6. Formas canônicas

Neste capítulo são abordadas as formas canônicas para descrição algébrica de função de chaveamento: a soma de produtos (SDP) e o produto de somas (PDS). As formas canônicas usam o conceito de decomposição de funções como ideia principal para encontrar expressões algébricas para funções de chaveamento.

6.1 Soma de produtos - SDP

A soma de produtos (SDP) é uma forma de escrever algebricamente funções de chaveamento, que usa o conceito de decomposição de funções. A ideia é decompor a função em partes, com cada parte correspondendo a cada caso no qual os valores das variáveis independentes produzem como resultado na função o valor binário 1. Para cada um desses casos é escrita numa expressão algébrica de tal sorte que essa expressão seja igual a 1, única e exclusivamente para essa atribuição sob análise, sendo igual a zero caso contrário.

Após escrever a expressão algébrica relativa a cada caso, é possível escrever a expressão da função completa aplicando o operador OR às expressões encontradas. Essa ideia é ilustrada a seguir aqui por meio de um exemplo. Antes de considerar o exemplo porém, são definidos alguns termos utilizados na argumentação:

Definição 6.1.1 (Literal)
Literal é uma variável que pode está complementada ou não complementada.
Exemplos: x, y, $\overline{z}$ e $\overline{w}$.

Definição 6.1.2 (Termo produto)
Termo produto é uma única literal ou o AND de várias literais.
Exemplos: x_0, $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$.

Definição 6.1.3 (Soma de produtos)
Soma de produtos é um único termo produto ou operação OR de vários termos produtos.
Exemplos: $x_2 + \overline{x_3} \cdot x_1$, $x_2 \cdot \overline{x_3}$.

Retomando o exemplo, considere a função $f(x_2, x_1, x_0)$, de 3 variáveis, mostrada na Tabela. 6.1. Nela, é possível identificar duas atribuições para as variáveis independentes que resultam em $f(x_2, x_1, x_0) = 1$, a saber, $x_2x_1x_0 = 000$ e $x_2x_1x_0 = 101$.

Tabela 6.1: Exemplo de uma tabela verdade de uma função de chaveamento de três variáveis.

x_2	x_1	x_0	$f_1(x_2,x_1,x_0)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Como existem exatamente duas atribuições para as variáveis independentes que resultam em $f(x_2,x_1,x_0) = 1$ é possível decompor a função f em duas funções: uma função f_1 que resulta em 1 apenas para $x_2x_1x_0 = 000$ (e zero caso contrário) e outra função f_2 que resulta em 1 apenas para $x_2x_1x_0 = 101$ (e zero caso contrário). As tabelas verdades de f_1 e f_2 estão mostradas, respectivamente nas Tabelas 6.2a e 6.2b.

Tabela 6.2: Decomposição da função f mostrada na Tabela. 6.1 nas funções f_1 e f_2.

x_2	x_1	x_0	$f_1(x_2,x_1,x_0)$	expressão
0	0	0	1	$\overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_0}$
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	0	

(a)

x_2	x_1	x_0	$f_2(x_2,x_1,x_0)$	expressão
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	1	$x_2 \cdot \overline{x_1} \cdot x_0$
1	1	0	0	
1	1	1	0	

(b)

Note que ao se fazer o OR de f_1 com f_2 será obtida a tabela verdade de f (faça uma comparação entre as Tabelas 6.1, 6.2a e 6.2b). Sendo assim, é preciso encontrar uma expressão algébrica que resulte em 1 única e exclusivamente para $x_2x_1x_0 = 000$, para descrever f_1, e outra que resulte em 1 única e exclusivamente para $x_2x_1x_0 = 101$, para descrever f_2. Ao fazer isso é possível escrever:

$$f = f_1 + f_2.$$

Uma expressão possível que resulta em 1 única e exclusivamente para $x_2x_1x_0 = 000$ é $\overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_0}$. Note que:

$$\overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} = \begin{cases} 1, & \text{se } x_2x_1x_0 = 000 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{6.1}$$

De forma análoga, uma expressão possível que resulta em 1 única e exclusivamente para $x_2x_1x_0 = 101$ é $x_2 \cdot \overline{x_1} \cdot x_0$ pois:

$$x_2 \cdot \overline{x_1} \cdot x_0 = \begin{cases} 1, & \text{se } x_2x_1x_0 = 101 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{6.2}$$

Ou seja, é possível escrever:

$$f_1 = \overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_0}$$

e

$$f_2 = x_2 \cdot \overline{x_1} \cdot x_0.$$

Encontrando assim, a expressão para a função f:

$$f(x_2, x_1, x_0) = \overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} + x_2 \cdot \overline{x_1} \cdot x_0.$$

Observa-se que a função $f(x_2, x_1, x_0)$ é da forma soma de produtos e possui dois termos produto. Nesse exemplo, há dois termos produtos pois há dois 1s na última coluna binária da tabela verdade de f. Como fica claro a partir da argumentação feita, o número de termos produtos que aparecem na expressão algébrica de f, usando a metodologia apresentada, é igual ao número de 1s na última coluna binária da tabela verdade de f.

Os termos produtos encontrados no exemplo e mostrados em (6.1) e (6.2) tem uma característica bem definida: todas as variáveis da função f aparecem no termo produto exatamente uma vez (ou na forma complementada ou na forma não complementada). Termos produtos com esse formato são a base da estratégia apresentada para a escrita algébrica de funções de chaveamento, eles são denominados mintermos.

