hyväksymispäivä arvosana

arvostelija

Binääriset hakupuut

Jasu Viding

Helsinki 10.3.2016

Kandidaatintutkielma

HELSINGIN YLIOPISTO
Tietojenkäsittelytieteen laitos

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta — Fakultet — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Tietojenkäsittelytieteen laitos

Tekijä — Författare — Author
Jasu Viding

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Binääriset hakupuut

Oppiaine — Läroämne — Subject
Tietojenkäsittelytiede

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Kandidaatintutkielma	10.3.2016	28 sivua + 100 liitesivua

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Tiivistelmä on tässä

ACM Computing Classification System (CCS): A.1 [Introductory and Survey], I.7.m [Document and Text Processing]: Miscellaneous

Avainsanat — Nyckelord — Keywords
AVL, binäärihakupuu, ennakoiva, hakupuu, mukautuva, optimoitu, punamusta, splay, tasapainotettu, tasoitettu analy

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited
Tietojenkäsittelytieteen laitoksen kirjasto, sarjanumero C-2004-X

Muita tietoja — övriga uppgifter — Additional information

Sisältö

1 Johdanto

Tämä tutkielma käsittelee binäärisiä hakupuita ja niiden eri variaatioita. Käytämme niiden vertailuun tietoa niiden pahimpien käyttötapausten aikavaativuudesta. Tutustumme aikavaativuuden määrittämisessä myös tasoitettuun analyysiin ja esitämme tätä tietoa hyödyntävän mukautuvan hakupuun.

Binäärinen hakupuu itsessään on puumainen tietorakenne, joka järjestää tietoa niin kutsuttuihin solmuihin, joilla kullakin on aina kaksi lapsisolmua. Sen tehokkuus perustuu sen päivitettävyyteen ja nopeeseen tiedonhakuun. Tiedonhaun aikavaativuus binääriselle hakupuulle on kuitenkin täysin riippuvainen sen rakenteesta.

Helpoin tapa pitää hakupuun rakenne tehokkaana on lisätä sille tasapainotusehto. Tasapainotusehto takaa, ettei hakupuusta voi muodostua toispuoleista. Tällöin yksittäisen haun aikavaatimus on pahimmillaankin O(log n). Tasapainotusehto ei kuitenkaan huomioi puuhun kohdistuvaa käyttöä, jolloin kaikki suoritettavat haut saattavat kohdistua juuresta etäisimpiin solmuihin.

Jos tiedämme hakupuulle suoritettavien käyttötapausten toistuvuuden etukäteen, voimme rakentaa puun optimaaliseksi vastaamaan juuri tätä käyttöä. Optimoitu hakupuu on tällöin kyseiselle sarjalle operaatioita nopein mahdollinen. Se rakennetaan sijoittamalla useimmin haetut arvot lähelle sen juurta ja harvemmin haetut arvot kauemmas juuresta. Sen päivittämisen aikavaativuus on kuitenkin kelvottoman suuri, sillä jokainen lisäys- ja poisto-operaatio vaatii koko puun uudelleenrakentamisen.

Ennakoiva hakupuu pyrkii yhdistämään optimoidun hakupuun nopeat haut sekä tasapainotetun hakupuun nopeat lisäys- ja poisto-operaatiot. Sen järjestävät algoritmit ovat kuitenkin vielä optimoitua hakupuutakin vaikeampia sekä siihen kohdistuvat rajoitukset voivat olla vielä paljon tasapainotettuja hakupuitakin monimutkaisempia.

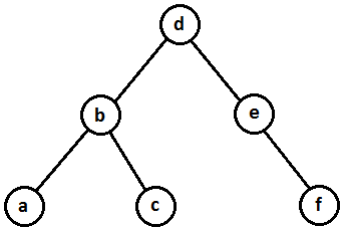
Ainoa tapa rakentaa tehokas hakupuu ei ole kuitenkaan aina minimoida kaikkien eri yksittäisten operaatioiden aikavaativuutta. Yleensä hakupuille suoritetaan aina yhden operaation sijaa sarja peräkkäisiä operaatioita, jolloin yksittäisten operaatioiden aikavaativuuden sijaa meitä kiinnostaa enemmän koko sarjan suorittamisen yhteenlaskettu aikavaativuus. Näin ollen parhaan mahdollisen tehokkuuden saavuttamiseksi tutkimme hakupuita tasoitetulla analyysilla, jota käyttämällä pyrimme minimoimaan sarjan pahimpia mahdollisia operaatioita keskimääräistä aikavaativuutta kullakin operaatiolla.

Tasoitetulla analyysilla saavutettujen havaintojen perusteella on kehitetty niin kutsuttu mukautuva binäärinen hakupuu. Mukautuva binäärinen hakupuu on ennalta määräämättömässä muodossa oleva rakenne, joka jokaisella sille suoritettavalla operaatiolla pyrkii aina mukautumaan siten, että kaikki seuraavat sille suoritettavat operaatiot olisivat nopeampia. Sen toiminta rakentuu oletukselle, että tiedonhaku klusteroituu. Täten se pyrkii käytön aikana aina siirtämään kaikki sen usein haetut arvot lähelle sen juurta. Mukautuvalle hakupuulle on kuitenkin olemassa sarjoja pahimpia operaatioita, joilla jokaisen yksittäisen operaation aikavaatimus on O(n).

Splay-puu on mukautuvasta hakupuusta jatkokehitetty hakupuun muoto, jolla sarjalle pahimpia perättäisiä operaatioita on aikavaatimus tavallista mukautuvaa hakupuuta nopeampi O(log n). Sen ylivertaisuus perustuu sen poikkeavaan tapaan uudelleen järjestää rakennettaan jokaisella sille suoritettavalla haulla. Sen lisäksi, että se siirtää haetun solmun hakupuun uudeksi juureksi, se myös puolittaa kaikkien haun varrella olleiden solmujen syvyyden puoleen.

