Fontes de Informação

Teoria da Informação - AULA 07
Profª. Verusca Severo

Universidade de Pernambuco
Escola Politécnica de Pernambuco

07 de julho de 2021

Fonte discreta com memória

- São fontes nas quais a ocorrência de um símbolo **depende estatisticamente** de um número finito m de símbolos precedentes.

- Tal tipo de fonte é denominada **fonte de Markov de ordem** m, e é especificada por seu alfabeto $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_K\}$ e por sua distribuição de probabilidade condicional:

$$P(u_i / u_{j_1}, u_{j_2}, \ldots, u_{j_m}), \text{ para } 1 \leq i, j_1, j_2, \ldots, j_m \leq K,$$

  na qual a sequência de símbolos no tempo é:

$$u_{j_1}, u_{j_2}, \ldots, u_{j_m}, u_i$$

  ou seja, u_i sucede u_{j_m}.

Fonte discreta com memória

- Para uma fonte de Markov de ordem m, é conhecida a probabilidade dela emitir um dado símbolo se forem conhecidos os m símbolos precedentes.

- Os m símbolos precedentes são chamados de **estado da fonte**.

- Como o alfabeto da fonte consiste de K símbolos, o número de estados distintos possíveis é K^m.

$$\underset{1}{\underline{K}} \quad \underset{2}{\underline{K}} \quad \underset{3}{\underline{K}} \quad \cdots \quad \underset{m}{\underline{K}} = K^{m}$$

  - Por exemplo, uma fonte de Markov de ordem $m = 2$ e com alfabeto $K = 2$ terá 4 estados distintos, que são:

$$00, 01, 10, 11$$

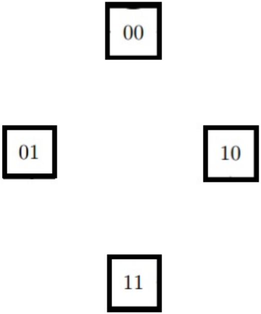
Fonte discreta com memória

- Na medida em que a fonte vai emitindo símbolos, ocorrem **mudanças de estado**.
- Uma maneira útil de representar as possíveis mudanças de estado de uma fonte de Markov é por meio do diagrama de estados.
- Num diagrama de estados:
    - cada nó representa um estado;
    - cada possível transição entre dois estados é representada por uma linha orientada (indicada por uma flecha) ligando estes dois estados.

Fonte discreta com memória

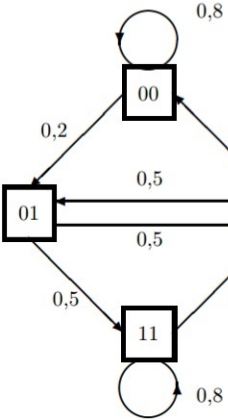
Exemplo: Considere a fonte de Markov de segunda ordem ($m = 2$) com alfabeto binário ($K = 2$) e probabilidades condicionais dos símbolos (probabilidades de transição) dadas por:
$P(0|00) = P(1|11) = 0,8; P(1|00) = P(0|11) = 0,2;$
$P(0|01) = P(0|10) = P(1|01) = P(1|10) = 0,5$

- Tem-se um total de $K^m = 4$ estados: 00, 01, 10, 11.



Exemplo:

- As transições de um estado para outro são indicadas por flechas, cada uma ligando dois estados, com a probabilidade de transição indicada por um número associado com cada flecha.



$$P(0|00) = P(1|11) = 0,8;$$

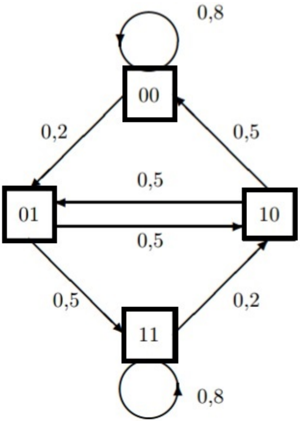
$$P(1|00) = P(0|11) = 0,2;$$

$$P(0|01) = P(0|10) = 0,5$$

$$P(1|01) = P(1|10) = 0,5$$

Exemplo:

- Por exemplo, do estado 10 é possível ir para o estado 00, se a fonte emitir um 0, ou para o estado 01, se a fonte emitir um 1, mas não é possível alcançar o estado 11 e nem permanecer no estado 10.



