EXERCÍCIOS

Teoria da Informação - AULA 08

Profª. Verusca Severo

Universidade de Pernambuco
Escola Politécnica de Pernambuco

09 de julho de 2021

Exercício - QUESTÃO 1

1. **Questão 1:** Considere a fonte de Markov de segunda ordem ($m = 2$) com alfabeto binário ($K = 2$). As probabilidades condicionais dos símbolos (probabilidades de transiçãao) são as seguintes

$$P(0|00) = P(1|11) = 0,7$$

$$P(1|00) = P(0|11) = 0,3$$

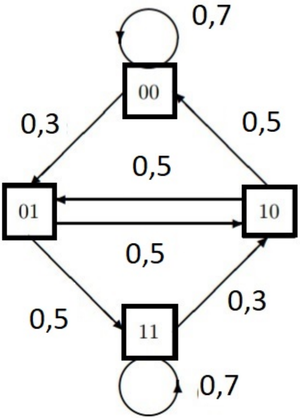
$$P(0|01) = P(0|10) = 0,5$$

$$P(1|01) = P(1|10) = 0,5$$

Construa o diagrama de estados para essa fonte.

Exercício - QUESTÃO 1

- **SOLUÇÃO:**
  - **a.** Diagrama de estados da fonte.



$$P(0|00) = P(1|11) = 0{,}7$$

$$P(1|00) = P(0|11) = 0{,}3$$

$$P(0|01) = P(0|10) = 0{,}5$$

$$P(1|01) = P(1|10) = 0{,}5$$

Exercício - QUESTÃO 2

2. **Questão 2:** Considere a fonte de Markov de segunda ordem ($m = 2$) com alfabeto binário ($K = 2$). As probabilidades condicionais dos símbolos (probabilidades de transiçãao) são as seguintes

$$P(0|00) = P(1|11) = 0,7$$

$$P(0|01) = P(0|10) = 0,5$$

Calcule a probabilidade dessa fonte emitir o símbolo 0.

- **SOLUÇÃO:**
  - **a.** Probabilidade da fonte emitir o símbolo 0.
    - Temos a seguinte distribuição de probabilidade condicional:

$$\begin{array}{lcl} P(0|00) = 0,7 & \Rightarrow & P(1|00) = 0,3 \\ P(1|11) = 0,7 & \Rightarrow & P(0|11) = 0,3 \\ P(0|01) = 0,5 & \Rightarrow & P(1|01) = 0,5 \\ P(0|10) = 0,5 & \Rightarrow & P(1|10) = 0,5 \end{array}$$

Exercício - QUESTÃO 2

SOLUÇÃO:

- **a.** Probabilidade da fonte emitir o símbolo 0.
  - Sabemos que:

$$P(0) = P(00,0) + P(01,0) + P(10,0) + P(11,0)$$

$$P(0) = P(00)P(0/00) + P(01)P(0/01) + P(10)P(0/10) + P(11)P(0/11)$$

  - Logo, precisamos determinar as probabilidade dos estados:
    - Estado $= 00$: $P(00) = P(00,0) + P(10,0)$
    - Estado $= 01$: $P(01) = P(00,1) + P(10,1)$
    - Estado $= 10$: $P(10) = P(01,0) + P(11,0)$
    - Estado $= 11$: $P(11) = P(11,1) + P(01,1)$

Exercício - QUESTÃO 2

SOLUÇÃO:

- **a.** Probabilidade da fonte emitir o símbolo 0.
  - Logo, precisamos determinar as probabilidade dos estados:
    - Estado = 00:

$$
\begin{array}{ccccc}
P(00) & = & P(00,0) & + & P(10,0) \\
P(00) & = & P(00) \times P(0/00) & + & P(10) \times P(0/10) \\
P(00) & = & P(00) \times 0,7 & + & P(10) \times 0,5 \\
P(00) - 0,7 \times P(00) & = & 0,5P(10) & & \\
0,3 \times P(00) & = & 0,5P(10) & & \\
P(00) & = & \frac{0,5}{0,3}P(10) & & \\
\mathbf{P(00)} & \mathbf{=} & \mathbf{\frac{5}{3}P(10)} & &
\end{array}
$$

SOLUÇÃO:

- **a.** Probabilidade da fonte emitir o símbolo 0.
  - Logo, precisamos determinar as probabilidade dos estados:
    - Estado $=$ 01:

$$
\begin{array}{rcccc}
P(01) & = & P(00,1) & + & P(10,1) \\
P(01) & = & P(00) \times P(1/00) & + & P(10) \times P(1/10) \\
P(01) & = & P(00) \times 0,3 & + & P(10) \times 0,5 \\
P(01) & = & \frac{0,5}{0,3} P(10) \times 0,3 & + & P(10) \times 0,5 \\
P(01) & = & 0,5 \times P(10) & + & P(10) \times 0,5 \\
\mathbf{P(01)} & \mathbf{=} & \mathbf{P(10)} & &
\end{array}
$$

SOLUÇÃO:

- **a.** Probabilidade da fonte emitir o símbolo 0.
  - Logo, precisamos determinar as probabilidade dos estados:
    - Estado = 11:

$$
\begin{array}{ccccc}
P(11) & = & P(11,1) & + & P(01,1) \\
P(11) & = & P(11) \times P(1/11) & + & P(01) \times P(1/01) \\
P(11) & = & P(11) \times 0,7 & + & P(01) \times 0,5 \\
P(11) - 0,7 \times P(11) & = & 0,5P(01) & & \\
0,3 \times P(11) & = & 0,5 \times P(01) & & \\
0,3 \times P(11) & = & 0,5 \times P(10) & & \\
P(11) & = & \frac{0,5}{0,3} \times P(10) & & \\
\mathbf{P(11)} & = & \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}} \times \mathbf{P(10)} & &
\end{array}
$$

Exercício - QUESTÃO 2

SOLUÇÃO:

- **a.** Probabilidade da fonte emitir o símbolo 0.
  - Logo, precisamos determinar as probabilidade dos estados:
    - Sabe-se (pelos axiomas da Teoria das probabilidades) que:

$$P(00) + P(01) + P(10) + P(11) = 1$$

    - Logo, por subtituição, temos que:

$$\frac{5}{3} \times P(10) + P(10) + P(10) + \frac{5}{3} \times P(10) = 1$$

$$\frac{10}{3} \times P(10) + 2 \times P(10) = 1$$

$$\frac{16}{3} \times P(10) = 1$$

$$\mathbf{P(10)} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{16}}$$

SOLUÇÃO:

- **a.** Probabilidade da fonte emitir o símbolo 0.
    - Logo, precisamos determinar as probabilidade dos estados:
        - E assim:

$$P(00) = \frac{5}{3} \times P(10) \quad \Rightarrow \quad P(00) = \frac{5}{3} \times \frac{3}{16} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P(00) = \frac{5}{16}}$$

$$P(01) = P(10) \quad \Rightarrow \quad P(01) = \frac{3}{16} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P(01) = \frac{3}{16}}$$

$$P(11) = \frac{5}{3} \times P(10) \quad \Rightarrow \quad P(11) = \frac{5}{3} \times \frac{3}{16} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P(11) = \frac{5}{16}}$$

SOLUÇÃO:

- **a.** Probabilidade da fonte emitir o símbolo 0.
  - Substituindo as probabilidades obtidas em

$$P(0) = P(00)P(0/00) + P(01)P(0/01) + P(10)P(0/10) + P(11)P(0/11)$$

temos:

$$P(0) = \frac{5}{16} \times 0,7 + \frac{3}{16} \times 0,5 + \frac{3}{16} \times 0,5 + \frac{5}{16} \times 0,3$$

$$P(0) = 0,5$$

Exercício - QUESTÃO 3

3. **Questão 3:** Considere a fonte de Markov de segunda ordem ($m = 2$) com alfabeto binário ($K = 2$). As probabilidades condicionais dos símbolos (probabilidades de transiçãao) são as seguintes

$$P(0|00) = 0,2 \quad P(1|11) = 0,4$$

$$P(0|01) = 0,7 \quad P(1|10) = 0,1$$

(a) Construa o diagrama de estados para essa fonte.
(b) Calcule a distribuição de probabilidade dos estados dessa fonte.
(c) Calcule a entropia dessa fonte.
(d) Calcule a probabilidade dessa fonte emitir o símbolo 1.

