Aluno: João Victor da Silva Prado

Teoria da Informação · LISTA 05

1) $P(S1) = 0,8 \quad P(S2) = 0,2 \quad S = \{S1, S2\}$

a) $n = 2$

$P(\delta 1) = P(S1, S1) = (0,8)^2 = 0,64$

$P(\delta 2) = P(S1, S2) = 0,8 \cdot 0,2 = 0,16$

$P(\delta 3) = P(S2, S2) = (0,2)^2 = 0,04$

$P(\delta 4) = P(S2, S1) = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16$

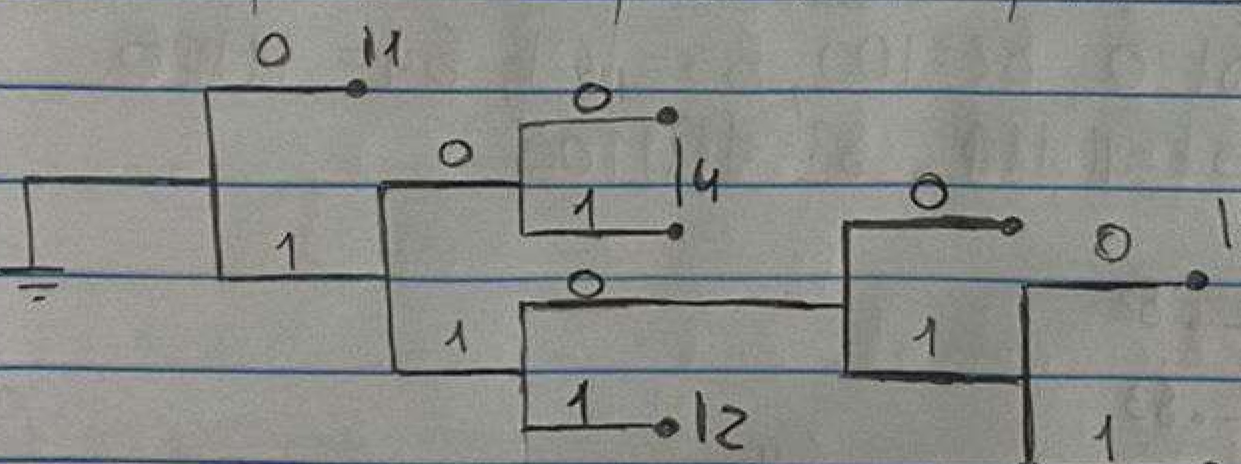
* Comprimentos das palavras:

$l_1 = \log_2(1/0,64) = 1 \qquad l_3 = \log_2(1/0,04) = 5$

$l_2 = \log_2(1/0,16) = 3 \qquad l_4 = \log_2(1/0,16) = 3$

* Possível código:

$l_1 = 0$, $l_2 = 111$, $l_3 = 11010$, $l_4 = 101$



b) Eficiência: $H(S) = 0,8 \cdot \log_2(1/0,8) + 0,2 \cdot \log_2(1/0,2) \rightarrow$

$\rightarrow H(S) = 0,2575 + 0,4644 = \underline{\underline{0,722 \text{ bit}}}$

$H(S^2) = 2 \cdot H(S) = 2 \cdot 0,722 = \underline{\underline{1,444 \text{ bit}}}$

$l_2 = (1 \cdot 0,64) + (3 \cdot 0,16) + (5 \cdot 0,04) + (3 \cdot 0,16) = \underline{\underline{1,8}}$

