

EXERCÍCIOS

Teoria da Informação - AULA 10
Prof^a. Verusca Severo

Universidade de Pernambuco
Escola Politécnica de Pernambuco

30 de julho de 2021

Exercício - QUESTÃO 1

- ❶ **Questão 1:** Considere os códigos, símbolo a símbolo apresentados na Tabela 18.

Símbolo	Cod. 1	Cod. 2	Cod. 3	Cod. 4
a	0	0	00	00
b	10	01	01	10
c	110	011	10	101
d	1110	110	110	010
e	1111	111	111	1111

- (a) Quais dos códigos são unicamente decodificáveis? Justifique.
- (b) Quais dos códigos são instantâneos?
- (c) Quais dos códigos satisfazem a desigualdade de Kraft? Justifique.

Exercício - QUESTÃO 1

- **SOLUÇÃO:** (a) Quais dos códigos são unicamente decodificáveis? Justifique.

- Os códigos 1 e 3 são UD. Os códigos 2 e 4 não são UD.
 - Cod. 2: considere a sequência 01110. Ela pode ser decodificada de duas formas:

$$\text{Forma 1: } 0|111|0 = a|e|a$$

$$\text{Forma 2: } 01|110 = b|d$$

- Cod. 4: considere a sequência 101010. Ela pode ser decodificada de duas formas:

$$\text{Forma 1: } 101|010 = c|d$$

$$\text{Forma 2: } 10|10|10 = b|b|b$$

- **SOLUÇÃO: (b)** Quais dos códigos são instantâneos?
 - Códigos instantâneos são códigos Prefixo, logo:
 - Cod. 1 e Cod. 3 são códigos instantâneos.

Exercício - QUESTÃO 1

- **SOLUÇÃO:** (c) Quais dos códigos satisfazem a desigualdade de Kraft? Justifique.

- Os Códigos 1, 3 e 4. Veja que:

- Cod. 1:

$$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-4} = 16/16 = 1$$

- Cod. 2:

$$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-3} + 2^{-3} = 9/8 > 1$$

- Cod. 3:

$$2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-3} = 8/8 = 1$$

- Cod. 4:

$$2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-3} + 2^{-4} = 13/16 < 1$$

Exercício - QUESTÃO 2

- ❷ **Questão 2:** Uma fonte de informação emite 2000 símbolos/s, selecionados de um alfabeto de $K = 4$ possíveis símbolos. As probabilidades de ocorrência de cada símbolo são mostradas na tabela abaixo, assim como quatro códigos (Cod. 1, Cod. 2, Cod. 3, Cod. 4) propostos para essa fonte. Analise a utilização dos códigos propostos na tabela abaixo e responda:

Símbolo	Probabilidade	Cod. 1	Cod. 2	Cod. 3	Cod. 4
$s_1 = a$	$P(s_1) = 1/2$	00	0	0	0
$s_2 = b$	$P(s_2) = 1/4$	01	1	01	10
$s_3 = c$	$P(s_3) = 1/8$	10	10	011	110
$s_4 = d$	$P(s_4) = 1/8$	11	11	0111	111

- (a) Quais códigos podem ser utilizados? Justifique.
- (b) Determine o comprimento médio de cada um dos códigos.
- (c) Quais dos códigos satisfazem a desigualdade de Kraft? Justifique.

- **SOLUÇÃO:** (a) Quais códigos podem ser utilizados? Justifique.
 - Os códigos que podem ser utilizados são os códigos UD. Os códigos 1, 3 e 4 são UD.
 - Cod. 2: considere a sequência 10. Ela pode ser decodificada de duas formas:

Forma 1: $10 = c$

Forma 2: $1|0 = b|a$
 - Logo, Cod. 2 não é UD.

Exercício - QUESTÃO 2

- **SOLUÇÃO: (b)** Determine o comprimento médio de cada um dos códigos.

- Temos que $L = \sum_{i=1}^4 P(s_i)l_{s_i}$, logo:

- Cod. 1:

$$L_{\text{Cod 1}} = (1/2).2 + (1/4).2 + (1/8).2 + (1/8).2 = 2$$

- Cod. 2:

$$L_{\text{Cod 2}} = (1/2).1 + (1/4).1 + (1/8).2 + (1/8).2 = 1,25$$

- Cod. 3:

$$L_{\text{Cod 3}} = (1/2).1 + (1/4).2 + (1/8).3 + (1/8).4 = 1,875$$

- Cod. 4:

$$L_{\text{Cod 4}} = (1/2).1 + (1/4).2 + (1/8).3 + (1/8).3 = 1,75$$

Exercício - QUESTÃO 2

- **SOLUÇÃO:** (c) Quais dos códigos satisfazem a desigualdade de Kraft? Justifique.