Definição 6.1.4 (Mintermo) Um mintermo de uma função f de n variáveis é um termo produto de exatamente n variáveis distintas em que cada variável aparece exatamente uma única vez. Essa aparição pode se dar na forma complementada ou não complementada. Existem 2^n mintermos diferentes de n variáveis.

Cada mintermo tem como resultado o valor 1 para uma única atribuição de valores às suas literais. Isso acontece porque o produto tem valor igual 1 somente quando todas as literais tem valor igual 1. Por exemplo, $x_3 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot x_0 = 1 \iff x_3x_2x_1x_0 = 1001$.

■ **Exemplo 6.1** A Tabela. 6.3 mostra alguns exemplos de termos produtos que são possíveis mintermos ou não, de acordo com o número de variáveis consideradas. ■

Há uma forma sintética de expressar um determinado mintermo: a notação-*m*

Tabela 6.3: Exemplos de termos produtos que podem representar mintermos, ou não, de acordo com o número de variáveis consideradas.

expressão algébrica	número de variáveis consideradas	mintermo válido?
$x_2 \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_0}$	3	sim
$\overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot x_0$	3	sim
$x_2 \cdot \overline{x_1}$	3	não
$x_1 \cdot x_0$	3	não
$x_3 \cdot \overline{x_2} \cdot x_1 \cdot x_0$	4	sim
$\overline{x_3} \cdot x_2 \cdot x_1 \cdot \overline{x_0}$	4	sim
$\overline{x_3} \cdot x_2 \cdot x_1$	4	não
$x_3 \cdot x_2$	4	não

Definição 6.1.5 (notação-m) Notação compacta usada para expressar um mintermo. Cada mintermo é rotulado com um índice i e escrito na notação-m como m_i. O mintermo m_i de n variáveis tem a seguinte forma geral:

$$m_i = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \cdot \ldots \cdot x_1 \cdot x_0, \tag{6.3}$$

em que as variáveis x_k $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ podem aparecer complementadas ou não, dependendo do valor de i. O indice i é um número inteiro decimal cuja representação binária é obtida quando um *bit* 1 é associado com cada variável não complementada do mintermo e um *bit* 0 é associado com cada variável complementada do mintermo.

■ **Exemplo 6.2** Qual a representação do mintermo de quatro variáveis $x_3 \cdot \overline{x_2} \cdot x_1 \cdot \overline{x_0}$ usando a notação-m?

mintermo:	x_3	$\cdot$	$\overline{x_2}$	$\cdot$	x_1	$\cdot$	$\overline{x_0}$
	$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
associação binária:	1		0		1		0

O número binário associado ao mintermo fornecido é portanto 1010 o que corresponde ao número 10 em decimal. Sendo assim, o mintermo $x_3 \cdot \overline{x_2} \cdot x_1 \cdot \overline{x_0}$ é representado na notação-m por m_{10}. ■

Teorema 6.1.1 Qualquer função de chaveamento combinacional pode ser representada como uma soma de mintermos. Usando a notação-m, qualquer função de chaveamento combinacional pode ser escrita assim:

$$f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0) = f(0) \cdot m_0 + f(1) \cdot m_1 + \ldots + f(2^n - 1) \cdot m_{2^n-1}, \tag{6.4}$$

em que $f(i)$ corresponde ao valor da função que se quer representar quando as variáveis x_{n-1} x_{n-2} $\ldots$ x_0 são iguais ao binário resultante da conversão do inteiro decimal i de decimal para binário.

Note que aplicando a expressão do teorema em uma função f em particular, apenas os mintermos associados a $f(i) = 1$ aparecem na expressão final. Os mintermos m_i tais que $f(i) = 0$ são "eliminados" da expressão final pois esses mintermos são todos operados AND com 0 ($f(i) = 0$).

■ **Exemplo 6.3** Considere a função $f(x_3,x_2,x_1,x_0)$ cuja tabela verdade está mostrada na Tabela. 6.4. Nela é possivel notar que:

$$f(i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = 0 \text{ ou } i = 15 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{6.5}$$

Sendo assim,

$$f(i)\cdot m_i = \begin{cases} f(i), & \text{se } i = 0 \text{ ou } i = 15 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{6.6}$$

Portanto, aplicando (6.4) à descrição da função $f(x_3,x_2,x_1,x_0)$ chega-se a:

$$\begin{aligned} f(x_3,x_2,x_1,x_0) =& f(0)\cdot m_0 + f(15)\cdot m_{15}. \\ =& m_0 + m_{15} \\ =& \overline{x_3}\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_1}\cdot\overline{x_0} + x_3\cdot x_2\cdot x_1\cdot x_0. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Tabela 6.4: Tabela verdade da função discutida no exemplo 6.3.

i	x_3	x_2	x_1	x_0	$f(x_3,x_2,x_1,x_0)$
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

■

Teorema 6.1.2 A representação de uma função particular f na forma de mintermos é única.

Definição 6.1.6 (Forma canônica soma de produtos) A representação de uma função f utilizando somas de mintermos é chamada de forma canônica de f soma de produtos.