2 Binääriset hakupuut

Binäärinen hakupuu on hakurakenne, joka on toteutettu binääripuun avulla. Binääripuu on tietojenkäsittelytieteessä yleisesti käytetty puumainen järjestetty tietorakenne, jonka jokaiselle solmulle pätee, että sillä voi olla enintään kaksi lapsisolmua, joihin viitataan sen oikeana ja vasempana lapsena. Tässä tutkielmassa viittaamme solmun x vanhempaan solmuna $p(x)$ ja isovanhempaan solmuna $p^2(x)$.



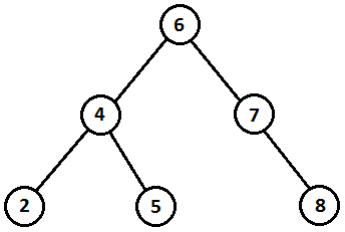
Kuva 1.1: Puun juuri on solmu d. Sen solmut a, c ja f ovat sen lehtisolmut. Solmun c vanhempi on solmu b ja isovanhempi solmu d. Solmut b ja e ovat sisaria, tasolla 1 ja syvyydellä 1. Koko puun korkeus on 2.

Binäärisessä hakupuussa solmuun, jolla ei ole vanhempaa, viitataan puun juurena, ja solmuihin, joilla ei ole kumpaakaan lapsisolmua, lehtisolmuina. Solmun x syvyys on matka puun juurisolmun ja sen itsensä välillä, ja vastaavasti korkeus, matka solmun x ja sen kaukaisimman lehtisolmun välillä. Joukko solmuja tietyllä syvyydellä on taso, ja solmuja, joilla on yhteinen vanhempi, kutsutaan sisaruksiksi. Jos on olemassa puun juurisolmusta alkava polku, joka kulkee solmun p^n kautta solmuun x, niin solmu p^n on solmun x esivanhempi ja solmu x on solmun p^n jälkeläinen.

Alapuuksi kutsutaan puuta, jonka juuri on solmu x, mutta joka ei kuitenkaan ole koko puun juuri, vaan solmulla x on olemassa vanhempi, jonka lapsi se on. Alapuu sisältää solmun x, sekä kaikki sen jälkeläiset.

Binäärisessä hakupuussa jokainen arvo on ainutkertainen, eikä siis ole kahta erillistä solmua, joihin molempiin olisi talletettu sama arvo. Hakupuun rakenne on myös

järjestetty siten, että solmun vasemman lapsen arvo on aina solmun omaa arvoa pienempi, ja vastaavasti oikean lapsen arvo aina solmun omaa arvoa suurempi. Täten pätee, että solmun x vasen alapuu, jonka juuri on solmun x vasen lapsi, sisältää vain arvoja, jotka ovat pienempiä kuin solmun x sisältämä arvo, ja vastaavasti oikea alapuu, jonka juuri solmun x oikea lapsi on, sisältää vain suurempia arvoja kuin solmun x sisältämä arvo.[SlT85]



Kuva 1.2: puun juuressa on talletettuna arvo 6. Sen vasempaan alapuuhun talletetut arvot 2, 4 ja 5 ovat kaikki pienempiä kuin juuressa oleva arvo 6, ja vastaavasti oikeaan alapuuhun talletetut arvot 7 ja 8 ovat molemmat sitä suurempia. Tämä järjestys pätee binäärisessä hakupuussa aina jokaiseen sen solmuun. Esimerkiksi arvo 4 vasemman alapuun juuressa on suurempi kuin sen oman vasemman lapsen arvo 2.

Binäärinen hakupuu tietorakenteena tukee monia dynaamiselle tietorakenteelle tyypillisiä operaatioita, joita ovat esimerkiksi *hakeminen*, *lisääminen* ja *poistaminen*. Näistä hakeminen tapahtuu vertaamalla haettavaa arvoa i hakupuun juuressa olevaan arvoon, jolloin kohtaamme yhden seuraavista tilanteista:

1. Ei ole juurta(binäärinen hakupuu on tyhjä): Haettu arvo i ei ole puussa, ja haku loppuu epäonnistuneena.

2. Haettu arvo i on sama kuin juureen tallennettu arvo: Haku päättyy onnistuneena.

3. Haettu arvo i on pienempi kuin juureen tallennettu arvo: Haku jatkuu siirtymällä juuren vasempaan alapuuhun ja toistamalla samat askeleet alusta.

4. Haettu arvo i on suurempi kuin juureen tallennettu arvo: Haku jatkuu siirtymällä juuren oikeaan alapuuhun ja toistamalla samat askeleet alusta.

Uuden arvon i, olettaen ettei sitä vielä ole hakupuussa, lisääminen tapahtuu suorittamalla samoja askelia kuin haussa, kunnes saavumme yhteen hakupuun lehtisolmuista. Tämän jälkeen löytämällemme lehtisolmulle lisätään uusi lapsisolmu, jonka arvoksi i talletetaan, ja päätämme lisäyksen onnistuneena.