- Os Códigos 1, 3 e 4. Veja que:

- Cod. 1:

$$2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-2} = 4/4 = 1$$

- Cod. 2:

$$2^{-1} + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-2} = 6/4 = 1,5$$

- Cod. 3:

$$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} = 15/16 = 0,9375$$

- Cod. 4:

$$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-3} = 8/8 = 1$$

Exercício - QUESTÃO 3

- 3 **Questão 3:** A professora da disciplina Teoria da Informação da POLI/UPE criou um código com 5 letras $\{U, V, X, Y, Z\}$ para compartilhar uma informação secreta com seus alunos. Para aumentar ainda mais a segurança, ela perguntou a cinco dos seus alunos se estes poderiam criar um código binário para armazenar a informação da forma mais eficiente. Os alunos aceitaram o pedido da professora que repassou para eles a probabilidade de ocorrência de cada um dos símbolos. Cada um dos alunos apresentou seu código que está descrito na tabela abaixo.

Símbolo	Probabilidade	José	Maria	Rita	Ana	João
U	15/39	00	1000	0	00	0
V	7/39	01	1001	100	10	100
X	6/39	10	1010	101	11	101
Y	6/39	110	1011	110	1001	1101
Z	5/39	111	1100	111	1100	1100

3 Questão 3: continuação....

Agora, a professora precisa de sua ajuda para julgar os códigos.

- (a) Determine quais códigos são Prefixo.
- (b) Determine quais códigos são univocamente decodificável.
- (c) Determine o comprimento médio de cada um dos códigos.
- (d) Determine qual dos códigos a professora deve escolher para que seu desejo seja atendido. Justifique.

Exercício - QUESTÃO 3

- **SOLUÇÃO:** (a) Determine quais códigos são Prefixo.
 - Os códigos que do tipo Prefixo são os códigos de José, Maria, Rita e João.
 - Ou seja, somente o código de Ana que não é do tipo prefixo.

- **SOLUÇÃO: (b)** Determine quais dos códigos são unicamente decodificáveis? Justifique.
 - Todos os códigos são UD, exceto o código de Ana.
 - Cod. de Ana: considere a sequência 1100. Ela pode ser decodificada de duas formas:

Forma 1: $11|00 = X|U$

Forma 2: $1100 = Z$

Exercício - QUESTÃO 3

- **SOLUÇÃO:** (c) Determine o comprimento médio dos códigos.

- Temos que $L = \sum_{i=1}^4 P(s_i)l_{s_i}$, logo:

- Cod. José:

$$L_{\text{José}} = (15/39).2 + (7/39).2 + (6/39).2 + (6/39).3 + (5/39).3 = 2,2821$$

- Cod. Maria:

$$L_{\text{Maria}} = (15/39).4 + (7/39).4 + (6/39).4 + (6/39).4 + (5/39).4 = 4$$

- Cod. Rita:

$$L_{\text{Rita}} = (15/39).1 + (7/39).3 + (6/39).3 + (6/39).3 + (5/39).3 = 2,2308$$

- Cod. Ana:

$$L_{\text{Ana}} = (15/39).2 + (7/39).2 + (6/39).2 + (6/39).4 + (5/39).4 = 2,5641$$

- Cod. João:

$$L_{\text{João}} = (15/39).1 + (7/39).3 + (6/39).3 + (6/39).4 + (5/39).4 = 2,5128$$

- **SOLUÇÃO: (d)** Determine qual dos códigos a professora deve escolher para que seu desejo seja atendido. Justifique.
 - Segundo o comprimento médio de cada código, a professora deve escolher o código de Rita, pois além de ser UD, ele apresenta o menor comprimento médio entre todos os códigos ($L_{\text{Rita}} = 2,2308$).

- 4 **Questão 4:** Verifique e, caso seja possível, determine um código binário Prefixo com palavras código de comprimentos:
- (a) $l_1 = 1$, $l_2 = 2$, $l_3 = l_4 = 3$ e $l_5 = 4$.
 - (b) $l_1 = 1$, $l_2 = 2$, $l_3 = 3$ e $l_4 = l_5 = 4$.

Exercício - QUESTÃO 4

- **SOLUÇÃO:** (a) $l_1 = 1$, $l_2 = 2$, $l_3 = l_4 = 3$ e $l_5 = 4$.
 - Verificando a desigualdade de Kraft, temos:

$$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-3} + 2^{-4} = 17/16 > 1$$

- Logo, não é possível construir um código prefixo.

Exercício - QUESTÃO 4

- **SOLUÇÃO: (b)** $l_1 = 1$, $l_2 = 2$, $l_3 = 3$ e $l_4 = l_5 = 4$.

- Verificando a desigualdade de Kraft, temos:

$$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-4} = 16/16 = 1$$

- Logo, é possível construir um código prefixo.
- Um código possível seria:

Símbolo	l_i	Código
s_1	1	0
s_2	2	10
s_3	3	110
s_4	4	1110
s_5	4	1111