

Aluno: João Victor da Silva Prado

:(P,X)T(1)

Teoria da Informação

Lista de Exercícios 07

$$1) \begin{bmatrix} P(y_1/x_1) & P(y_2/x_1) & P(y_3/x_1) \\ P(y_1/x_2) & P(y_2/x_2) & P(y_3/x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,15 & 0,8 \end{bmatrix}$$

b)  $H(x)$

$$H(x) = P(x_1) \cdot \log_2(1/P(x_1)) + P(x_2) \cdot \log_2(1/P(x_2))$$

\* Distribuição de prob. equiprovável, então:

$$H(x) = 0,5 \cdot \log_2(1/0,5) + 0,5 \cdot \log_2(1/0,5) = \underline{1 \text{ bit}}$$

c)  $H(y)$

$$\bullet P(y_1) = P(x_1, y_1) + P(x_2, y_1)$$

$$P(y_1) = P(x_1) \cdot P(y_1/x_1) + P(x_2) \cdot P(y_1/x_2)$$

$$P(y_1) = (0,5 \cdot 0,8) + (0,5 \cdot 0,05) = \underline{0,42}$$

$$\bullet P(y_2) = P(x_1, y_2) + P(x_2, y_2) = P(x_1) \cdot P(y_2/x_1) + P(x_2) \cdot P(y_2/x_2)$$

$$P(y_2) = (0,5 \cdot 0,15) + (0,5 \cdot 0,15) = \underline{0,15}$$

$$\bullet P(y_3) = 1 - (P(y_1) + P(y_2)) = 1 - 0,57 = \underline{0,43}$$

$$H(y) = 0,42 \cdot \log_2(1/0,42) + 0,15 \cdot \log_2(1/0,15) + 0,43 \cdot \log_2(1/0,43)$$

$$H(y) = 0,527 + 0,410 + 0,522 = \underline{1,459 \text{ bit}}$$



d)  $I(x; y)$ :

$$I(x; y) = H(x) - H(x|y)$$

$$H(x|y) = P(y=y_1) \cdot H(x|y=y_1) + P(y=y_2) \cdot H(x|y=y_2) + P(y=y_3) \cdot H(x|y=y_3)$$

$$H(x|y=y_1) = P(x=x_1|y=y_1) \cdot \log_2(1/P(x=x_1|y=y_1)) + P(x=x_2|y=y_1) \cdot \log_2(1/P(x=x_2|y=y_1))$$

$P(x=x_1 y=y_1) = \frac{P(y_1/x_1) \cdot P(x_1)}{P(y_1)}$	$P(y_1/x_2) \cdot P(x_2)$
$= \frac{0,8 \cdot 0,5}{0,42} = 0,95$	$= \frac{0,05 \cdot 0,5}{0,42} = 0,05$

Vollendo  $p|H(x|y=y_1)$ :

$$H(x|y=y_1) = 0,95 \cdot \log_2(1/0,95) + 0,05 \cdot \log_2(1/0,05)$$

0,067 + 0,216 →

$$H(x|y=y_1) = 0,283$$

$$H(x|y=y_2) = P(x=x_1|y=y_2) \cdot \log_2(1/P(x=x_1|y=y_2)) + P(x=x_2|y=y_2) \cdot \log_2(1/P(x=x_2|y=y_2))$$

$\frac{P(y_2/x_1) \cdot P(x_1)}{P(y_2)}$	$\frac{P(y_2/x_2) \cdot P(x_2)}{P(y_2)} = 1 - 0,5 = 0,5$
$= 0,15 \cdot 0,5 / 0,15 = 0,5$	



$$H(X/Y=y_2) = 0,5 \log_2(1/0,5) + 0,5 \cdot \log_2(1/0,5)$$

$$H(X/Y=y_2) = 0,5 + 0,5 = \underline{1}$$

$$H(X/Y=y_3) = P(X=x_1/Y=y_3) \cdot \log_2(1/P(X=x_1/Y=y_3)) \\ + P(X=x_2/Y=y_3) \cdot \log_2(1/P(X=x_2/Y=y_3))$$

$$= \frac{P(y_3/x_1) \cdot P(x_1)}{P(y_3)}$$

$$= \frac{P(y_3/x_2) \cdot P(x_2)}{P(y_3)}$$

$$= \frac{0,05 \cdot 0,5}{0,43} = \underline{0,058}$$

$$= 1 - 0,058 = \underline{0,942}$$

$$H(X/Y=y_3) = 0,058 \cdot \log_2(1/0,058) + 0,942 \cdot \log_2(1/0,942) \\ = (0,058 \cdot 4,107) + (0,942 \cdot 0,804) \\ = \underline{0,238 + 0,757 = 0,995}$$

