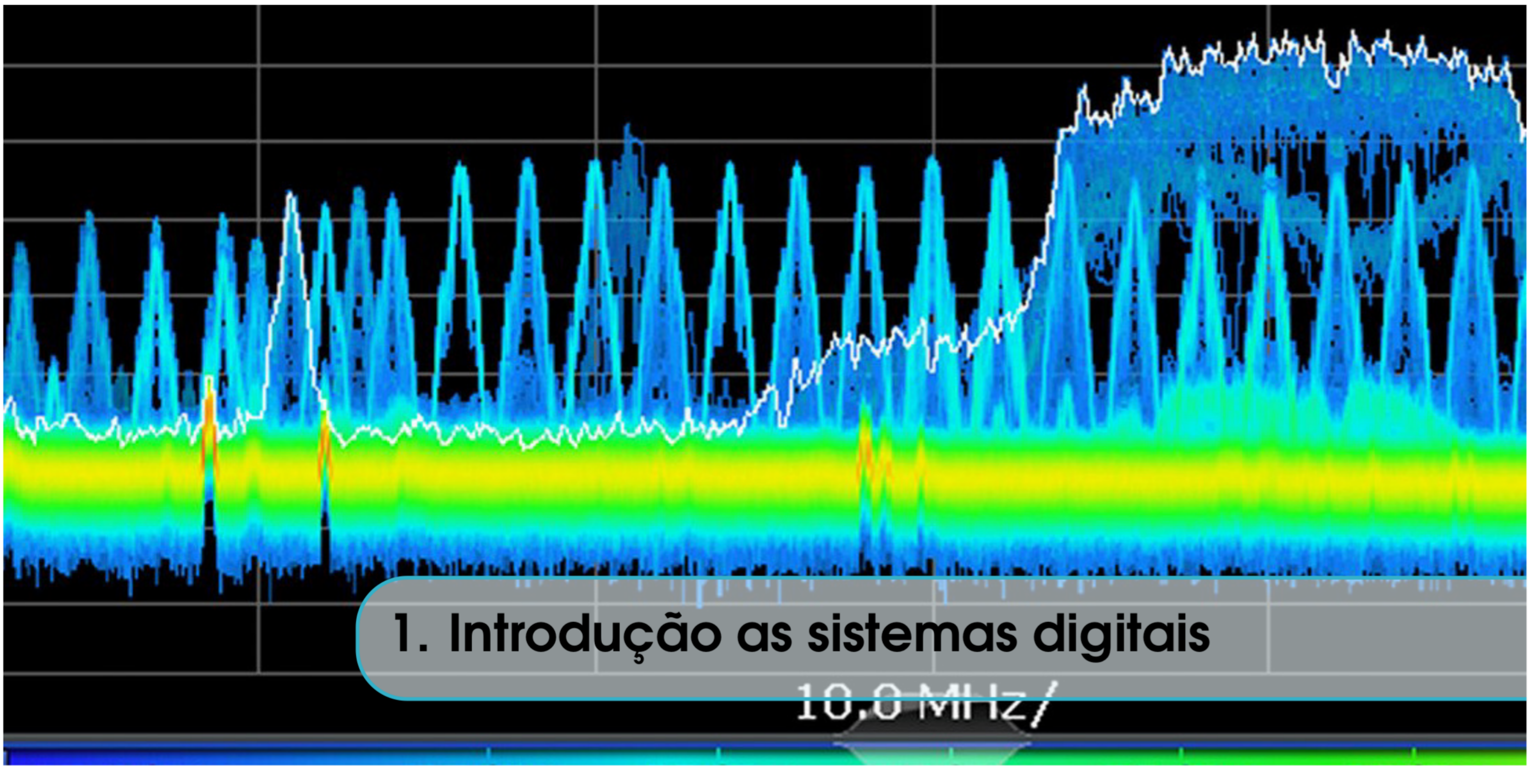


1. Introdução as sistemas digitais

Neste capítulo será feita uma análise introdutória sobre os sinais e os sistemas de interesse deste documento. Além disso, são analisados os sinais e sistemas analógicos e digitais e algumas de suas propriedades e características. Também é apresentado os principais tipos de sistemas digitais de interesse deste documento.

1.1 Sinais

A forma mais simples de se representar um sinal é aquela que relaciona uma variável dependente a uma variável independente. Ambas as variáveis podem ter natureza contínua ou discreta. Observando essas variáveis em um determinado intervalo de valores é possível definir:

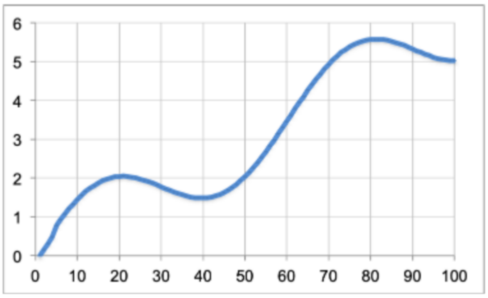
- Variável continua - apresenta uma quantidade infinita de valores possíveis no intervalo considerado.
- Variável discreta - apresenta uma quantidade finita de valores possíveis no intervalo considerado.

O sinais de variável dependente contínua são chamados de sinais analógico enquanto que os sinais de dependente discreta são chamados de sinais digitais.

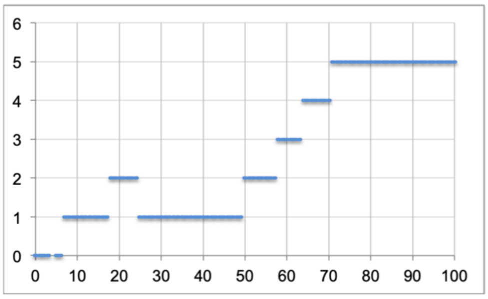
É comum se analisar, em sistemas eletrônicos, sinais cuja variável dependente são níveis de tensão ou de corrente elétrica e como variável independente o tempo.

É de interesse deste documento os sinais que relacionam tensão elétrica $v(t)$ (variável dependente) com tempo t (variável independente).

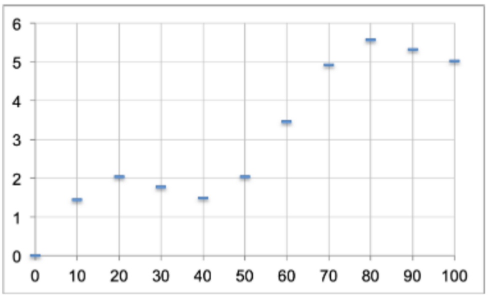
Essas grandezas, tensão elétrica e tempo são naturalmente continuas na natureza. No entanto, para efeito de análise de circuitos e sistemas eletrônicos essas variáveis podem ser manipuladas tanto como contínuas quanto como discretas. Considerando todas as combinações possíveis discreto/contínuo para essas variáveis é possível se montar quatro tipos de sinais distintos, como mostrado na Fig. 1.1. A Fig. 1.1 mostra exemplos de sinais de tensão elétrica (eixo y) em função do tempo (eixo x). A Fig. 1.1a mostra valores contínuos de tensão elétrica e tempo, a Fig. 1.1b mostra valores discretos de tensão elétrica (apenas valores inteiros de tesão são permitidos) e valores contínuos de tempo, a Fig. 1.1c mostra valores contínuos para tensão elétrica e discretos para o tempo (apenas valores temporais múltiplos de 10 e são permitidos no sinal) e a Fig. 1.1d mostra valores discretos tanto para a tensão quanto para o tempo.



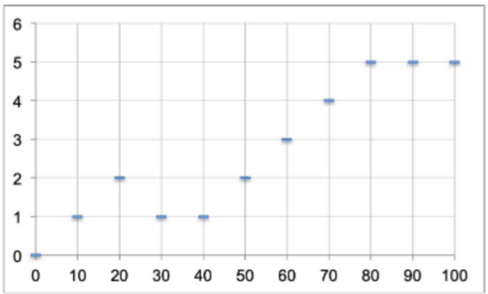
(a) Tempo continuo e tensão contínua.