$\eta = 1,444/1,8 = \boxed{80,22\%}$

c) $n=3$

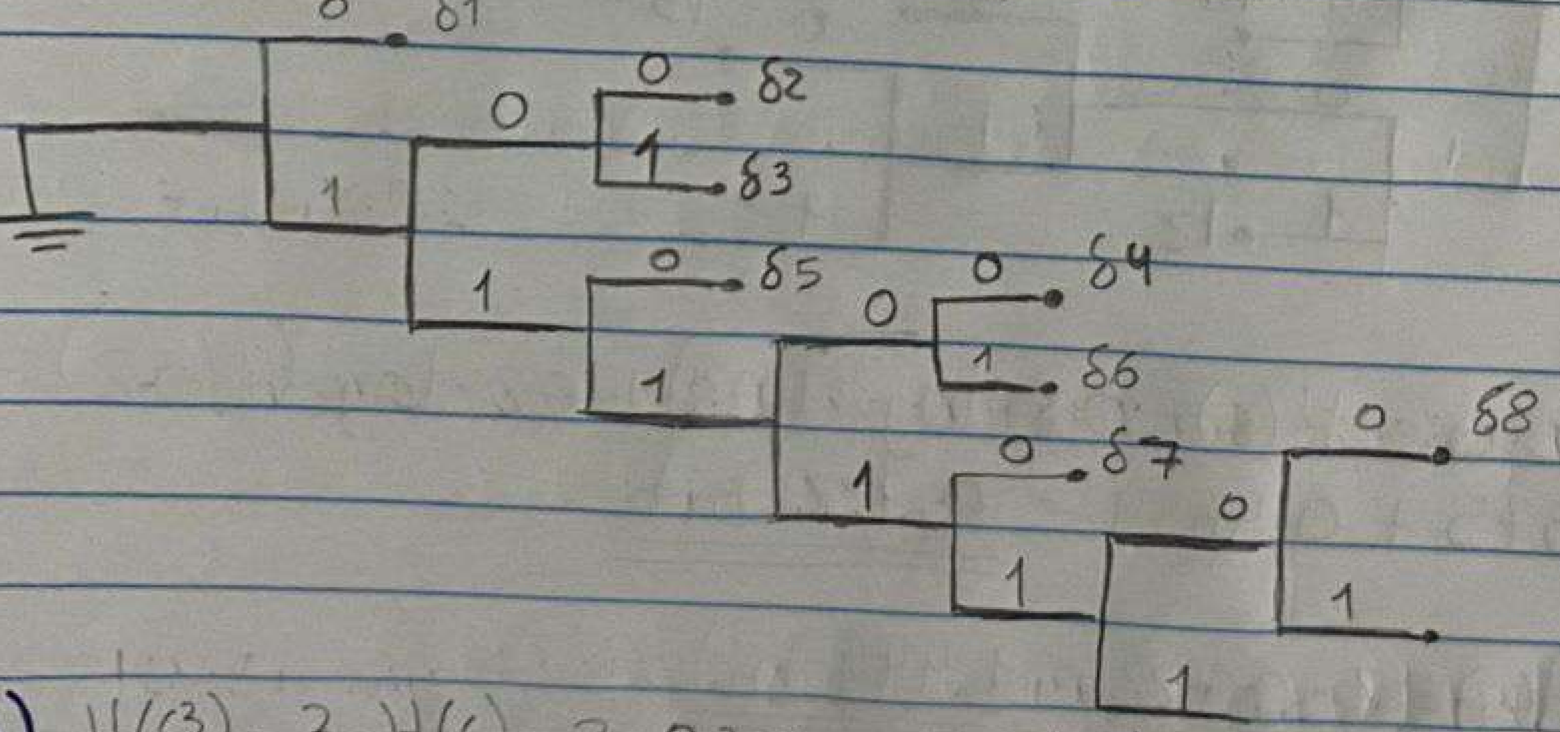
$S^3 = \{ s_1s_1s_1, s_1s_1s_2, s_1s_2s_1, s_1s_2s_2, s_2s_1s_1, s_2s_1s_2, s_2s_2s_1, s_2s_2s_2 \}$

$P(\delta_1) = P(s_1,s_1,s_1) = (0{,}8)^3 = 0{,}512$	$P(\delta_5) = P(s_2,s_1,s_1) = 0{,}128$
$P(\delta_2) = P(s_1,s_1,s_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}128$	$P(\delta_6) = P(s_2,s_1,s_2) = 0{,}032$
$P(\delta_3) = P(s_1,s_2,s_1) = 0{,}128$	$P(\delta_7) = P(s_2,s_2,s_1) = 0{,}032$
$P(\delta_4) = P(s_1,s_2,s_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}032$	$P(\delta_8) = P(s_2,s_2,s_2) = 0{,}008$

