Aluno: João Victor da Silva Prado
1ª lista de exercícios de Teoria da Informação
Prof: Verusca Severo

1º) $A = \{(D1, D2) \mid D1 + D2 = 10\}$
$B = \{(D1, D2) \mid D1 > D2\}$

a) $P(A)$ $\quad A = \{(4,6); (5,5); (6,4)\}$

$P(A) = P(D1=4) \cdot P(D2=4) + P(D1=5) \cdot P(D2=5) + P(D1=6) \cdot P(D2=4)$

$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{36}$ ou $\boxed{P(A) = \frac{1}{12}}$

b) $P(B)$ $\quad B = \{(2,1); (3,1); (3,2); (4,1); (4,2); (4,3); (5,1); (5,2); (5,3); (5,4); (6,1); (6,2); (6,3); (6,4); (6,5)\}$

↳ 15 pares

$1/6 \cdot 1/6 = 1/36 \rightarrow P(D1, D2)$

como o espaço amostral de todos os pares (D1, D2) é composto por 36 pares:

$\boxed{P(B) = 15/36}$

c) $P(A|B)$

sabe-se que: $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$

* $P(B) = 15/36$ e $A \cap B = \{(6,4)\}$

* $P(A \cap B) = P(D1=6) \cdot P(D2=4) = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$

$P(A|B) = \frac{1/36}{15/36} = \boxed{P(A/B) = 1/15}$

d) $P(B/A)$ $\quad P(A \cap B) = P(B \cap A)$

$P(B/A) = P(B \cap A) / P(A)$

$P(B/A) = \frac{1/36}{1/12} = 12/36 \rightarrow \boxed{P(B/A) = 1/3}$

2º) a) É mais provável que não tenha filhos (0 filhos). A probabilidade correspondente é 29%

b) Como se trata de "mães", desconsideramos os 29% sem filhos; logo: $22 = \frac{x}{100} \cdot 71$

$x = 30,98\%$.

Assim, uma mãe escolhida ao acaso é mais provável que tenha 2 filhos. A probabilidade correspondente é 30,98%

c) Como se trata dos filhos, também desconsideramos os 29% sem filhos. Assim: $16 = \frac{x}{100} \cdot 71$

$x = 22,53\%$

A probabilidade de um filho único ser escolhido é de 22,53%.

3º)

	$x \backslash y$	0 (j1)	1 (j2)	2 (j3)	3 (j4)	$P(X=x)$ (j5)
i1	0	3/32	3/64	1/32	9/64	5/16
i2	1	1/16	1/16	0	1/16	3/16
i3	2	1/64	11/64	7/64	1/64	5/16
i4	3	5/64	1/32	3/64	1/32	3/16
i5	$P(Y=y)$	1/4	5/16	3/16	1/4	1

$P(0,0)=?$; $P(0,3)=?$
$P(1,3)=?$; $P(x=1)=?$
$P(2,2)=?$
$P(3,1)=?$; $P(x=3)=?$
$P(y=0)=?$; $P(y=2)=?$

a) Completar tabela:

j2: $3/64 + 1/16 + 11/64 + x = 5/16 \rightarrow x = \overbrace{5/16 - 18/64}^{1/32} \rightarrow \underline{P(3,1) = 1/32}$ ✓

i3: $1/64 + 11/64 + P(2,2) + 1/64 = 5/16 \rightarrow P(2,2) = 5/16 - 13/64 = \underline{7/64}$ ✓

i4: $5/64 + 1/32 + 3/64 + 1/32 = P(x=3) = \underline{3/16}$ ✓

j3: $1/32 + 0 + 7/64 + 3/64 = P(y=2) = \underline{3/16}$ ✓

i5: $P(y=0) + 5/16 + 3/16 + 1/4 = 1 \rightarrow P(y=0) = 1 - 12/16 = \underline{1/4}$ ✓

j1: $P(0,0) + 1/16 + 1/64 + 5/64 = 1/4 \rightarrow P(0,0) = 1/4 - 10/64 = 3/32$ ✓

i1: $3/32 + 3/64 + 1/32 + P(0,3) = 5/16 \rightarrow P(0,3) = 5/16 - 11/64 = 9/64$ ✓

j5: $5/16 + 5/16 + 3/16 + P(x=1) = 1 \rightarrow P(x=1) = 1 - 13/16 = \underline{3/16}$ ✓

i2: $1/16 + 1/16 + P(1,3) = 3/16 \rightarrow P(1,3) = \underline{1/16}$ ✓

b) Probabilidades marginais

$P(X=x)$: $P(x=0) = 5/16$
$P(x=1) = 3/16$
$P(x=2) = 5/16$
$P(x=3) = 3/16$

$P(Y=y)$: $P(y=0) = 1/4$
$P(y=1) = 5/16$
$P(y=2) = 3/16$
$P(y=3) = 1/4$

c) Para que X e Y sejam independentes: $P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y)$
pegando como exemplo: $P(x=3) = 3/16$ e $P(y=2) = 3/16$
vemos que $P(X) \cdot P(Y) = \left(\frac{3}{16}\right)^2$ e $P(X \cap Y) = 3/64$