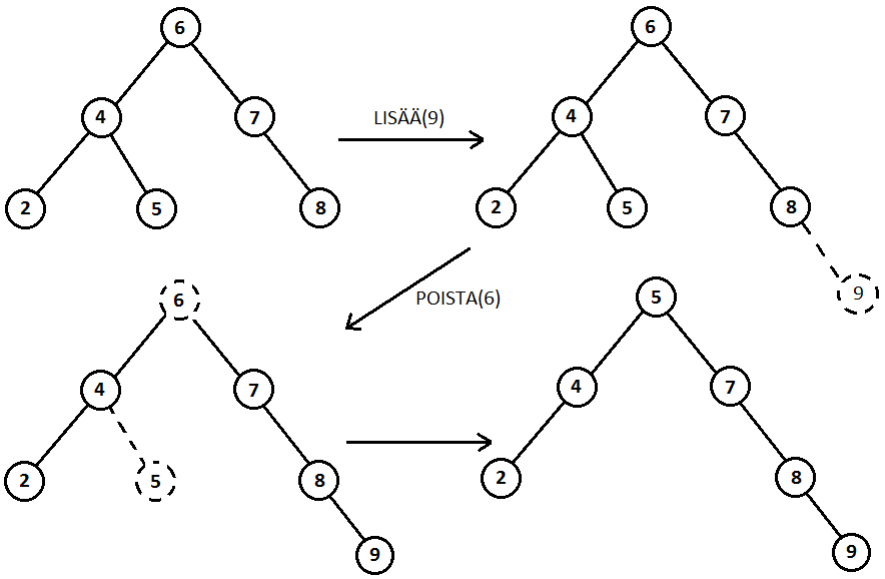
Vastaavasti myös arvon i poistaminen hakupuusta tapahtuu suorittamalla aluksi samoja haun askelia, kunnes saavumme solmuun x, joka sisältää poistettavan arvon i. Tämän jälkeen kohtaamme jonkin seuraavista vaihtoehdoista:

1. Poistettava solmu x on lehtisolmu: Solmu voidaan vain poistaa.

2. Poistettavalla solmulla x on yksi lapsisolmu: Kopioidaan solmuun x sen lapsisolmussa oleva arvo ja suoritetaan lapsisolmulla kohta 1.

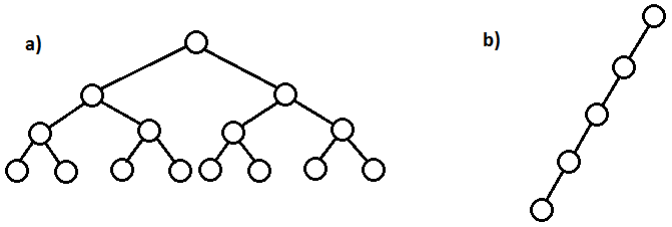
3. Poistettavalla solmulla x on kaksi lapsisolmua: Etsitään suurin arvo solmun x vasemmasta alapuusta ja kopioidaan se poistettavaan solmuun x. Nyt jos solmuun x kopioidun arvon sisältänyt solmu oli lehtisolmu, niin suoritetaan sillä kohta 1, tai jos se oli lapsellinen solmu, niin suoritamme sillä kohdan 2.

Näistä kustakin operaatiosta jokainen on aikavaativuudeltaan verrannollinen hakupuun korkeuteen, joka taas on riippuvainen siitä, miten puu on muodostunut. Parhaassa tapauksessa muodostuneen binäärisen hakupuun korkeus on mahdollisimman pieni, eli noin $\log_2 n$, missä n on solmujen lukumäärä. Tällöin yksittäisen haun, joka alkaa juuresta ja päättyy kuljettuaan koko puun korkeuden aina sen kaukaisimpaan lehtisolmuun, aikavaatimus on $O(\log\ n)$. Tämä vastaa kaikista mahdollisista puulle suoritettavista hauista aikavaativuudeltaan pahinta mahdollista.



Kuva 1.3: esimerkki hakupuusta, johon lisätään aluksi uusi arvo 9 ja sen jälkeen poistetaan arvo 6. Huomaa, kuinka poistettava solmu korvataan lehtisolmulla.

Täysin sattumanvaraisesti rakennetun binäärisen hakupuun lopullista muotoa on kuitenkin mahdotonta ennustaa ja siten onkin mahdollista, että puusta on muodostunut rakenteeltaan täysin toispuoleinen, jolloin pahimman mahdollisen haun aikavaatimus voi olla jopa $O(n)$, joka ei ole enää ollenkaan nopeampi kuin vaikkapa peräkkäishaku linkitetystä listasta. [CLR09]



Kuva 1.4: esimerkit a) tasapainoisesta binäärisestä hakupuusta ja b) toispuoleisesti rakentuneesta binäärisestä hakupuusta.

2.1 Tasapainotettu binäärinen hakupuu

Yksittäisen arvon hakeminen binäärisestä hakupuusta on sitä nopeampaa, mitä lähempänä juurta haettu arvo on. Koska sattumanvaraisesti haettu arvo voi olla mikä tahansa hakupuun arvoista, on haun aikavaativuuden kannalta oleellisinta, että jokainen puun solmu on mahdollisimman lähellä sen juurta, jolloin aika kulkea niihin on mahdollisimman lyhyt. Esimerkiksi miljoonasolmuisella hakupuulla, joka on täysin toispuoleisesti rakentunut, voi pahimmassa tapauksessa haettu solmu olla lehtisolmu, jolloin haun aikavaativuudeksi saadaan $O(n) = 1000000$. Kun taas täydelliseen tasapainoon rakentuneella hakupuulla pahin mahdollinen haku sen kaukaisimpaan lehtisolmuun on aikavaativuudeltaan vain $O(\log_2\ n) = 19$.

Rakenteeltaan tasapainoiselle binääriselle hakupuulle suoritettu yksittäinen haku, jollain satunnaisesti valitulla arvolla i, on siis aikavaativuudeltaan ylivertaisesti pienempi kuin täysin toispuoleisesti rakentuneelle suoritettu. Siispä välttääksemme tapaukset, joissa hakupuusta muodostuu toispuoleinen, otamme käyttöön tasapainotusehdon, joka yrittää pitää puun syvyyden mahdollisimman lähellä arvoa $\log_2 n$ taaten pahimman mahdollisen haun aikavaativuuden ylärajaksi $O(\log\ n)$. Tasapainotusehdon toteutuminen vaatii kuitenkin koko hakupuun uudelleen tasapainottamisen jokaisen tietorakenteeseen tehtävän muutoksen jälkeen, joten aivan ilmaista tasapainon ylläpito ei käytön aikavaativuudeltaan kuitenkaan ole.