*Comprimentos das palavras:

$l_1 = \log_2(1/0{,}512) = 1$	$l_5 = \log_2(1/0{,}128) = 3$
$l_2 = \log_2(1/0{,}128) = 3$	$l_6 = \log_2(1/0{,}032) = 5$
$l_3 = \log_2(1/0{,}128) = 3$	$l_7 = \log_2(1/0{,}032) = 5$
$l_4 = \log_2(1/0{,}032) = 5$	$l_8 = \log_2(1/0{,}008) = 7$

*Possível código: $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 100$, $\delta_3 = 101$, $\delta_4 = 11100$, $\delta_5 = 110$, $\delta_6 = 11101$, $\delta_7 = 11110$, $\delta_8 = 1111100$



d) $H(S^3) = 3 \cdot H(S) = 3 \cdot 0{,}722 = \underline{2{,}2 \text{ bits}}$

$l_3 = (1 \cdot 0{,}512) + 3 \cdot (3 \cdot 0{,}128) + 3 \cdot (5 \cdot 0{,}032) + (7 \cdot 0{,}008) = 2{,}2$

$n = 2{,}2/2{,}2 = \underline{\underline{100\%}}$

* comprimento:

2) a) $l_0 = \log_2(1/0{,}2) = 3$

$l_1 = \log_2(1/0{,}25) = 2$

$l_2 = \log_2(1/0{,}15) = 3$

$l_3 = \log_2(1/0{,}08) = 4$

$l_4 = \log_2(1/0{,}07) = 4$

$l_5 = \log_2(1/0{,}06) = 5$

$l_6 = \log_2(1/0{,}05) = 5$

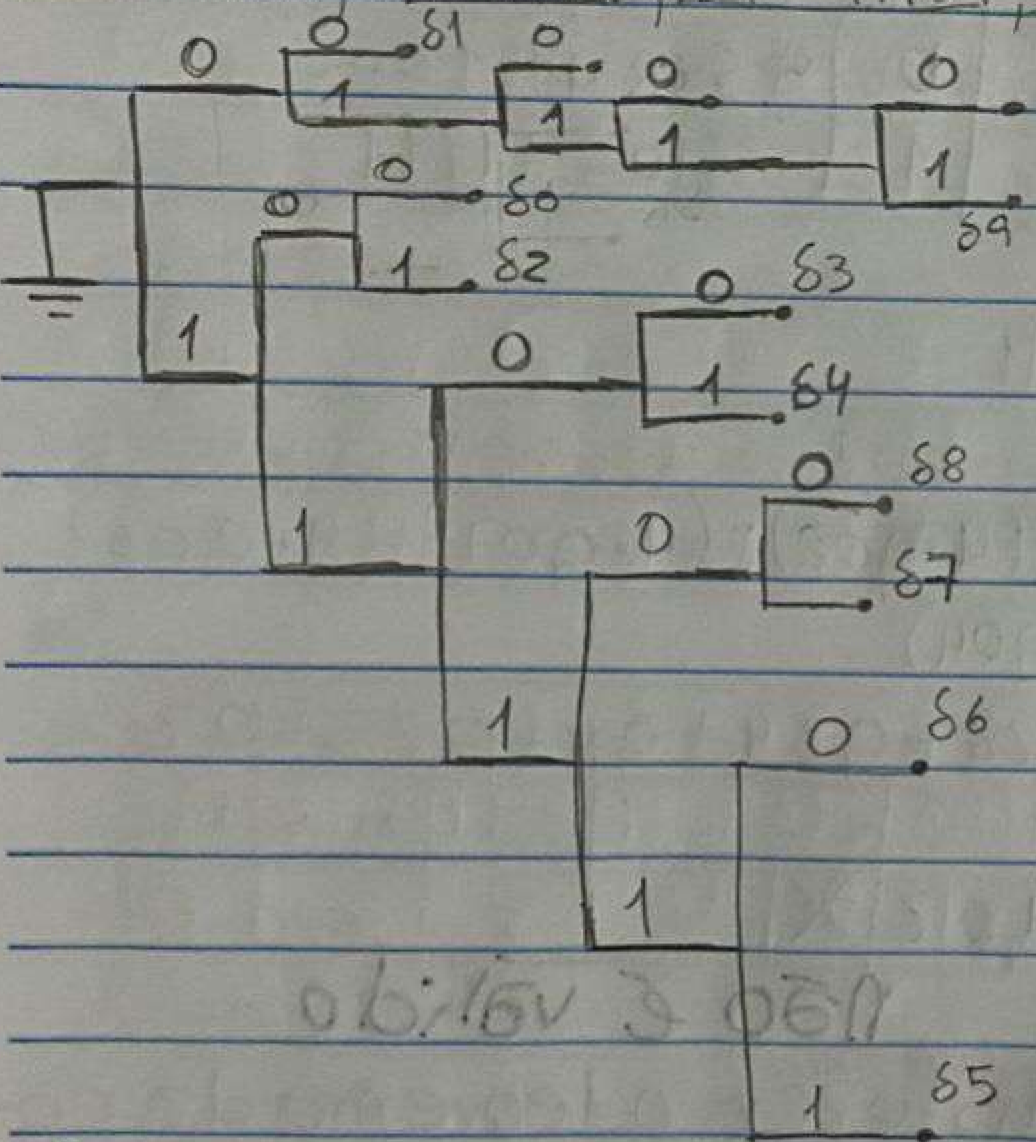
$l_7 = \log_2(1/0{,}05) = 5$

$l_8 = \log_2(1/0{,}05) = 5$

$l_9 = \log_2(1/0{,}04) = 5$

*código: $s_0 = 100$, $s_2 = 101$, $s_1 = 00$, $s_3 = 1100$, $s_4 = 1101$