É possível expressar (6.4) em uma notação compacta:

$$\begin{aligned} f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0) &= f(0) \cdot m_0 + f(1) \cdot m_1 + \ldots + f(2^n - 1) \cdot m_{2^n-1} \\ &= \sum_{i=0}^{2^n-1} f(i) \cdot m_i, \end{aligned} \tag{6.8}$$

usando o símbolo Σ para denotar a aplicação sucessiva de operações OR. Uma notação ainda mais compacta pode ser obtida informando os mintermos presentes em uma função específica apenas indicando os índices u_k dos mintermos m_{u_k} $(0 \leq u_k \leq 2^n - 1)$ presentes na soma:

$$f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0) = \sum m(u_0, u_1, \ldots u_{K-1}), \tag{6.9}$$

em que K indica o número de atribuições diferentes para $x_{n-1}, \ldots, x_0$ que tornam $f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0) = 1$.

■ **Exemplo 6.4** Encontre as três possíveis formas mostradas de escrever algebricamente a função $f(x_3, x_2, x_1, x_0)$ cuja tabela verdade está mostrada na Tabela. 6.5 utilizando a forma canônica soma de produtos.

Tabela 6.5: Tabela verdade da função discutida no exemplo 6.4.

i	x_3	x_2	x_1	x_0	$f(x_3, x_2, x_1, x_0)$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

A tabela verdade mostra que a função possui como resultado o valor 1 para as seguintes atribuições de valores às variáveis independentes: 0111 e 1111. Isso corresponde aos mintermos de índice 7 e 15. Sendo assim:

$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = \sum m(7, 15), \tag{6.10}$$

ou

$$f(x_3,x_2,x_1,x_0) = m_7 + m_{15}, \tag{6.11}$$

ou

$$f(x_3,x_2,x_1,x_0) = \overline{x_3} \cdot x_2 \cdot x_1 \cdot x_0 + x_3 \cdot x_2 \cdot x_1 \cdot x_0. \tag{6.12}$$

■

■ **Exemplo 6.5** Considere um sistema comparador binário de 2 *bits* cuja descrição em alto nível é:
- Entradas: X e Y com $X,Y \in \{0,1,2,3\}$.
- Saídas: X_{maior}, Y_{maior} e XY_{iguais}
- Funções: X_{maior} indica $X > Y$, Y_{maior} indica $Y > X$ e XY_{iguais} indica $X = Y$.

Encontre as funções de chaveamento que implementam o sistema.

Primeiramente, o sistema será especificado em nível binário usando as seguintes funções binárias para as saídas do sistema:

$$z_2 = X_{\text{maior}} = \begin{cases} 1, & \text{se } X > Y \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$z_1 = XY_{\text{iguais}} = \begin{cases} 1, & \text{se } X = Y \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$z_0 = Y_{\text{maior}} = \begin{cases} 1, & \text{se } X < Y \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e as seguintes entradas binárias: $X = x_1x_0$ e $Y = y_1y_0$. Usando essas definições é possível montar a tabela verdade do sistema mostrada na Tabela. 6.6.

Observando cada uma das saídas e aplicando a metodologia apresentada para a obtenção da função na forma canônica SDP chega-se a:

$$\begin{aligned} z_2 =& \sum m(4,8,9,12,13,14) \\ =& \overline{x_1} \cdot x_0 \cdot \overline{y_1} \cdot \overline{y_0} + x_1 \cdot \overline{x_0} \cdot \overline{y_1} \cdot \overline{y_0} + x_1 \cdot \overline{x_0} \cdot \overline{y_1} \cdot y_0 + x_1 \cdot x_0 \cdot \overline{y_1} \cdot \overline{y_0} + x_1 \cdot x_0 \cdot \overline{y_1} \cdot y_0 + \\ & + x_1 \cdot x_0 \cdot y_1 \cdot \overline{y_0}. \end{aligned} \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned} z_1 =& \sum m(0,5,10,15) \\ =& \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} \cdot \overline{y_1} \cdot \overline{y_0} + \overline{x_1} \cdot x_0 \cdot \overline{y_1} \cdot y_0 + x_1 \cdot \overline{x_0} \cdot y_1 \cdot \overline{y_0} + x_1 \cdot x_0 \cdot y_1 \cdot y_0. \end{aligned} \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned} z_0 =& \sum m(1,2,3,6,7,11) \\ =& \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} \cdot \overline{y_1} \cdot y_0 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} \cdot y_1 \cdot \overline{y_0} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} \cdot y_1 \cdot y_0 + \overline{x_1} \cdot x_0 \cdot y_1 \cdot \overline{y_0} + \overline{x_1} \cdot x_0 \cdot y_1 \cdot y_0 + \\ & + x_1 \cdot \overline{x_0} \cdot y_1 \cdot y_0. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Tabela 6.6: Tabela verdade para o comparador de 2 *bits*.

i	x_1	x_0	y_1	y_0	z_2	z_1	z_0
0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1
2	0	0	1	0	0	0	1
3	0	0	1	1	0	0	1
4	0	1	0	0	1	0	0
5	0	1	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0	0	1
7	0	1	1	1	0	0	1
8	1	0	0	0	1	0	0
9	1	0	0	1	1	0	0
10	1	0	1	0	0	1	0
11	1	0	1	1	0	0	1
12	1	1	0	0	1	0	0
13	1	1	0	1	1	0	0
14	1	1	1	0	1	0	0
15	1	1	1	1	0	1	0