$$H(X/Y) = (0,42 \cdot 0,283) + (1 \cdot 0,5) + (0,995 \cdot 0,43)$$

$$H(X/Y) \approx 1$$

$$I(x; y) = H(x) - H(X/Y)$$

$$\underline{I(x; y) = 1 - 1 = 0}$$



2) Considerar  $P(x_1) = 0,6$

$$\{X_0, X_1\} \quad P = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$y_1/x_1$   
 $y_2/x_2$

$$P(x_1) = 0,6$$

$$P(x_2) = 1 - P(x_1) = 0,4$$

$$a) H(x): P(x_1) \cdot \log_2(1/P(x_1)) + P(x_2) \cdot \log_2(1/P(x_2))$$

$$H(x) = 0,6 \log_2(1/0,6) + 0,4 \log_2(1/0,4)$$

$$H(x) = 0,6 \cdot \log_2(1,67) + 0,4 \cdot \log_2(2,5)$$

$$H(x) = (0,6 \cdot 0,74) + (0,4 \cdot 1,32) = 0,444 + 0,528$$

$$H(x) = \underline{0,972 \text{ bit}}$$

$$b) H(y): P(y_1) = P(x_1, y_1) + P(x_2, y_2)$$

$$P(y_2) = 0,35$$

$$P(y_1) = P(x_1) \cdot P(y_1/x_1) + P(x_2) \cdot P(y_2/x_2)$$

$$P(y_1) = (0,6 \cdot 0,75) + (0,4 \cdot 0,5) = 0,45 + 0,2 = \underline{0,65}$$

$$H(y) = P(y_1) \cdot \log_2(1/P(y_1)) + P(y_2) \cdot \log_2(1/P(y_2))$$

$$H(y) = 0,65 \cdot \log_2(1/0,65) + 0,35 \cdot \log_2(1/0,35)$$

$$H(y) = (0,65 \cdot \log_2(1,54)) + (0,35 \cdot \log_2(2,86))$$

$$H(y) = (0,65 \cdot 0,623) + (0,35 \cdot 1,516) = 0,405 + 0,5306$$

$$H(y) = \underline{0,9356 \text{ bit}}$$



c) Capacidade do canal  $I(x; y)$

$$I(x; y) = H(x) - H(x|y)$$

$$H(x|y) = P(y=y_1) \times H(x/y=y_1) + P(y=y_2) \times H(x/y=y_2)$$

$$H(x/y=y_1) = P(x=x_1/y=y_1) \cdot \log_2(1/P(x=x_1/y=y_1)) + P(x=x_2/y=y_1) \cdot \log_2(1/P(x=x_2/y=y_1))$$

$$P(x=x_1/y=y_1) = P(y_1/x_1) \cdot P(x_1) / P(y_1) = (0,75 \cdot 0,6) / 0,65 = 0,69$$

$$P(x=x_2/y=y_1) = 0,31$$

Voltando p/  $H(x/y=y_1)$ :

$$H(x/y=y_1) = 0,69 \cdot \log_2(1/0,69) + 0,31 \cdot \log_2(1/0,31)$$

$$H(x/y=y_1) = 0,69 \cdot \log_2(1,45) + 0,31 \cdot \log_2(3,22)$$

$$H(x/y=y_1) = (0,69 \cdot 0,536) + (0,31 \cdot 1,687) = 0,369 + 0,523$$

$$H(x/y=y_1) = 0,892$$

$$H(x/y=y_2) = P(x=x_1/y=y_2) \cdot \log_2(1/P(x=x_1/y=y_2)) + P(x=x_2/y=y_2) \cdot \log_2(1/P(x=x_2/y=y_2))$$

$$P(x=x_1/y=y_2) = P(y_2/x_1) \cdot P(x_1) / P(y_2) = (0,25 \cdot 0,6) / 0,35$$

$$P(x=x_1/y=y_2) = 0,428$$

$$P(x=x_2/y=y_2) = 1 - 0,428 = 0,572$$

$$\text{Voltando p/ } H(x/y=y_2): 0,428 \cdot \log_2(1/0,428) + 0,572 \cdot \log_2(1/0,572)$$

$$H(x/y=y_2) = 0,524 + 0,461 = 0,985$$

Volendo p/  $H(x/y)$ :

