Aluno: João Victor da Silva Prado
3ª lista de exercícios de Teoria da Informação
Prof: Verusca Severo

① Uma fonte de informação sem memória possui simbolos estatisticamente independentes. Ou seja, a probabilidade de qualquer sequência gerada pela fonte será dada pelo produto das probabilidades de ocorrência dos símbolos que a constituem.

⑤ Uma fonte de informação com memória possui simbolos que dependem dos n simbolos que os precedem. Ou seja, a probabilidade de ocorrência do símbolo S_n irá depender de $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$.

② $S = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4\}$; $P_{S0} = P_{S1} = 0{,}3$; $P_{S2} = 0{,}2$; $P_{S3} = P_{S4} = 0{,}1$

a) $H(S) = P_{S0}\log_2(1/P_{S0}) + P_{S1}\log_2(1/P_{S1}) + P_{S2}\log_2(1/P_{S2}) + P_{S3}\log_2(1/P_{S3}) + P_{S4}\log_2(1/P_{S4})$

$H(S) = 2[0{,}3\log_2(1/0{,}3)] + 2[0{,}1\log_2(1/0{,}1)] + 0{,}2\log_2(1/0{,}2)$

$H(S) = 1{,}04 + 0{,}664 + 0{,}464 \cong 2{,}168$ bits

b) $5^2 = 25$ símbolos na fonte estendida de ordem 2 (S^2)

c) Com $H(U^n) = nH(U)$ teremos:

$H(S^2) = 2H(S) = 2 \cdot 2{,}168$

$H(S^2) = 4{,}336$ bits

3) $S=\{s_1, s_2\}$; $P(s_1)=0{,}8$; $P(s_2)=0{,}2$

a) $S^2 \Rightarrow 2^2 = 4$ símbolos

$S^2=\{s_1s_1, s_2s_2, s_1s_2, s_2s_1\}$

Distribuição de probabilidades:

$P(s_1s_1)=0{,}8\cdot 0{,}8=0{,}64$	$P(s_1s_2)=0{,}8\cdot 0{,}2=0{,}16$
$P(s_2s_2)=0{,}2\cdot 0{,}2=0{,}04$	$P(s_2s_1)=0{,}2\cdot 0{,}8=0{,}16$

b) $H(S^2)=2H(S)$

$H(S)=0{,}8\log_2(1/0{,}8)+0{,}2\log_2(1/0{,}2)=0{,}257+0{,}464=0{,}721$

$2H(S)=2\cdot 0{,}721=\underline{\underline{1{,}44 \text{ bit}}}=H(S^2)$

c) $S^3=2^3=8$ símbolos

$S^3=\{s_1s_1s_1, s_1s_1s_2, s_1s_2s_1, s_2s_1s_1, s_2s_2s_2, s_2s_1s_2, s_2s_2s_1, s_1s_2s_2\}$

Distribuição de probabilidades:

$P(s_1s_1s_1)=0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8=0{,}512$	$P(s_2s_2s_2)=0{,}2^3=0{,}008$
$P(s_1s_1s_2)=0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2=0{,}128$	$P(s_2s_1s_2)=0{,}2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8=0{,}032$
$P(s_1s_2s_1)=0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8=0{,}128$	$P(s_2s_2s_1)=0{,}032$
$P(s_2s_1s_1)=0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8=0{,}128$	$P(s_1s_2s_2)=0{,}032$

d) $H(S^3)=3\cdot H(S)$

$H(S^3)=3\cdot 0{,}721=\underline{\underline{2{,}163 \text{ bits}}}$

④ $S = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8\}$

$P(S_1) = 1/2^1 = 1/2$	$P(S_5) = 1/2^5 = 1/32$
$P(S_2) = 1/2^2 = 1/4$	$P(S_6) = 1/2^6 = 1/64$
$P(S_3) = 1/2^3 = 1/8$	$P(S_7) = 1/2^7 = 1/128$
$P(S_4) = 1/2^4 = 1/16$	$P(S_8) = 1/2^7 = 1/128$

a) $H(S) = \frac{1}{2}\log_2(2) + \frac{1}{4}\log_2(4) + \frac{1}{8}\log_2(8) + \frac{1}{16}\log_2(16) + \frac{1}{32}\log_2(32)$
$+ \frac{1}{64}\log_2(64) + 2\left[\frac{1}{128}\log_2(128)\right]$

$H(S) = (1/2) + (1/2) + (3/8) + (4/16) + (5/32) + (6/64) + (14/128)$

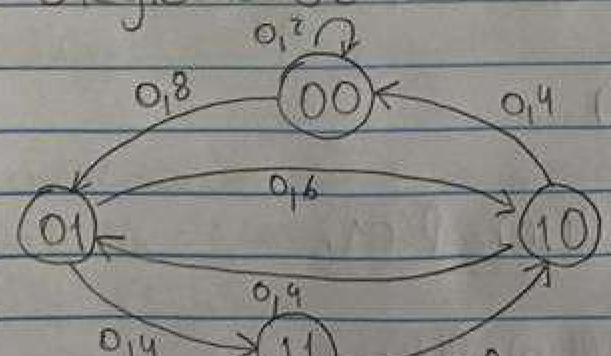
$H(S) = 1 + 5/8 + 8/32 + 7/64 = \underline{\underline{1{,}984 \text{ bit}}}$

b) $\underline{8^8 = 16777216}$ símbolos na fonte estendida de ordem 8 (S^8)

c) $H(S^8) = 8\,H(S) = 8 \cdot 1{,}984 = \underline{\underline{15{,}87 \text{ bits}}}$