Ensimmäinen tietojenkäsittelytieteessä esitetty itsestään tasapainottuva binäärinen hakupuu oli AVL-puu. Jos AVL-puussa kaikkien solmujen alipuiden korkeusero on enemmän kuin yksi, suoritetaan puun uudelleen tasapainottaminen yhdellä tai useammalla kierrolla, joista kukin kierto vaihtaa aina kahden eri solmun paikkaa. AVL-puun hyvin tiukka tasapainotusehto tekee siitä erinomaisen, jos sen pääasiallinen käyttötarkoitus on vain tiedon hakeminen, sillä sen korkeus on aina pienin mahdollinen.[AdL62] Binäärisille hakupuille suoritetaan tavallisessa käytössä kuitenkin usein

myös merkittävä määrä poisto- sekä lisäysoperaatioita, jolloin AVL-puulle löytyy parempiakin vaihtoehtoja.

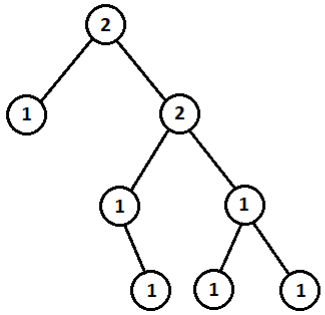
Yksi tapa määritellä binääriselle hakupuulle tasapainotusehto, on asettaa jokaiselle solmulle x arvoaste $rank(x)$, joka antaa sille seuraavanlaiset ominaisuudet:

i) Jos x on mikä tahansa solmu, jolla on vanhempi, niin $rank(x) \leq rank(p(x)) \leq rank(x)+1$.

ii) Jos x on mikä tahansa solmu, jolla on isovanhempi, niin $rank(x) < rank(p^2(x))$.

iii) Jos x on solmu, jolla ei ole kumpaakaan lapsisolmua, niin $rank(x) = 0$ ja $rank(p(x)) = 1$, tapauksessa, jossa solmulla x on vanhempi.

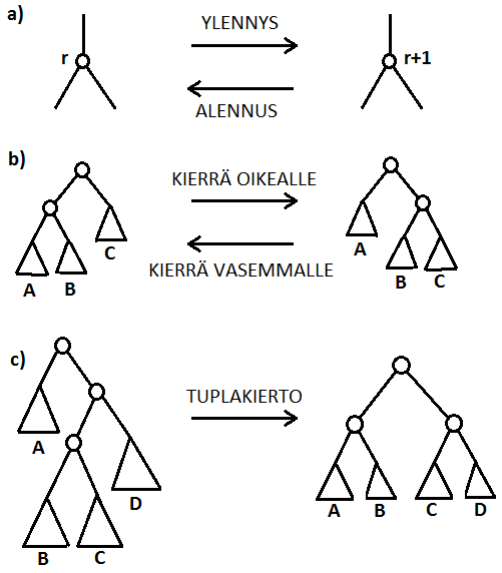
Kutsumme solmua x mustaksi, jos $rank(p(x)) = rank(x)+1$ tai jos $p(x)$ on määrittämätön, ja punaiseksi, jos $rank(p(x)) = rank(x)$. Ominaisuuden i mukaan jokainen solmu hakupuussa voi olla joko musta tai punainen, ominaisuuden ii mukaan jokaisella punaisella solmulla on musta vanhempi ja ominaisuuden iii mukaan jokainen lapseton solmu on musta. Määräämme myös, että jokaiseen puuttuvaan lapseen viitataan nollasolmuna, jonka arvoaste on nolla ja toteuttaa ehdon iii ollen musta. Näillä mustilla ja punaisilla solmuilla voimme luoda tasapainotetulle binääriselle hakupuulle määritelmän, jota vastaavaa puuta kutsutaan punamustaksi hakupuuksi.



Kuva 2.1: esimerkki tasapainotusehdosta. Solmujen numerot kuvaavat niiden arvoastetta.

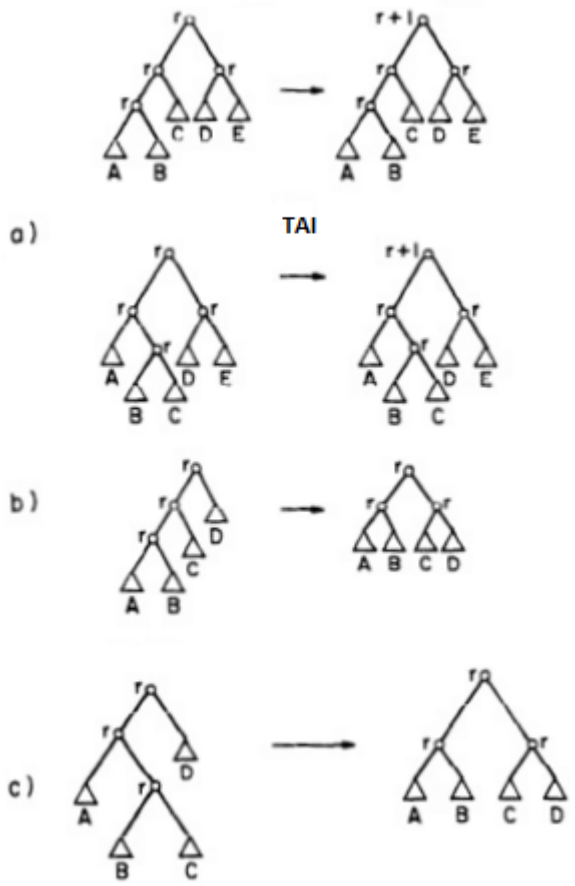
LEMMA 1. *Solmulla, jonka arvoaste on k, on korkeus enimmillään 2k ja on ainakin* $2^{(k+1)}$-1 *jälkeläistä. Täten tasapainotusehtoa noudattavalla binäärisellä hakupuulla, jolla on n lapsellista solmua, on syvyys enintään* $2\lfloor \lg(n+1) \rfloor$.

