

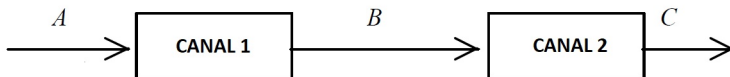
Canais Discretos Sem Memória

Teoria da Informação - AULA 15 parte 3
Prof^a. Verusca Severo

Universidade de Pernambuco
Escola Politécnica de Pernambuco

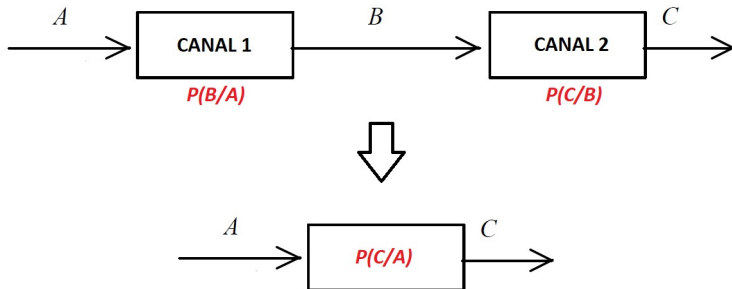
03 de setembro de 2021

- O que acontece quando temos a ligação de canais em cascata (série)?



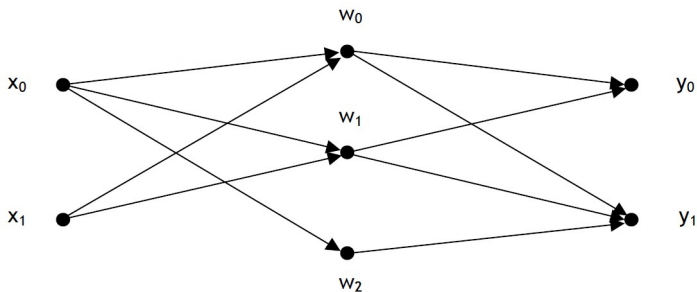
Canal Discreto Sem Memória

- O que acontece quando temos a ligação de canais em cascata (série)?



- Simplificação dos canais compostos.
- Teremos que: $I(A, C) = H(A) - H(A/C)$

- **Simplificando o canal composto:** a partir do diagrama de probabilidades.



- Devemos fazer a análise de cada percurso de x_i até y_j com $i, j = 0, 1$.

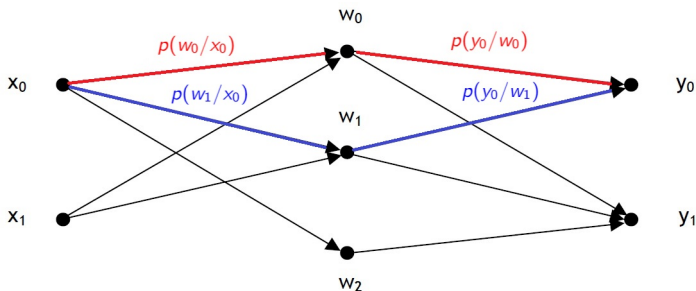
Canal Discreto Sem Memória

- **Simplificando o canal composto:** a partir do diagrama de probabilidades.

① Percurso de x_0 até y_0 :

- Há dois percursos: $x_0 \rightarrow w_0 \rightarrow y_0$ ou $x_0 \rightarrow w_1 \rightarrow y_0$, logo:

$$p(y_0/x_0) = p(w_0/x_0)p(y_0/w_0) + p(w_1/x_0)p(y_0/w_1)$$



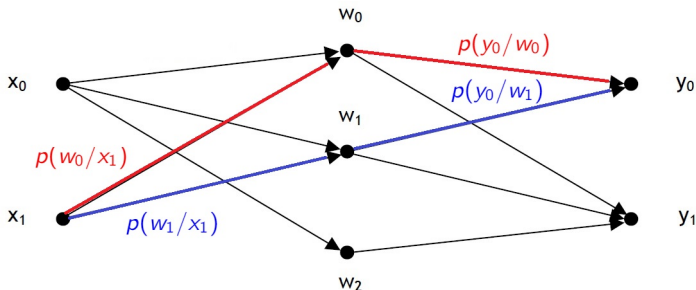
Canal Discreto Sem Memória

- **Simplificando o canal composto:** a partir do diagrama de probabilidades.

② Percurso de x_1 até y_0 :

- Há dois percursos: $x_1 \rightarrow w_0 \rightarrow y_0$ ou $x_1 \rightarrow w_1 \rightarrow y_0$, logo:

$$p(y_0/x_1) = p(w_0/x_1)p(y_0/w_0) + p(w_1/x_1)p(y_0/w_1)$$

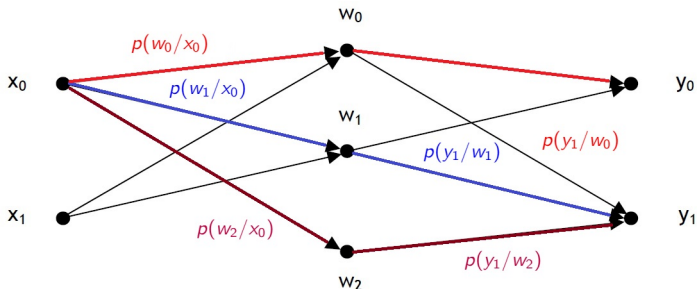


- **Simplificando o canal composto:** a partir do diagrama de probabilidades.

