Canais Discretos Sem Memória

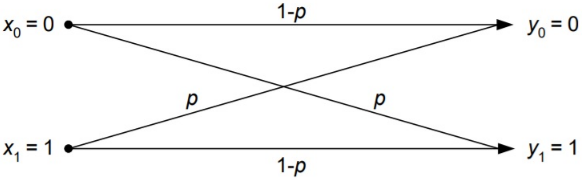
Teoria da Informação - AULA 15 parte 2

Profª. Verusca Severo

Universidade de Pernambuco
Escola Politécnica de Pernambuco

02 de setembro de 2021

- Capacidade do Canal simétrico:
  - Vamos analisar novamente o canal binário simétrico apresentado anteriormente:



$$p(y_1 = 1|x_0 = 0) = p(y_0 = 0|x_1 = 1) = p$$

$$p(y_0 = 0|x_0 = 0) = p(y_1 = 1|x_1 = 1) = 1 - p$$

Canal Discreto Sem Memória

- Capacidade do Canal simétrico:
  - A entropia $H(X)$ é maximizada quando a probabilidade de entrada do canal $p(x_0) = p(x_1) = \frac{1}{2}$, ou seja, quando a fonte de entrada é equiprovável.
  - Neste caso, a informação mútua também é maximizada, de forma que podemos escrever:

$$C = I(X;Y)\big|_{p(x_0)=p(x_1)=\frac{1}{2}}$$

- Capacidade do Canal simétrico:
  - Desenvolvendo:

$$C = I(X;Y)\big|_{p(x_0)=p(x_1)=\frac{1}{2}}$$

$$I(X;Y) = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{j=0}^{J-1} p(x_j, y_k)\log_2\left[\frac{p(x_j|y_k)}{p(x_j)}\right]$$

  - Temos que:

$$p(y_1|x_0) = p(y_0|x_1) = p$$

$$p(y_0|x_0) = p(y_1|x_1) = 1 - p$$

$$p(x_0) = p(x_1) = \frac{1}{2}$$

- Capacidade do Canal simétrico:
  - Determinando $\{p(y_k)\}$, temos:

$$p(y_0) = p(x_0, y_0) + p(x_1, y_0)$$

$$p(y_0) = p(y_0|x_0).p(x_0) + p(y_0|x_1).p(x_1)$$

$$p(y_0) = (1-p).\frac{1}{2} + p.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

e

$$p(y_1) = 1 - p(y_0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

- Capacidade do Canal simétrico:
  - Determinando $\{p(x_j, y_k)\}$, temos:

$$p(x_0, y_0) = p(y_0|x_0).p(x_0) = (1-p).\frac{1}{2}$$

$$p(x_0, y_1) = p(y_1|x_0).p(x_0) = p.\frac{1}{2}$$

$$p(x_1, y_0) = p(y_0|x_1).p(x_1) = p.\frac{1}{2}$$

$$p(x_1, y_1) = p(y_1|x_1).p(x_1) = (1-p).\frac{1}{2}$$

- Capacidade do Canal simétrico:
  - Substituindo os valores obtidos, temos:

$$I(X;Y) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j, y_k) \log_2 \left[\frac{p(x_j|y_k)}{p(x_j)} \right]$$

$$I(X;Y) = p(x_0, y_0) \log_2 \left[\frac{p(x_0|y_0)}{p(x_0)} \right] + p(x_0, y_1) \log_2 \left[\frac{p(x_0|y_1)}{p(x_0)} \right] + p(x_1, y_0) \log_2 \left[\frac{p(x_1|y_0)}{p(x_1)} \right] + p(x_1, y_1) \log_2 \left[\frac{p(x_1|y_1)}{p(x_1)} \right]$$

$$I(X;Y) = (1-p).\frac{1}{2} \log_2 \left[\frac{(1-p)}{\frac{1}{2}} \right] + p.\frac{1}{2} \log_2 \left[\frac{p}{\frac{1}{2}} \right] + p.\frac{1}{2} \log_2 \left[\frac{p}{\frac{1}{2}} \right] + (1-p).\frac{1}{2} \log_2 \left[\frac{(1-p)}{\frac{1}{2}} \right]$$