$$P(0|00) = P(1|11) = 0,8;$$

$$P(1|00) = P(0|11) = 0,2;$$

$$P(0|01) = P(0|10) = 0,5$$

$$P(1|01) = P(1|10) = 0,5$$

Exemplo:

- Resumindo:
  - no estado 00, se a fonte emite:
    - 0 ela continua no estado 00 ($P(0/00) = 0,8$).
    - 1 ela vai para o estado 01 ($P(1/00) = 0,2$).
  - no estado 01, se a fonte emite:
    - 0 ela vai para o estado 10 ($P(0/01) = 0,5$).
    - 1 ela vai para o estado 11 ($P(1/01) = 0,5$).
  - no estado 11, se a fonte emite:
    - 0 ela vai para o estado 10 ($P(0/11) = 0,2$).
    - 1 ela continua no estado 11 ($P(1/11) = 0,8$).
  - no estado 10, se a fonte emite:
    - 0 ela vai para o estado 00 ($P(0/10) = 0,5$).
    - 1 ela vai para o estado 01 ($P(1/10) = 0,5$).

Fonte discreta com memória

- A entropia (ou incerteza média) dos símbolos da fonte de Markov de ordem m é obtida a partir do cálculo da entropia condicional média.

- **Lembrete:** A entropia condicional média da variável aleatória discreta X dada a variável aleatória discreta Y, é dada pela expressão

$$H(X/Y) = \sum_{j=1}^{K} P(Y = y_j)H(X/Y = y_j),$$

em que K é o tamanho do alfabeto de Y

Fonte discreta com memória

- **Lembrete:** A fonte de Markov de ordem m é especificada por seu alfabeto $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_K\}$ e por sua distribuição de probabilidade condicional, ou seja, a probabilidade da fonte emitir um dado símbolo se forem conhecidos os m símbolos precedentes (estados da fonte), como segue:

$$P(u_i / u_{j_1}, u_{j_2}, \ldots, u_{j_m}), \text{ para } 1 \leq i, j_1, j_2, \ldots, j_m \leq K.$$

- Logo, a entropia da fonte de Markov de ordem m é dada por:

$$H(U) = \sum_{i=1}^{K^m} P(\mathrm{estado}_i) \times H(U/\mathrm{estado}_i),$$

em que estado_i corresponde ao i-ésimo estado da fonte.

Fonte discreta com memória

- Por exemplo, uma fonte de Markov de ordem $m = 2$ e com alfabeto $K = 2$ terá 4 estados distintos, que são:

$$\begin{aligned} \text{estado}_1 &\Rightarrow 00 \\ \text{estado}_2 &\Rightarrow 01 \\ \text{estado}_3 &\Rightarrow 10 \\ \text{estado}_4 &\Rightarrow 11 \end{aligned}$$

- Logo, a entropia dessa fonte de Markov de ordem $m = 2$ e $K = 2$ é dada por:

$$H(U) = \sum_{i=1}^{4} P(\text{estado}_i) \times H(U/\text{estado}_i)$$

$$H(U) = P(00)H(U/00) + P(01)H(U/01) + P(10)H(U/10) + P(11)H(U/11)$$

Fonte discreta com memória

Exemplo 4: Calcule a entropia da fonte de Markov de segunda ordem ($m = 2$) com alfabeto binário ($K = 2$) e probabilidades condicionais dos símbolos (probabilidades de transição) dadas por:
$P(0|00) = P(1|11) = 0,8$; $P(1|00) = P(0|11) = 0,2$;
$P(0|01) = P(0|10) = P(1|01) = P(1|10) = 0,5$

$$H(U) = \sum_{i=1}^{4} P(\text{estado}_i) \times H(U/\text{estado}_i)$$

H(U) = P(00)H(U/00) + P(01)H(U/01) + P(10)H(U/10) + P(11)H(U/11) (1)

- Logo, precisamos determinar as entropias condicionais $H(U/\text{estado}_i)$ e a distribuição de probabilidade dos estados $P(\text{estado}_i)$, para $i = 1, 2, \ldots, K^m$.