É possível se aplicar os teoremas da álgebra de boole para se reduzir as expressões obtidas. Por exemplo, aplicando os teoremas da álgebra de boole a z_1:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sum m(0,5,10,15) \\
&= \overline{x_1}\cdot\overline{x_0}\cdot\overline{y_1}\cdot\overline{y_0} + \overline{x_1}\cdot x_0\cdot\overline{y_1}\cdot y_0 + x_1\cdot\overline{x_0}\cdot y_1\cdot\overline{y_0} + x_1\cdot x_0\cdot y_1\cdot y_0 \\
&= \overline{x_1}\cdot\overline{y_1}\cdot(\overline{x_0}\cdot\overline{y_0} + x_0\cdot y_0) + x_1\cdot y_1(\overline{x_0}\cdot\overline{y_0} + x_0\cdot y_0) \\
&= (\overline{x_0}\cdot\overline{y_0} + \cdot x_0\cdot y_0)\cdot(\overline{x_1}\cdot\overline{y_1} + x_1\cdot y_1) \\
&= (\overline{y_0 \oplus x_0})\cdot(\overline{y_1 \oplus x_1}).
\end{aligned} \tag{6.16}$$

■

6.2 Produto de somas - PDS

O produto de somas (PDS) é uma forma de escrever algebricamente funções de chaveamento, que usa o conceito de decomposição de funções. A ideia é decompor a função em partes, com cada parte correspondendo a cada caso no qual os valores das variáveis independentes produzem como resultado na função o valor binário 0. Para cada um desses casos é escrita uma expressão algébrica de tal sorte que essa expressão seja igual a 0, única e exclusivamente para essa atribuição sob análise, sendo igual a 1 caso contrário.

Após escrever a expressão algébrica relativa a cada caso, é possível escrever a expressão da função completa aplicando o operador AND às expressões encontradas. Essa ideia é ilustrada a seguir aqui por meio de um exemplo. Antes de considerar o exemplo são definidos alguns termos que são utilizados na argumentação:

Definição 6.2.1 (Termo soma)
Termo soma é uma única literal ou o OR de várias literais.
Exemplos: x_0, $x_1 + x_2$, $x_1 + x_2 + \overline{x_3}$.

Definição 6.2.2 (Produto de somas)
Produto de omas é um único termo soma ou operação AND de vários termos soma.
Exemplos: $(x_2 + \overline{x_3}) \cdot (x_1 + x_3)$, $x_2 + \overline{x_3}$.

Retomando o exemplo, considere a função $f(x_2, x_1, x_0)$, de 3 variáveis, mostrada na Tabela. 6.7. Nela, é possível identificar duas atribuições para as variáveis independentes que resultam em $f(x_2, x_1, x_0) = 0$, a saber, $x_2x_1x_0 = 000$ e $x_2x_1x_0 = 101$.

Tabela 6.7: Exemplo de uma tabela verdade de uma função de chaveamento de três variáveis.

x_2	x_1	x_0	$f_1(x_2,x_1,x_0)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Como existem exatamente duas atribuições para as variáveis independentes que resultam em $f(x_2,x_1,x_0) = 0$ é possível decompor a função f em duas funções: uma função f_1 que resulta em 0 apenas para $x_2x_1x_0 = 000$ (e em 1 caso contrário) e outra função f_2 que resulta em 0 apenas para $x_2x_1x_0 = 101$ (e em 1 caso contrário). As tabelas verdades de f_1 e f_2 estão mostradas, respectivamente nas Tabelas 6.8a e 6.8b.

Tabela 6.8: Decomposição da função f mostrada na Tabela. 6.7 nas funções f_1 e f_2.

x_2	x_1	x_0	$f_1(x_2,x_1,x_0)$	expressão
0	0	0	0	$x_2 + x_1 + x_0$
0	0	1	1	
0	1	0	1	
0	1	1	1	
1	0	0	1	
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	

(a)

x_2	x_1	x_0	$f_2(x_2,x_1,x_0)$	expressão
0	0	0	1	
0	0	1	1	
0	1	0	1	
0	1	1	1	
1	0	0	1	
1	0	1	0	$\overline{x_2} + x_1 + \overline{x_0}$
1	1	0	1	
1	1	1	1	

(b)

Note que ao se fazer o AND de f_1 com f_2 será obtida a tabela verdade de f (faça uma comparação entre as Tabelas 6.7, 6.8a e 6.8b). Sendo assim, é preciso encontrar uma expressão algébrica que resulte em 0 única e exclusivamente para $x_2x_1x_0 = 000$, para descrever f_1, e outra que resulte em 0 única e exclusivamente para $x_2x_1x_0 = 101$, para descrever f_2. Ao fazer isso é possível escrever:

$$f = f_1 \cdot f_2.$$

Uma expressão possível que resulta em 0 única e exclusivamente para $x_2x_1x_0 = 000$ é $x_2 + x_1 + x_0$. Note que:

$$x_2 + x_1 + x_0 = \begin{cases} 0, & \text{se } x_2x_1x_0 = 000 \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{6.17}$$

De forma análoga, uma expressão possível que resulta em 0 única e exclusivamente para $x_2x_1x_0 = 101$ é $\overline{x_2} + x_1 + \overline{x_0}$ pois:

$$\overline{x_2} + x_1 + \overline{x_0} = \begin{cases} 0, & \text{se } x_2x_1x_0 = 101 \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{6.18}$$