(b) Tempo continuo e tensão discreta.



(c) Tempo discreto e tensão contínua.



(d) Tempo discreto e tensão discreta.

Figura 1.1: Exemplos de sinais contínuos e discretos nas dimensões de variável dependente (eixo y) e independente (eixo x). Sinais de natureza contínua (a) e (c) e discreta (b) e (d) no eixo y e sinais de natureza contínua (a) e (b) e discreta (c) e (d) eixo x.

1.2 Tipos de sistemas

No escopo deste trabalho, é possível definir dois tipos principais de sistemas: os sistemas analógicos e os sistemas digitais.

- Sistemas analógicos - São os sistemas que trabalham com sinais de variável dependente contínua, ou seja, trabalham com um número infinito de valores (ex: valores contínuos de tensão elétrica)
- Sistemas digitais - São os sistemas que trabalham com sinais de variável dependente discreta, ou seja, trabalham com um número finito de valores discretos (ex: valores discretos tensão elétrica)

Na Fig. 1.2 estão mostrados alguns equipamentos usados no dia a dia que são exemplos de sistemas analógicos: um termômetro de coluna liquida, que indica a temperatura ambiente a partir da expansão/compressão contínua do liquido armazenado em seu interior (Fig. 1.2a) e um tocador de disco de vinil, que por meio de uma agulha, transforma as ranhuras continuas gravadas no disco de vinil em sinal sonoro (Fig. 1.2b).

Já na Fig. 1.3 estão mostrados alguns equipamentos digitais usados no dia a dia. Um *tablet* (Fig. 1.3a) e um computador (Fig. 1.3b) que usam o processamento digital/binário de informações

(a) Termômetro de coluna liquida. (b) Tocador de disco de vinil.

Figura 1.2: Exemplos de sistemas analógicos usados no cotidiano.

para proporcionar ao usuário experiências com exibição de filmes, leitura de livros, navegação na internet, elaboração de documentos etc.

Neste documento são estudados os sistemas digitais. São de interesse os sistemas que trabalham com um conjunto discreto de valores na variável dependente mas que podem apresentar natureza contínua na dimensão temporal.

1.3 Características dos sistemas digitais

O escopo este documento é o estudo dos circuitos eletrônicos capazes de implementar sistemas digitais. Os termos circuitos digitais e sistemas digitais são usados, a partir daqui, para designar os sistemas que são objeto de estudo do documento. Nas próximas subseções são elencadas algumas características dos sistemas digitais eletrônicos.

1.3.1 Representação da informação

É possível representar informações de diferentes naturezas usando alguma forma de representação digital e reuní-las facilmente sob uma mesma plataforma de armazenamento/ processamento. A informação a ser representada pode ter caraterísticas numéricas ou não numérica e, em ambos os casos, uma representação digital pode ser encontrada. Por exemplo, uma representação digital pode ser encontrada para textos, imagens, números fracionários, etc. Os exemplos 1.1 e 1.2 mostram possíveis representações digitais de informação.

■ **Exemplo 1.1** (Números reais usando representação digital)

O padrão IEEE 754 pode ser usado para se armazenar números reais usando apenas informações digitais binárias *i.e.* 0's e 1's (*bits*). Para representar um número real N qualquer, o padrão usa o formato:

$$N = b \cdot m \cdot 2^n. \tag{1.1}$$


(a) *Tablet*.


(b) Computador de mesa.

Figura 1.3: Exemplos de sistemas digitais usados no cotidiano.

Ele torna possível escrever um número N qualquer em termos apenas de *bits*. Em (1.1) b representa o sinal do número (pode assumir os valores ± 1), m a mantissa e n o expoente.

Por exemplo, para representar o número $\pi = 3,141592653589793$, a aplicção do padrão chega aos seguintes valores para b, m e n: Cujas representações binárias no padrão são respectivamente:

Sinal (b)	$+1$
Expoente (n)	1
Mantissa (m)	$1,57079637050628664788187.$

Sendo assim, o número π pode ser representado pelo número binário:

Sinal (b)	0
Expoente (n)	10000000
Mantissa (m)	10010010000111111011011.

01000000010010010000111111011011.

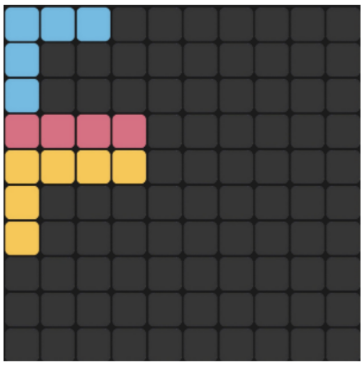
■

■ **Exemplo 1.2** (Representando imagens digitalmente)

Qualquer imagem é composta por pequenos pontos também chamados de *pixels*. Para cada um desses *pixels* pode ser associado um valor digital que representa, por exemplo, a cor que imagem possui no respectivo *pixels*.

A imagem mostrada na Fig. 1.4a pode ser representada por uma tabela de valores digitais. Adotando a codificação de cores para cada *pixel* mostrada na Tabela. 1.1, e aplicando a imagem da Fig. 1.4a obtém-se a representação binária mostrada na Fig. 1.4b.

■



(a)

10	10	10	00	00	00	00	00	00	00
10	00	00	00	00	00	00	00	00	00
10	00	00	00	00	00	00	00	00	00
01	01	01	01	00	00	00	00	00	00
11	11	11	11	00	00	00	00	00	00
11	00	00	00	00	00	00	00	00	00
11	00	00	00	00	00	00	00	00	00
00	00	00	00	00	00	00	00	00	00
00	00	00	00	00	00	00	00	00	00
00	00	00	00	00	00	00	00	00	00

(b)

Figura 1.4: Exemplo de codificação digital de imagem: (a) uma figura colorida, (b) sua codificação binária obtida usando o esquema de codificação de cores definido na Tabela. 1.1.

Tabela 1.1: Exemplo de uma possível codificação binária para cada cor presente em uma figura.

Cor	Código
Preto	00
Vermelho	01
Azul	10
Amarelo	11

1.3.2 Generalização

Ao se usar um sistema digital é possível realizar tarefas de natureza distintas sob a mesma plataforma. Um mesmo sistema digital (por exemplo um computador pessoal) pode ser capaz de proporcionar aplicações que vão desde processamento de textos, passando por resoluções de integrais numéricas até a realização de chamadas de voz/vídeo. Essas diferentes aplicações podem ser executadas sem realizar alterações no dispositivo físico (*hardware*) que as executa.

Nesse exemplo, possivelmente seriam necessários três sistemas analógicos distintos (*i.e.* três equipamentos físicos diferentes), um para cada uma das aplicações citadas ou, no melhor dos casos, realizar alterações físicas no dispositivo (*i.e.* mudanças no *hardware*) para que o mesmo comutasse entre as três aplicações mencionadas.

A adoção da plataforma digital permite construir sistemas de processamento de informação para propósito geral, os sistemas computacionais em geral.

1.3.3 Simplicidade

Um sistema digital, em última estância, pode ser implementado usando sinais de apenas dois valores, os *bits* 0 e 1. Em consequência, dispositivos tão simples e elementares como simples chaves podem ser usados para processar esses sinais. Chaves abertas ou fechadas podem ser usadas para representar, respectivamente, os 0s e 1s. Usualmente, chaves eletrônicas são utilizadas na implementação desses sistemas: os transistores.

Essa possibilidade de usar dispositivos elementares na implementação de um sistema digital permita sua simplicidade e baixo custo.

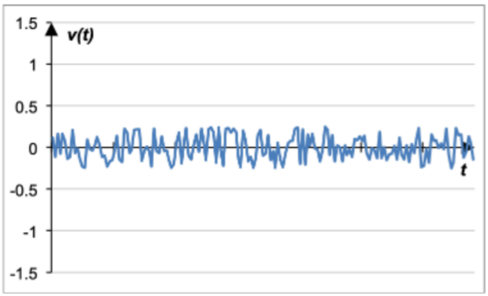


Figura 1.5: Exemplo de sinal de ruído ambiente mostrando em termos de tensão elétrica $v(t)$ em função do tempo t.

