Aluno: João Victor da Silva Prado
Teoria da Informação
Primeiro Exercício Escolar

1) $x = \{0,1\}$; $y = \{0,1\}$

$P(y=0|x=1) = 1/4$; $P(y=1|x=0) = 1/2$. $P(x=0) = 2/5$

a) $H(x)$ $\qquad P(x=0) = 2/5$ então $P(x=1) = 3/5$

$$H(x) = \frac{2}{5} \cdot \log_2\left(\frac{1}{2/5}\right) + \frac{3}{5} \cdot \log_2\left(\frac{1}{3/5}\right)$$

$$H(x) = (0{,}4 \cdot 1{,}322) + (0{,}6 \cdot 0{,}734) = \underline{0{,}969 \text{ bit}}$$

b) $H(y)$ $\quad \rightarrow P(y=1|x=0) = 1/2$ então $P(y=0|x=0) = 1/2$

$\rightarrow P(y=0|x=1) = 1/4$ então $P(y=1|x=1) = 3/4$

$$P(y=1) = P(x=0, y=1) + P(x=1, y=1)$$

$$P(y=1) = (P(x=0) \cdot P(y=1/x=0)) + (P(x=1) \cdot P(y=1|x=1))$$

$$= (2/5 \cdot 1/2) + (3/5 \cdot 3/4) \Rightarrow P(y=1) = 0{,}65$$

$$P(y=0) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$$

$$H(y) = \left(0{,}35 \cdot \log_2 \frac{1}{0{,}35}\right) + \left(0{,}65 \cdot \log_2 \frac{1}{0{,}65}\right)$$

$$H(y) = 0{,}53 + 0{,}404 = \underline{0{,}934 \text{ bit}}$$

c) $H(y|x)$ $\qquad H(y|x) = \overbrace{P(x=0)}^{2/5} \cdot \overbrace{H(y/x=0)}^{\mathrm{I}} + \overbrace{P(x=1)}^{3/5} \cdot \overbrace{H(y|x=1)}^{\mathrm{II}}$

I $H(y/x=0) = P(y=0/x=0) \log_2(1/P(y=0/x=0)) + P(y=1|x=0) \log_2(1/P(y=1/x=0))$

$H(y/x=0) = 0{,}5 \cdot \log_2(1/0{,}5) + 0{,}5 \cdot \log_2(1/0{,}5) = \underline{1}$

II $H(y/x=1) = P(y=0/x=1) \log_2(1/P(y=0/x=1)) + P(y=1/x=1) \log(1/P(y=1/x=1))$

$H(y/x=1) = 0{,}25 \cdot \log_2(1/0{,}25) + 0{,}75 \cdot \log_2(1/0{,}75) = 0{,}81$

$$H(y|x) = 2/5 \cdot 1 + 3/5 \cdot 0{,}81 = \underline{0{,}886 \text{ bit}}$$

tilibra

d) $H(x,y) =$

$P(x=0,y=0)\cdot \log_2 1/P(x=0,y=0) + P(x=0,y=1)\cdot \log_2 1/P(x=0,y=1)$
$+ P(x=1,y=0)\cdot \log_2 1/P(x=1,y=0) + P(x=1,y=1)\cdot \log_2 1/P(x=1/y=1)$

$P(x=0,y=0) = P(x=0)\cdot P(y=0/x=0) = 2/5 \cdot 1/2 = 0,2$
$P(x=0,y=1) = P(x=0)\cdot P(y=1/x=0) = 2/5 \cdot 1/2 = 0,2$
$P(x=1,y=0) = P(x=1)\cdot P(y=0/x=1) = 3/5 \cdot 1/4 = 0,15$
$P(x=1,y=1) = P(x=1)\cdot P(y=1/x=1) = 3/5 \cdot 3/4 = 0,45$

$H(x,y) = 0,2\cdot \log_2(1/0,2) + 0,2\cdot \log_2(1/0,2) + 0,15\cdot \log_2(1/0,15)$
$+ 0,45\cdot \log(1/0,45) = 0,464 + 0,464 + 0,411 + 0,517$
$H(x,y) = \underline{1,856 \text{ bits}}$