$$H(x/y) = (0,65 \cdot 0,892) + (0,35 \cdot 0,985)$$

$$H(x/y) = 0,924$$

Portanto:  $I(x/y) = H(x) - H(x/y)$

$$I(x/y) = 0,972 - 0,924$$

$$I(x/y) = 0,048$$



$$3) a) P = \begin{vmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,1 & 0,9 & 0 \end{vmatrix}$$

$$b) H(x) = 3 \cdot (1/3 \cdot \log_2(1/(1/3))) \Rightarrow H(x) = 1,585 \text{ bit}$$

$$c) H(y) = P(y=y_1) \cdot \log_2(1/P(y=y_1)) + P(y=y_2) \cdot \log_2(1/P(y=y_2)) + P(y=y_3) \cdot \log_2(1/P(y=y_3))$$

$$\begin{aligned} \bullet P(y=y_1) &= P(x_1, y_1) + P(x_2, y_1) + P(x_3, y_1) \\ &= P(y_1/x_1) \cdot P(x_1) + P(y_1/x_2) \cdot P(x_2) + P(y_1/x_3) \cdot P(x_3) \\ &= (0,5 \cdot 1/3) + (0,4 \cdot 1/3) + (0,1 \cdot 1/3) \Rightarrow \\ P(y=y_1) &= 0,33 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet P(y=y_2) &= P(x_1, y_2) + P(x_2, y_2) + P(x_3, y_2) \\ &= P(y_2/x_1) \cdot P(x_1) + P(y_2/x_2) \cdot P(x_2) + P(y_2/x_3) \cdot P(x_3) \\ &= (0,3 \cdot 1/3) + (0,3 \cdot 1/3) + (0,9 \cdot 1/3) \\ &\Rightarrow P(y=y_2) = 0,5 \end{aligned}$$

$$P(y=y_3) = 1 - (0,33 + 0,5) = 0,17$$

$$\begin{aligned} \bullet H(y) &= 0,33 \cdot \log_2(1/0,33) + 0,5 \cdot \log_2(1/0,5) + 0,17 \cdot \log_2(1/0,17) \\ H(y) &= 0,53 + 0,5 + 0,43 = \\ H(y) &= 1,46 \text{ bit} \end{aligned}$$



$$d) H(y/x) = P(x=x_1) \cdot H(y/x=x_1) + P(x=x_2) \cdot H(y/x=x_2) + P(x=x_3) \cdot H(y/x=x_3)$$

$$H(y/x=x_1) = P(y=y_1/x=x_1) \cdot \log_2(1/P(y=y_1/x=x_1)) + P(y=y_2/x=x_1) \cdot \log_2(1/P(y=y_2/x=x_1)) + P(y=y_3/x=x_1) \cdot \log_2(1/P(y=y_3/x=x_1))$$

$$\cdot H(y/x=x_1) = 0,5 \log_2(1/0,5) + 0,3 \log_2(1/0,3) + 0,2 \log_2(1/0,2)$$

$$\underline{H(y/x=x_1) = 1,48 \text{ bit}}$$

$$\cdot H(y/x=x_2) = P(y=y_1/x=x_2) \cdot \log_2(1/P(y=y_1/x=x_2)) + P(y=y_2/x=x_2) \cdot \log_2(1/P(y=y_2/x=x_2)) + P(y=y_3/x=x_2) \cdot \log_2(1/P(y=y_3/x=x_2))$$

$$H(y/x=x_2) = 0,4 \cdot \log_2(1/0,4) + (0,3 \cdot \log_2(1/0,3)) \cdot 2$$

$$\underline{H(y/x=x_2) = 1,57 \text{ bit}}$$

$$\cdot H(y/x=x_3) = P(y=y_1/x=x_3) \cdot \log_2(1/P(y=y_1/x=x_3)) + P(y=y_2/x=x_3) \cdot \log_2(1/P(y=y_2/x=x_3)) + P(y=y_3/x=x_3) \cdot \log_2(1/P(y=y_3/x=x_3))$$

$$H(y/x=x_3) = 0,1 \cdot \log_2(1/0,1) + 0,9 \cdot \log_2(1/0,9) + 0$$

$$\underline{H(y/x=x_3) = 0,47 \text{ bit}}$$

$$H(y/x) = (1/3 \cdot 1,48) + (1/3 \cdot 1,57) + (1/3 \cdot 0,47)$$

$$\underline{H(y/x) = 1,173 \text{ bit}}$$

$$e) I(x; y) = H(y) - H(y/x) = 1,46 - 1,173$$

$$\underline{I(x; y) = 0,287 \text{ bit}}$$