Todistus: Lemman ensimmäinen osa seuraa suoraan sen toisesta osasta k:n induktiolla.□



Kuva 2.2: lisäys- ja poisto-operaation ydintoiminnot. Kolmiot kuvaavat alapuita. a) ylennys/alennus. b) Yksinkertainen kierto. c) Tuplakierto, jolle löytyy myös symmetrinen vastine.

Lemma 1 antaa ymmärtää, että haun aikavaativuus tasapainoehdolla tasapainotetulle binääriselle hakupuulle on $O(\log\ n)$. Myös uudelleen tasapainottaminen lisäyksen tai poiston jälkeen saadaan tehtyä aikarajassa $O(\log\ n)$. Olennaiset toiminnot hakupuuta uudelleen tasapainotettaessa uuden solmun lisäämisen jälkeen ovat *ylennys*, joka korottaa solmun arvoastetta yhdellä, *yksinkertainen kierto* ja *tuplakierto*(joka vastaa kahta yksinkertaista kiertoa). Kukin näistä operaatioista vie ajan $O(1)$ onnistuessaan.



Kuva 2.3: lisäysoperaation askeleet. Jokaiselle on olemassa symmetrinen vastine. Kolmiot kuvaavat alapuita, joilla on mustat juuret. Nyt solmu x on alapuun B juurisolmun vanhempi. a) Ylennys. Huomaa kuinka ylennettävän solmun lapsisolmut vaihtavat väriä. b) Yksinkertainen kierto. c) Tuplakierto.

Uuden solmun lisääminen hakupuuhun tapahtuu korvaamalla jo puussa olevan nollasolmun, jonka arvoaste on nolla, hakupuuhun lisättävällä solmulla, jonka arvoaste on yksi ja jonka molemmat lapset ovat nollasolmuja. Tämä saattaa olla ristiriidassa ominaisuuden *ii* kanssa, koska mahdollinen lopputulos on punainen solmu, jonka vanhempi olisi myös punainen. Uudelleen järjestääksemme hakupuun, tutkimme lisätyn solmun x mustan isovanhemman $p^2(x)$ lapsisolmuja. Jos molemmat lapsisolmut ovat punaisia, niin korotamme isovanhemman $p^2(x)$ numeroarvoa yhdellä, jolloin sen

lapsisolmut muuttuvat mustiksi, ja siirrymme lisätystä solmusta x sen isovanhempaan $p^2(x)$ kokeilemaan toteutuuko nyt sille ominaisuus *ii*. Tai jos isovanhemmalla $p^2(x)$ on musta lapsisolmu, niin suoritamme tarvittavan yksinkertaisen tai tuplakierron, mikä viimeistelee hakupuun tasapainotuksen. Tällä metodilla hakupuun uudelleen tasapainottaminen lisäyksen jälkeen on aikavaativuudeltaan $O(\log n)$, koostuen sarjasta ylennyksiä, joita seuraa enintään kaksi yksinkertaista kiertoa.

Solmun poistainen tapahtuu kuten tavallisella binäärisellä hakupuulla. Poisto-operaation jälkeen joudumme kuitenkin tasapainottamaan hakupuun uudelleen, mihin käytämme ylennyksen sijasta *alentamista*, joka alentaa solmun arvoastetta yhdellä. Poisto-operaation jälkeen voi nimittäin olla, että poistetun solmun(Huomaa, että poistettava solmu ei välttämättä ole sama kuin solmu, joka sisältää poistettavan arvon.) tilalle luotu uusi musta nollasolmu x on nyt vanhempaansa $p(x)$ arvoasteeltaan kaksi pienempi, mikä rikkoo ominaisuutta *i*. Saavuttaaksemme uuden tasapainon puussa, noudatamme seuraavanlaisia ehtoja:

Tapaus 1. Solmun x sisar y on musta.

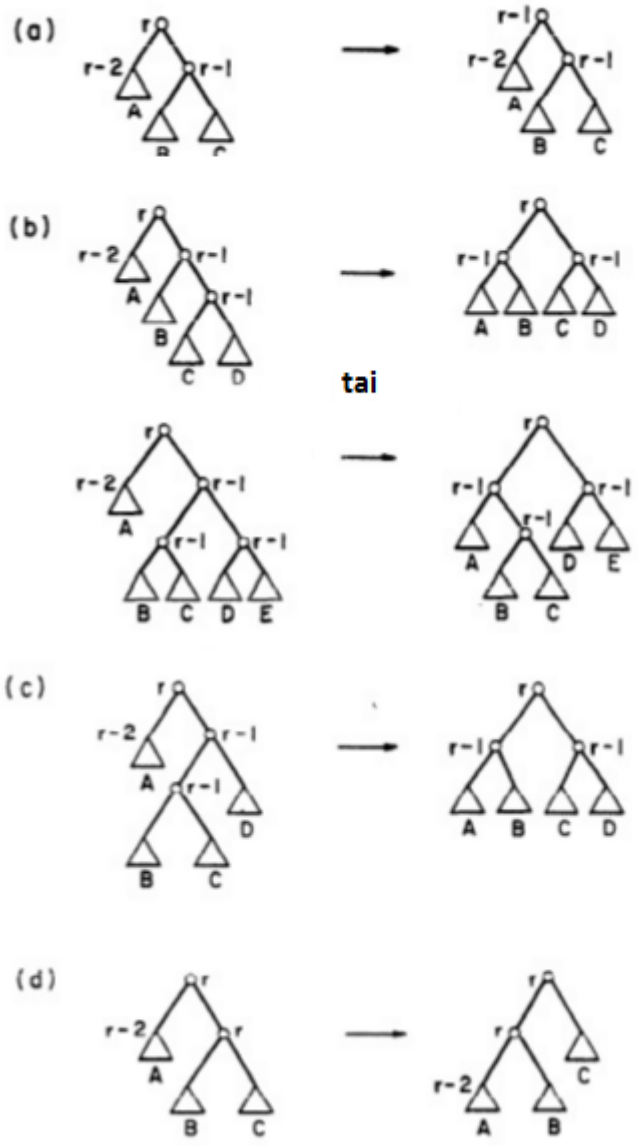
Alatapaus 1a. Solmun y molemmat lapset ovat mustia. Alenna $p(x)$, siirry solmusta x solmuun $p(x)$, ja kokeile ominaisuuden i toteutuminen.