Ou seja, é possível escrever:

$$f_1 = x_2 + x_1 + x_0$$

e

$$f_2 = \overline{x_2} + x_1 + \overline{x_0}.$$

Encontrando assim, a expressão para a função f:

$$f(x_2, x_1, x_0) = (x_2 + x_1 + x_0) \cdot (\overline{x_2} + x_1 + \overline{x_0}). \tag{6.19}$$

Observa-se que a função $f(x_2, x_1, x_0)$ é da forma produto de somas e possui dois termos soma. Nesse exemplo, há dois termos soma pois há dois 0s na última coluna binária da tabela verdade de f. Como fica claro a partir da argumentação feita, o número de termos soma que aparecem na expressão algébrica de f, usando a metodologia apresentada, é igual ao número de 0 na última coluna binária da tabela verdade de f.

Os dois termos soma encontrados no exemplo e mostrados em (6.19) têm uma característica bem definida: todas as variáveis da função f aparecem nos termos soma exatamente um vez (ou na forma complementada ou na forma não complementada). Termos soma com esse formato são a base da estratégia apresentada para a escrita algébrica de funções de chaveamento na forma produto de somas, eles são denominados maxtermos.

Definição 6.2.3 (Maxtermo) Um maxtermos de uma função f de n variáveis é um termo soma de exatamente n variáveis distintas em que cada variável aparece exatamente uma única vez. Essa aparição pode se dar na forma complementada ou não complementada. Existem 2^n maxtermos diferentes de n variáveis.

Cada maxtermos tem como resultado o valor 0 para uma única atribuição de valores às suas literais. Isso acontece porque a soma tem valor igual 0 somente quando todas as literais tem valor igual 0. Por exemplo:

$$x_3 + \overline{x_2} + \overline{x_1} + x_0 = 0 \Longleftrightarrow x_3x_2x_1x_0 = 0110.$$

■ **Exemplo 6.6** A Tabela. 6.9 mostra alguns exemplos de termos soma que são possíveis maxtermos ou não, de acordo com o número de variáveis consideradas. ■

Tabela 6.9: Exemplos de termos soma que podem representar maxtermos, ou não, de acordo com o número de variáveis consideradas.

expressão algébrica	número de variáveis consideradas	maxtermo válido?
$x_2+\overline{x_1}+\overline{x_0}$	3	sim
$\overline{x_2}+\overline{x_1}+x_0$	3	sim
$x_2+\overline{x_1}$	3	não
x_1+x_0	3	não
$x_3+\overline{x_2}+x_1+x_0$	4	sim
$\overline{x_3}+x_2+x_1+\overline{x_0}$	4	sim
$\overline{x_3}+x_2+x_1$	4	não
x_3+x_2	4	não

Há uma forma sintética de se expressar um determinado maxtermos: a notação-M

Definição 6.2.4 (notação-M) Notação compacta usada para expressar um maxtermo. Cada maxtermo é rotulado com um índice i e escrito na notação-M como M_i. O maxtermos M_i de n variáveis tem a seguinte forma geral:

$$M_i = x_{n-1}+x_{n-2}+\ldots+x_1+x_0, \tag{6.20}$$

em que as variáveis x_k $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ podem aparecer complementadas ou não dependendo do valor de i. O índice i é um número inteiro decimal cuja representação binária é obtida quando um *bit* 0 é associado com cada variável não complementada do maxtermo e um *bit* 1 é associado com cada variável complementada do maxtermo.

■ **Exemplo 6.7** Qual a representação do maxtermo de quatro variáveis $x_3+\overline{x_2}+x_1+\overline{x_0}$ usando a notação-M?

maxtermo:	x_3	$+$	$\overline{x_2}$	$+$	x_1	$+$	$\overline{x_0}$
	$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
associação binária:	0		1		0		1

O número binário associado ao maxtermo fornecido é portanto 0101 O que corresponde ao número 5 em decimal. Sendo assim, o maxtermo $x_3+\overline{x_2}+x_1+\overline{x_0}$ é representado na notação-M por M_5. ■

Teorema 6.2.1 Qualquer função de chaveamento combinacional pode ser representada como um produto de maxtermos. Usando a notação-M, qualquer função de chaveamento combinacional pode ser escrita assim:

$$f(x_{n-1},x_{n-2},\ldots,x_0) = (f(0)+M_0)\cdot(f(1)+M_1)\cdot\ldots\cdot(f(2^n-1)+M_{2^n-1}), \tag{6.21}$$

em que $f(i)$ corresponde ao valor da função que se quer representar quando as variáveis x_{n-1} x_{n-2} ... x_0 são iguais ao binário resultante da conversão do inteiro decimal i de decimal para binário.

Note que aplicando a expressão do teorema em uma função f em particular, apenas os maxtermos associados a $f(i) = 0$ aparecem na expressão final. Os maxtermos M_i tais que $f(i) = 1$ são "eliminados" da expressão final pois esses maxtermos são todos operados OR com 1 ($f(i) = 1$).

