Teoria das Probabilidades
(conceitos básicos)

Teoria da Informação - AULA 02

Profª. Verusca Severo

Universidade de Pernambuco
Escola Politécnica de Pernambuco

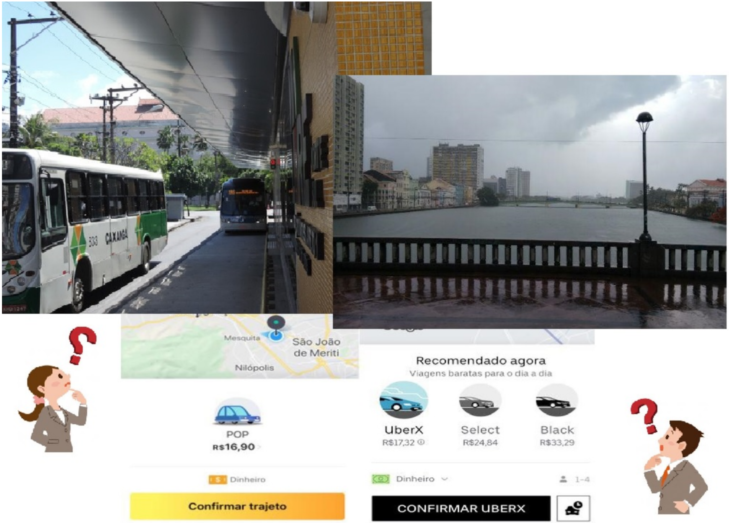
18 de junho de 2021

Teoria das Probabilidades (Revisão)

- Por que revisar conceitos de probabilidade?
  - A abordagem empregada por Shannon para medir entropia, ou incerteza, faz uso da **Teoria das Probabilidades**
  - A Teoria da Probabilidade é a **Teoria da Incerteza**
- A Teoria da Probabilidade "rodeia" nosso cotidiano

Teoria das Probabilidades (Revisão)

- Há **Incerteza** no nosso cotidiano?



Teoria das Probabilidades (Revisão)

- O que significa a palavra "probabilidade"?

Teoria das Probabilidades (Revisão)

- O que significa a palavra "probabilidade"?
  - Corresponde a proporção de em quantas situações um evento em questão realmente acontece;
  - Esta proporção é obtida dividindo o número de vezes que o evento em questão ocorre pelo número de situações gerais;
  - Por exemplo, no lançamento de uma moeda a propabalidade de dar coroa é obtida dividindo o número de coroas obtidas pelo número de lançamentos da moeda.

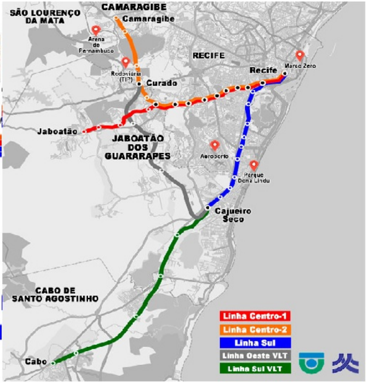
Teoria das Probabilidades (Revisão)

- A probabilidade de um evento é apenas uma medida da "fé" que temos sobre a sua ocorrência.

- Objetivo da Teoria das Probabilidades:
    - Modelar matematicamente conceitos como incerteza, possibilidade, chance, etc

- A Teoria da Probabilidade é apenas um modelo.
    - Modelos não são "A REALIDADE".
    - Modelos são úteis porque simplificam a realidade para que possamos entendê-la .

- A Teoria da Probabilidade é apenas um modelo.
    - Modelos não são "A REALIDADE".
    - Modelos são úteis porque simplificam a realidade para que possamos entendê-la .



Teoria das Probabilidades (Revisão)

- **Experimento Aleatório:** experimento que, ao ser repetido sob as mesmas condições, pode fornecer resultados diferentes (ou seja, o resultado não é conhecido).

    - **Resultado do lançamento de uma moeda equilibrada:**

    $$S = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$$

    - **Resultado do lançamento de um dado equilibrado:**

    $$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

    - **Tipo sanguíneo de um participante da sala escolhido ao acaso:**

    $$S = \{A, B, AB, O\}$$

Teoria das Probabilidades (Revisão)

- **Experimento Aleatório**
  - Resultado do lançamento de uma moeda equilibrada:

$$S = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$$

  - Resultado do lançamento de um dado equilibrado:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

  - Tipo sanguíneo de um participante da sala escolhido ao acaso:

$$S = \{A, B, AB, O\}$$

- **Espaço Amostral (S):** conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Teoria das Probabilidades (Revisão)

- **Evento:** corresponde a um subconjunto do espaço amostral S.
  - Por exemplo, seja o seguinte experimento aleatório: **lançamento de um dado equilibrado**, ou seja:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

  - **evento** $A =$ "número da face é par":

$$S_A = \{2, 4, 6\}$$

  - **evento** $B =$ "número da face é maior do que 3":

$$S_B = \{4, 5, 6\}$$

  - **evento** $C =$ "número da face é maior do que 4":

$$S_C = \{5, 6\}$$

Teoria das Probabilidades (Revisão)

- A partir de eventos quaisquer, podemos construir novos eventos usando as operações de **complemento, união** e **interseção**.