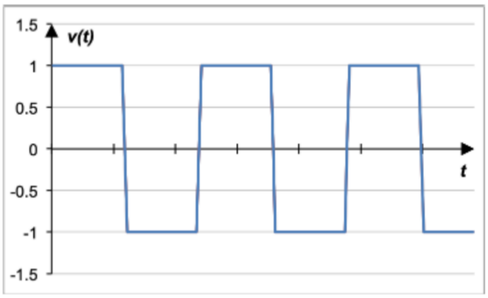
1.3.4 Mitigação de ruídos

Todo sistema físico está sujeito a influência de ruídos e interferências. Um sistema digital pode ser projetado para mitigar esses efeitos indesejados.

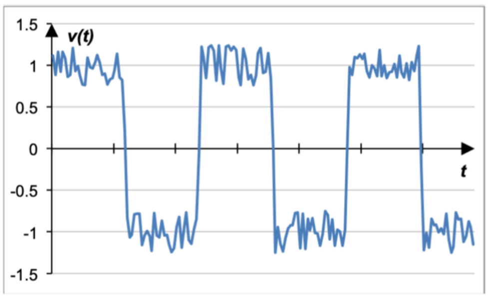
Imagine o seguintes cenário: um sistema está inserido em um ambiente sujeito ao ruído mostrado na Fig. 1.5. Ela mostra a os níveis de tensão elétrica $v(t)$ gerados por um ruído ambiente em função do tempo.

Nesse mesmo cenário hipotético imagine que o ruído contamina o sinal de interesse de forma aditiva, ou seja, o ruído se soma ao sinal íntegro. Será analisado agora como esse ruído ambiente pode afetar um sistema/sinal digital e um sistema/sinal analógico.

O sistema digital ao transmitir/processar um sinal hipotético mostrado na Fig. 1.6a pode receber a influência do ruído ambiente (Fig. 1.5), que se soma a ele, resultando no sinal mostrado na Fig. 1.6b. Há, no entanto, uma estratégia que pode ser aplicada a qualquer momento para remover o ruído adicionado. Ela consiste em considerar como $+1$ V todo nível de tensão recebido/processado com valor maior do que zero, e considerar como -1 V todo nível de tensão recebido/processado com valor menor do que zero. Ao aplicar essa estratégia ao sinal contaminado mostrado na Fig. 1.6b, obtém-se o sinal original mostrado na Fig. 1.6a, eliminando assim o efeito do ruído ambiente. Essa é uma estrategia simples, mas que só funciona se a amplitude do sinal de ruído for menor que a amplitude do sinal de interesse. Entretanto, há outras estrategias mais sofisticadas que podem ser usadas em sistemas digitais com diferentes níveis e formas de ruídos.

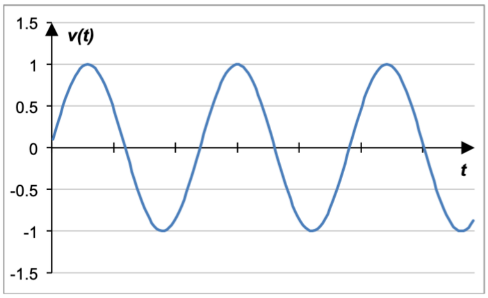


(a)

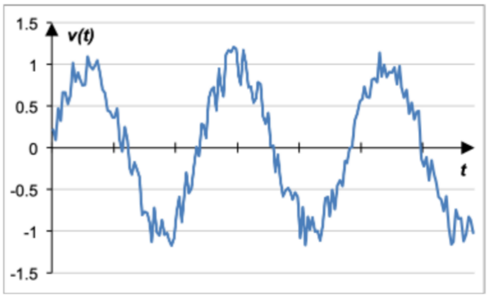


(b)

Figura 1.6: Sinais digitais de tensão elétrica $v(t)$ em função do tempo t: (a) sinal digital íntegro (b) sinal digital degradado por ruído, *i.e.* sinal integro somado ao sinal de ruido mostrado na Fig. 1.5.



(a)



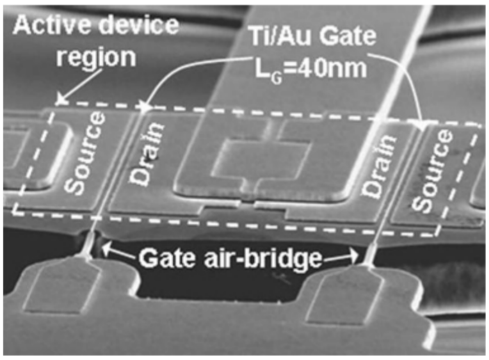
(b)

Figura 1.7: Sinais analógicos de tensão elétrica $v(t)$ em função do tempo t: (a) sinal analógico íntegro (b) sinal analógico degradado por ruído. *i.e.* sinal integro somado ao sinal de ruído mostrado na Fig. 1.5.

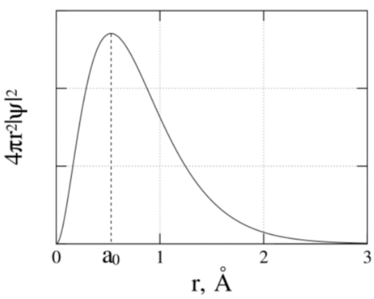
O sistema analógico ao transmitir/processar o sinal mostrado na Fig. 1.7a pode receber a influência do ruído ambiente (Fig. 1.5), que se soma a ele, resultando no sinal mostrado na Fig. 1.7b. Observe que agora não é mais possível aplicar estratégia mencionada anteriormente, uma vez que não existem apenas dois valores possíveis para o sinal pois o sinal apresenta natureza continua (há infinitos valores possíveis em cada ponto do tempo). Ou seja, quando o sinal analógico é degradado por um ruído não há mais como mitigar o impacto dessa degradação no sinal.

1.3.5 Miniaturização

Como visto na seção 1.3.3, os dispositivos digitais podem ser construídos a partir de dispositivos simples como chaves eletrônicas. Os sistemas digtais modernos implementam essas “chaves” usando um dispositivo eletrônico chamado transistor. Um exemplo de um transistor pode ser visto na Fig. 1.8a em uma foto feita usando um microscópio. É possível se ver que as dimensões envolvidas na construção desse transistor é de aproximadamente dezenas de nanômetros (~ 40 nm).



(a)



(b)

Figura 1.8: Dimensões envolvidas na construção de chaves digitais: (a) foto de microscópio de transistor FET medindo ~ 40 mn (b) densidade de probabilidade de se encontrar um elétron num átomo de hidrogênio em função da distancia a partir do núcleo atômico.

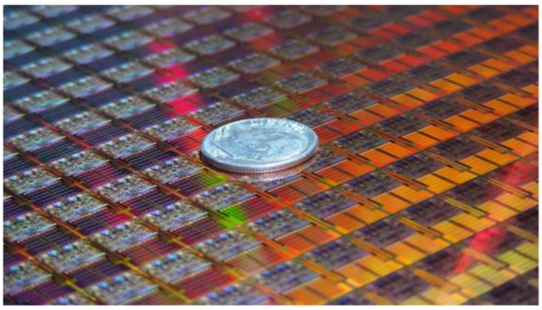


Figura 1.9: Foto de vários processadores modernos juntos. Cada retângulo mais escuro corresponde a um processador completo.

Para se ter uma ideia do tamanho desse transistor ($\sim 40\,\text{nm}$) mostrado na Fig. 1.8a pode-se compará-lo ao raio de um átomo. A Fig. 1.8b mostra a função de densidade de probabilidade para um átomo de hidrogênio. Ela mostra a probabilidade (eixo y) de se encontrar um elétron a uma certa distância (eixo x) do núcleo do átomo. Observando a figura é possível se dizer que o raio máximo do átomo de hidrogênio é de aproximadamente $3\,\text{Å}$(angstrons) o que corresponde a $0,3\,\text{nm}$. Os átomos de silício, com os quais os transistores são feitos, são dezenas de vezes maiores que o de hidrogênio. Sendo assim, percebe-se que um transistor é construído se usando entre dezenas a centenas de átomos de silício.

