

EXERCÍCIOS - SALA DE AULA

1º) X e Y duas v.a. binárias, em que:

$$\begin{cases} P(X=0) = 0,5 & \rightarrow P(X=1) = 1 - 0,5 = 0,5 \\ P(Y=0|X=0) = 0,8 & \rightarrow P(Y=1|X=0) = 1 - 0,8 = 0,2 \\ P(Y=0|X=1) = 0,5 & \rightarrow P(Y=1|X=1) = 1 - 0,5 = 0,5 \end{cases}$$

$$a) H(X) = P(X=0) \cdot \log_2 \frac{1}{P(X=0)} + P(X=1) \cdot \log_2 \frac{1}{P(X=1)}$$

$$H(X) = 2 \times \left[0,5 \cdot \log_2 \frac{1}{0,5} \right] = \boxed{1 \text{ bit}}$$

$$b) H(Y) = P(Y=0) \cdot \log_2 \frac{1}{P(Y=0)} + P(Y=1) \cdot \log_2 \frac{1}{P(Y=1)}$$

$$\bullet P(Y=0) = P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=0)$$

$$P(Y=0) = P(X=0) \cdot P(Y=0|X=0) + P(X=1) \cdot P(Y=0|X=1)$$

$$P(Y=0) = 0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,65$$

$$\bullet P(Y=1) = 1 - P(Y=0) = 1 - 0,65 = 0,35$$

logo:

$$H(Y) = 0,65 \cdot \log_2 \frac{1}{0,65} + 0,35 \cdot \log_2 \frac{1}{0,35} = \boxed{0,935 \text{ bit}}$$

$$\begin{aligned} \kappa) H(X,Y) &= P(X=0, Y=0) \cdot \log_2 \frac{1}{P(X=0, Y=0)} + \\ &+ P(X=0, Y=1) \cdot \log_2 \frac{1}{P(X=0, Y=1)} + \\ &+ P(X=1, Y=0) \cdot \log_2 \frac{1}{P(X=1, Y=0)} + \\ &+ P(X=1, Y=1) \cdot \log_2 \frac{1}{P(X=1, Y=1)} \end{aligned}$$

$$\bullet P(X=0, Y=0) = P(X=0) \cdot P(Y=0|X=0) = 0,5 \times 0,8 = 0,4$$

$$\bullet P(X=0, Y=1) = P(X=0) \cdot P(Y=1|X=0) = 0,5 \times 0,2 = 0,1$$

$$\bullet P(X=1, Y=0) = P(X=1) \cdot P(Y=0|X=1) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$$

$$\bullet P(X=1, Y=1) = P(X=1) \cdot P(Y=1|X=1) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$$

logo:

$$H(X,Y) = 0,4 \cdot \log_2 \frac{1}{0,4} + 0,1 \cdot \log_2 \frac{1}{0,1} +$$

$$+ 2 \times \left[0,25 \cdot \log_2 \frac{1}{0,25} \right]$$

$$\boxed{H(X,Y) = 1,861 \text{ bits}}$$

EXERCÍCIOS - SALA DE AULA

1º) d) $H(Y/X) = P(X=0) \cdot H(Y/X=0) + P(X=1) \cdot H(Y/X=1)$.

$$\bullet H(Y/X=0) = P(Y=0/X=0) \cdot \log_2 \frac{1}{P(Y=0/X=0)} + P(Y=1/X=0) \cdot \log_2 \frac{1}{P(Y=1/X=0)} = 0,8 \times \log_2 \frac{1}{0,8} + 0,2 \times \log_2 \frac{1}{0,2} = \underline{\underline{0,72 \text{ bit}}}$$

$$\bullet H(Y/X=1) = P(Y=0/X=1) \cdot \log_2 \frac{1}{P(Y=0/X=1)} + P(Y=1/X=1) \cdot \log_2 \frac{1}{P(Y=1/X=1)} = 0,5 \times \log_2 \frac{1}{0,5} + 0,5 \times \log_2 \frac{1}{0,5} = \underline{\underline{1 \text{ bit}}}$$

Logo: $H(Y/X) = 0,5 \times 0,72 + 0,5 \times 1 \approx \underline{\underline{0,86 \text{ bit}}}$

Obs.: Outra forma:

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y/X) \Rightarrow H(Y/X) = H(X,Y) - H(X) = 1,861 - 1 = \underline{\underline{0,861 \text{ bit}}}$$

$$e) H(X/Y) = H(X,Y) - H(Y) = 1,861 - 0,935 = \underline{\underline{0,926 \text{ bit}}}$$

$$f) I(X,Y) = H(X) - H(X/Y) = 1 - 0,926 = \underline{\underline{0,074}}$$