■ **Exemplo 6.8** Considere a função $f(x_3, x_2, x_1, x_0)$ cuja tabela verdade está mostrada na Tabela. 6.10. Nela é possivel notar que:

$$f(i) = \begin{cases} 0, \text{ se } i = 0 \text{ ou } i = 15 \\ 1, \text{ caso contrário.} \end{cases} \tag{6.22}$$

Sendo assim,

$$f(i) + M_i = \begin{cases} f(i), \text{ se } i = 0 \text{ ou } i = 15 \\ 1, \text{ caso contrário.} \end{cases} \tag{6.23}$$

Portanto, aplicando (6.21) à descrição da função $f(x_3, x_2, x_1, x_0)$ chega-se a:

$$\begin{aligned} f(x_3, x_2, x_1, x_0) =& (f(0) + M_0) \cdot (f(15) + M_{15}). \\ =& M_0 \cdot M_{15} \\ =& (x_3 + x_2 + x_1 + x_0) \cdot (\overline{x_3} + \overline{x_2} + \overline{x_1} + \overline{x_0}). \end{aligned} \tag{6.24}$$

Tabela 6.10: Tabela verdade da função discutida no exemplo 6.8.

i	x_3	x_2	x_1	x_0	$f(x_3, x_2, x_1, x_0)$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	0

■

Teorema 6.2.2 A representação de uma função particular f na forma de maxtermos é única.

Definição 6.2.5 (Forma canônica produto de somas) A representação de uma função f utilizando somas de maxtermos é chamada de forma canônica de f produto de somas.

É possível expressar (6.21) em uma notação compacta:

$$\begin{aligned} f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0) &= (f(0) + M_0) \cdot (f(1) + M_1) \cdot \ldots \cdot (f(2^n - 1) + M_{2^n-1}) \\ &= \prod_{i=0}^{2^n-1} [f(i) + M_i]. \end{aligned} \tag{6.25}$$

usando o símbolo Π para denotar a aplicação sucessiva de operações AND. Uma notação ainda mais compacta pode ser obtida informando os maxtermos presentes em uma função específica apenas indicando os índices u_k dos maxtermos M_{u_k} $(0 \leq u_k \leq 2^n - 1)$ presentes no produto:

$$f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0) = \prod M(u_0, u_1, \ldots u_{K-1}), \tag{6.26}$$

em que K indica o número de atribuições diferentes para $x_{n-1}, \ldots, x_0$ que tornam $f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0) = 0$.

■ **Exemplo 6.9** Encontre as três possíveis formas mostradas de escrever algebricamente a função $f(x_3, x_2, x_1, x_0)$ cuja tabela verdade está mostrada na Tabela. 6.11 utilizando a forma canônica produtos de somas.

Tabela 6.11: Tabela verdade da função discutida no exemplo 6.9.

i	x_3	x_2	x_1	x_0	$f(x_3, x_2, x_1, x_0)$
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	0

A tabela verdade mostra que a função possui valor 0 para os valores das variáveis de entrada 0111 e 1111. Isso corresponde aos maxtermos de índice 7 e 15. Sendo assim:

$$f(x_3,x_2,x_1,x_0) = \prod M(7,15), \tag{6.27}$$

ou

$$f(x_3,x_2,x_1,x_0) = M_7 \cdot M_{15}, \tag{6.28}$$

ou

$$f(x_3,x_2,x_1,x_0) = (x_3+\overline{x_2}+\overline{x_1}+\overline{x_0})\cdot(\overline{x_3}+\overline{x_2}+\overline{x_1}+\overline{x_0}). \tag{6.29}$$

■

■ **Exemplo 6.10** Considere um sistema comparador binário de 2 *bits* cuja descrição em alto nível é:

- Entradas: X e Y com $X,Y \in \{0,1,2,3\}$.
- Saídas: X_{maior}, Y_{maior} e XY_{iguais}
- Funções: X_{maior} indica $X > Y$, Y_{maior} indica $Y > X$ e XY_{iguais} indica $X = Y$.

Encontre as funções de chaveamento que implementam o sistema.

Primeiramente, o sistema será especificado em nível binário usando as seguintes funções binárias para as saídas do sistema:

$$z_2 = X_{\text{maior}} = \begin{cases} 0, & \text{se } X > Y \\ 1, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$z_1 = XY_{\text{iguais}} = \begin{cases} 0, & \text{se } X = Y \\ 1, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$z_0 = Y_{\text{maior}} = \begin{cases} 0, & \text{se } X < Y \\ 1, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e as seguintes entradas binárias: $X = x_1x_0$ e $Y = y_1y_0$. Com essas definições é possível montar a tabela verdade do sistema conforme mostrado na Tabela. 6.12.

Observando cada uma das saídas e aplicando a metodologia apresentada para a obtenção da função na forma canônica PDS chega-se a:

$$\begin{aligned} z_2 &= \prod M(4,8,9,12,13,14) \\ &= (x_3+\overline{x_2}+x_1+x_0)\cdot(\overline{x_3}+x_2+x_1+x_0)\cdot(\overline{x_3}+x_2+x_1+\overline{x_0})\cdot \\ &\quad \cdot(\overline{x_3}+\overline{x_2}+x_1+x_0)\cdot(\overline{x_3}+\overline{x_2}+x_1+\overline{x_0})\cdot(\overline{x_3}+\overline{x_2}+\overline{x_1}+x_0), \end{aligned} \tag{6.30}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \prod M(0,5,10,15) \\ &= (x_3+x_2+x_1+x_0)\cdot(x_3+\overline{x_2}+x_1+\overline{x_0})\cdot(\overline{x_3}+x_2+\overline{x_1}+x_0)\cdot(\overline{x_3}+\overline{x_2}+\overline{x_1}+\overline{x_0}), \end{aligned} \tag{6.31}$$