Alatapaus 1b. Solmun y lapsi, joka on kauimpana solmusta x, on punainen. Suorita yksinkertainen kierto solmulle $p(x)$ ja lopeta.

Alatapaus 1c. Solmun y lapsi, joka on lähimpänä solmua x, on punainen, ja sen sisar on musta. Suorita tuplakierto solmulle $p(x)$ ja lopeta.

Tapaus 2. Solmun x sisar y on punainen ja solmun y molemmat lapsisolmut ovat mustia, ominaisuuden i mukaisesti. Suorita yksinkertainen kierto solmuille x ja $p(x)$ ja jatka kuten tapauksessa 1. (Kierron jälkeen solmun x uusi sisar on musta.) Nyt alatapaus 1a ei voi aiheuttaa ominaisuuden i kanssa ristiriitaa, sillä kaikki

tapauksen 1 alatapaukset päättävät suorituksen. Siten hakupuun uudelleen tasapainottamisen aikavaativuus poiston jälkeen on $O(\log\ n)$, koostuen sarjasta alennuksia, joita seuraa enintään kolme yksinkertaista kiertoa.



Kuva 2.4: poisto-operaation askeleet. Jokaiselle on olemassa symmetrinen vastine. Nyt solmu x on alapuun A juurisolmu ja kaikkien alapuiden, paitsi A:n, juurisolmut ovat mustia. a) Alatapaus 1a. Alennus. b) Alatapaus 1b. Yksinkertainen kierto. c) Alatapaus 1c. Tuplakierto. d) Tapaus 2. Yksinkertainen kierto, joka johtaa poisto-operaation päättävään tapauksen 1 alatapaukseen.

Tasapainotettu binäärinen hakupuu tarjoaa meille siis satunnaisen yksittäisen haun pahimmankin tapauksen aikavaativuuden ylärajaksi $O(\log\ n)$. Pahimman tapauksen aikavaativuuden ylärajaa tärkeämpää on käytännössä kuitenkin kokonaisuuden kannalta se, kuinka usein niitä hakupuuta käytettäessä kohtaamme, eli toisin sanoen, kuinka usein joudumme suorittamaan hakupuulle hakuja, jotka ulottuvat juuresta aina sen kaikkein etäisimpiin solmuihin. Siispä, jos tiedämme etukäteen kunkin arvon hakemisen toistuvuuden suoritettavassa sarjassa perättäisiä hakuja, voimme yrittää optimoida puuta siten, että sarjassa useimmin toistuvat arvot olisivat aina mahdollisimman lähellä hakupuun juurta, jolloin hakupuun käytön kokonaisaikavaativuus suoritettavalle sarjalle perättäisiä hakuja olisi mahdollisimman pieni.[Tar83]

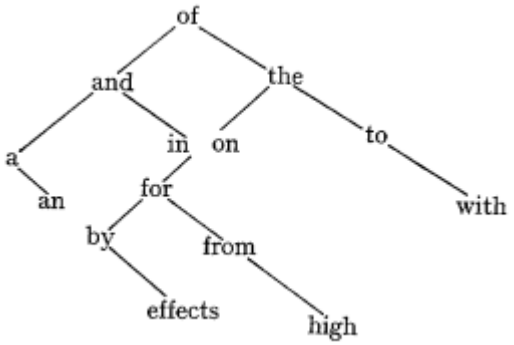
2.2 Optimoitu binäärinen hakupuu

Sarjalle perättäisiä satunnaisia hakuja, joista jokaisen todennäköisyys toistua on sama, on paras mahdollinen binäärinen hakupuu parhaan mahdollisen keskimääräisen hakuajan puitteissa tasapainotettu binäärinen hakupuu. Tällöin kaikkien mahdollisten eri hakujen yhteenlaskettu aikavaativuus on pienin mahdollinen, kun jokainen solmu on asetettu mahdollisimman lähelle puun juurta. Jos kuitenkin jotkut tunnetut haut esiintyvät toisia hakuja todennäköisemmin, niin tällöin paras mahdollinen binäärinen hakupuu ei välttämättä olekaan tasapainotettu.