Usando como blocos construtivos os transitores, é possível construir dispositivos e circuitos digitais de grande complexidade que ocupam muito pouco espaço. A Fig. 1.9 mostra dezenas de processadores modernos (retângulos escuros na foto) dispostos juntos e a comparação de seus tamanhos com uma moeda. Cada processador mostrado na figura pode conter até dezenas de bilhões de transistores, o que caracteriza um sistema digital de alta complexidade sendo implementado em uma espaço muito reduzido.

1.4 Classes de circuitos digitais

O escopo deste documento é o estudo de uma tipo particular de sistemas digitais: Os circuitos digitais eletrônicos. Os circuitos digitais são sistemas eletrônicos capazes de processar e armazenar informações em forma de *bit*. Há duas classes principais de circuitos digitais: os circuitos digitais combinacionais e os circuitos digitais sequenciais.

1.4.1 Circuitos digitais combinacionais

Nessa primeira classe de circuitos digitais a saída do circuito é dependente apenas da função que rege o mesmo e da entrada apresentada ao circuito no mesmo instante de tempo que o sistema está sendo observado. A definição 1.4.1 resume o que é um circuito combinacional.

Definição 1.4.1 Um circuito digital é dito combinacional se, o seu sinal de saída $z(t)$, em um determinado instante de tempo t, depende exclusivamente do sinal de entrada $x(t)$, apresentado ao circuito no instante de tempo t, e das operações que são realizadas pelo sistema.

O circuito combinacional pode ser representado pelo bloco mostrado na Fig. 1.10. Nele, estão

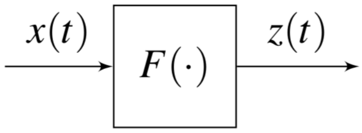


Figura 1.10: Esquema em bloco de uma sistema digital combinacional com sua entrada $x(t)$, saída $z(t)$ e função de transferência $F(\cdot)$.

mostrados os sinais de entrada $x(t)$, de saída $z(t)$ e a função realizada pelo sistema $F(\cdot)$. Matematicamente, a expressão que rege a relação entrada/saída de um circuito combinacional é:

$$z(t) = F(x(t)). \tag{1.2}$$

Em outras palavras, pode-se dizer que um circuito combinacional é um circuito digital que não possui memória. Isso porque o sinal de saída $z(t)$ do sistema no instante de tempo t depende apenas da entrada $x(t)$ apresentada ao circuito no mesmo instante de tempo t, não dependendo assim das entradas apresentadas ao sistema em instantes de tempo anteriores nem posteriores a t.

■ **Exemplo 1.3** (Sistema combinacional)

Um exemplo de sistema combinacional é um sistema que calcula o resto da divisão por 3. Neste sistema hipotético escolheu-se arbitrariamente como possíveis sinais de entrada $x(t)$ os seguintes valores:

$$x(t) \in \{0,1,2,3,4,5\}.$$

A função $F(\cdot)$ do sistema é a função $\mod 3$. Sendo assim, é possível escrever a relação entrada/saída do sistema por:

$$z(t) = x(t) \mod 3,$$

em que $z(t)$ é a saída do sistema. Pela definição do sistema ser o calculo do resto da divisão por 3 vem:

$$z(t) \in \{0,1,2\}.$$

Dada uma sequencia hipotética de valores de entrada $x(t)$ ao longo do tempo, arbitrariamente escolhidas e mostrada na segunda linha da Tabela. 1.2, é possível calcular os valores de saída do sistema $z(t)$ (terceira linha da Tabela. 1.2). Note que para efetuar o calculo de $z(t)$ em qualquer instante de tempo t somente é necessário se conhecer o valor da entrada $x(t)$ no mesmo instante de tempo t. Isso caracteriza um sistema combinacional.

Tabela 1.2: Exemplo de entradas de saída em sistema combinacional.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x(t)$	0	4	5	1	3	2	5	3	0
$z(t)$	0	1	2	1	0	2	2	0	0

■

1.4.2 Circuitos digitais sequenciais

Nessa classe de circuitos digitais, a saída do circuito é influenciada pelo histórico/ordem de sinais de entrada apresentados ao sistema e também pela função que rege o circuito. A definição 1.4.2 resume o circuito sequencial.

Definição 1.4.2 Um circuito digital é dito sequencial se o seu sinal de saída $z(t)$, em um determinado instante de tempo t, depende das operações que são realizadas pelo circuito, do sinal de entrada $x(t)$ apresentado ao sistema no instante de tempo t, bem como de um ou mais sinais de entrada apresentados ao circuito em instantes de tempo anteriores a t.

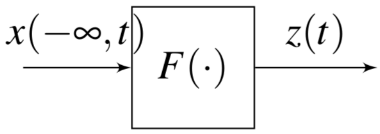


Figura 1.11: Esquema em bloco de um sistema digital sequencial com todas as entradas $x(-\infty,t)$ apresentadas ao sistema em todos os instantes de tempo até o tempo t, saída $z(t)$ e função de transferência $F(\cdot)$.

O circuito sequencial pode ser representado pelo bloco mostrado na Fig. 1.11. Nela, estão mostrados os sinais de entrada $x(t)$, de saída $z(t)$ e a função realizada pelo sistema $F(\cdot)$. Matematicamente, a expressão que rege a relação entrada/saída de um circuito sequencial é:

$$z(t) = F(x(-\infty,t)), \tag{1.3}$$

em que $x(-\infty,t)$ representa todos os sinais apresentados ao sistema desde o instante de tempo $-\infty$ até o instante de tempo t.

Em outras palavras, pode-se dizer que um circuito sequencial é um circuito digital que possui memória. Um ou mais sinais de entrada apresentados ao circuito anteriormente ao instante de tempo t, pode influenciar na resposta que o circuito apresenta no instante de tempo t.

■ **Exemplo 1.4** (Sistema sequencial)

Um exemplo de sistema sequencial é um sistema que calcula a média móvel de três períodos. Nesse sistema hipotético, escolheu-se arbitrariamente como possíveis sinais de entrada $x(t)$ os seguintes valores:

$$x(t) \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

A função $F(\cdot)$ do sistema é a média das últimas três entradas apresentadas ao mesmo. Sendo assim, é possível escrever a relação entrada/saída do sistema por:

$$z(t) = \frac{1}{3}\{x(t)+x(t-1)+x(t-2)\}, \tag{1.4}$$

em que $z(t)$ é a saída do sistema e $x(t-1)$ e $x(t-2)$ são os valores de entrada apresentados ao sistema, resptectivamente, uma e duas unidades de tempo imediatamente anteriores a t.

Dada uma sequencia hipotética de valores de entrada $x(t)$ ao longo do tempo, arbitrariamente escolhidas e mostrada na segunda linha da Tabela. 1.3, é possível calcular os valores de saída do sistema $z(t)$ (terceira linha da Tabela. 1.3).

Note que para efetuar o calculo de $z(t)$ em um instante de tempo t, por exemplo, $t = 4$ é necessário se conhecer os valores de entrada em três instantes de tempo diferentes *i.e.* $x(4) = 6$, $x(3) = 3$ e $x(2) = 9$ para se fazer $z(4) = \frac{1}{3}\{x(4) + x(3) + x(2)\} = 6$. Perceba também que não é possível se fazer o cálculo de $z(1)$ uma vez que $z(1) = \frac{1}{3}\{x(1)+x(0)+x(-1)\}$ e o valor de $x(-1)$ é desconhecido. Essas são características de um sistema sequencial.

Tabela 1.3: Exemplo de entradas de saída em sistema sequencial.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x(t)$	0	3	9	3	6	6	9	3	3
$z(t)$	-	-	4	5	6	5	7	6	4

■

1.5 Especificação de sistemas digitais

Os sistemas digitais podem ser especificados em dois níveis: especificação em alto nível e especificação em nível binário.

