Universidade de Pernambuco - UPE
Escola Politécnica de Pernambuco - POLI ´
Disciplina: Teoria da Informação - Profª Verusca Severo - 2020.1
1º Lista de Exercícios
-Só serão aceitas as respostas com as devidas justificativas e/ou cálculos-

1. Considere o experimento aleatório de jogar dois dados de seis faces. Seja D_1 o número de pontos (número de cada face) obtidos no dado 1 e D_2 o número de pontos (número de cada face) obtidos no dado 2. Considere os dois seguintes eventos, A e B, em que:

$$A = \{(D_1, D_2)|D_1 + D_2 = 10\} \quad \text{e} \quad B = \{(D_1, D_2)|D_1 > D_2\}$$

Determine:
(a) $P(A)$.
(b) $P(B)$.
(c) $P(A|B)$.
(d) $P(B|A)$.

2. O histograma apresentado na Figura 1 apresenta a probabilidade de que uma pessoa, escolhida ao acaso em um grupo de mulheres com idades de 25 a 35 anos, tenha um certo número de filhos.

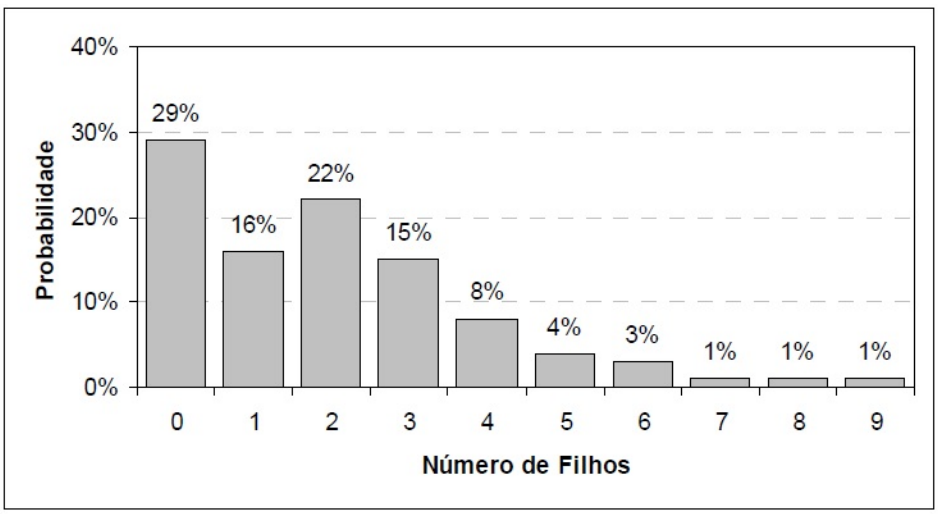

Figura 1: Quesito 2 - Lista de Exercícios 1

Responda:
(a) Se uma mulher é escolhida ao acaso neste grupo, é mais provável que ela tenha quantos filhos? Qual é a probabilidade correspondente?
(b) Se uma mãe é escolhida ao acaso neste grupo, é mais provável que ela tenha quantos filhos? Qual é a probabilidade correspondente?
(c) Suponhamos que, dentre todos os filhos das mulheres da amostra, um seja escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de que ele seja filho único?

3. Seja a distribuição conjunta $P(X = x, Y = y)$ das variáveis aleatórias X e Y apresentada na Tabela 1 (nas células em destaque na cor azul, com algumas entradas faltando).

X \ Y	0	1	2	3	$P(X = x)$
0		3/64	1/32		5/16
1	1/16	1/16	0		
2	1/64	11/64		1/64	5/16
3	5/64		3/64	1/32	
$P(Y = y)$		5/16		1/4	1

Table 1: Quesito 3 - Lista de Exercícios 1

(a) Complete a tabela.
(b) Obtenha as probabilidades marginais de X, ou seja, $P(X = x)$, e de Y, ou seja, $P(Y = y)$.
(c) X e Y são independentes? Justifique.

4. Seja X uma variável aleatória discreta que modela a saída de uma fonte de informação. O símbolos que a fonte emitem compõem o alfabeto da fonte, ou seja, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_K\}$, com probabilidades $P(X = x_i) = p_i$, para $i = 1, 2, \ldots, K$, que satisfaz a igualdade $\sum_{i=1}^{K} p_i = 1$. A quantidade de informação $H(X)$, segundo Shannon, produzida pela fonte está associada à incerteza ou surpresa do símbolos que fonte emite. Responda:
(a) Qual a condição necessária para que $H(X) = H(X)_{\max}$ (entropia máxima)?
(b) Determine $H(X)_{\max}$.

5. Seja Z uma variável aleatória discreta que possui M possíveis valores, ou seja, $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_M\}$, com distribuição de probabilidade $P(Z = z_j)$, com $j = 1, 2, \ldots, M$. Demonstre que $H(Z) \geq 0$.

6. Seja S uma fonte discreta com alfabeto $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ e com distribuição de probabilidades $p_{s_0} = p_{s_1} = 0,3$, $p_{s_2} = 0,2$ e $p_{s_3} = p_{s_4} = 0,1$. Determine a entropia desta fonte.

7. Suponha que o vetor aleatório $[X_1, X_2, X_3]$ assume os valores $[0, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[1, 0, 0]$ e $[0, 0, 1]$, cada um deles com probabilidade igual a $p = \frac{1}{4}$. Calcule:
(a) $H(X_1)$.
(b) $H(X_2)$.
(c) $H(X_3)$.

8. Considere as variáveis aleatórias binárias, X e Y, ou seja, $X = \{0, 1\}$ e $Y = \{0, 1\}$, tais que $P(X = 1) = 0,5$, $P(Y = 1/X = 0) = 0,2$ e $P(Y = 1/X = 1) = 0,5$. Calcule:
(a) $H(X)$.
(b) $H(Y)$.

Bons estudos!!! =)