B \quad (\text{B.20})$$

$$\eth V = \bar{m}^A m^B \nabla_A V_B \quad (\text{B.21})$$

definem as derivadas \eth e $\bar{\eth}$ atuando sobre um campo escalar de peso espinorial 1.

Pode se demonstrar que

$$\eth V = m^A \partial_A V + \Gamma V \quad (\text{B.22})$$

$$\bar{\eth} V = \bar{m}^A \partial_A V - \bar{\Gamma} V \quad (\text{B.23})$$

onde $\Gamma = -m^A m^B \nabla_A m_B / 2 = \zeta$.

Uma ilustração que mostra as vantagens do formalismo *eth* para uma implementação numérica ótima é a seguinte. Considerarmos um campo escalar Ψ de peso espinorial 0. O Laplaciano angular, chamado de Legendriano,

$$D^2 \Psi = \cot \theta \partial_\theta \Psi + \partial_{\theta\theta} \Psi + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_{\phi\phi} \Psi = -L^2 \Psi$$

se pode escrever como

$$D^2 \Psi = P^2 \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} \Psi = \eth \bar{\eth} \Psi = \frac{P^2}{4} (\partial_{qq} + \partial_{pp}) \Psi,$$

quer dizer, o Legendriano se faz conforme ao operador cartesiano bidimensional. Além disso, o operador é regular no novo sistema de coordenadas.

Para a diferenciação dos campos tensoriais com dois índices é suficiente considerar o campo escalar com peso espinorial 2 representando por

$$T = m^A m^B T_{AB}. \quad (\text{B.24})$$

Assim,

$$\eth T = m^A m^B m^C \nabla_A T_{BC} \quad (\text{B.25})$$

$$\bar{\eth} T = \bar{m}^A m^B m^C \nabla_A T_{AB}. \quad (\text{B.26})$$

Pode-se demonstrar que

$$\eth T = m^A \partial_A T + 2\Gamma T \quad (\text{B.27})$$

$$\bar{\eth} T = \bar{m}^A \partial_A T - 2\bar{\Gamma} T \quad (\text{B.28})$$

e, em geral, para um campo tensorial com um número arbitrário de índices

$$\eth W = m^A \partial_A W + s\Gamma W \quad (\text{B.29})$$

$$\bar{\eth} W = \bar{m}^A \partial_A W - s\bar{\Gamma} W \quad (\text{B.30})$$

onde s é o fator de spin de W

É fácil mesmo ver que

$$\partial_q W = \frac{1}{P} (\bar{\eth} W + \eth W - 2ipsW) \quad (\text{B.31})$$

$$\partial_p W = \frac{i}{P} (\bar{\eth} W - \eth W + 2qsW) \quad (\text{B.32})$$

Seguem algumas identidades úteis para um campo escalar de peso espinorial s :

$$\bar{\partial}^2 T = \frac{P^2}{4} (\partial_{qq} - \partial_{pp} + 2i\partial_{qp}) T + 2(1+s)\zeta\bar{\partial}T - s(1+s)\zeta^2 T \quad (\text{B.33})$$

$$\bar{\partial}^2 T = \frac{P^2}{4} (\partial_{qq} - \partial_{pp} - 2i\partial_{qp}) T + 2(1-s)\bar{\zeta}\bar{\partial}T + s(1-s)\bar{\zeta}^2 T \quad (\text{B.34})$$

$$\bar{\partial}\bar{\partial}T = \frac{P^2}{4} (\partial_{qq} + \partial_{pp}) T + s(\zeta\bar{\partial} - \bar{\zeta}\bar{\partial})T + s(s\zeta\bar{\zeta} - 1)T \quad (\text{B.35})$$

$$(\bar{\partial}\bar{\partial} - \bar{\partial}\bar{\partial})T = 2sT \quad (\text{B.36})$$