1.5.1 Especificação em alto nível

Essa especificação consistem em definir o conjunto de valores possíveis para a entrada do sistema, o conjunto de valores possíveis para sua saída e a função de transferência que o sistema implementa. A função de transferência determina como o sistema usa o sinal de entrada para gerar sinal de saída. Nesse nível de descrição não há preocupação de como sistema será implementado fisicamente, apenas se determinar as entradas e saídas permitidas e a função que o sistema realiza.

1.5.2 Especificação em nível binário

Esse nível de especificação aprofunda a descrição gerada pela descrição de alto nível. A especificação em nível binário se preocupa em representar entradas, saídas e função de transferência usando apenas números binários. É possível descrever essa ideia matematicamente por:

$$\underline{z_b} = \underline{F_b}(\underline{x_b}), \tag{1.5}$$

em que $\underline{x_b}$ e $\underline{z_b}$ são vetores binários que representam, respectivamente, entradas e saídas do sistema e $\underline{F_b}$ é uma função binária que implementa a função de transferência do sistema. Neste documento será usada a notação $\underline{x}$ para indicar a natureza vetorial de x, *i.e.* $\underline{x}$ é um vetor binário com n bits.

A Fig. 1.12 mostra um exemplo de uma função binária com quatro *bits* de entrada e dois *bits* de saídas.

1.5.3 Comparativo entre os níveis de especificação

Na Fig. 1.13 é possível se destacar uma comparação entre a descrição em alto nível e a descrição em nível binário. Imagine um sistema que possui função de transferência $F(\cdot)$, entrada x e saída z. Nesse caso, o retângulo tracejado juntamente com a entrada x e a saída z representam especificação

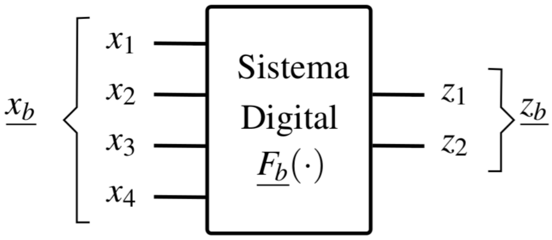


Figura 1.12: Exemplo de um sistema digital representado por uma função binária $\underline{F_b}(\cdot)$ com quatro *bits* de entrada e dois *bits* de saída.

em alto nível desse sistema. Os blocos internos ao retângulo tracejado, por outro lado, representam a especificação em nível binário do sistema contendo os seguinte elementos:

- Um codificador que transforma a entrada x em um vetor binário $\underline{x_b}$ de n_1 *bits*.
- A versão binária $\underline{F_b}(\cdot)$ da função do sistema $F(\cdot)$ que possui n_1 *bits* de entrada e n_2 *bits* de saída.
- Um decodificador que transforma o vetor binário $\underline{z_b}$, de n_2 *bits*, na saída z do sistema.

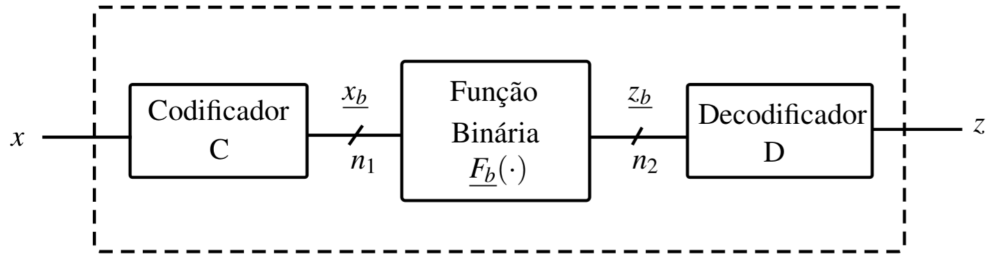


Figura 1.13: Esquema comparativo entre as especificações binárias e de alto nível para sistemas digitais.

■ **Exemplo 1.5** (Especificação de um sistema digital em alto nível e em nível binário)

Nesse exemplo será especificado em alto nível e em nível binário o sistema que calcula o resto da divisão por três.

Especificação em alto nível - Consiste na determinação das entradas, das saídas e da função do sistema.O sistema consiste de uma entrada x, uma saída z (como mostrado na Fig. 1.10) e relação entrada-saída dada por:

$$z = x \mod 3.$$

Os valores de entrada permitidos foram arbitrariamente definidos:

$$x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

Por conseguinte (decorrente da função $\mod 3$), tem-se:

$$z \in \{0,1,2\}.$$

Especificação em nível binário - Para fazer a especificação em nível binário é necessário especificar as entradas, saídas e a função de transferência em nível binário, ou seja, especificar os blocos C (codificador), D (decodificador) e $\underline{F_b}(\cdot)$ mostrados na Fig. 1.13. Neste exemplo será feita a descrição desses blocos usando tabelas.

O bloco C recebe como entrada um número inteiro x ($x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$) e deve fornecer como saída um vetor binário. Para representar números de 0 a 9 são necessários pelo menos 4 *bits*. Sendo assim, referindo-se a Fig. 1.13, o valor escolhido para n_1 é $n_1 = 4$. A Tabela. 1.4 mostra a implementação do bloco C. Na primeira linha estão os valores x permitidos para a entrada. Na segunda linha estão os correspondentes binários (4 *bits*) escolhidos.

Tabela 1.4: Implementação do bloco de codificação (corresponde ao bloco C da Fig. 1.13).

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\underline{x_b}$	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001

O bloco D recebe como entrada um número binário $\underline{z_b}$ de n_2 bits e como saída um número inteiro z. Como definido na especificação de alto nível $z \in \{0,1,2\}$. São necessários pelo menos 2 bits para codificar todos os valores permitidos a z. Sendo assim, é escolhido para para efeito de codificação $n_2 = 2$. A Tabela. 1.5 mostra a implementação do bloco D. Na primeira linha estão os número binários ($\underline{z_b}$) escolhidos para cada valor de entrada permitido e na segunda linha estão os seus correspondentes decimais z.

Tabela 1.5: Implementação do bloco de decodificação (corresponde ao bloco D da Fig. 1.13).

$\underline{z_b}$	00	01	10
z	0	1	2

O bloco $\underline{F_b}(\cdot)$ recebe como entrada um número binário $\underline{x_b}$ de $n_1 = 4$ *bits* e como saída o número binário $\underline{z_b}$ de $n_2 = 2$ *bits*. Todos os valores binários de saída correspondentes a cada valor binário de entrada estão mostrados, respectivamente, nas linhas 2 e 1 da Tabela. 1.6. Essa é a implementação tabular binária da função de transferência do sistema.

Tome como exemplo na Tabela. 1.6 os valores armazenados na quinta coluna, que correspondem a $\underline{x_b} = 0011$ e $\underline{z_b} = 00$. Note que $\underline{x_b} = 0011$ corresponde a entrada $x = 3$ (vide Tabela. 1.4). Ao aplicar $x = 3$ na função do sistema chega-se ao resultado $z = 0$. Consultado a Tabela. 1.5 chega-se a conclusão que $z = 0$ implica, de fato, em $\underline{z_b} = 00$ como constatado inicialmente na Tabela. 1.6.

Tabela 1.6: Implementação da função binário do sistema (corresponde ao bloco $\underline{F_b}(\cdot)$ da Fig. 1.13).