$s_5 = 11111$, $s_6 = 11110$, $s_7 = 11101$, $s_8 = 11100$, $s_9 = 01111$



b) Teorema da codificação $\boxed{H(U) \le L \le H(U)+1}$

$H(S) = [0{,}2 \cdot \log_2(1/0{,}2)] + [0{,}25 \cdot \log_2(1/0{,}25)] + [0{,}15 \cdot \log_2(1/0{,}15)]$
$+ [0{,}08 \cdot \log_2(1/0{,}08)] + [0{,}07 \cdot \log_2(1/0{,}07)] + [0{,}06 \cdot \log_2(1/0{,}06)]$
$+ 4 \cdot [0{,}05 \cdot \log_2(1/0{,}05)] = \underline{3{,}012 \text{ bits}}$

$L = (3 \cdot 0{,}2) + (2 \cdot 0{,}25) + (3 \cdot 0{,}15) + (4 \cdot 0{,}08) + (4 \cdot 0{,}07) + (5 \cdot 0{,}06) + (5 \cdot 0{,}05)$
$+ (5 \cdot 0{,}04) = \underline{3{,}4 \text{ bits}}$

$3{,}012 \le 3{,}4 \le 4{,}012$ ✓ O Teorema da codificação é válido!

c)

S1	0,25	→ S1 = 00
S2	0,20	→ S2 = 01
S3	0,15	→ S3 = 100
S4	0,08	→ S4 = 1010
S5	0,07	→ S5 = 1011
S6	0,06	→ S6 = 1100
S7	0,05	→ S7 = 1101
S8	0,05	→ S8 = 1110
S9	0,05	→ S9 = 11110
S10	0,04	→ S10 = 11111

d) $H(U) \rightarrow 3{,}012$

$L = (2 \cdot 0{,}25) + (2 \cdot 0{,}2) + (0{,}15 \cdot 3) + (4 \cdot 0{,}08) + (4 \cdot 0{,}07) + (4 \cdot 0{,}06) + 2(4 \cdot 0{,}05) + (5 \cdot 0{,}05) + (5 \cdot 0{,}04)$