Agora podemos escrever qualquer combinação de derivadas de segunda ordem com relação a q e p em termos das derivadas *eth*

$$\begin{aligned} \partial_{qq}T &= \frac{1}{P^2} \{ \bar{\partial}^2 + \bar{\partial}^2 + 2\bar{\partial}\bar{\partial} - 2[(1+s)\zeta\bar{\partial} + (1-s)\bar{\zeta}\bar{\partial} + s(\zeta\bar{\partial} - \bar{\zeta}\bar{\partial})] \\ &- s[(1-s)\bar{\zeta}^2 - (1+s)\zeta^2 + 2(s\zeta\bar{\zeta} - 1)] \} T \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

$$\begin{aligned} \partial_{pp}T &= \frac{1}{P^2} \{ 2\bar{\partial}\bar{\partial} - \bar{\partial}^2 - \bar{\partial}^2 - 2[s(\zeta\bar{\partial} - \bar{\zeta}\bar{\partial}) - [(1+s)\zeta\bar{\partial} + (1-s)\bar{\zeta}\bar{\partial}] \\ &- s[2(s\zeta\bar{\zeta} - 1) + (1+s)\zeta^2 - (1-s)\bar{\zeta}^2] \} T \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

$$\begin{aligned}\partial_{pq}T = \partial_{qp}T &= \frac{i}{P^2} \{ \bar{\eth}^2 - \eth^2 + 2[(1+s)\zeta\eth - (1-s)\bar{\zeta}\bar{\eth}] \\ &- s[(1+s)\zeta^2 + (1-s)\bar{\zeta}^2] \} T\end{aligned}\quad (\text{B.39})$$

A curvatura escalar de uma 2-esfera topológica se pode escrever em termos da métrica arbitrária h_{AB} , que pode ser escrita como:

$$K = \frac{1}{2}h_{AB}m^A\bar{m}^B \quad (\text{B.40})$$

$$J = \frac{1}{2}h_{AB}m^Am^B \quad (\text{B.41})$$

de onde

$$h_{22} = \frac{2}{P^2}(2K + J + \bar{J}) \quad (\text{B.42})$$

$$h_{23} = h_{32} = \frac{2i}{P^2}(\bar{J} - J) \quad (\text{B.43})$$

$$h_{33} = \frac{2}{P^2}(2K - J - \bar{J}). \quad (\text{B.44})$$

Se pode demonstrar

$$\det h_{AB} = H \det m_{AB} \quad (\text{B.45})$$

onde $H = K^2 - J\bar{J}$. Também que

$$h^{AB}m_A\bar{m}_B = \frac{2K}{H} \quad (\text{B.46})$$

$$h^{AB}m_Am_B = -\frac{2J}{H}. \quad (\text{B.47})$$

É interessante demonstrar também que a curvatura escalar pode ser escrita como

$$\begin{aligned} R = & \frac{1}{2H} \left\{ 2K - \bar{\partial}\bar{\partial}K + \bar{\partial}^2J + \frac{1}{2H}[2\bar{\partial}K(K\bar{\partial}K - K\bar{\partial}\bar{J} - J\bar{\partial}\bar{J}) \right. \\ & \left. + \bar{\partial}J(\bar{J}\bar{\partial}\bar{J} + \frac{K}{2}\bar{\partial}\bar{J}) + \bar{\partial}\bar{J}(J\bar{\partial}\bar{J} - \frac{K}{2}\bar{\partial}J)] \right\} + c.c. \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

Se $H = 1$, J determina a métrica e

$$R = 2K - \bar{\partial}\bar{\partial}K + \frac{1}{2}(\bar{\partial}^2J + \bar{\partial}^2\bar{J}) + \frac{1}{4K}(\bar{\partial}J\bar{\partial}\bar{J} - \bar{\partial}\bar{J}\bar{\partial}J). \quad (\text{B.49})$$