$\frac{3}{64} \neq \left(\frac{3}{16}\right)^2$

Logo, NÃO SÃO INDEPENDENTES

4º) a) A entropia será máxima quando todos os símbolos forem equiprováveis. Ou seja, quando a probabilidade de cada um dos símbolos for $p = 1/K$.

b) $$H(x)\,máx = \sum_{i=1}^{K} \frac{1}{K} \log_2\left(\frac{1}{1/K}\right) = \cancel{K} \cdot \frac{1}{\cancel{K}} \cdot \log_2 K$$

$$H(x)\,máx = \log_2 K$$

6º) $S = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4\}$

$p_{S0} = p_{S1} = 0{,}3$ $\quad p_{S2} = 0{,}2$ $\quad p_{S3} = p_{S4} = 0{,}1$

$$H(S) = \overbrace{P_{S0} \cdot \log_2(1/P_{S0}) + P_{S1} \cdot \log_2(1/P_{S1})}^{\text{igual}} + P_{S2} \cdot \log_2(1/P_{S2}) +$$
$$+ \underbrace{P_{S3} \cdot \log_2(1/P_{S3}) + P_{S4} \cdot \log_2(1/P_{S4})}_{\text{igual}}$$

$$H(S) = 2 \cdot \underbrace{\left[0{,}3 \cdot \underbrace{\log_2(1/0{,}3)}_{1{,}74}\right]}_{0{,}522} + 0{,}2 \cdot \underbrace{\log_2(1/0{,}2)}_{2{,}32} + 2 \cdot \underbrace{\left[0{,}1 \cdot \underbrace{\log_2(1/0{,}1)}_{3{,}32}\right]}_{0{,}332}$$

$$H(S) = 1{,}044 + 0{,}464 + 0{,}664$$
$$\boxed{H(S) = 2{,}172 \text{ bits}}$$

5º) $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$; $P(Z = z_j)$; $j = 1, 2, \ldots, m$

$\underline{\underline{H(Z) \geq 0}}$

$$\sum_{j=0}^{m} p_j \log_2 (1/p_j) \geq 0$$

Por se tratarem de probabilidades, os valores de pj sempre estarão no intervalo: $\underline{\underline{0 \leq p_j \leq 1}}$

Assim, o $\log_2 (1/p_j)$ será sempre 0 ou um número positivo. $\underline{\log_2 (1/p_j) \geq 0}$.

Logo: $\underline{H(Z) \geq 0}$

7º) $[x_1, x_2, x_3]$ assume $[0,0,0]$, $[0,1,0]$, $[1,0,0]$ e $[0,0,1]$, cada um c/ prob $p = 1/4$

a) $H(x_1)$

$P(x_1=1) = 1/4$; $P(x_1=0) = 3/4$

$H(x_1) = 3/4 \cdot \log_2 \underbrace{(1/\tfrac{3}{4})}_{4/3} + 1/4 \cdot \log_2 \underbrace{(1/\tfrac{1}{4})}_{4}$

$= \underbrace{(3/4 \cdot 0{,}415)}_{0{,}311} + \underbrace{(1/4 \cdot 2)}_{1/2} = \boxed{0{,}811}$

b) $H(x_2)$ $P(x_2=0) = 3/4$; $P(x_2=1) = 1/4$

$H(x_2) = 3/4 \cdot \log_2 \underbrace{(1/\tfrac{3}{4})}_{4/3} + 1/4 \cdot \log_2 \underbrace{(1/\tfrac{1}{4})}_{4}$

$= (3/4 \cdot 0{,}415) + (1/4 \cdot 2) = \boxed{0{,}811}$

c) $H(x_3)$ $P(x_3=0) = 3/4$; $P(x_3=1) = 1/4$

$H(x_3) = 3/4 \cdot \log_2 (1/\tfrac{3}{4}) + 1/4 \cdot \log_2 (1/\tfrac{1}{4})$

$= (3/4 \cdot 0{,}415) + (1/4 \cdot 2) = \boxed{0{,}811}$

8º) $X = \{0{,}1\}$, $Y = \{1{,}0\}$

$P(X=1) = 0{,}5$ $\quad$ $P(Y=1/X=0) = 0{,}2$

$P(Y=1/X=1) = 0{,}5$

a) $H(X)$

$P(X=1) = 0{,}5$ $\quad$ $P(X=0) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

$$H(X) = 0{,}5 \cdot \overbrace{\log_2 \frac{1}{0{,}5}}^{1} + 0{,}5 \cdot \overbrace{\log_2 \frac{1}{0{,}5}}^{1}$$

$$H(X) = 0{,}5 + 0{,}5 \rightarrow \boxed{H(X) = 1\,\text{bit}}$$

b) $H(Y)$

$$P(Y=1) = P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=1)$$

$$\boxed{P(Y=1) = P(X=0) \cdot P(Y=1/X=0) + P(X=1) \cdot P(Y=1/X=1)}$$

$$P(Y=1) = 0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}5$$

$$P(Y=1) = 0{,}1 + 0{,}25 = 0{,}35$$

$$P(Y=0) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$$

$$H(Y) = 0{,}35 \cdot \log_2 \frac{1}{0{,}35} + 0{,}65 \cdot \log_2 \frac{1}{0{,}65}$$

$$H(Y) = 0{,}53 + 0{,}404 \rightarrow \boxed{H(Y) = 0{,}934\,\text{bit}}$$