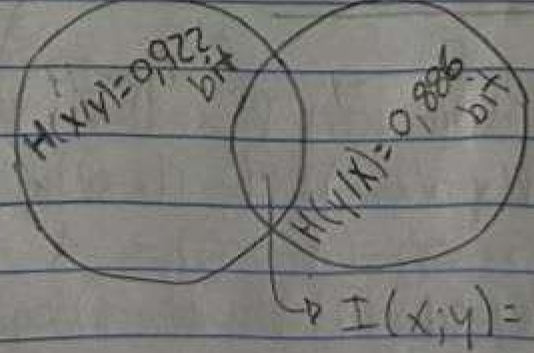
e) $H(x|y) = H(x,y) - H(y) = 1,856 - 0,934 = \underline{0,922 \text{ bit}}$

f) $I(x;y) = H(x) - H(x/y) = 0,969 - 0,922 = \underline{0,047 \text{ bit}}$
$I(y;x) = H(y) - H(y/x) = 0,934 - 0,886 = \underline{0,048 \text{ bit}}$

g) Diagrama de Venn

$H(x,y) = 1,856$ bit

$H(x) = 0,969$ bit
$H(y) = 0,934$ bit



$I(x;y) = 0,047$ bit

2) $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$

a) $H(S) = 6 \cdot (1/6 \cdot \log_2(1/\frac{1}{6}))$ Obs: equiprovável, então cada termo tem a probabilidade: 1/6

$H(S) = \log_2(6) = \underline{2{,}58 \text{ bits}}$

b) $H(S) =$ $P(s_0) = P(s_1) = P(s_2) = 0{,}1$, $P(s_5) = 0{,}3$

$P(s_3) = P(s_4) = 0{,}2$

$H(S) = 3 \cdot (0{,}1 \cdot \log_2(1/0{,}1)) + 2 \cdot (0{,}2 \cdot \log_2(1/0{,}2)) + 0{,}3 \cdot \log_2(1/0{,}3)$

$H(S) = 0{,}996 + 0{,}929 + 0{,}520 = \underline{2{,}445 \text{ bits}}$

c) Para o caso de uma extensão de ordem $n=5$ da fonte S:

$H(U^n) = n \cdot H(U)$

$H(S^5) = 5 \cdot H(S) = 5 \cdot 2{,}58 = \underline{12{,}9 \text{ bits}}$

d) Para o caso de uma extensão de ordem $n=5$ na fonte S:

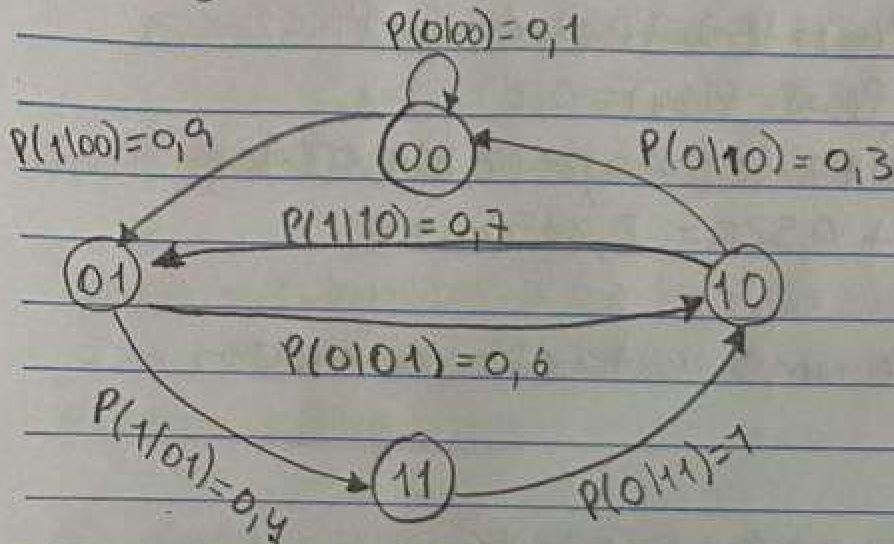
$H(U^n) = n \cdot H(U)$

$H(S^5) = 5 \cdot H(S) = 5 \cdot 2{,}445 = \underline{12{,}22 \text{ bits}}$

3)

$P(0\|00)=0{,}1$	$P(0\|01)=0{,}6$	$P(0\|10)=0{,}3$	$P(0\|11)=1$
$P(1\|00)=0{,}9$	$P(1\|01)=0{,}4$	$P(1\|10)=0{,}7$	$P(1\|11)=0$

a) Diagrama de estados



b) 00| $P(00) = P(0,00) + P(0,10)$

$P(00) = P(00)P(0|00) + P(10)P(0|10) = 0{,}1P(00) + 0{,}3P(10)$

$0{,}9P(00) = 0{,}3P(10) \rightarrow P(00) = \frac{0{,}3}{0{,}9}P(10)$

01| $P(01) = P(1,00) + P(1,10) = P(00)P(1|00) + P(10)P(1|10)$

$P(01) = 0{,}9P(00) + 0{,}7P(10) = 0{,}9 \cdot \frac{0{,}3}{0{,}9}P(10) + 0{,}7P(10)$

