

Codificação de Fonte

Teoria da Informação - AULA 09 (Parte 3)
Prof^a. Verusca Severo

Universidade de Pernambuco
Escola Politécnica de Pernambuco

30 de julho de 2021

- **Teorema (Desigualdade de Kraft):** Existe um código D -ário prefixo cujos comprimentos de palavras código são os números inteiros positivos l_1, l_2, \dots, l_K se e somente se

$$\sum_{i=1}^K D^{-l_i} \leq 1.$$

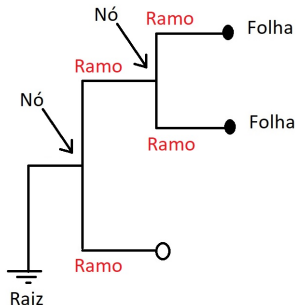
- **PROVA (Desigualdade de Kraft):**

Desafio valendo ponto para próxima aula (30/07/2021)!!

Obs.: enviar via *classroom*

- **PROVA (Desigualdade de Kraft):**

- Em uma árvore D -ária cada nó tem D descendentes;
- Cada ramo representa um símbolo da palavra código;
- Cada palavra código corresponde a uma folha da árvore;
- O percurso entre a raiz e uma dessas folhas identifica os símbolos que fazem parte da palavra código.

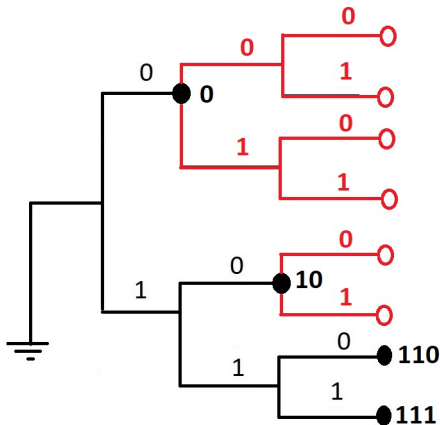


- **PROVA (Desigualdade de Kraft):**

- A condição de código **livre de prefixo** implica que nenhuma palavra código seja **ancestral** de qualquer outra palavra código na árvore, ou seja, um ramo não pode ser uma palavra código, somente as folhas podem exercer esse papel.
- Assim, cada palavra código **elimina seus descendentes** como possíveis palavras código.
- Qualquer palavra código ao nível l_i terá $D^{\text{max}} - l_i$ descendentes no nível l_{max} .

- **PROVA (Desigualdade de Kraft):**

- Considere a seguinte árvore D -ária com $D = 2$ (árvore binária):



- **PROVA (Desigualdade de Kraft):**

- O maior comprimento de palavra código na árvore é $l_{\max} = 3$.
 - **Palavra código** $s_1 = 0$: tem comprimento $l_1 = 1$ e tem 4 descendentes no nível $l_{\max} = 3$.
 - **Palavra código** $s_2 = 10$: tem comprimento $l_2 = 2$ e tem 2 descendentes no nível $l_{\max} = 3$.
 - **Palavra código** $s_3 = 110$: tem comprimento $l_3 = 3$ e tem 1 descendente (ela própria) no nível $l_{\max} = 3$.
 - **Palavra código** $s_4 = 111$: tem comprimento $l_4 = 3$ e tem 1 descendente (ela própria) no nível $l_{\max} = 3$.
- Resumindo, cada palavra código s_i de comprimento l_i tem 2^{3-l_i} descendentes no nível $l_{\max} = 3$.

- **PROVA (Desigualdade de Kraft):**

- Seja l_{\max} o comprimento da palavra mais longa do código. Qualquer palavra código terá $(D^{l_{\max}-l_i})$ descendentes no nível máximo.
- Assim, o número total de nós desse conjunto deverá ser inferior ou igual a $D^{l_{\max}}$. Logo:

$$\sum_{i=1}^M D^{l_{\max}-l_i} \leq D^{l_{\max}}$$

- Dividindo o lado direito e esquerdo por $D^{l_{\max}}$, temos:

$$\sum_{i=1}^M D^{-l_i} \leq 1$$

- **Exemplo 4:** Determine por meio da desigualdade de Kraft se é possível construir um código prefixo para as configurações apresentadas no Problema 1 e no Problema 2.

- **Para o Problema 1:** $l_1 = l_2 = l_3 = 2$, $l_4 = 3$ e $l_5 = 4$, temos:

$$\sum_{i=1}^5 2^{-l_i} = 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} = 15/16 < 1.$$

Logo, existe um código prefixo!

- **Para o Problema 2:** $l_1 = 1$, $l_2 = l_3 = 2$, $l_4 = 3$ e $l_5 = 4$, temos:

$$\sum_{i=1}^5 2^{-l_i} = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} = 19/16 > 1.$$

Logo, não existe um código prefixo!