Exemplo 4: Calcule a entropia da fonte de Markov de segunda ordem ($m = 2$) com alfabeto binário ($K = 2$) e probabilidades condicionais dos símbolos (probabilidades de transição) dadas por:
$P(0|00) = P(1|11) = 0,8$; $P(1|00) = P(0|11) = 0,2$;
$P(0|01) = P(0|10) = P(1|01) = P(1|10) = 0,5$

1. Vamos começar pelo cálculo das entropias condicionais $H(U/\text{estado}_i)$:
   - $\text{estado}_1 = 00$:

$$\begin{aligned} H(U/00) = & -P(0/00)\log_2[P(0/00)] - P(1/00)\log_2[P(1/00)] \\ H(U/00) = & -0,8\log_2[0,8] - 0,2\log_2[0,2] = 0,722 \end{aligned}$$

   - $\text{estado}_2 = 01$:

$$\begin{aligned} H(U/01) = & -P(0/01)\log_2[P(0/01)] - P(1/01)\log_2[P(1/01)] \\ H(U/01) = & -0,5\log_2[0,5] - 0,5\log_2[0,5] = 1 \end{aligned}$$

Fonte discreta com memória

Exemplo 4: Calcule a entropia da fonte de Markov de segunda ordem ($m = 2$) com alfabeto binário ($K = 2$) e probabilidades condicionais dos símbolos (probabilidades de transição) dadas por:
$P(0|00) = P(1|11) = 0,8$; $P(1|00) = P(0|11) = 0,2$;
$P(0|01) = P(0|10) = P(1|01) = P(1|10) = 0,5$

1. Vamos começar pelo cálculo das entropias condicionais $H(U/\text{estado}_i)$:
    - $\text{estado}_3 = 10$:

$$\begin{aligned} H(U/10) = & \quad -P(0/10)\log_2[P(0/10)] - P(1/10)\log_2[P(1/10)] \\ H(U/10) = & \quad -0,5\log_2[0,5] - 0,5\log_2[0,5] = 1 \end{aligned}$$

    - $\text{estado}_4 = 11$:

$$\begin{aligned} H(U/11) = & \quad -P(0/11)\log_2[P(0/11)] - P(1/11)\log_2[P(1/11)] \\ H(U/11) = & \quad -0,2\log_2[0,2] - 0,8\log_2[0,8] = 0,722 \end{aligned}$$

Fonte discreta com memória

Exemplo 4: Calcule a entropia da fonte de Markov de segunda ordem ($m = 2$) com alfabeto binário ($K = 2$) e probabilidades condicionais dos símbolos (probabilidades de transição) dadas por:
$P(0|00) = P(1|11) = 0,8; P(1|00) = P(0|11) = 0,2;$
$P(0|01) = P(0|10) = P(1|01) = P(1|10) = 0,5$

2. Precisamos agora determinar a probabilidade dos estados $P(\text{estado}_i)$. $P(\text{estado}_i)$ é a probabilidade da fonte **"chegar"** em estado_i.
   - $\text{estado}_1 = 00$:
     - Para determinar essa probabilidade, pergunte: *Como a fonte pode chegar ao estado 00?* A resposta para essa pergunta é: **a fonte chega ao estado 00 quando ela está no estado 00 "E" emite o símbolo 0 "OU" quando a fonte está no estado 10 "E" emite o símbolo 0.**

$$P(00) = P(00,0) + P(10,0)$$
$$P(00) = P(00) \times P(0/00) + P(10) \times P(0/10)$$
$$P(00) = P(00) \times 0,8 + P(10) \times 0,5$$
$$P(00) \times 0,2 = P(10) \times 0,5$$
$$\mathbf{P(00) = \frac{0,5}{0,2} P(10)}$$

Exemplo 4: Calcule a entropia da fonte de Markov de segunda ordem ($m = 2$) com alfabeto binário ($K = 2$) e probabilidades condicionais dos símbolos (probabilidades de transição) dadas por:
$P(0|00) = P(1|11) = 0,8$; $P(1|00) = P(0|11) = 0,2$;
$P(0|01) = P(0|10) = P(1|01) = P(1|10) = 0,5$