$\underline{x_b}$	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001
$\underline{z_b}$	00	01	10	00	01	10	00	01	10	00

■

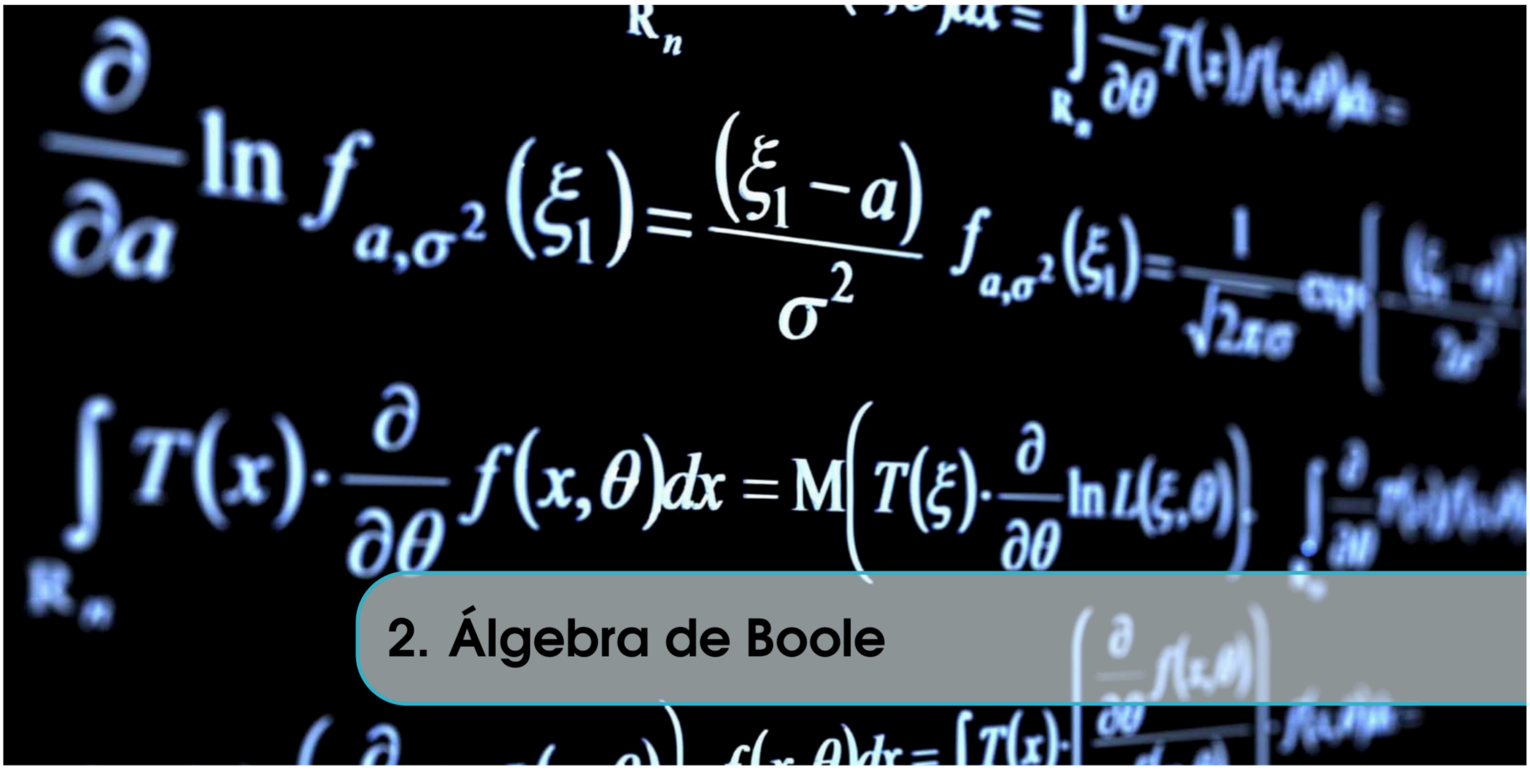
1.6 Problemas propostos

Problema 1.1 Dê um exemplo de uma informação/sinal que possui natureza analógica/contínua e mostre uma forma de representar essa informação/sinal de forma digital.

Problema 1.2 Defina qualitativamente e matematicamente os sistemas digitais combinacionais e sequenciais. Trace uma comparação entre os sistemas digitais combinacionais e os sistemas digitais sequenciais. Dê exemplos para os dois casos.

Problema 1.3 Especifique em alto nível e nível binário os sistemas digitais a seguir. Admita que são permitidos como valores de entradas o número inteiro de 0 a 9.

a) Um sistema cujo valor na saída é o valor na entrada somado de 3 unidades.
b) Um sistema que informa na sua saída se um número presente na sua entrada é um número primo ou não.



2. Álgebra de Boole

A álgebra de Boole é a ferramenta algébrica usada para descrever e projetar sistemas digitais. Neste capítulo são mostradas as principais características e propriedades das álgebras boleanas.

2.1 Definição da álgebra de Boole

A álgebra de Boole é uma estrutura composta pelos seguintes elementos:

- Um conjunto B de elementos.
- Duas operações binárias $+$e $\cdot$que podem ser aplicadas aos elementos de B.

Para ser considerada uma álgebra de Boole as operações $\cdot$ e $+$ quando aplicadas aos elementos de B devem, necessariamente, satisfazer aos seguintes postulados:

Postulado 2.1 (comutatividade) Para quaisquer elementos a e b tais que $a \in B$ e $b \in B$ vale:

$$\begin{aligned} a+b &= b+a \\ a \cdot b &= b \cdot a \end{aligned} \tag{2.1}$$

Postulado 2.2 (distributividade) Para quaisquer elementos a, b e c tais que $a \in B$, $b \in B$ e $c \in B$ vale:

$$\begin{aligned} a+(b \cdot c) &= (a+b) \cdot (a+c) \\ a \cdot (b+c) &= (a \cdot b)+(a \cdot c) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Postulado 2.3 (elemento identidade) Existe um elemento identidade distinto para cada operador ($+$ e $\cdot$) denotado, respectivamente, por 0 e 1, de tal forma que para todo $a \in B$ vale:

$$\begin{aligned} a+0 = 0+a &= a \\ a \cdot 1 = 1 \cdot a &= a \end{aligned} \tag{2.3}$$

Postulado 2.4 (elemento complementar) Para todo elemento $a \in B$ existe um complemento a', chamado complemento de a, de forma que:

$$\begin{aligned} a + a' &= 1 \\ a \cdot a' &= 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Observações:

- Os símbolos $+$ e $\cdot$ são usados para representar operadores quaisquer. Os símbolos não estão relacionados, necessariamente, às operações de soma e multiplicação.
- Os símbolos 0 e 1 usados nos postulados não necessariamente identificam as quantidades 0 e 1. O símbolo 0 é usando como marcador para o elemento de B que funciona como elemento identidade do operador $+$, enquanto que o símbolo 1 é usando como marcador para o elemento de B que funciona como elemento identidade do operador $\cdot$.
- O operador $\cdot$ tem precedência sobre o operador $+$. Parênteses devem ser usados para evitar ambiguidade. Exemplo:

$$\begin{aligned} a + (b \cdot c) &= a + b \cdot c \quad \text{mas,} \\ (a + b) \cdot c &\neq a + b \cdot c \end{aligned}$$

2.2 Principais teoremas da álgebra de Boole

Teorema 2.2.1 (princípio da dualidade) Toda identidade dedutível dos postulados permanece válida se as operações $+$ e $\cdot$ e os elementos identidade 0 e 1 são intercambiados em toda expressão.

Demonstração. Todos os postulados usados para definir uma álgebra de Boole usam esse princípio. Isso é, a segunda expressão de cada postulado sempre é obtida aplicando, à primeira expressão do postulado, a regra enunciada no teorema. Sendo assim, a regra do teorema pode ser aplicada a qualquer expressão verdadeira composta por elementos e operadores de uma álgebra de Boole. ■

Teorema 2.2.2 (unicidade do elemento complementar) Para todo elemento $a \in B$ existe apenas um único elemento $a' \in B$ de tal forma que:

$$\begin{aligned} a + a' &= 1 \quad \text{e} \\ a \cdot a' &= 0, \end{aligned}$$

sejam ambas simultaneamente verdadeiras.