$P(01) = P(10)$

11| $P(11) = P(1,01) + P(1,11) = P(01)P(1|01) + P(11)P(1/11)$

$P(11) = 0{,}4P(01) + P(11) \cdot 0 \rightarrow P(11) = 0{,}4P(01)$

$P(00) + P(01) + P(10) + P(11) = 1 \rightarrow \frac{0{,}3}{0{,}9}P(10) + 2(P(10)) + 0{,}4P(10) = 1$

$P(10) \cdot \left(\frac{0{,}3}{0{,}9} + 2 + 0{,}4\right) = 1 \rightarrow P(10) = 0{,}366$

$P(00) = \frac{0{,}3}{0{,}9} \cdot 0{,}366 = 0{,}122 = P(00)$

$P(01) = P(10) = 0{,}366$

$P(11) = 0{,}4 \cdot 0{,}366 = 0{,}1464$

c) $H(F) = P(00)H(F|00) + P(01)H(F|01) + P(10)H(F|10) + P(11)H(F|11)$

$H(F|00) = P(0|00)\log_2(1/P(0|00)) + P(1/00)\log_2(1/P(1/00))$
$H(F|00) = 0{,}1\log_2(1/0{,}1) + 0{,}9\log_2(1/0{,}9)$
$H(F|00) = 0{,}1 \cdot 3{,}32 + 0{,}9 \cdot 0{,}1520 = 0{,}469$ bit

$H(F|01) = P(0|01)\log_2(1/P(0|01)) + P(1/01)\log_2(1/P(1|01))$
$H(F|01) = 0{,}6\log_2(1/0{,}6) + 0{,}4\log_2(1/0{,}4)$
$H(F|01) = 0{,}6 \cdot 0{,}737 + 0{,}4 \cdot 1{,}322 = 0{,}971$ bit

$H(F|11) = P(0|11)\log_2(1/P(0|11)) + P(1/11)\log_2(1/P(1/11))$
$H(F|11) = 1 \cdot \cancel{\log_2(1)} + 0 \cdot \cancel{\log_2(0)} = 0$

$H(F|10) = P(0|10)\log_2(1/P(0|10)) + P(1|10)\log_2(1/P(1/10))$
$H(F|10) = 0{,}3\log_2(1/0{,}3) + 0{,}7\log_2(1/0{,}7)$
$H(F|10) = 0{,}3 \cdot 1{,}737 + 0{,}7 \cdot 0{,}5145 = 0{,}8812$ bit

$H(F) = 0{,}122 \cdot 0{,}469 + 0{,}366 \cdot 0{,}971 + 0{,}366 \cdot 0{,}8812 + 0$
$\underline{H(F) = 0{,}735 \text{ bit}}$

d) $P(1) = P(00,1) + P(01,1) + P(10,1) + P(11,1)$
$P(1) = P(00)P(1/00) + P(01)P(1|01) + P(10)P(1|10) + P(11)P(1|11)$
$P(1) = 0{,}122 \cdot 0{,}9 + 0{,}366 \cdot 0{,}4 + 0{,}366 \cdot 0{,}7 + 0$
$\underline{P(1) = 0{,}5174}$

4)

a) Cod. A e Cod. C

O cod. A tem palavras código de tamanho fixo e cada uma corresponde a somente um símbolo.

O cod. C é prefixo, consequentemente também é univocamente decodificável.

b) Em um código decodificável instantaneamente a palavra código é reconhecida (decodificada) assim que seu último digito for recebido.

O código A, por ter códigos de tamanho fixo e suas palavras codigo serem distintas entre si atenderá a esse requisito.

O código C, por ser prefixo é por natureza decodificavel instantaneamente.

c) Cod. A $= 0{,}5 \cdot 2 + 0{,}25 \cdot 2 + 0{,}125 \cdot 2 + 0{,}125 \cdot 2 = \underline{2}$

Cod. B $= 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}25 \cdot 2 + 0{,}125 \cdot 2 + 0{,}125 \cdot 3 = \underline{1{,}625}$

Cod. C $= 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}25 \cdot 2 + 0{,}125 \cdot 3 + 0{,}125 \cdot 3 = \underline{1{,}75}$

Cod. D $= 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}25 \cdot 2 + 0{,}125 \cdot 3 + 0{,}125 \cdot 3 = \underline{1{,}75}$

Cod. E $= 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}25 \cdot 2 + 0{,}125 \cdot 3 + 0{,}125 \cdot 2 = \underline{1{,}625}$

Cod. F $= \underline{2}$ (comprimento fixo)

Cod. G $= 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}25 \cdot 2 + 0{,}125 \cdot 3 + 0{,}125 \cdot 4 = \underline{1{,}875}$

d) $\sum_{i=1}^{M} D^{-l_i} \leq 1$

Cod A $= 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-2} = \underline{1}$