$$\begin{aligned} z_0 &= \prod M(1,2,3,6,7,11) \\ &= (x_3+x_2+x_1+\overline{x_0})\cdot(x_3+x_2+\overline{x_1}+x_0)\cdot(x_3+x_2+\overline{x_1}+\overline{x_0})\cdot \\ &\quad \cdot(x_3+\overline{x_2}+\overline{x_1}+x_0)\cdot(x_3+\overline{x_2}+\overline{x_1}+\overline{x_0})\cdot(\overline{x_3}+x_2+\overline{x_1}+\overline{x_0}). \end{aligned} \tag{6.32}$$

■

Tabela 6.12: Tabela verdade para o comparador de 2 *bits*.

i	x_1	x_0	y_1	y_0	z_2	z_1	z_0
0	0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0
2	0	0	1	0	1	1	0
3	0	0	1	1	1	1	0
4	0	1	0	0	0	1	1
5	0	1	0	1	1	0	1
6	0	1	1	0	1	1	0
7	0	1	1	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0	1	1
9	1	0	0	1	0	1	1
10	1	0	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1	0	0
12	1	1	0	0	0	0	1
13	1	1	0	1	0	0	1
14	1	1	1	0	0	0	1
15	1	1	1	1	1	0	1

6.3 Descrição algébrica de funções não completamente especificadas

Como visto na Seção 4.6 as funções não completamente especificadas são funções que podem ser usadas para modelar sistemas cujos valores de saída são obrigatoriamente definidos para um subconjunto das entradas que podem ser apresentadas ao sistema permanecendo indefinidos para as demais entradas.

Os valores não especificados podem assumir tanto o valor 1 como o valor o, uma vez que o projetista da função/sistema não se importa como a função/sistema se comporta quando esta entrada não especificada é apresentada ao sistema.

De forma análoga às notações m e M os valores não especificados podem ser notados usando a notação-dc. Para exemplificar, a função não completamente especificada mostrada na Tabela. 6.13 pode ser escrita na forma soma de produtos por:

$$f(x_2,x_1,x_0) = \sum m(1,4,7) \text{ e } \sum dc(3,6) \tag{6.33}$$

e na forma produtos de somas:

$$f(x_3,x_1,x_0) = \prod m(0,2,5) \text{ e } \prod dc(3,6). \tag{6.34}$$

6.4 Conversão entre formas canônicas

Como visto, é possível se representar funções usando as formas canônicas soma de produtos e produto de somas. Ambas as metodologias podem ser aplicados em qualquer função/sistema. Sendo assim, é interessante estabelecer uma forma que possibilite realizar a conversão entre as formas canônicas.

Em uma função completamente especificada a conversão entre formas canônicas se dá entre uma forma canônica de partida e uma forma canônica alvo da seguinte maneira:

Tabela 6.13: Exemplo de função não completamente especificada.

i	x_2	x_1	x_0	$f(x_2,x_1,x_0)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	x
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	x
7	1	1	1	1

1) Identifica-se os índices (*i.e.* atribuições das variáveis independentes) incluídos na forma canônica de partida.
2) Identifica-se todos os índices (*i.e.* todas as atribuições possíveis de dentrada) possíveis para a função (isso vai depender do número de variáveis da função sob análise).
3) Do conjunto dos índices possíveis se exclui os índices presentes na forma canônica de partida e identificados no passo 1. Os índices restantes são incluídos na descrição da forma canônica alvo.

Os três passos podem ser descritos matematicamente. Considere a função $f(x_{n-1},x_{n-2},\ldots,x_0)$ de n variáveis que será convertida. Passo 1: Considere $U = \{(u_0,u_1,\ldots u_{K-1})\}$ o conjunto dos índices de atribuições para as variáveis da função que produzem o resultado de interesse na forma canônica de partida (1 se for SDP e 0 se for PDS). Passo 2: Considere o e o conjunto $A = \{(a_0,a_1,\ldots a_{2^n-1})\}$ o conjunto de todos os índices da função f. Passo 3: considera agora o conjunto $D = \{(d_0,d_1,\ldots d_{Q-1})\}$ cujos elementos são obtidos após a realização da operação:

$$D = A - U,$$

em que, $Q = 2^n - K$. Aplicando a conversão partindo de SDP e chegando a PDS se tem:

$$f(x_{n-1},x_{n-2},\ldots,x_0) = \sum m(u_0,u_1,\ldots u_{K-1}) = \prod M(d_0,d_1,\ldots d_{Q-1}). \tag{6.35}$$

Na direção contrária, de PDS para SPD, a conversão é feita assim:

$$f(x_{n-1},x_{n-2},\ldots,x_0) = \prod M(u_0,u_1,\ldots u_{K-1}) = \sum m(d_0,d_1,\ldots d_{Q-1}), \tag{6.36}$$

■ **Exemplo 6.11** Considere a função $f(x_2,x_1,x_0) = \sum m(0,1,3)$. Faça a conversão da forma SDP para a forma PDS.