Fazendo uma especificação de uma estrutura angular arbitrária, através de J , pode-se verificar numericamente o Teorema de Gauss-Bonnet [21]

$$\oint R dS = 8\pi.$$

Por exemplo, se fizermos a escolha

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

podemos escrevê-lo ele em coordenadas estereográficas para depois calcular sua segunda derivada *eth*. Isto leva a

$$J = c\bar{\partial}^2 Y_{20} = c \frac{\zeta^2}{P^2} \quad (\text{B.50})$$

onde c é um número complexo. Agora, só está faltando uma expressão analítica da curvatura escalar, que resulta

$$R = 2K + \frac{1}{P^2}(c + \bar{c})(1 - 4B - B^2) - \frac{c\bar{c}B}{K^3 P^4}(3 - 8B + 3B^2) - \frac{2(c\bar{c})^2 B^3}{K^3 P^8}(1 - 3B + B^2) \quad (\text{B.51})$$

onde $B = \zeta\bar{\zeta}$. A discretização de qualquer derivada *eth* é feita de forma padrão.

O formalismo *eth* foi melhorado para uma implementação numérica mais eficiente. O esquema usa seis mapas gnômicos e não dois estereográficos conformais [22].

C. Métrica de Bondi-Sachs 3D e sua interpretação 2+1: casos particulares 2D e 1D.

A métrica baseada na família de hipersuperfícies nulas saintes (entrantes) de Bondi-Sachs se escreve

$$ds^2 = \left(e^{2\beta} \frac{V}{r} - r^2 h_{AB} U^A U^B \right) dw^2 \pm 2e^{2\beta} dw dr \pm 2r^2 h_{AB} U^B dw dx^A - r^2 h_{AB} dx^A dx^B, \quad (\text{C.1})$$

onde V , β , U^A e h_{AB} são funções de (w, r, x^A) , w é a coordenada tipo tempo retardado (avanzado) para identificar cada hipersuperfície; o sinal positivo (negativo) corresponde ao tempo tipo retardado u (avanzado v); r a coordenada radial nula (não afim) ou também nomeada coordenada de área da superfície; e x^A denota os raios nulos ($A = 2, 3$). β é a expansão dos raios nulos e V é um potencial tipo Newtoniano.

Para $r = \text{constante}$, temos a métrica

$$ds^2 = e^{2\beta} \frac{V}{r} dw^2 - h_{AB} r^2 (dx^A \mp U^A dw)(dx^B \mp U^B dw) \quad (\text{C.2})$$

que adota a forma da decomposição bem conhecida de Arnowit-Desser-Misner (ADM), mas 2+1, onde $e^{2\beta} V/r$ seria o lapso, h_{AB} a 2-métrica espacial e U^A o vetor desvio.

Para simetria axial e de reflexão a métrica (C.1) em coordenadas esféricas admite uma forma simplificada com

$$U^A = (U, 0), \quad (\text{C.3})$$

$$h_{AB} = \begin{pmatrix} e^{2\gamma} & 0 \\ 0 & e^{-2\gamma} \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{C.4})$$

com β , V , U e γ dependentes de w , r , e θ).

Para simetria esférica $U = \gamma = 0$, e β e V dependentes de w e r .

D. Sistemas de Einstein-Klein-Gordon 3D e 2D

Afim de ter uma ideia da estrutura das equações, vamos escrevê-las aqui sem detalhes para o sistema EKG, no caso mais geral 3D usando o formalismo *eth* na formulação característica sainte e para um campo escalar complexo. No caso axial e de reflexão usando a regularização $y = -\cos\theta$ na formulação característica entrante. Para os detalhes ver as referências [22], [12].

Para o sistema EKG 3D temos as equações na hipersuperfície:

$$\nu_{,r} = \bar{\partial} J_{,r} , \quad (D.1)$$

$$k_{,r} = \bar{\partial} K_{,r} , \quad (D.2)$$

$$\beta_{,r} = \frac{r}{8} (J_{,r} \bar{J}_{,r} - K_{,r}^2) + 2\pi r (\phi_{,r})^2 , \quad (D.3)$$