Otetaan esimerkkinä seuraavanlainen lista sanoja ja sarjoja:

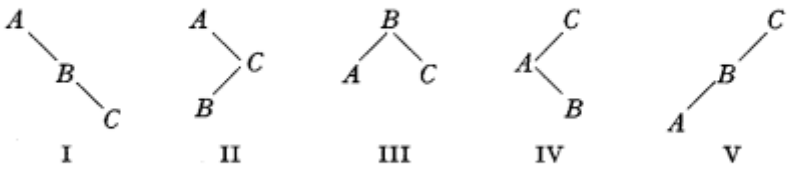
a	32	high	8
an	7	in	64
and	69	of	142
by	13	on	22
effects	6	the	79
for	15	to	18
from	10	with	9

Näille paras mahdollinen binäärinen hakupuu on seuraavanlainen:

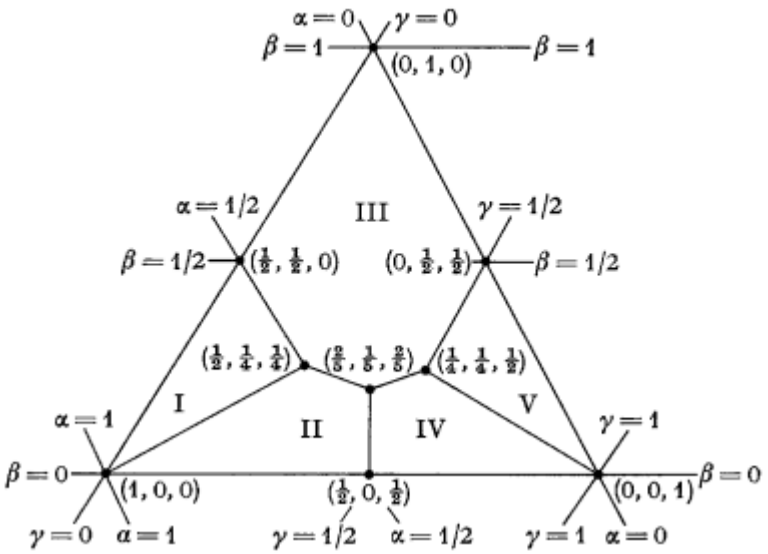


Kuinka voimme siis rakentaa nopeimman mahdollisen binäärisen hakupuun tapauksessa, jossa ennalta tiedämme haettavien sanojen toistuvuuden suoritettavassa sarjassa hakuja? Tätä ongelmaa kutsutaan optimaalisen binäärisen hakupuun ongelmaksi. Se on vaikeampi kuin perinteinen Huffmanin-ohjelmointiongelma, jossa sarjassa hakuja useimmin toistuvat sanat laitetaan vain raa'asti aina suoraan puun juureen [Huf52]. Optimaalisuuden kannalta voi nimittäin joskus olla, että parasta onkin järjestää puu tavalla, jossa sen juuri ei olekaan se kaikista useimmin toistuva sana, jolloin erityisesti puun rakenteen uudelleenjärjestäminen rakenteeseen tehtyjen muutoksien jälkeen on optimoinnin kannalta hyvin haastavaa.

Esimerkiksi oletetaan, että sanamme ovat A, B, C ja niiden toistuvuudet ovat α, β ja γ. Nyt voimme muodostaa näille viisi rakenteeltaan erilaista binääristä hakupuuta, joissa jokaisessa on kolme solmua.



Seuraava diagrammi näyttää α:n, β:n ja γ:n arvot, joilla kukin näistä puista on optimaalinen, olettaen, että $\alpha+\beta+\gamma = 1$.

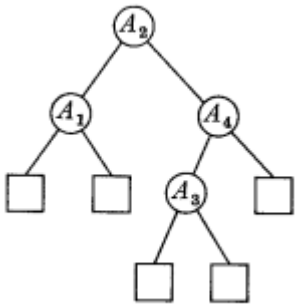


Kuten voimme kuvasta nähdä, on todellakin olemassa tapauksia, joissa on parasta laittaa B juureen, vaikka molemmat A ja C toistuisivat sitä useammin. Sen lisäksi, että juurta ei voida valita puhtaasti toistuvuuden perusteella, ei ole myöskään riittävää valita sitä siten, että se tasapuolistaisi sen oikeaan ja vasempaan alapuuhun kohdistuvien hakujen todennäköisyyksiä niin paljon kuin mahdollista. Koska n-solmuiselle binääriselle hakupuulle on olemassa $\binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}$ erilaista rakennetta, tehden niiden kaikkien läpikäymisen parasta optimaalista binääristä hakupuun muotoa etsittäessä mahdottomaksi, on optimoidun binäärisen hakupuun löytämiseen kehitetty erilaisia algoritmeja.

Käytännössä haluamme yleistää ongelman, ei vain koskemaan hakuja joilla saamme onnistuneen haun, vaan myös koskemaan hakuja jotka ovat epäonnistuneita. Siten saamme n nimeä A_1, A_2, ..., A_n ja $2n+1$ toistuvuutta α_0, α_1, ..., α_n; β_1, β_2, ..., β_n. Tässä β_i on toistuvuus, jolla kohtaamme A_i, ja α_i on toistuvuus jolla kohtaamme nimen, joka on A_i ja A_{i+1} välillä; huomaa myös arvojen α_0 ja α_n tulkinnat. Avainasia, joka tekee ongelmasta suotuisan dynaamiselle ohjelmoinnille, on että kaikki optimaalisen alapuun alapuut ovat myös optimaalisia. Jos A_i on juuressa, niin sil-

loin sen vasen alapuu on optimi ratkaisu sarjalle α_0, ..., α_{i-1} ja β_1, ..., β_{i-1} ja oikea alapuu optimaalinen ratkaisu sarjalle α_i, ..., α_n ja β_{i+1}, ..., β_n. Siispä voimme rakentaa optimaalisen hakupuun kaikille eri sarjojen intervalleille α_i, ..., α_j ja β_{i+1}, ..., β_j, kun $i \leq j$, aloittaen pienimmistä intervalleista edeten kohti suurinta. Koska tapaukselle $0 \leq i \leq j \leq n$ on vain $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ vaihtoehtoa, niin kokonaismäärä laskennalle ei ole liiallinen.