⑥ 2ª ordem $(m=2)$; alfabeto binário $(k=2)$
$P(0|00) = P(1|11) = 0{,}2$; $P(0|01) = P(1|10) = 0{,}6$

a) Diagrama de estados:



$P(0\|00) = 0{,}2$	$P(0\|10) = 0{,}4$
$P(1\|00) = 0{,}8$	$P(1\|10) = 0{,}6$
$P(0\|01) = 0{,}6$	$P(0\|11) = 0{,}8$
$P(1\|01) = 0{,}4$	$P(1\|11) = 0{,}2$

b) * Calculando a probab dos estados:

$00 \rightarrow \quad P(00) = P(00,0) + P(10,0)$

$P(00) = P(00)P(0/00) + P(10)P(0/10)$

$P(00) = 0{,}2P(00) + 0{,}4 \cdot P(10)$

$0{,}8P(00) = 0{,}4P(10) \rightarrow \boxed{P(00) = \frac{0{,}1}{0{,}2} P(10)}$

$10 \rightarrow P(10) = P(01,0) + P(11,0) = P(01)P(0/01) + P(11)P(0/11)$

$\boxed{P(10) = P(01)0{,}6 + P(11)0{,}8}$

$11 \rightarrow P(11) = P(11,1) + P(01,1) = P(11)P(1/11) + P(01)P(1/01)$

$P(11) = 0{,}2P(11) + 0{,}4P(01)$

$0{,}8P(11) = 0{,}4P(01)$

$\boxed{P(11) = \frac{0{,}1}{0{,}2} P(01)}$

Voltando para $P(10)$; temos que $P(11) = \frac{0{,}1}{0{,}2} P(01)$

Então,

$P(10) = 0{,}6P(01) + 0{,}8 \cdot \frac{0{,}1}{0{,}2} P(01)$

$P(10) = 0{,}6P(01) + 0{,}4P(01) \Rightarrow \underline{P(10) = P(01)}$

* lembrando que: $P(00) + P(01) + P(10) + P(11) = 1$

$P(00) + 2P(10) + P(11) = 1$

e lembrando que: $P(00) = \frac{0{,}1}{0{,}2} P(10)$ e $P(11) = \frac{0{,}1}{0{,}2} P(01)$

$\frac{P(10)}{2}$

Então:

$\frac{0{,}1}{0{,}2} P(10) + 2P(10) + \frac{0{,}1}{0{,}2} P(01) = 1$

$P(10)\left(2 \cdot \frac{0{,}1}{0{,}2} + 2\right) = 1 \rightarrow 3P(10) = 1 \rightarrow P(10) = 1/3$

continua...

* Voltando aos valores anteriores temos as probabilidades associadas a cada estado.

$P(00) = \frac{0,1}{0,2} P(10) = \frac{0,1}{0,2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P(01) = P(10) = 1/3$

$P(11) = \frac{0,1}{0,2} P(01) = \frac{0,1}{0,2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

c) $H(F) = P(00)H(F/00) + P(01)H(F/01) + P(10)H(F/10) + P(11)H(F/11)$

→ $H(F/00) = P(0/00)\log_2(1/P(0/00)) + P(1/00)\log_2(1/P(1/00))$

$= 0,2\log_2(1/0,2) + 0,8\log_2(1/0,8) = 0,2 \cdot 2,32 + 0,8 \cdot 0,322 = \underline{1,586 \text{ bit}}$

→ $H(F/01) = P(0/01)\log_2(1/P(0/01)) + P(1/01)\log_2(1/P(1/01))$

$= 0,6\log_2(1/0,6) + 0,4\log_2(1/0,4) = 0,6 \cdot 0,737 + 0,4 \cdot 1,32 = \underline{0,9702 \text{ bit}}$

→ $H(F/10) = P(0/10)\log_2(1/P(0/10)) + P(1/10)\log_2(1/P(1/10))$

$= 0,4\log_2(1/0,4) + 0,6\log_2(1/0,6) = \underline{0,9702 \text{ bit}}$

→ $H(F/11) = P(0/11)\log_2(1/P(0/11)) + P(1/11)\log_2(1/P(1/11))$

$= 0,8\log_2(1/0,8) + 0,2\log_2(1/0,2) = \underline{1,586 \text{ bit}}$

* Equação da entropia fica sendo:

$H(F) = 1/6 \cdot 1,586 + 1/6 \cdot 1,586 + 1/3 \cdot 0,9702 + 1/3 \cdot 0,9702$

$H(F) = 1/3 \cdot 1,586 + 2/3 \cdot 0,9702 = \underline{1,175 \text{ bit}}$

d) $P(1) = P(00,1) + P(01,1) + P(10,1) + P(11,1)$

$= P(00)P(1/00) + P(01)P(1/01) + P(10)P(1/10) + P(11)P(1/11)$

$P(1) = 1/6 \cdot 0,8 + 1/3 \cdot 0,4 + 1/3 \cdot 0,6 + 1/6 \cdot 0,2$

$P(1) = \boxed{\frac{1}{2}}$