③ Percurso de x_0 até y_1 :

- Há três percursos: $x_0 \rightarrow w_0 \rightarrow y_1$ ou $x_0 \rightarrow w_1 \rightarrow y_1$ ou $x_0 \rightarrow w_2 \rightarrow y_1$, logo:

$$p(y_1/x_0) = p(w_0/x_0)p(y_1/w_0) + p(w_1/x_0)p(y_1/w_1) + p(w_2/x_0)p(y_1/w_2)$$



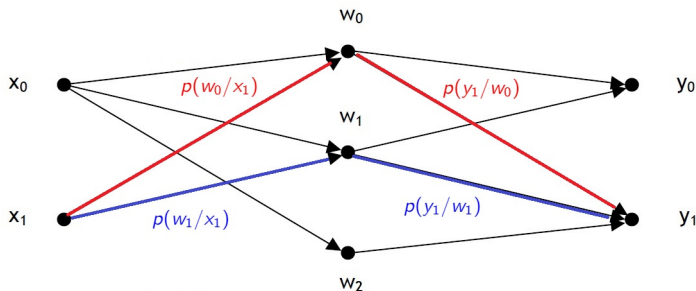
Canal Discreto Sem Memória

- **Simplificando o canal composto:** a partir do diagrama de probabilidades.

④ Percurso de x_1 até y_1 :

- Há dois percursos: $x_1 \rightarrow w_0 \rightarrow y_1$ ou $x_1 \rightarrow w_1 \rightarrow y_1$, logo:

$$p(y_1/x_1) = p(w_0/x_1)p(y_1/w_0) + p(w_1/x_1)p(y_1/w_1)$$



- **Simplificando o canal composto:**

- Logo, podemos concluir que:

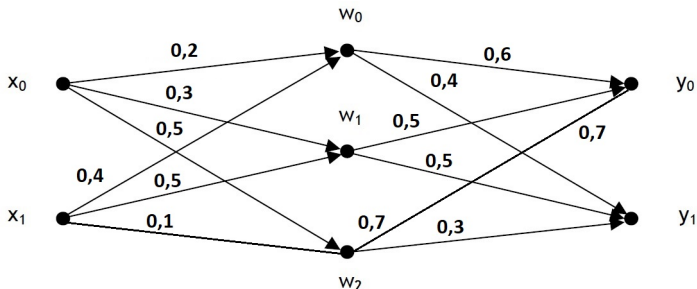
- $p(y_0/x_0) = p(w_0/x_0)p(y_0/w_0) + p(w_1/x_0)p(y_0/w_1)$
- $p(y_0/x_1) = p(w_0/x_1)p(y_0/w_0) + p(w_1/x_1)p(y_0/w_1)$
- $p(y_1/x_0) = p(w_0/x_0)p(y_1/w_0) + p(w_1/x_0)p(y_1/w_1) + p(w_2/x_0)p(y_1/w_2)$
- $p(y_1/x_1) = p(w_0/x_1)p(y_1/w_0) + p(w_1/x_1)p(y_1/w_1)$

- E assim, a matriz de canal AC pode ser escrita como:

$$P_{C/A} = \begin{bmatrix} p(y_0|x_0) & p(y_1|x_0) \\ p(y_0|x_1) & p(y_1|x_1) \end{bmatrix} \Rightarrow P_{C/A} = \begin{bmatrix} p(y_0/x_0) & p(y_1/x_0) \\ p(y_0/x_1) & p(y_1/x_1) \end{bmatrix}$$

Canal Discreto Sem Memória

- **EXEMPLO 1:** Seja a conexão de dois canais discretos em cascata, cujo diagrama de probabilidade é apresentado na figura abaixo.



Determine:

- A matriz de canal $P(W|X)$
- A matriz de canal $P(Y|W)$
- Se possível, a matriz de canal $P(Y|X)$

- **EXEMPLO 1:** Seja a conexão de dois canais discretos em cascata, cujo diagrama de probabilidade é apresentado na figura abaixo.

Determine:

- (a) A matriz de canal $P(W|X)$
- (b) A matriz de canal $P(Y|W)$
- (c) Se possível, a matriz de canal $P(Y|X)$

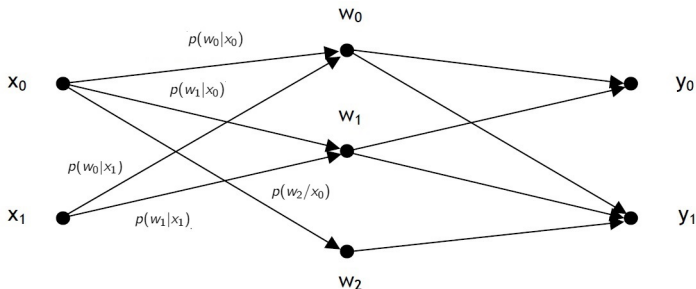
- **SOLUÇÃO:**

VER EM ANEXO!