- Capacidade do Canal simétrico:
  - Desenvolvendo, temos:

$$I(X;Y) = (1-p).\frac{1}{2}\log_2\left[\frac{(1-p)}{\frac{1}{2}}\right] + p.\frac{1}{2}\log_2\left[\frac{p}{\frac{1}{2}}\right] + p.\frac{1}{2}\log_2\left[\frac{p}{\frac{1}{2}}\right] + (1-p).\frac{1}{2}\log_2\left[\frac{(1-p)}{\frac{1}{2}}\right]$$

$$I(X;Y) = (1-p).\frac{1}{2}\log_2[2(1-p)] + p.\frac{1}{2}\log_2[2p] + p.\frac{1}{2}\log_2[2p] + (1-p).\frac{1}{2}\log_2[2(1-p)]$$

$$I(X;Y) = 2\times\left((1-p).\frac{1}{2}\log_2[2(1-p)]\right) + 2\times\left(p.\frac{1}{2}\log_2[2p]\right)$$

$$I(X;Y) = (1-p)\log_2[2(1-p)] + p\log_2[2p]$$

- Capacidade do Canal simétrico:
    - Desenvolvendo, temos:

$$I(X;Y) = (1-p)\log_2\left[2(1-p)\right] + p\log_2\left[2p\right]$$

$$I(X;Y) = (1-p)\left[\log_2 2 + \log_2(1-p)\right] + p\left[\log_2 2 + \log_2 p\right]$$

$$I(X;Y) = (1-p)\left[1 + \log_2(1-p)\right] + p\left[1 + \log_2 p\right]$$

$$I(X;Y) = (1-p) + (1-p)\log_2(1-p) + p + p\log_2 p$$

$$I(X;Y) = 1 + (1-p)\log_2(1-p) + p\log_2 p$$

- Capacidade do Canal simétrico:
  - Comparando com a equação de entropia do código binário:

$$H(p) = p\log_2\left(\frac{1}{p}\right) + (1-p)\log_2\left(\frac{1}{(1-p)}\right)$$

$$H(p) = -p\log_2(p) - (1-p)\log_2(1-p)$$

  - Temos que:

$$I(X;Y) = 1 + (1-p)\log_2(1-p) + p\log_2 p = 1 - H(p)$$

  - Logo:

$$C = 1 + (1-p)\log_2(1-p) + p\log_2 p$$

$$C = 1 - H(p)$$

- **EXEMPLO:** Determine a capacidade de canal para cada uma das probabilidades de transição (probabilidade de erro) a seguir:
  1. $p = 0$
  2. $p = 0,2$
  3. $p = 0,4$
  4. $p = 0,5$
  5. $p = 0,6$
  6. $p = 0,8$
  7. $p = 1$

- **EXEMPLO:** Determine a capacidade de canal para cada uma das probabilidades de transição a seguir:

1. $p = 0$

$$C = 1 + (1)\log_2(1) + 0\log_2 0 = 1$$

2. $p = 0,2$

$$C = 1 + (1 - 0,2)\log_2(1 - 0,2) + 0,2\log_2 0,2 = 1 - 0,7216 = 0,2784$$

3. $p = 0,4$

$$C = 1 + (1 - 0,4)\log_2(1 - 0,4) + 0,4\log_2 0,4 = 1 - 0,9710 = 0,029$$

4. $p = 0,5$

$$C = 1 + (1 - 0,5)\log_2(1 - 0,5) + 0,5\log_2 0,5 = 1 - 1 = 0$$

Canal Discreto Sem Memória

- **EXEMPLO:** Determine a capacidade de canal para cada uma das probabilidades de transição a seguir:

5. $p = 0,6$

$$C = 1 + (1 - 0,6)\log_2(1 - 0,6) + 0,6\log_2 0,6 = 1 - 0,9710 = 0,029$$

6. $p = 0,8$

$$C = 1 + (1 - 0,8)\log_2(1 - 0,8) + 0,8\log_2 0,8 = 1 - 0,7216 = 0,2784$$

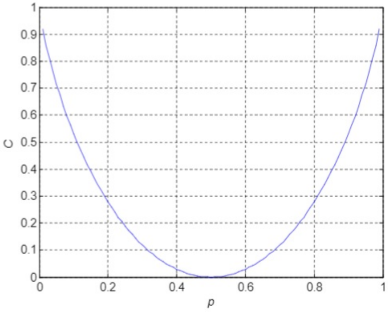
7. $p = 1$

$$C = 1 + (1 - 1)\log_2(1 - 1) + 1\log_2 1 = 1$$

- **EXEMPLO:** Determine a capacidade de canal para cada uma das probabilidades de transição a seguir:
  - Logo

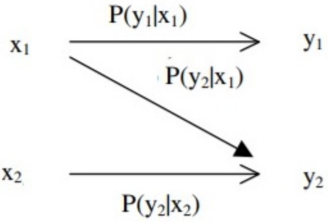
p	0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1
C	1	0,2784	0,029	0	0,029	0,2784	1

  - Graficamente, a capacidade do canal C em função da probabilidade de transição p:



- **EXEMPLO:** Determine a capacidade de canal para cada uma das probabilidades de transição a seguir:
  - Analisando a curva $C \times p$, temos que:
    - quando não existe ruído de canal, $p = 0$, a capacidade atinge o seu valor máximo de um *bit* por utilização de canal, o qual é exatamente a informação em cada entrada de canal.
    - quando o canal é ruidoso com $p = \frac{1}{2}$, a capacidade atinge o valor mínimo de 0 *bit* por utilização de canal. Isso quer dizer, que não se tem certeza de nada daquilo que foi enviado, o canal é inútil.

- **Exercício 1:** Considere o canal binário abaixo representado, em que são fornecidas as probabilidades $p(x_1) = 0,7$ e $p(y_2|x_1) = 0,2$ e $p(y_1|x_2) = 0$. Determine:



(a) $H(X)$ **(b)** $H(Y)$ **(c)** $H(X|Y)$ **(d)** A capacidade do canal.

- **Exercício 1:** Considere o canal binário abaixo representado, em que são fornecidas as probabilidades $p(x_1) = 0,7$ e $p(y_2|x_1) = 0,2$ e $p(y_1|x_2) = 0$.
  Determine:
  (a) $H(X)$

$$p(x_2) = 1 - p(x_1) = 1 - 0,7 = 0,3$$

Logo:

$$H(X) = 0,3 \log_2\left(\frac{1}{0,3}\right) + 0,7 \log_2\left(\frac{1}{0,7}\right) = 0,88128 \; bit$$

- **Exercício 1:** Considere o canal binário abaixo representado, em que são fornecidas as probabilidades $p(x_1) = 0,7$ e $p(y_2|x_1) = 0,2$ e $p(y_1|x_2) = 0$.
  Determine:
  (b) $H(Y)$

$$p(y_1) = p(x_1, y_1) + p(x_2, y_1)$$
$$p(y_1) = p(y_1|x_1).p(x_1) + p(y_1|x_2).p(x_2)$$
$$p(y_1) = [1 - p(y_2|x_1)].p(x_1) + p(y_1|x_2).p(x_2)$$
$$p(y_1) = [1 - 0,2].0,7 + 0.0,3 = 0,56$$

então:

$$p(y_2) = 1 - p(y_1) = 1 - 0,56 = 0,44$$

Logo:

$$H(Y) = 0,56 \log_2\left(\frac{1}{0,56}\right) + 0,44 \log_2\left(\frac{1}{0,44}\right) = 0,98957 \ bit$$

- **Exercício 1:** Considere o canal binário abaixo representado, em que são fornecidas as probabilidades $p(x_1) = 0,7$ e $p(y_2|x_1) = 0,2$ e $p(y_1|x_2) = 0$.
  Determine:
  (c) $H(X|Y)$

$$H(X|Y) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j|y_k)p(y_k) \log_2 \left[\frac{1}{p(x_j|y_k)} \right]$$