Cod B $= 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-3} = 0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}125 = \underline{1{,}125}$

Cod C $= 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-3} = 0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}125 + 0{,}125 = \underline{1}$

Cod D $= 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-3} = 0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}125 + 0{,}125 = \underline{1}$

Cod E $= 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-3} = \underline{1{,}125}$

Cod F $= 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-2} = \underline{1}$

Cod G $= 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} = 0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}125 + 0{,}0625$
Cod G $= \underline{0{,}9375}$

Cada um desses valores obtidos garante se é possível construir um codigo prefixo. No caso, conseguimos formar com todos menos com o codigo B e com o E, pois o resultado é maior que 1.

e) O código C é o melhor. Além de ser univocamente decodificavel e com decodificação instantanea também tem um comprimento medio menor do que o do codigo A.

5) $U = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}\}$

a) $H(U) = \frac{4}{24} \cdot \log_2\left(1/\frac{4}{24}\right) + 4 \cdot \left(\frac{3}{24} \cdot \log_2\left(\frac{1}{3/24}\right)\right)$

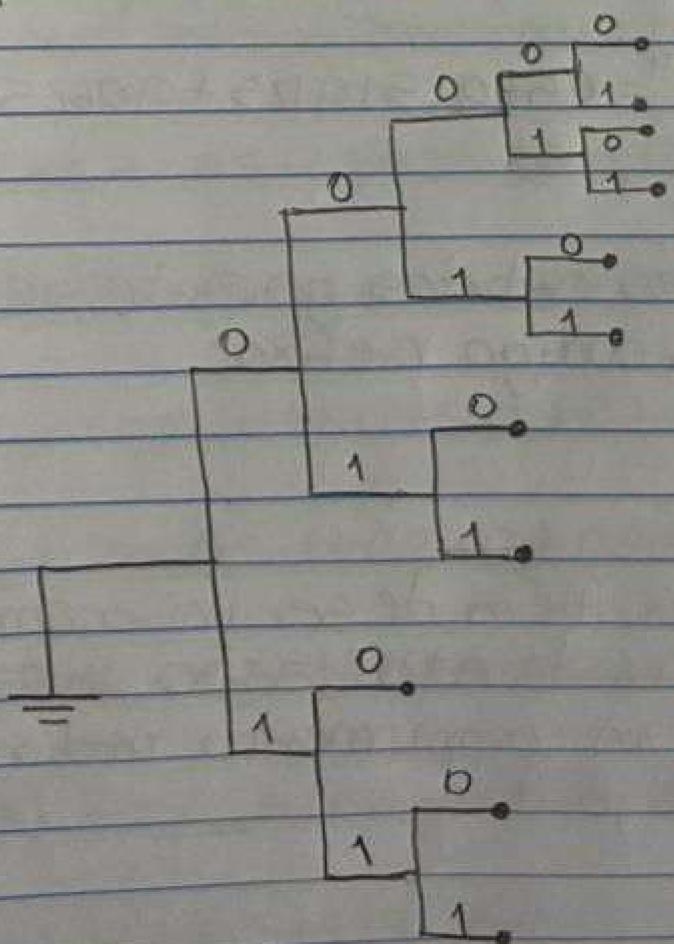
$+ 2 \cdot \left(\frac{2}{24} \cdot \log_2\left(\frac{1}{2/24}\right)\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{24} \cdot \log_2\left(\frac{1}{1/24}\right)\right)$

$H(U) = 0{,}431 + 1{,}5 + 0{,}6 + 0{,}764 = \underline{3{,}295 \text{ bits}}$

b) $2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-3} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-5} + 2^{-5} + 2^{-5} + 2^{-3}$

$0{,}25 + 4 \cdot (0{,}125) + 2 \cdot (0{,}0625) + 4 \cdot (0{,}03125) = \underline{1}$

Seguindo a desigualdade de Kraft, vemos que é possível criar um código prefixo binário.



s0 - 10
s1 - 110
s2 - 111
s3 - 010
s4 - 011
s5 - 0010
s6 - 0011
s7 - 00000
s8 - 00001
s9 - 00010
s10 - 00011

c) $L = \sum_{i=1}^{M} l_i \, P(s_i)$

$$L = \frac{4}{24} \cdot 2 + 4\left(\frac{3}{24} \cdot 3\right) + 2\left(\frac{2}{24} \cdot 4\right) + 4\left(\frac{1}{24} \cdot 5\right)$$

$$L = \frac{2}{6} + \frac{9}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6}$$

$$L = \frac{20}{6} \rightarrow \underline{L = 3{,}33}$$