2. Probabilidade dos estados $P(\mathrm{estado}_i)$:
   - $\mathrm{estado}_2 = 01$:
     - Para determinar essa probabilidade, pergunte: *Como a fonte pode chegar ao estado 01?* A resposta para essa pergunta é: **a fonte chega ao estado 01 quando ela está no estado 00 "E" emite o símbolo 1 "OU" quando a fonte está no estado 10 "E" emite o símbolo 1.**

$$P(01) = P(00,1) + P(10,1)$$
$$P(01) = P(00) \times P(1/00) + P(10) \times P(1/10)$$
$$P(01) = P(00) \times 0,2 + P(10) \times 0,5$$
$$P(01) = \frac{0,5}{0,2} P(10) \times 0,2 + P(10) \times 0,5$$

$$\mathbf{P(01) = P(10)}$$

Exemplo 4: Calcule a entropia da fonte de Markov de segunda ordem ($m = 2$) com alfabeto binário ($K = 2$) e probabilidades condicionais dos símbolos (probabilidades de transição) dadas por:
$P(0|00) = P(1|11) = 0,8$; $P(1|00) = P(0|11) = 0,2$;
$P(0|01) = P(0|10) = P(1|01) = P(1|10) = 0,5$

2. Probabilidade dos estados $P(\text{estado}_i)$:
   - $\text{estado}_3 = 10$:
     - Para determinar essa probabilidade, pergunte: *Como a fonte pode chegar ao estado 10?* A resposta para essa pergunta é: **a fonte chega ao estado 10 quando ela está no estado 11 "E" emite o símbolo 0 "OU" quando a fonte está no estado 01 "E" emite o símbolo 0.**

$$P(10) = P(11,0) + P(01,0)$$
$$P(10) = P(11) \times P(0/11) + P(01) \times P(0/01)$$
$$P(10) = P(11) \times 0,2 + P(01) \times 0,5$$
$$P(10) = P(11) \times 0,2 + P(10) \times 0,5$$
$$\mathbf{P(10) = \frac{0,2}{0,5} P(11)}$$

Exemplo 4: Calcule a entropia da fonte de Markov de segunda ordem ($m = 2$) com alfabeto binário ($K = 2$) e probabilidades condicionais dos símbolos (probabilidades de transição) dadas por:
$P(0|00) = P(1|11) = 0,8$; $P(1|00) = P(0|11) = 0,2$;
$P(0|01) = P(0|10) = P(1|01) = P(1|10) = 0,5$

2. Probabilidade dos estados $P(\text{estado}_i)$:
   - $\text{estado}_4 = 11$:
     - Para determinar essa probabilidade, pergunte: *Como a fonte pode chegar ao estado 11?* A resposta para essa pergunta é: **a fonte chega ao estado 11 quando ela está no estado 11 "E" emite o símbolo 1 "OU" quando a fonte está no estado 01 "E" emite o símbolo 1.**

$$P(11) = P(11, 1) + P(01, 1)$$
$$P(11) = P(11) \times P(1/11) + P(01) \times P(1/01)$$
$$P(11) = P(11) \times 0,8 + P(01) \times 0,5$$
$$P(11) = P(11) \times 0,8 + P(10) \times 0,5$$
$$\mathbf{P(11) = \frac{0,5}{0,2} P(10)}$$

Exemplo 4: Calcule a entropia da fonte de Markov de segunda ordem ($m = 2$) com alfabeto binário ($K = 2$) e probabilidades condicionais dos símbolos (probabilidades de transição) dadas por:
$P(0|00) = P(1|11) = 0,8$; $P(1|00) = P(0|11) = 0,2$;
$P(0|01) = P(0|10) = P(1|01) = P(1|10) = 0,5$

2. Determinando as probabilidade dos estados $P(\mathrm{estado}_i)$:
   - Sabe-se (pelos axiomas da Teoria das probabilidades) que:

$$P(00) + P(01) + P(10) + P(11) = 1. \tag{2}$$

   - Perceba que as probablidades $P(00)$, $P(01)$ e $P(11)$ são todas funções de $P(10)$. Logo, substituindo em (2) as probabilidades $P(00)$, $P(01)$ e $P(11)$, temos que:

$$\frac{0,5}{0,2}P(10) + P(10) + P(10) + \frac{0,5}{0,2}P(10) = 1$$
$$\frac{1,4 \times P(10)}{0,2} = 1$$
$$\mathbf{P(10) = \frac{1}{7}}$$

Exemplo 4: Calcule a entropia da fonte de Markov de segunda ordem ($m = 2$) com alfabeto binário ($K = 2$) e probabilidades condicionais dos símbolos (probabilidades de transição) dadas por:
$P(0|00) = P(1|11) = 0,8$; $P(1|00) = P(0|11) = 0,2$;
$P(0|01) = P(0|10) = P(1|01) = P(1|10) = 0,5$