- **Simplificando o canal composto:**

- Temos que:

$$P_{B/A} = \begin{bmatrix} p(w_0|x_0) & p(w_1|x_0) & p(w_2|x_0) \\ p(w_0|x_1) & p(w_1|x_1) & p(w_2|x_1) \end{bmatrix}$$

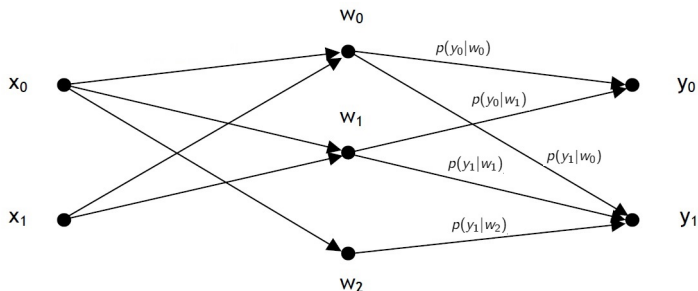


Canal Discreto Sem Memória

- **Simplificando o canal composto:**

- Temos que:

$$P_{C/B} = \begin{bmatrix} p(y_0|w_0) & p(y_1|w_0) \\ p(y_0|w_1) & p(y_1|w_1) \\ p(y_0|w_2) & p(y_1|w_2) \end{bmatrix}$$



- **Simplificando o canal composto:**

- Vejamos qual o resultado do produto:

$$P_{B/A} \times P_{C/B} \Rightarrow P_{B/A_{2 \times 3}} \times P_{C/B_{3 \times 2}} = P_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} \\ P_{1,0} & P_{1,1} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} p(w_0|x_0) & p(w_1|x_0) & p(w_2|x_0) \\ p(w_0|x_1) & p(w_1|x_1) & p(w_2|x_1) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p(y_0|w_0) & p(y_1|w_0) \\ p(y_0|w_1) & p(y_1|w_1) \\ p(y_0|w_2) & p(y_1|w_2) \end{bmatrix}$$

$$P_{0,0} = p(w_0|x_0)p(y_0|w_0) + p(w_1|x_0)p(y_0|w_1) + p(w_2|x_0)p(y_0|w_2)$$

$$P_{0,1} = p(w_0|x_0)p(y_1|w_0) + p(w_1|x_0)p(y_1|w_1) + p(w_2|x_0)p(y_1|w_2)$$

$$P_{1,0} = p(w_0|x_1)p(y_0|w_0) + p(w_1|x_1)p(y_0|w_1) + p(w_2|x_1)p(y_0|w_2)$$

$$P_{1,1} = p(w_0|x_1)p(y_1|w_0) + p(w_1|x_1)p(y_1|w_1) + p(w_2|x_1)p(y_1|w_2)$$

- **Simplificando o canal composto:**

- Comparando com o canal composto que foi simplificado

- $p(y_0/x_0) = p(w_0/x_0)p(y_0/w_0) + p(w_1/x_0)p(y_0/w_1)$
- $p(y_0/x_1) = p(w_0/x_1)p(y_0/w_0) + p(w_1/x_1)p(y_0/w_1)$
- $p(y_1/x_0) = p(w_0/x_0)p(y_1/w_0) + p(w_1/x_0)p(y_1/w_1) + p(w_2/x_0)p(y_1/w_2)$
- $p(y_1/x_1) = p(w_0/x_1)p(y_1/w_0) + p(w_1/x_1)p(y_1/w_1)$

Temos:

$$p(y_0/x_0) = P_{0,0} \text{ com } p(w_2/x_0) = 0$$

$$p(y_0/x_1) = P_{0,1} \text{ com } p(w_2/x_0) = 0$$

$$p(y_1/x_0) = P_{1,0}$$

$$p(y_1/x_1) = P_{1,1} \text{ com } p(w_2/x_1) = 0$$

- **Simplificando o canal composto:**

- Isso quer dizer que:
 - A matriz de transição global dos canais em cascata é igual ao produto das matrizes de transição individual, ou seja:

$$P_{C|A} = P_{B|A} \times P_{C|B}$$

- Obs.: Só é possível se o número de saídas do primeiro canal for igual ao número de entradas do segundo canal.

- **Simplificando o canal composto:**

- Isso quer dizer que:
 - A matriz de transição global dos canais em cascata é igual ao produto das matrizes de transição individual, ou seja:

$$P_{C|A} = P_{B|A} \times P_{C|B}$$

- Obs.: Só é possível se o número de saídas do primeiro canal for igual ao número de entradas do segundo canal.

- **EXEMPLO 2:** Refaça a letra (c) do **EXEMPLO 1** pelo método do produto das matrizes.

- **EXEMPLO 2:** Refaça a letra (c) do **EXEMPLO 1** pelo método do produto das matrizes.
 - **SOLUÇÃO:**

VER EM ANEXO!