A aplicação do passo 1 da metodologia de conversão resulta no conjunto $U = \{0,1,3\}$ com $K = 3$. Aplicando o passo 2 chega-se ao conjunto $A = \{0,1,\ldots,6,7\}$. Já no passo 3 é preciso realizar a operação de subtração de conjuntos $A-U$ o que resulta no conjunto $D = A-U = \{2,4,5,6,7\}$ com Q = $2^3 - 3 = 5$.

Logo,

$$f(x_2,x_1,x_0) = \sum m(0,1,3) = \prod M(2,4,5,6,7). \tag{6.37}$$

■

6.5 Problemas propostos

Problema 6.1 Indique em cada caso se os termos mostrados são possíveis mintermos ou maxtermos de n variáveis:

a) Para $n = 5$, $x_4{\cdot}\overline{x_3}{\cdot}x_2{\cdot}\overline{x_1}{\cdot}x_0$
b) Para $n = 4$, $x_3{\cdot}x_2{\cdot}x_1{\cdot}x_0$
c) Para $n = 3$, $\overline{x_1}{\cdot}\overline{x_0}$
d) Para $n = 5$, $x_3{+}\overline{x_2}{+}\overline{x_1}{+}x_0$
e) Para $n = 4$, $\overline{x_3}{+}\overline{x_2}{+}x_1{+}\overline{x_0}$
f) Para $n = 3$, $x_1{+}x_0$

Problema 6.2 Escreva a expressão algébricas das funções definidas em cada item (por meio de seu Conjunto-UM()) usando as variáveis e usando a notação-m.

a) $f(x_2,x_1,x_0) = \text{Conjunto-UM}(0,4,7)$
b) $f(x_3,x_2,x_1,x_0) = \text{Conjunto-UM}(0,1,7,8)$
c) $f(x_4,x_3,x_2,x_1,x_0) = \text{Conjunto-UM}(5,8,17)$

Problema 6.3 Escreva a expressão algébricas das funções definidas em cada item (por meio de seu Conjunto-ZERO()) usando as variáveis e usando a notação-M.

a) $f(x_2,x_1,x_0) = \text{Conjunto-ZERO}(2,5,6,7)$
b) $f(x_3,x_2,x_1,x_0) = \text{Conjunto-ZERO}(0,9,15)$
c) $f(x_4,x_3,x_2,x_1,x_0) = \text{Conjunto-ZERO}(2,8,18.19)$

Problema 6.4 Escreva as expressões algébricas (em termos das variáveis) a partir da:

a) Tabela verdade mostrada na Tabela. 6.14a na forma SDP.
b) Tabela verdade mostrada na Tabela. 6.14b na forma PDS.

Problema 6.5 As tabelas verdade mostradas na Tabela. 6.15 descrevem funções não completamente especificadas. Escreva as expressões algébricas (em notação compacta m ou M) a partir da:

a) Tabela verdade mostrada na Tabela. 6.15a na forma SDP.
b) Tabela verdade mostrada na Tabela. 6.15b na forma PDS.

Problema 6.6 Faça a conversão de forma canônica das seguintes funções (apenas está mostrada a expressão da função em SDP ou PDS):

a) $x_2{\cdot}\overline{x_1}{\cdot}\overline{x_0} + \overline{x_2}{\cdot}x_1{\cdot}\overline{x_0} + x_2{\cdot}\overline{x_1}{\cdot}\overline{x_0} + x_2{\cdot}x_1{\cdot}x_0$
b) $(x_2{+}\overline{x_1}{+}x_0)\cdot(\overline{x_2}{+}\overline{x_1}{+}x_0)$
c) $x_3{\cdot}\overline{x_2}{\cdot}\overline{x_1}{\cdot}\overline{x_0} + \overline{x_3}{\cdot}x_2{\cdot}x_1{\cdot}\overline{x_0} + x_3{\cdot}x_2{\cdot}\overline{x_1}{\cdot}\overline{x_0} + \overline{x_3}{\cdot}\overline{x_2}{\cdot}x_1{\cdot}x_0$
d) $(x_3{+}x_2{+}x_1{+}x_0)\cdot(\overline{x_3}{+}x_2{+}\overline{x_1}{+}x_0)\cdot(\overline{x_3}{+}\overline{x_2}{+}x_1{+}x_0)$

Expresse o resultado ou nas notações m/M ou na forma algebrica evidenciando as variáveis.

Problema 6.7 Considere um sistema multiplicador que realiza a seguinte operação $Z = AxB$ em que $A,B \in \{0,1,2,3\}$.

a) Encontre a tabela verdade do sistema.
b) Encontre as expressões algébricas para as saídas do sistema.
c) Implemente as saídas do sistema usando portas lógicas.

Tabela 6.14: Tabelas verdades consideradas no exercício 6.4

i	x_3	x_2	x_1	x_0	$f(x_3,x_2,x_1,x_0)$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

(a)

i	x_3	x_2	x_1	x_0	$f(x_3,x_2,x_1,x_0)$
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	0

(b)

Tabela 6.15: Tabelas verdades consideradas no exercício 6.5

i	x_3	x_2	x_1	x_0	$f(x_3,x_2,x_1,x_0)$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	x
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	x
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	x
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

(a)

i	x_3	x_2	x_1	x_0	$f(x_3,x_2,x_1,x_0)$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	x
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	x
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

(b)