Demonstração. Aqui será feita uma prova por redução ao absurdo. Primeiramente, será assumido, como hipótese da demonstração, uma tese contrária à anunciada pelo teorema. A hipótese é de que um dado elemento $a \in B$ possui dois complementares a'_1 e a'_2 distintos. A hipótese assumida na demonstração juntamente com o uso do postulado 2.3 acarreta nas seguintes expressões válidas:

$$\begin{aligned} a'_1 &\neq a'_2 \\ a + a'_1 &= 1 \\ a \cdot a'_1 &= 0 \\ a + a'_2 &= 1 \\ a \cdot a'_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Nesses termos, um possível desenvolvimento para o valor de a'_1 é o seguinte:

$$\begin{aligned}
a'_1 &= a'_1 \cdot 1 && \text{(usando postulado 2.3)} \\
&= a'_1 \cdot (a'_2 + a) && \text{(usando o postulado 2.3 e a hipótese que } a'_2 \text{ é complento de } a\text{)} \\
&= a'_1 \cdot a'_2 + a'_1 \cdot a && \text{(usando o postulado 2.2)} \\
&= a'_1 \cdot a'_2 + 0 && \text{(usando o postulado 2.3 e a hipótese que } a'_1 \text{ é complento de } a\text{)} \\
&= a'_1 \cdot a'_2 && \text{(usando o postulado 2.3).}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

De forma semelhante, é possível desenvolver um valor para a'_2:

$$\begin{aligned}
a'_2 &= a'_2 \cdot 1 && \text{(usando postulado 2.3)} \\
&= a'_2 \cdot (a'_1 + a) && \text{(usando o postulado 2.3 e a hipótese que } a'_1 \text{ é complento de } a\text{)} \\
&= a'_2 \cdot a'_1 + a'_2 \cdot a && \text{(usando o postulado 2.2)} \\
&= a'_2 \cdot a'_1 + 0 && \text{(usando o postulado 2.3 e a hipótese que } a'_2 \text{ é complento de } a\text{)} \\
&= a'_2 \cdot a'_1 && \text{(usando o postulado 2.3)} \\
&= a'_1 \cdot a'_2 && \text{(usando o postulado 2.1).}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

É possível perceber por (2.6) que $a'_1 = a'_1 \cdot a'_2$ e por (2.7) que $a'_2 = a'_1 \cdot a'_2$. Ou seja, $a'_1 = a'_2$, o que prova que a hipótese assumida inicialmente que é falsa, provando assim a unicidade do elemento identidade. ■

Teorema 2.2.3 Para todo elemento $a \in B$ vale:

$$\begin{aligned}
a + 1 &= 1 \quad \text{e} \\
a \cdot 0 &= 0.
\end{aligned}$$

Demonstração. A demonstração para $a + 1 = 1$ parte do lado esquerdo da igualdade $(a + 1)$:

$$\begin{aligned}
a + 1 &= 1 \cdot (a + 1) && \text{(usando postulado 2.3)} \\
&= (a + a') \cdot (a + 1) && \text{(usando postulado 2.4)} \\
&= a + (a' \cdot 1) && \text{(usando postulado 2.2)} \\
&= a + a' && \text{(usando postulado 2.3)} \\
&= 1 && \text{(usando postulado 2.4).}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

A demonstração para $a \cdot 0 = 0$ fica como exercício proposto ao final do capítulo. ■

Teorema 2.2.4 Os elementos identidades 0 e 1 são complementares, ou seja, $0' = 1$ e $1' = 0$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.2.3 é possível escrever o seguinte, para qualquer valor de a:

$$a + 1 = 1 \ \text{ e} \tag{2.9}$$

$$a \cdot 0 = 0, \tag{2.10}$$

Substituindo $a = 0$ em (2.9) e $a = 1$ em (2.10), chega-se a:

$$\begin{aligned} 0+1 &= 1 \\ 0 \cdot 1 &= 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Comparando (2.11) com o postulado 2.4 conclui-se que, de fato, o enunciado do teorema é verdadeiro. ■

Teorema 2.2.5 (lei da indepotência) Para todo elemento $a \in B$ vale:

$$\begin{aligned} a+a &= a \quad \text{e} \\ a \cdot a &= a. \end{aligned}$$

Demonstração. A demonstração para $a \cdot a = a$ parte do lado esquerdo da igualdade $(a \cdot a)$:

$$\begin{aligned} a \cdot a &= a \cdot a + 0 && \text{(usando postulado 2.3)} \\ &= a \cdot a + a \cdot a' && \text{(usando postulado 2.4)} \\ &= a \cdot (a + a') && \text{(usando postulado 2.2)} \\ &= a \cdot 1 && \text{(usando postulado 2.4)} \\ &= a && \text{(usando postulado 2.3).} \end{aligned} \tag{2.12}$$

A demonstração para $a + a = a$ fica como exercício proposto ao final do capítulo.

■

Teorema 2.2.6 (lei da involução) Para todo elemento $a \in B$ vale: $(a')' = a$.

Demonstração. Tomando como partida um elemento a' do conjunto B, é possível se dizer que seu complemento é o elemento $(a')'$. Sendo assim, pelo postulado 2.4 é possível escrever:

$$\begin{aligned} a' + (a')' &= 1 \\ a' \cdot (a')' &= 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Tomando agora como partida o elemento $a \in B$, também pelo postulado 2.4 é possível escrever:

$$\begin{aligned} a + a' &= 1 \\ a \cdot a' &= 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Aplicando o postulado 2.1 em (2.14) chega-se a:

$$\begin{aligned} a' + a &= 1 \\ a' \cdot a &= 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Comparando (2.13) com (2.15) percebe-se que ambos a e $(a')'$ são complemento de a'. Pela unicidade do elemento identidade (Teorema 2.2.2) isso somente pode acontecer se $a = (a')'$ o que demonstra o teorema em questão. ■

Teorema 2.2.7 (lei da absorção) Para todos os elementos a e $b \in B$ vale:

$$a + a \cdot b = a \quad \text{e}$$
$$a \cdot (a + b) = a.$$

Demonstração. A demonstração para $a + a \cdot b = a$ parte do lado esquerdo da igualdade $(a + a \cdot b)$:

$$\begin{aligned} a + a \cdot b &= a \cdot 1 + a \cdot b && \text{(usando postulado 2.3)} \\ &= a \cdot (1 + b) && \text{(usando postulado 2.2)} \\ &= a \cdot 1 && \text{(usando o teorema 2.2.3)} \\ &= a && \text{(usando postulado 2.3).} \end{aligned} \tag{2.16}$$

A demonstração para $a \cdot (a + b) = a$ fica como exercício proposto ao final do capítulo. ■

■ **Exemplo 2.1** O teorema 2.2.7 permite analisar uma possível aplicação prática da álgebra de boole na implementação de sistemas. Imagine que um engenheiro elencou os requisitos de um determinado sistema e chegou a conclusão de que o mesmo deveria ser implementado pela função $f(a,b) = a + a \cdot b$. Esse é um sistema possui 2 entradas e 1 saída conforme mostrado na Fig. 2.1. Para implementar fisicamente a função desejada são necessários dois elementos de *hardware*: um

Figura 2.1: Exemplo de sistema com duas entradas (a e b) e com uma saída ($f(a,b)$).

para implementar a operação $+$ e outro para implementar a operação $\cdot$, conforme mostrado na Fig. 2.2. É possível se mostrar a implementação completa em *hardware* do sistema utilizando os blocos mostrados na Fig. 2.2. Essa visão completa do sistema, com suas partes constituintes, está mostrada na Fig. 2.3.

No entanto, caso a operação do sistema possa ser descrita por uma álgebra de boole é possível melhorar a implementação do sistema usando o teorema 2.2.7. Ao aplica-lo na expressão que define o sistema deste exemplo, o engenheiro chegaria ao seguinte resultado: $f(a,b) = a + a \cdot b = a$. Ou seja, a conclusão é que o mesmo sistema poderia ser implementado sem usar nenhum elementos de *hardware* conforme mostrado na Fig. 2.4. ■

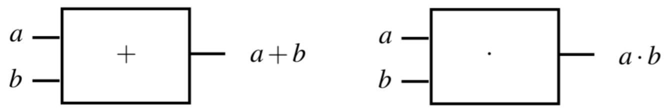


Figura 2.2: Exemplo dos elementos de *hardware* necessário para implementar as operações $+$ e $\cdot$.