- Por exemplo:

  - $\bar{A}$ é o evento "A **NÃO** ocorre":

$$\bar{A} = \{1, 3, 5\}$$

  - $A \cup B$ é o evento "A ocorre **OU** B ocorre":

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$$

  - $A \cap B$ é o evento "A ocorre **E** B ocorre":

$$A \cap B = \{4, 6\}$$

Teoria das Probabilidades (Revisão)

- **Eventos mutuamente excludentes ou disjuntos:** os eventos A e B são disjuntos ou mutuamente exclusivos quando não têm elementos em comum, ou seja,

$$A \cap B = \emptyset$$

- **Eventos complementares:** os eventos A e B são complementares quando a sua intersecção é vazia e sua união é o espaço amostral, ou seja,

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{e} \quad A \cup B = S,$$

  - Isso implica em:

$$B = \bar{A}$$

Teoria das Probabilidades (Revisão)

- **Probabilidade** (Definição): mede a incerteza associada à ocorrência do evento. É uma função que associa a cada evento A um número $P(A)$ de forma que:

1. Para qualquer evento A:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

2. Para o espaço amostral S:

$$P(S) = 1$$

3. Se A e B são eventos mutuamente excludentes então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

4. Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são 2 a 2 disjuntos ($A_i \cap A_j = \emptyset$, se $i \neq j$), então a probabilidade da união destes é igual a soma das suas probabilidades:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

Teoria das Probabilidades (Revisão)

- **Lei do Complemento**: A probabilidade de um evento ocorrer mais a probabilidade de ele não ocorrer é 100%, ou seja,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

- **Evento nulo ou impossível**: sua probabilidade deve ser nula, ou seja, $P(\emptyset) = 0$.
  - Por exemplo:

    $$B = \{x | x \text{ é par e divisor de } 7\}$$

    Então $B = \emptyset$, pois os divisores de 7 são 1 e 7, que são números ímpares.

  - Obs.: Note que a recíproca não é válida, isto é, se $P(A) = 0$ "não significa que" $A = \emptyset$

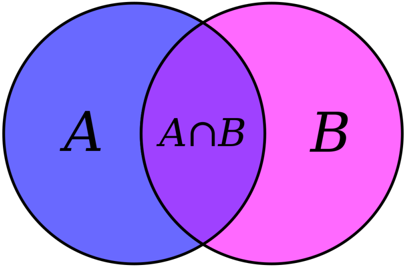
- **Lei da Adição**: a probabilidade de A **ou** B ocorrer é a probabilidade de A ocorrer, mais a probabilidade de B ocorrer, menos a probabilidade de A **e** B ocorrerem (pois esta "havia sido contada duas vezes"!), ou seja:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- **Lei da Adição** (Proposição)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

  - Diagrama de Venn: permite realizar uma representação gráfica dos conjuntos e/ou sua probabilidade de ocorrência.

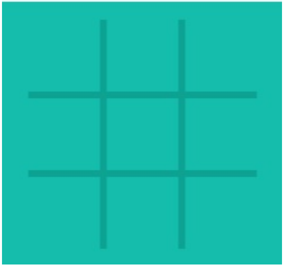


- **Modelo equiprobabilístico:** Um modelo equiprobabilístico em um espaço amostral S com n elementos associa a cada evento elementar a probabilidade $\frac{1}{n}$
  - Se o modelo é equiprobabilístico, então a probabilidade de um evento é simplesmente

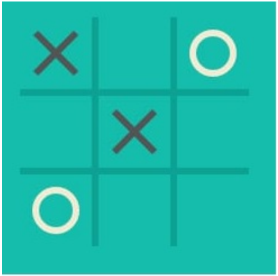
$$P(A) = \frac{\#A}{\#S}$$

Obs.: a notação $\#(Z)$ representa o número de elementos de Z.

- Imagine que iniciaremos um jogo da velha, você é "bola" e eu sou "X". Você começa... Então, onde você iniciaria marcando?



- Avançamos no jogo e chegamos a seguite situação ilustrada na figura. E agora, o que você faria?



Teoria das Probabilidades (Revisão)

- Se tivermos informação adicional sobre um experimento, podemos ser forçados a reavaliar as probabilidades dos eventos a ele associados.

- **Probabilidade condicional** (Definição): Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de A dado que ocorreu B é denotada por $P(A|B)$ e definida por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Teoria das Probabilidades (Revisão)

- **Lei da Multiplicação** (Proposição):

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A) = P(B \cap A)$$

- Em algumas situações, o conhecimento sobre a ocorrência de um evento não muda a probabilidade de um outro (**INDEPENDÊNCIA DE EVENTOS**)
  - **Independência de eventos:** A e B são ditos independentes se

$$P(A|B) = P(A) \text{ e } P(B|A) = P(B)$$

  - Assim, se A e B são ditos independentes:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Teoria das Probabilidades (Revisão)

- **Variáveis aleatórias:** variavéis sujeitas à aleatoriedade. São variáveis cujo valor em um dado instante de tempo não pode ser determinado. No entanto é possível determinar a probabilidade do valor desta variável estar dentro de uma faixa de valores.

- Para caracterizá-las consideramos sua distribuição de probabilidades.

- Para variáveis discretas, associamos uma probabilidade à cada possível valor.

Teoria das Probabilidades (Revisão)

- Sejam X e Y v.a.'s discretas com valores $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ e $Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots\}$, respectivamente, e com função de probabilidade conjunta $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$.
  - As correspondentes funções de probabilidade marginais de X e Y, são:

$$P(X = x_i) = \sum_j p(x_i, y_j)$$

e

$$P(Y = y_j) = \sum_i p(x_i, y_j)$$