$$B_{,r} = \bar{\partial} \beta_{,r} , \quad (D.4)$$

$$\begin{aligned} (r^2 Q)_{,r} = & r^2 \left[-K(k_{,r} + \nu_{,r}) + \bar{\nu} J_{,r} + \bar{J} \bar{\partial} J_{,r} + \nu K_{,r} \right. \\ & \left. + J \bar{k}_{,r} - J_{,r} \bar{k} \right] \\ & + \frac{r^2}{2K^2} \left[\bar{\nu} (J_{,r} - J^2 \bar{J}_{,r}) + \bar{\partial} J (\bar{J}_{,r} - \bar{J}^2 J_{,r}) \right] \\ & + 2r^2 B_{,r} - 4rB + 16\pi r \phi_{,r} \psi , \end{aligned} \quad (D.5)$$

$$r^2 U_{,r} = e^{2\beta} (KQ - J\bar{Q}) , \quad (D.6)$$

$$\begin{aligned} (r^2 \tilde{W})_{,r} = & \Re \left\{ e^{2\beta} \left(\frac{\mathcal{R}}{2} - K (\bar{\partial} B + B\bar{B}) + \bar{J} (\bar{\partial} B + B^2) \right. \right. \\ & + (\nu - k)\bar{B}) - 1 + 2r\bar{\partial} U + \frac{r^2}{2} \bar{\partial} U_{,r} \\ & \left. \left. - e^{-2\beta} \frac{r^4}{4} \bar{U}_{,r} (KU_{,r} + J\bar{U}_{,r}) \right\} \right. \\ & - 2\pi \frac{e^{2\beta}}{r^2} [2K\bar{\psi}\psi - J\bar{\psi}^2 - \bar{J}\psi^2] , \end{aligned} \quad (D.7)$$

$$\psi_{,r} = \bar{\partial} \chi \quad \bullet \textit{First} \quad \bullet \textit{Prev} \quad \bullet \textit{Next} \quad \bullet \textit{Last} \quad \bullet \textit{Go Back} \quad \bullet \textit{Full Screen} \quad \bullet \textit{Close} \quad (D.8)^{\dagger}$$

e as equações de evolução:

$$\begin{aligned}
2\left(rJ\right)_{,ur}-\left(r^{-1}V\left(rJ\right)_{,r}\right)_{,r} &= -K\left(r\eth U_{,r}+2\eth U\right) \\
&+ \frac{2}{r}e^{2\beta}\left(\eth B+B^2\right)-\left(r\tilde{W}_{,r}+\tilde{W}\right)J+J_H+JP_u \\
&+ \frac{8\pi}{r^3}e^{2\beta}\psi^2,
\end{aligned} \tag{D.9}$$

$$2\chi_{,ur}-\left(\frac{V}{r}\chi_{,r}\right)_{,r}=-\left(\frac{W}{r}\right)_{,r}\frac{\chi}{r}+N_\phi. \tag{D.10}$$

Onde

$$\begin{aligned}
N_\phi = & \frac{e^{2\beta}}{r} \left[-\frac{1}{2r} (\bar{J}\bar{\partial}\psi + J\bar{\partial}\bar{\psi}) + \frac{K}{r}\bar{\partial}\psi \right. \\
& + \left(K\bar{B} - \bar{J}B - \frac{1}{2}(K\bar{Q} - \bar{J}Q) - \frac{\bar{\nu}}{2} \right. \\
& + \left. \left. + \frac{1}{4K}(\bar{J}\nu + J\bar{\mu}) \right) \frac{\psi}{r} \right. \\
& + \left(KB - J\bar{B} - \frac{1}{2}(KQ - J\bar{Q}) - \frac{\nu}{2} \right. \\
& + \left. \left. + \frac{1}{4K}(J\bar{\nu} + \bar{J}\mu) \right) \frac{\bar{\psi}}{r} \right] \\
& - \frac{1}{r}(U\bar{\psi} + \bar{U}\psi) - \frac{r}{2}\phi_{,r}(\bar{\partial}U + \partial\bar{U}) \\
& - [U(\bar{\psi}_{,r} - \bar{\psi}) + \bar{U}(\psi_{,r} - \psi)].
\end{aligned} \tag{D.11}$$

$$Q = r^2 e^{-2\beta} (KU_{,r} + J\bar{U}_{,r}), \tag{D.12}$$

e as definições auxiliares $J = h_{AB}m^A m^B/2$, $K = h_{AB}m^A \bar{m}^B/2$, $K^2 = 1 + J\bar{J}$, $U = U^A m_A$, $Q = Q_A m^A$, $\nu = \bar{\partial}J$, $k = \bar{\partial}K$, $B = \bar{\partial}\beta$, $\psi = \bar{\partial}\chi$, $\chi = r\Phi$.