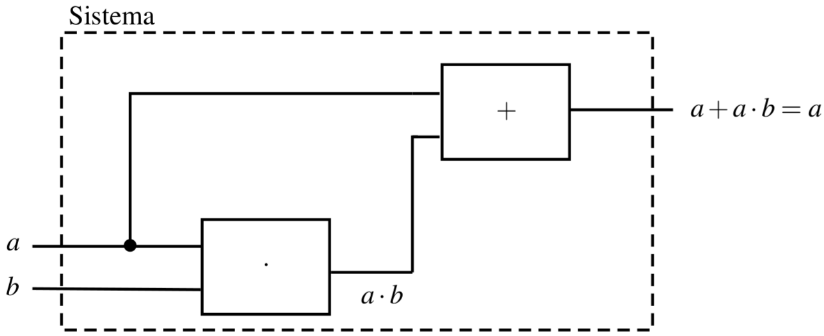


Figura 2.3: Exemplo de implementação em *hardware* para a função $f(a,b) = a + a \cdot b$.

Sob as regras de uma álgebra de boole as implementações mostradas nas Figs. 2.3 e 2.4 são idênticas. Porém, claramente, a segunda implementação apresenta vantagens em relação à primeira por redução de custos, consumo de energia, espaço ocupado, etc.

Teorema 2.2.8 Para todos os elementos a e $b \in B$ vale:

$$a + a' \cdot b = a + b \quad \text{e}$$
$$a \cdot (a' + b) = a \cdot b.$$

Demonstração. A demonstração para $a + a' \cdot b = a + b$ parte do lado esquerdo da igualdade $(a + a' \cdot b)$:

$$\begin{aligned} a + a' \cdot b &= (a + a') \cdot (a + b) && \text{(usando postulado 2.2)} \\ &= 1 \cdot (a + b) && \text{(usando postulado 2.4)} \\ &= a + b && \text{(usando postulado 2.3).} \end{aligned} \tag{2.17}$$

A demonstração para $a \cdot (a' + b) = a \cdot b$ fica como exercício proposto ao final do capítulo. ■

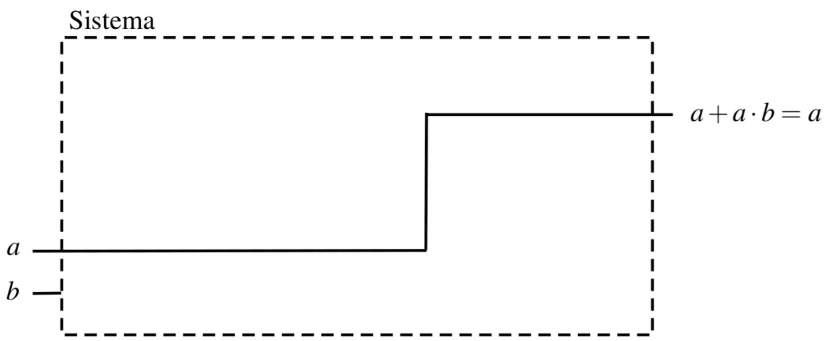


Figura 2.4: Exemplo de implementação de *hardware* para a função $f(a,b)=a+a\cdot b$ após a simplificação usando o teorema 2.2.7.

Teorema 2.2.9 (teorema de De Morgan) Para todos os elementos a e $b \in B$ vale:

$$(a+b)' = a'\cdot b' \qquad \text{e}$$
$$(a\cdot b)' = a'+b'.$$

Demonstração. Será feita a demonstração para $(a+b)'=a'\cdot b'$. Se $a+b$ é complemento de $a'\cdot b'$ como prega a hipótese do teorema então, necessariamente, as seguintes identidades devem ser válidas pelo postulado 2.4:

$$\begin{aligned}(a+b)+(a'\cdot b') &= 1 \quad \text{e}\\ (a+b)\cdot(a'\cdot b') &= 0.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Fazendo o desenvolvimento de $(a+b)+(a'\cdot b')$:

$$\begin{aligned}(a+b)+(a'\cdot b') &= [(a+b)+a']\cdot[(a+b)+b'] && \text{(usando postulado 2.2)}\\ &= [b+a+a']\cdot[a+b+b'] && \text{(usando postulado 2.1)}\\ &= [b+1]\cdot[a+1] && \text{(usando postulado 2.4)}\\ &= 1\cdot 1 && \text{(usando teorema 2.2.3)}\\ &= 1 && \text{(usando postulado 2.3),}\end{aligned} \tag{2.19}$$

verifica-se que, de fato, $(a+b)+(a'\cdot b')=1$. Fazendo o desenvolvimento de $(a+b)\cdot(a'\cdot b')$:

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot(a'\cdot b') &= (a'\cdot b')\cdot(a+b) && \text{(usando postulado 2.1)}\\ &= (a'\cdot b'\cdot a)+(a'\cdot b'\cdot b) && \text{(usando postulado 2.2)}\\ &= (a'\cdot a\cdot b')+(a'\cdot b'\cdot b) && \text{(usando postulado 2.1)}\\ &= (a\cdot a'\cdot b')+(a'\cdot b\cdot b') && \text{(usando postulado 2.1)}\\ &= (0\cdot b')+(a'\cdot 0) && \text{(usando postulado 2.4)}\\ &= 0+0 && \text{(usando teorema 2.2.3)}\\ &= 0 && \text{(usando postulado 2.3),}\end{aligned} \tag{2.20}$$

verifica-se de fato que $(a+b)\cdot(a'\cdot b')=0$. Assim, (2.19) e (2.20) mostram que a condição de (2.18) é satisfeita. Em conjunto com a unicidade do complemento (teorema 2.2.2) fica demonstrado o teorema.

A demonstração para $(a\cdot b)'=a'+b'$ fica como exercício proposto ao final do capítulo. ■

Teorema 2.2.10 (teorema de De Morgan generalizado) Dados os elementos $x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}\in B$ valem as seguintes expressões:

$$(x_0+x_1+\ldots+x_{n-1})'=x_0'\cdot x_1'\cdot\ldots\cdot x_{n-1}' \quad \text{e}$$
$$(x_0\cdot x_1\cdot\ldots\cdot x_{n-1})'=x_0'+x_1'+\ldots+x_{n-1}'.$$

Demonstração. A prova se dá por indução finita e usando o teorema 2.2.9. Deixa-se a cargo do leitor essa demonstração. ■

Teorema 2.2.11 As operações $+$e $\cdot$são operações associativas em uma álgebra de boole. Ou seja dados a, b e $c\in B$ vale:

$$a+(b+c)=(a+b)+c \quad \text{e}$$
$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c.$$

Demonstração. A prova deste teorema não cabe no escopo deste documento. ■

2.3 Problemas propostos

Problema 2.1 Usando apenas os postulados da álgebra de Boole mostre que:
a) $A\cdot 0=0$.
b) $A+A=A$.
c) $A\cdot(A'+B)=A\cdot B$.
d) $A\cdot B+A\cdot B'=A$.
e) $(A+B)\cdot(A+B')=A$.

Problema 2.2 Fazendo uso apenas dos postulados da álgebra de Boole e, possivelmente, de um dos teoremas demonstrados no capítulo mostre que:
a) $a\cdot(a+b)=a$.
b) $(a\cdot b)'=a'+b'$.

Problema 2.3 A álgebra dos conjuntos é uma álgebra de boole. Identifique o conjunto B e os operadores dessa algebra de boole. Verifique usando os postulados que, de fato, a algebra dos conjuntos é uma álgebra de boole.

Problema 2.4 Usando os teoremas da álgebra de Boole mostre que:
a) $AB'C+A'BC+A'CD+B'CD'=A'C+B'C$.
b) $ABC'+BC'D+A'BD=ABC'+A'BD$.