Aluno: João Victor da Silva Prado
Teoria da informação
Segundo Exercício escolar

1)
a) Os códigos A e C são univocamente decodificáveis.
Não é o caso do código B, que pode gerar ambiguidades, ex:

$f_3 = 000100$

$f_1 f_2 f_1 = 000100$

b) Nenhum código entre os apresentados é prefixo, por consequência, nenhum é instântaneo.
(Há símbolos em todos códigos que são prefixo de outros símbolos do seu código).

c) Cód. A: $2^{-1} + 2^{-4} + 2^{-7} \leq 1$

$0,570 \leq 1$

Cód. B: $2^{-1} + 2^{-4} + 2^{-6} \leq 1$

$0,578 \leq 1$

Cód. C: $2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-3} \leq 1$

$0,75 \leq 1$

Os 3 códigos passam na desigualdade de Kraft. Então, é possível construir um código prefixo com eles.

d) O melhor é o código "C". O "B" é eliminado, pois não é univocamente decodificável. Como não sabemos as probabilidades dos símbolos do "codA" e "codC" para achar o comprimento médio, vemos o tamanho das palavras e as de "C" são menores

2) $S = \{o, c, a, r, ⊔\}$ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 simbolos
carro⊔caro

$P_o = 2/10 = 0,2$; $P_c = 2/10 = 0,2$; $P_a = 2/10 = 0,2$
$P_r = 3/10 = 0,3$; $P_⊔ = 1/10 = 0,1$

a)

r	0,3	0	0		→ r = 00
o	0,2		1		→ o = 01
c	0,2		0		→ c = 10
a	0,2	1	1	0	→ a = 110
⊔	0,1			1	→ ⊔ = 111

b) $H(S)/L$:
$$H(S) = 3 \cdot (0,2 \cdot \log_2(1/0,2)) + 0,3 \cdot \log_2(1/0,3) + 0,1 \cdot \log_2(1/0,1)$$
$H(S) = \underline{2,246 \text{ bits}}$

$L = 2 \cdot (0,3 + 0,2 + 0,2) + 3(0,2 + 0,1) = 1,4 + 0,9 = \underline{2,3 \text{ bits}}$

$\underline{n = 2,246 / 2,3 = 97,65\%}$

c)

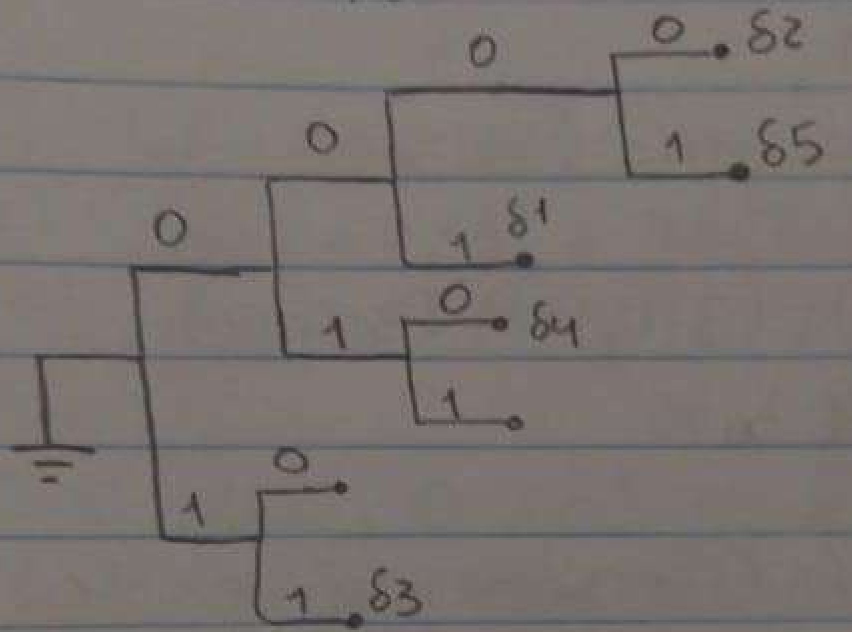
c	a	r	r	o	⊔	c	a	r	o
10	110	00	00	01	111	10	110	00	01

Foram necessários 23 bits para codificar a mensagem comprimento

3) a) $c_1 = \log_2(1/0{,}18) = 3$
$c_2 = \log_2(1/0{,}12) = 4$
$c_3 = \log_2(1/0{,}4) = 2$
$c_4 = \log_2(1/0{,}18) = 3$
$c_5 = \log_2(1/0{,}12 = 4$

Código:

$s_1 = 001$ | $s_3 = 11$ | $s_5 = 0001$
$s_4 = 010$ | $s_2 = 0000$



b) Teorema da codificação: $H(U) \leq L \leq H(U)+1$

$H(S) = 2(0{,}18 \cdot \log_2(1/0{,}18)) + (0{,}4 \cdot \log_2(1/0{,}4)) + 2(0{,}12 \cdot \log_2(1/0{,}12))$

$H(S) = 2(0{,}18 \cdot 2{,}47) + (0{,}4 \cdot 1{,}32) + 2(0{,}12 \cdot 3{,}06)$

$H(S) = 0{,}889 + 0{,}528 + 0{,}734 = \underline{2{,}151 \text{ bits}}$

$L = (3 \cdot 0{,}18) + (4 \cdot 0{,}12) + (2 \cdot 0{,}4) + (3 \cdot 0{,}18) + (4 \cdot 0{,}12)$

$L = 1{,}08 + 0{,}96 + 0{,}8 = \underline{2{,}84 \text{ bits}}$

$2{,}151 \leq 2{,}84 \leq 3{,}151$ ✓ O teorema da codificação é válido!

c)

$S3 = 0{,}4$	0	0			$S3 = 00$
$S1 = 0{,}18$		1			$S1 = 01$
$S4 = 0{,}18$	1	0			$S4 = 10$
$S2 = 0{,}12$		1	0		$S2 = 110$
$S5 = 0{,}12$			1		$S5 = 111$

d) $H(U) \leq L \leq H(U) + 1$

$\hookrightarrow 2{,}151$

$L = (2 \cdot 0{,}4) + (2 \cdot 0{,}18) + (2 \cdot 0{,}18) + (3 \cdot 0{,}12) + (3 \cdot 0{,}12)$

$L = 0{,}8 + 0{,}72 + 0{,}72 = 2{,}24$ bits

$2{,}151 \leq 2{,}24 \leq 3{,}151$ ✓ O teorema é válido!

e)

S3 – 0,4 — 0,4 — 0,4 → 0,6 0
S1 – 0,18 → 0,24 → 0,36 0 → 0,4 1
S4 – 0,18 → 0,18 0 → 0,24 1
S2 – 0,12 0 → 0,18 1
S5 – 0,12 1

$S3 = 1$	$S4 = 001$	$S5 = 011$
$S1 = 000$	$S2 = 010$	

f) $L = (1 \cdot 0{,}4) + (3 \cdot 0{,}18) + (3 \cdot 0{,}18) + (3 \cdot 0{,}12) + (3 \cdot 0{,}12)$

$L = 0{,}4 + 1{,}08 + 0{,}72 = \underline{2{,}2 \text{ bits}}$

$H(S) = \underline{2{,}151}$

$2{,}151 \leq 2{,}2 \leq 3{,}151$ ✓

O teorema é válido!

g) Eficiencia (Huffman)

$$\frac{H(S)}{L} = \frac{2,151}{2,2} = \underline{97,77\%}$$

Eficiencia (Shannon-Fano)

$$\frac{H(S)}{L} = \frac{2,151}{2,24} = \underline{96,03\%}$$

Eficiencia (Shannon)

$$\frac{H(S)}{L} = \frac{2,151}{2,84} = \underline{75,74\%}$$

Logo, o código Binário de Huffman é o mais eficiente.

4) a) $H(S) = 0{,}6 \cdot \log_2(1/0{,}6) + 0{,}4 \cdot \log_2(1/0{,}4) = 0{,}442 + 0{,}528$

$\underline{H(S) = 0{,}97 \text{ bit}}$

b) S^{27}

$H(S^{27}) = 27 \cdot H(S) = 27 \cdot 0{,}97 = \underline{\underline{26{,}19}}$

c) Extensão ordem 2 → $2^2 = 4$ simb

$H(S^2) = \{AA, AB, BA, BB\}$

$P(AA) = (0{,}6)^2 = 0{,}36$ | $P(BA) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$

$P(AB) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24$ | $P(BB = (0{,}4)^2 = 0{,}16$

AA - 0,36   0,4   0,6 0
AB - 0,24   0,36 0   0,4 1   1
BA - 0,24 0   0,24 1
BB - 0,16 1

AA = 00 ; AB = 01 ; BA = 10 ; BB = 11

$H(S^2) = 2 \cdot H(S) = 2 \cdot 0{,}97 = \underline{1{,}94 \text{ bit}}$

$L = 2 \cdot (0{,}36 + 0{,}24 + 0{,}24 + 0{,}16) = \underline{2 \text{ bits}}$

Então, a eficiência é:

$n = H(S^2)/L = 1{,}94/2 = \underline{97\%}$