Para o sistema EKG 2D temos as equações na hipersuperfície:

$$\beta_{,r} = \frac{r}{2} \left(\hat{\gamma}_{,r}^2 (1 - y^2)^2 + \psi_{,r}^2 \right), \quad (\text{D.13})$$

$$\begin{aligned} (r^2 \hat{\mathcal{Q}})_{,r} &= 2r^2 \left\{ 2(1 - y^2) \hat{\gamma}_{,r} [(1 - y^2) \hat{\gamma}_{,y} - 2y \hat{\gamma}] \right. \\ &\quad + 2\psi_{,r} \psi_{,y} + r^2 (\beta/r^2)_{,ry} + 4y \hat{\gamma}_{,r} \\ &\quad \left. - (1 - y^2) \hat{\gamma}_{,ry} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

$$\hat{U}_{,r} = e^{2[\beta - \hat{\gamma}(1 - y^2)]} \frac{\hat{\mathcal{Q}}}{r^2} \quad (\text{D.15})$$

$$\begin{aligned} V_{,r} &= e^{2[\beta - \hat{\gamma}(1 - y^2)]} \left\{ 1 + (1 - y^2)^2 \hat{\gamma}_{,yy} - 2(1 - 5y^2) \hat{\gamma} \right. \\ &\quad - 8y(1 - y^2) \hat{\gamma}_{,y} + 2y \beta_{,y} - (1 - y^2)(\beta_{,yy} + \beta_{,y}^2) \\ &\quad - (1 - y^2) \psi_{,y}^2 - 2(1 - y^2) [\hat{\gamma}_{,y}(1 - y^2) \\ &\quad \left. - 2y \hat{\gamma}]^2 + 2(1 - y^2) (\hat{\gamma}_{,y}(1 - y^2) - 2y \hat{\gamma}) \beta_{,y} \right\} \\ &\quad + \frac{r}{2} \left[(1 - y^2) (r \hat{U}_{,ry} + 4 \hat{U}_{,y}) - 2yr \hat{U}_{,r} - 8y \hat{U} \right] \\ &\quad - \frac{1}{4} e^{2(\hat{\gamma}(1 - y^2) - \beta)} r^4 \hat{U}_{,r}^2 (1 - y^2) \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

E as equações de evolução

$$\begin{aligned}
-e^{2\beta}\square_+^{(2)}(r\hat{\gamma}) = & - \left(\frac{V}{r}\right)_{,r} \hat{\gamma} + \frac{1}{4}r^3 e^{2(\hat{\gamma}(1-y^2)-\beta)} \hat{U}_{,r}^2 \\
& + \frac{1}{r} e^{2(\beta-\hat{\gamma}(1-y^2))} (\psi_{,y}^2 + \beta_{,yy} + \beta_{,y}^2) \\
& - r \left[(\hat{\gamma}_{,ry} \hat{U} + \hat{\gamma}_{,r} \hat{U}_{,y}) (1-y^2) \right. \\
& \left. - 4y \hat{\gamma}_{,r} \hat{U} \right] - (\hat{\gamma}_{,y} (1-y^2) - 2y \hat{\gamma}) 2\hat{U} \\
& - \hat{U}_{,y} - \frac{r}{2} \left[(\hat{\gamma}_{,yr} (1-y^2) - 2y \hat{\gamma}_{,r}) 2\hat{U} \right. \\
& + (\hat{\gamma}_{,y} (1-y^2) - 2y \hat{\gamma}) 2\hat{U}_{,r} \\
& \left. + \hat{U}_{,yr} \right], \tag{D.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-e^{2\beta}\square_+^{(2)}(r\psi) = & - \left(\frac{V}{r}\right)_{,r} \psi \\
& - 2(1-y^2)\psi_{,y}\hat{U} \\
& - r(1-y^2)[\psi_{,ry}\hat{U} + \psi_{,y}\hat{U}_{,r}] \\
& + \frac{1}{r}\left\{(1-y^2)\{2[\beta_{,y} - \hat{\gamma}_{,y}(1-y^2)]\right. \\
& + 2y\hat{\gamma}]\psi_{,y}e^{2[\beta-\hat{\gamma}(1-y^2)]} \\
& + e^{2[\beta-\hat{\gamma}(1-y^2)]}\psi_{,yy} \\
& - r^2(\hat{U}_{,y}\psi_{,r} + \hat{U}\psi_{,ry})\} \\
& - 2y(\psi_{,y}e^{2[\beta-\hat{\gamma}(1-y^2)]} \\
& \left. - r^2\hat{U}\psi_{,r})\right\}, \tag{D.18}
\end{aligned}$$