Precisamos determinar $\{p(x_j|y_k)\}$:

$$\Rightarrow p(x_1|y_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{p(y_1|x_1).p(x_1)}{p(y_1)}$$

$$p(x_1|y_1) = \frac{[1 - p(y_2|x_1)].p(x_1)}{p(y_1)} = \frac{[1 - 0,2].0,7}{0,56} = 1$$

$$\Rightarrow p(x_2|y_1) = 1 - p(x_1|y_1) = 1 - 1 = 0$$

- **Exercício 1:** Considere o canal binário abaixo representado, em que são fornecidas as probabilidades $p(x_1) = 0,7$ e $p(y_2|x_1) = 0,2$ e $p(y_1|x_2) = 0$.
  Determine:
  (c) $H(X|Y)$

$$H(X|Y) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j|y_k)p(y_k) \log_2 \left[\frac{1}{p(x_j|y_k)} \right]$$

Precisamos determinar $\{p(x_j|y_k)\}$:

$$\Rightarrow p(x_1|y_2) = \frac{p(x_1, y_2)}{p(y_2)} = \frac{p(y_2|x_1).p(x_1)}{p(y_2)} = \frac{0,2.0,7}{0,44} = 0,31818$$

$$\Rightarrow p(x_2|y_2) = 1 - p(x_1|y_2) = 1 - 0,31818 = 0,68182$$

- **Exercício 1:** Considere o canal binário abaixo representado, em que são fornecidas as probabilidades $p(x_1) = 0,7$ e $p(y_2|x_1) = 0,2$ e $p(y_1|x_2) = 0$.
  Determine:
  (c) $H(X|Y)$
  - Temos que

$$H(X|Y) = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{j=0}^{J-1} p(x_j|y_k)p(y_k)\log_2\left[\frac{1}{p(x_j|y_k)}\right]$$

$$H(X|Y) = p(y_1).H(X|Y=y_1) + p(y_2).H(X|Y=y_2)$$

$$\Rightarrow H(X|Y=y_1) = p(x_1|y_1)\log_2\left(\frac{1}{p(x_1|y_1)}\right) + p(x_2|y_1)\log_2\left(\frac{1}{p(x_2|y_1)}\right)$$

$$H(X|Y=y_1) = 1\log_2\left(\frac{1}{1}\right) + 0\log_2\left(\frac{1}{0}\right) = 0$$

- **Exercício 1:** Considere o canal binário abaixo representado, em que são fornecidas as probabilidades $p(x_1) = 0,7$ e $p(y_2|x_1) = 0,2$ e $p(y_1|x_2) = 0$.
  Determine:
  (c) $H(X|Y)$
  - Temos que

$$H(X|Y) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j|y_k)p(y_k) \log_2 \left[\frac{1}{p(x_j|y_k)}\right]$$

$$H(X|Y) = p(y_1).H(X|Y = y_1) + p(y_2).H(X|Y = y_2)$$

$$\Rightarrow H(X|Y = y_2) = p(x_1|y_2) \log_2 \left(\frac{1}{p(x_1|y_2)}\right) + p(x_2|y_2) \log_2 \left(\frac{1}{p(x_2|y_2)}\right)$$

$$H(X|Y = y_1) = 0,31818 \log_2 \left(\frac{1}{0,31818}\right) + 0,68182 \log_2 \left(\frac{1}{0,68182}\right)$$

$$H(X|Y = y_1) = 0,90239$$

- **Exercício 1:** Considere o canal binário abaixo representado, em que são fornecidas as probabilidades $p(x_1) = 0,7$ e $p(y_2|x_1) = 0,2$ e $p(y_1|x_2) = 0$.
  Determine:
  (c) $H(X|Y)$
  - Logo

$$H(X|Y) = p(y_1).H(X|Y = y_1) + p(y_2).H(X|Y = y_2)$$

$$H(X|Y) = 0,56.0 + 0,44.0,90239$$

$$H(X|Y) = 0,39705$$

- **Exercício 1:** Considere o canal binário abaixo representado, em que são fornecidas as probabilidades $p(x_1) = 0,7$ e $p(y_2|x_1) = 0,2$ e $p(y_1|x_2) = 0$.
  Determine:
  (d) A capacidade do canal.
  - Logo

$$C = I(X;Y)$$

$$C = H(X) - H(X|Y)$$

$$C = 0,88128 - 0,39705$$

$$C = 0,48423$$