Exercício - QUESTÃO 3

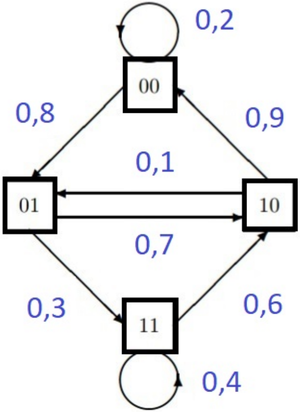
SOLUÇÃO:

- **a.** Diagrama de estados da fonte.

$$
\begin{array}{lcl}
P(0|00) = 0,2 & \Rightarrow & P(1|00) = 0,8 \\
P(1|11) = 0,4 & \Rightarrow & P(0|11) = 0,6 \\
P(0|01) = 0,7 & \Rightarrow & P(1|01) = 0,3 \\
P(1|10) = 0,1 & \Rightarrow & P(0|10) = 0,9
\end{array}
$$

SOLUÇÃO:

- **a.** Diagrama de estados da fonte.



$P(0|00) = 0{,}2 \quad P(1|00) = 0{,}8$

$P(0|01) = 0{,}7 \quad P(1|01) = 0{,}3$

$P(0|10) = 0{,}9 \quad P(1|10) = 0{,}1$

$P(0|11) = 0{,}6 \quad P(1|11) = 0{,}4$

SOLUÇÃO:

- **b.** Distribuição de probabilidade estacionária dos estados
  - Estado = 00

$$
\begin{aligned}
P(00) &= P(00,0) + P(10,0) \\
P(00) &= P(00) \times P(0/00) + P(10) \times P(0/10) \\
P(00) &= P(00) \times 0,2 + P(10) \times 0,9 \\
P(00) - 0,2 \times P(00) &= 0,9P(10) \\
0,8 \times P(00) &= 0,9P(10) \\
P(00) &= \frac{0,9}{0,8}P(10) \\
\mathbf{P(00)} &= \mathbf{\frac{9}{8}P(10)}
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO:

- **b.** Distribuição de probabilidade estacionária dos estados
  - Estado $= 01$

$$
\begin{array}{rcccc}
P(01) & = & P(00,1) & + & P(10,1) \\
P(01) & = & P(00) \times P(1/00) & + & P(10) \times P(1/10) \\
P(01) & = & P(00) \times 0,8 & + & P(10) \times 0,1 \\
P(01) & = & \frac{0,9}{0,8} P(10) \times 0,8 & + & P(10) \times 0,1 \\
P(01) & = & 0,9 \times P(10) & + & P(10) \times 0,1 \\
\mathbf{P(01)} & \mathbf{=} & \mathbf{P(10)} & &
\end{array}
$$

SOLUÇÃO:

- **b.** Distribuição de probabilidade estacionária dos estados
  - Estado $= 11$

$$
\begin{array}{rcccc}
P(11) & = & P(11,1) & + & P(01,1) \\
P(11) & = & P(11) \times P(1/11) & + & P(01) \times P(1/01) \\
P(11) & = & P(11) \times 0,4 & + & P(01) \times 0,3 \\
P(11) - 0,4 \times P(11) & = & 0,3P(01) & & \\
0,6 \times P(11) & = & 0,3 \times P(01) & & \\
0,6 \times P(11) & = & 0,3 \times P(10) & & \\
P(11) & = & \frac{0,3}{0,6} \times P(10) & & \\
\mathbf{P(11)} & \mathbf{=} & \mathbf{\frac{3}{6} \times P(10)} & &
\end{array}
$$

SOLUÇÃO:

- **b.** Distribuição de probabilidade estacionária dos estados
  - Sabe-se (pelos axiomas da Teoria das probabilidades) que:

$$P(00) + P(01) + P(10) + P(11) = 1$$

  - Logo, por subtituição, temos que:

$$\frac{9}{8} \times P(10) + P(10) + P(10) + \frac{3}{6} \times P(10) = 1$$

$$\frac{39}{24} \times P(10) + 2 \times P(10) = 1$$

$$\frac{87}{24} \times P(10) = 1$$

$$\mathbf{P(10)} = \mathbf{\frac{24}{87}} = \mathbf{\frac{8}{29}}$$

SOLUÇÃO:

- **b.** Distribuição de probabilidade estacionária dos estados
  - E assim:

$$P(00) = \frac{9}{8} \times P(10) \quad \Rightarrow \quad P(00) = \frac{9}{8} \times \frac{8}{29} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P(00) = \frac{9}{29}}$$

$$P(01) = P(10) \quad \Rightarrow \quad P(01) = \frac{8}{29} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P(01) = \frac{8}{29}}$$

$$P(11) = \frac{3}{6} \times P(10) \quad \Rightarrow \quad P(11) = \frac{3}{6} \times \frac{8}{29} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P(11) = \frac{4}{29}}$$

Exercício - QUESTÃO 3

SOLUÇÃO:

- **c.** Entropia da fonte

$$H(S) = P(00)H(S/00)+P(01)H(S/01)+P(10)H(S/10)+P(11)H(S/11$$

- Determinando as entropias condicionais:

$$H(S/00) = P(0/00) \times \log_2 \left[\frac{1}{P(0/00)}\right] + P(1/00) \times \log_2 \left[\frac{1}{P(1/00)}\right]$$

$$H(S/00) = 0,2 \times \log_2 \left[\frac{1}{0,2}\right] + 0,8 \times \log_2 \left[\frac{1}{0,8}\right]$$

$$\mathbf{H(S/00) = 0{,}7219}\ \mathit{bit}$$

Exercício - QUESTÃO 3

SOLUÇÃO:

- **c.** Entropia da fonte

$$H(S) = P(00)H(S/00)+P(01)H(S/01)+P(10)H(S/10)+P(11)H(S/11$$

- Determinando as entropias condicionais:

$$H(S/01) = P(0/01) \times \log_2\left[\frac{1}{P(0/01)}\right] + P(1/01) \times \log_2\left[\frac{1}{P(1/01)}\right]$$

$$H(S/01) = 0,7 \times \log_2\left[\frac{1}{0,7}\right] + 0,3 \times \log_2\left[\frac{1}{0,3}\right]$$

$$\mathbf{H(S/01) = 0{,}8813}\ bit$$

SOLUÇÃO:

- **c.** Entropia da fonte

$$H(S) = P(00)H(S/00)+P(01)H(S/01)+P(10)H(S/10)+P(11)H(S/11$$

- Determinando as entropias condicionais:

$$H(S/10) = P(0/10) \times \log_2 \left[\frac{1}{P(0/10)}\right] + P(1/10) \times \log_2 \left[\frac{1}{P(1/10)}\right]$$

$$H(S/10) = 0,9 \times \log_2 \left[\frac{1}{0,9}\right] + 0,1 \times \log_2 \left[\frac{1}{0,1}\right]$$

$$\mathbf{H(S/10) = 0{,}4690}\ \textit{bit}$$

Exercício - QUESTÃO 3

SOLUÇÃO:

- **c.** Entropia da fonte

$$H(S) = P(00)H(S/00)+P(01)H(S/01)+P(10)H(S/10)+P(11)H(S/11$$

  - Determinando as entropias condicionais:

$$H(S/11) = P(0/11) \times \log_2 \left[\frac{1}{P(0/11)}\right] + P(1/11) \times \log_2 \left[\frac{1}{P(1/11)}\right]$$

$$H(S/11) = 0,6 \times \log_2 \left[\frac{1}{0,6}\right] + 0,4 \times \log_2 \left[\frac{1}{0,4}\right]$$

$$\mathbf{H(S/01) = 0{,}9710}\ \mathit{bit}$$

SOLUÇÃO:

- **c.** Entropia da fonte

$$H(S) = P(00)H(S/00) + P(01)H(S/01) + P(10)H(S/10) + P(11)H(S/11$$

- Assim, por substituição, temos que:

$$H(S) = \frac{9}{29} \times 0,7219 + \frac{8}{29} \times 0,8813 + \frac{8}{29} \times 0,4690 + \frac{4}{29} \times 0,9710$$

$$H(S) = 0,7305 \ bit$$

SOLUÇÃO:

- **d.** Probabilidade de ocorrência do símbolo 0
  - Temos que:

$$P(0) = P(00,0) + P(01,0) + P(10,0) + P(11,0)$$

$$P(0) = P(00)P(0/00) + P(01)P(0/01) + P(10)P(0/10) + P(11)P(0/11)$$

$$P(0) = \frac{9}{29} \times 0,2 + \frac{8}{29} \times 0,7 + \frac{8}{29} \times 0,9 + \frac{4}{29} \times 0,6$$

$$\mathbf{P(0) = 0{,}5862}$$