TEOREMA: $\boxed{H(U^n) = n \times H(U)}$

Prova: U^n é uma extensão de ordem n da fonte $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_K\}$.

$U^n = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{K^n}\}$, em que $\boxed{\sigma_i = u_{i1} u_{i2} \cdots u_{in}}$

σ_i corresponde a uma sequência específica de n símbolos de U

$$H(U^n) = -\sum_{i=1}^{K^n} P(\sigma_i) \cdot \log P(\sigma_i)$$

$$H(U^n) = -\sum_{i_1=1}^{K} \sum_{i_2=1}^{K} \cdots \sum_{i_n=1}^{K} P(u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{in}) \cdot \log P(u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{in})$$

$$H(U^n) = -\sum_{i_1=1}^{K} \sum_{i_2=1}^{K} \cdots \sum_{i_n=1}^{K} P(u_{i1}) \cdot P(u_{i2}) \cdots P(u_{in}) \cdot \log \left[P(u_{i1}) \cdot P(u_{i2}) \cdots P(u_{in}) \right]$$

$$H(U^n) = -\sum_{i_1=1}^{K} \sum_{i_2=1}^{K} \cdots \sum_{i_n=1}^{K} P(u_{i1}) \cdot P(u_{i2}) \cdots P(u_{in}) \cdot \left[\log P(u_{i1}) + \log P(u_{i2}) + \cdots + \log P(u_{in}) \right]$$

$\Rightarrow$

$$H(U^n) = -\sum_{i_1=1}^{K} \sum_{i_2=1}^{K} \cdots \sum_{i_n=1}^{K} P(u_{i1}) \cdot P(u_{i2}) \cdots P(u_{in}) \cdot \log P(u_{i1}) + \cdots +$$

$$- \sum_{i_1=1}^{K} \sum_{i_2=1}^{K} \cdots \sum_{i_n=1}^{K} P(u_{i1}) P(u_{i2}) \cdots P(u_{in}) \cdot \log P(u_{i2})$$

$$- \sum_{i_1=1}^{K} \sum_{i_2=1}^{K} \cdots \sum_{i_n=1}^{K} P(u_{i1}) \cdot P(u_{i2}) \cdots P(u_{in}) \cdot \log P(u_{in}).$$

Lembre-se que: $\sum_i P(x_i) = 1$ (sobre todos os valores que "x" pode assumir)

$$H(U^n) = \underbrace{-\sum_{i_1=1}^{K} P(u_{i1}) \cdot \log P(u_{i1})}_{H(U)} \underbrace{- \sum_{i_2=1}^{K} P(u_{i2}) \cdot \log P(u_{i2})}_{H(U)} - \cdots \underbrace{- \sum_{i_n=1}^{K} P(u_{in}) \cdot \log P(u_{in})}_{H(U)}$$

$$H(U^n) = H(U) + H(U) + \cdots + H(U)$$

$$\boxed{H(U^n) = n \times H(U)}$$

2