$L = 0{,}5 + 0{,}4 + 0{,}45 + 0{,}32 + 0{,}28 + 0{,}24 + 0{,}4 + 0{,}25 + 0{,}2$

$L = 3{,}04$

$3{,}012 \leq 3{,}04 \leq 4{,}012$ X

não é válido

e) O de Shannon, por satisfazer o teorema da codificação

3) $U = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$; $P(A) = P(B) = 0{,}25$; $P(C) = P(D) = 0{,}14$
$P(E) = P(F) = P(G) = P(H) = 0{,}055$

a) $H(U) =$

$2 \cdot [0{,}25 \cdot \log_2(1/0{,}25)] + 2 \cdot [0{,}14 \cdot \log_2(1/0{,}14)] + 4[0{,}055 \cdot \log_2(\frac{1}{0{,}055})]$

$H(U) = \underline{\underline{2{,}71 \text{ bits}}}$

b)

P(A)=0,25	0	0			→ A=00
P(B)=0,25		1			→ B=01
P(C)=0,14		0	0		→ C=100
P(D)=0,14			1		→ D=101
P(E)=0,055	1		0	0	→ E=1100
P(F)=0,055		1		1	→ F=1101
P(G)=0,055			1	0	→ G=1110
P(H)=0,055				1	→ H=1111

c) $L=(2\cdot 0{,}25)+(2\cdot 0{,}25)+(3\cdot 0{,}14)+(3\cdot 0{,}14)+(4\cdot 0{,}055)$
$+(4\cdot 0{,}055)+(4\cdot 0{,}055)+(4\cdot 0{,}055)=\underline{\underline{2{,}72}}$

d) $n=2{,}71/2{,}72=\underline{\underline{99{,}6\%}}$

4)

a)

P(A)=0,25		0				→ A=00
P(E)=0,25	0	1	0			→ E=010
P(S)=0,14			1			→ S=011
P(R)=0,11			0			→ R=100
P(O)=0,08		0	1	0		→ O=1010
P(U)=0,07				1		→ U=1011
P(C)=0,4	1		0	0		→ M=1100
P(P)=0,05				1		→ P=1101
P(M)=0,06		1		0		→ C=1110
P(T)=0,03			1	1	0	T=11110
P(J)=0,02					1	J=11111

b) $\boxed{H(U) \leq L \leq H(U)+1}$

$H(S) = [0,25 \cdot \log_2(1/0,25)] + [0,15 \cdot \log_2(1/0,15)] + [0,14 \cdot \log_2(1/0,14)]$
$+ [0,11 \cdot \log_2(1/0,11)] + [0,08 \cdot \log_2(1/0,08)] + [0,07 \cdot \log_2(1/0,07)]$
$+ [0,06 \cdot \log_2(1/0,06)] + [0,05 \cdot \log_2(1/0,05)] + [0,04 \cdot \log_2(1/0,04)]$
$+ [0,02 \cdot \log_2(1/0,02)] = \underline{3,11 \text{ bits}}$

$L = (2 \cdot 0,25) + (3 \cdot 0,15) + (3 \cdot 0,14) + (3 \cdot 0,11) + (4 \cdot 0,08) + (4 \cdot 0,07)$
$+ (4 \cdot 0,06) + (4 \cdot 0,05) + (4 \cdot 0,04) + (5 \cdot 0,03) + (5 \cdot 0,02)$
$L = \underline{3,15}$

$\underline{3,11 \leq 3,15 \leq 4,11}$ ✓ O código satisfaz o teorema da codificação

$\eta = 3,11/3,15 = \underline{98,73\%}$

c)

011	010	1101	100	1010	1110	010	1111	00	1011	011	010	1100
S	E	P	R	O	T	E	J	A	U	S	E	M

00	011	1110	00	100	00
A	S	C	A	R	A