onde $\hat{\gamma} = \gamma/\sin^2\theta$, $\hat{U} = U/\sin\theta$, $\hat{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q}/\sin\theta$, $\psi = 2\sqrt{\pi}\Phi$ e $\square_+^{(2)}f = e^{-2\beta}[2f_{,vr} + (Vf_{,r}/r)_{,r}]$, sendo f uma função arbitrária que inicialmente representa uma onda sainte.

Referências

- [1] K. Thorne, Rev. Mod. Phys. **90**, 040503 (2018).
- [2] J. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998).
- [3] O. Reula, Living Rev. Relativ. **1**, 3 (1998).
- [4] M. Shibata e T. Nakamura, Phys. Rev. D **52** 5428 (1995); T. Baumgarte e S. Shapiro, Phys. Rev. D **59** 024007 (1998).
- [5] P. Chesler e L. Yaffe, JHEP 07 (2014) 086.
- [6] H. Bondi, M. G. J. van der Burg, e A. W. K. Metzner Proc. R. Soc. A **269**, 21 (1962); R. Sachs, Proc. R. Soc. Ser. A **270**, 103 (1962).
- [7] R. Wald, “General Relativity”, Chicago University Press (1984).
- [8] R. Gómez, R. Isaacson, e J. Winicour, Journal of Comp. Phys., **98**, 11 (1992).
- [9] H. de Oliveira e E. Rodrigues, Class. Quantum Grav. **28**, 235011 (2011).
- [10] J. Boyd, “Chebyshev and Fourier Spectral Methods” (Dover Publications, New York, 2001).
- [11] J. Winicour, Living Rev. Relativity, **15**, 2 (2012).

- [12] W. Barreto, Phys. Rev. D **89**, 084071 (2014)
- [13] H. Nollert, Class. Quantum Grav. **16**, R159 (1999).
- [14] J. Winicour e L. Tamburino, Phys. Rev. Lett. **15**, 601 (1965).
- [15] H. Nollert e B. Schmidt, Phys. Rev. D **45**, 2617 (1992); R. Konoplya, Journal of Physical Studiesi **8**, 93 (2004).
- [16] R. Gómez e J. Winicour, J. Math Phys. **33**, 1445 (1992).
- [17] D. Goldwirth y T. Piran, Phys. Rev. D **36**, 3575 (1987).
- [18] M. Choptuik, en *Frontiers in Numerical Relativity*, Cambridge U.P. (1989)
- [19] W. Barreto, P. C. M. Clemente, H. P. de Oliveira, B. Rodriguez-Mueller, Gen. Rel. Grav. **50**, 71 (2018).
- [20] M. Choptuik, Phys. Rev. Lett. **70**, 9 (1993).
- [21] R. Gómez, L. Lehner, P. Papadopoulos e J. Winicour, Class. Quantum Grav. **14**, 977 (1997); E. Newman e R. Penrose, J. Math. Phys. **7**, 863 (1966).
- [22] R. Gómez, W. Barreto e S. Frittelli, Phys. Rev. D **76**, 124029 (2007).