2. Determinando as probabilidade dos estados $P(\mathrm{estado}_i)$:
   - Logo, temos:

$$\mathbf{P(10) = \frac{1}{7}}$$

$$P(00) = \frac{0{,}5}{0{,}2} P(10) \Rightarrow \mathbf{P(00) = \frac{5}{14}}$$

$$P(01) = P(10) \Rightarrow \mathbf{P(01) = \frac{1}{7}}$$

$$P(11) = \frac{0{,}5}{0{,}2} P(10) \Rightarrow \mathbf{P(11) = \frac{5}{14}}$$

Fonte discreta com memória

Exemplo 4: Calcule a entropia da fonte de Markov de segunda ordem ($m = 2$) com alfabeto binário ($K = 2$) e probabilidades condicionais dos símbolos (probabilidades de transição) dadas por:
$P(0|00) = P(1|11) = 0,8; P(1|00) = P(0|11) = 0,2;$
$P(0|01) = P(0|10) = P(1|01) = P(1|10) = 0,5$

- Por fim, substituindo em (1) as probabilidades $P(\mathrm{estado}_i)$ e as entropias condicionais $H(U/\mathrm{estado}_i)$, temos:

$$H(U) = P(00)H(U/00) + P(01)H(U/01) + P(10)H(U/10) + P(11)H(U/11)$$

$$H(U) = \frac{5}{14} \times 0,722 + \frac{1}{7} \times 1 + \frac{1}{7} \times 1 + \frac{5}{14} \times 0,722$$

$$H(U) \cong 0,8\ bit$$

Fonte discreta com memória

- Como calcular a probabilidade de uma fonte de Markov de ordem m emitir um símbolo de seu alfabeto?

- A resposta para essa pergunta é simples, você vai examinar as probablilidades da fonte está em cada um dos estados possíveis **"E"** emitir o símbolo em questão (veja o exemplo a seguir.)

- **Exemplo 5:** Determine qual a probabilidade da fonte do **Exemplo 4** emitir o símbolo 0.

Fonte discreta com memória

Exemplo 5: Determine qual a probabilidade da fonte do **Exemplo 1** emitir o símbolo 0.

- A probabilidade da fonte emitir o símbolo 0 é igual a:
  - probabilidade da fonte está no estado 00 **E** emitir 0, ou seja, $P(00, 0)$, **OU**
  - probabilidade da fonte está no estado 01 **E** emitir 0, ou seja, $P(01, 0)$, **OU**
  - probabilidade da fonte está no estado 10 **E** emitir 0, ou seja, $P(10, 0)$, **OU**
  - probabilidade da fonte está no estado 11 **E** emitir 0, ou seja, $P(11, 0)$.
- Logo, temos que:

$$P(0) = P(00, 0) + P(01, 0) + P(10, 0) + P(11, 0)$$

Exemplo 5: Determine qual a probabilidade da fonte do **Exemplo 1** emitir o símbolo 0.

- Logo, temos que:

$$
\begin{aligned}
P(0) =& P(00,0) + P(01,0) + P(10,0) + P(11,0) \\
P(0) =& P(00) \times P(0/00) + P(01) \times P(0/01) + P(10) \times P(0/10) + P(11) \times P(0/11) \\
P(0) =& \frac{5}{14} \times 0,8 + \frac{1}{7} \times 0,5 + \frac{1}{7} \times 0,5 + \frac{5}{14} \times 0,2 \\
P(0) \cong& 0,5
\end{aligned}
$$

- De forma complementar (ou de forma análoga), temos que:

$$
\begin{aligned}
P(1) =& 1 - P(0) \\
P(1) =& 0,5
\end{aligned}
$$

Fonte discreta com memória

Exercício para casa: Considere a fonte de Markov de segunda ordem ($m = 2$), com alfabeto binário ($K = 2$). As probabilidades condicionais dos símbolos (probabilidades de transição) são as seguintes

$$P(0|00) = P(1|11) = 0,7; \quad P(0|01) = P(0|10) = 0,4$$

a. Construa o diagrama de estados para essa fonte.
b. Calcule a distribuição de probabilidade estacionária dos estados.
c. Calcule a entropia desta fonte.
d. Calcule a probabilidade de ocorrência do símbolo 0.