Otetaan seuraavanlainen binäärinen hakupuu, jossa puun neliöt kuvaavat sen lopetussolmuja, joihin ei ole talletettuna nimeä:



Haun painotettu pituus binääriselle hakupuulle P on sen kaikkien solmujen tason ja todennäköisyyden tulon yhteenlaskettu kokonaissumma. Nyt aiemmassa esimerkissä haun painotetuksi pituudeksi saadaan

$$3\alpha_0 + 2\beta_1 + 3\alpha_1 + \beta_2 + 4\alpha_2 + 3\beta_3 + 4\alpha_3 + 2\beta_4 + 3\alpha_4.$$

Yleisesti ottaen, voimme nähdä, että haun painotettu pituus täyttää kaavan

$$P{=}P_L{+}P_R{+}W$$

ehdot, missä P_L ja P_R ovat oikean ja vasemman alapuun hakujen painotetut pituudet ja $W{=}\alpha_0{+}\alpha_1{+}...{+}\alpha_n{+}\beta_1{+}...{+}\beta_n$ on puun "paino", eli kaikkien toistuvuuskertoimien summa. Haun painotettu pituus kuvaa relatiivista työmäärää hauille, jotka suoritetaan kaikille valituille arvoille α ja β. Täten optimaalisen hakupuun löytämisen ongelma on ongelma löytää binääripuu, jolla on mahdollisimman pieni yhteenlas-

kettu hakujen painotettu pituus, kun painot huomioidaan hakupuussa vasemmalta oikealle.

Yllä tehdyt huomiot johtavat suoraan seuraavanlaiseen laskutapaan selvittää optimoitu binäärinen hakupuu. Olkoot P_{ij} ja W_{ij} haun painotettu pituus ja optimipuun kokonaispaino kaikille sanoille, jotka ovat A_i ja A_{i+1} välillä, kun $i<j$; ja olkoon R_{ij} tämän puun juuren indeksi, kun $i<j$. Seuraavanlaiset kaavat muodostavat nyt haluamamme algoritmin:

$$P_{ii} = W_{ii} = \alpha_i, \text{ kun } 0 \leq i \leq n,$$

$$W_{ij} = W_{i,j-1} + \beta_j + \alpha_j,$$

$$P_{i,R_{i,j-1}} + P_{R_{ij},j} = \min_{i<k\leq j}(P_{i,k-1} + P_{kj}) = P_{ij} - W_{ij}, \text{ kun } 0 \leq i < j \leq n.$$

Tarkastelemalla esitettyä algoritmia huomaamme, että optimaalisen binäärisen hakupuun löytämiselle on laskettavissa aikavaativuuden yläraja $O(n^3)$. Tästä on mahdollista vielä jalostaa tehokkaampi $O(n^2)$ laskutapa optimaaliselle binääriselle hakupuulle, kuten Knuth on esittänyt[Knu70].

Vaikka optimoitu binäärinen hakupuu on ennalta tunnetulle sarjalle hakuja kaikista binääripuista paras mahdollinen, tekee kuitenkin sen jokaisen lisäys- ja poistooperaation tarvitsema koko puun jälleenrakentaminen siitä erittäin raskaan käytettävän. Oikean elämän sovelluksissa on myös hyvin haasteellista määrittää ennalta kaikkia hakupuun optimointiin tarvittavia todennäköisyyksiä, sillä usein hakupuun eri käyttötapaukset korreloivat keskenään, jolloin suoritettavat sarjat hakuja saattavat poiketa hyvinkin paljon toisistaan. Muutokseen sopeutumiskyvyltään surkealle optimoidulle hakupuulle onkin olemassa muita vaihtoehtoisia binäärisiä hakupuita, joista monet pyrkivät samankaltaiseen optimaalisuuteen, mutta kuitenkin säilyttäen kykynsä mahdollisimman nopeisiin rakenteen muutoksiin.

2.3 Ennakoiva binäärinen hakupuu

Ennakoiva binäärinen hakupuu on puurakenne, joka pyrkii yhdistämään sekä tasapainotetun että optimoidun binäärisen hakupuun hyvät puolet. Se muistuttaa rakenteellisesti hyvin paljon tasapainotettua binääristä hakupuuta, yrittäen pitää korkeutensa aina mahdollisimman pienenä. Mutta sitä päivittävät algoritmit ovat monimutkaisempia kuin tasapainotetun binäärisen hakupuun, sillä se pyrkii tasapainotuksen lisäksi myös optimoidun hakupuun kaltaisesti pitämään useimmin haetut arvonsa nopeammin saatavilla kuin harvemmin haetut, järjestämällä ne lähemmäksi juurta. Olennainen ero optimoituihin hakupuihin on kuitenkin ennakoivan binäärisen hakupuun kyky sopeutua muutoksiin, sillä sen päivitysnopeus on tasapainotetun binäärisen hakupuun kaltaisesti vain $O(\log\ n)$, siinä missä optimoitu binäärinen hakupuu joutuu jälleenrakentamaan itsensä aina kokonaan uudelleen jokaisella tehdyllä muutoksella ajassa $O(n^3)$ (tai ajassa $O(n^2)$ Knuthin esittämällä algoritmilla).

Hyvänä esimerkkinä havainnollistaaksemme ennakoivaa binääristä hakupuuta on ottaa tässä tutkielmassa aiemmin käsitelty punamusta hakupuu ja lisätä sille optimoivaa ominaisuutta. Punamusta hakupuu on itsessään tasapainotettu binäärinen hakupuu, jolle on määritelty tietyt ehdot uudelleen tasapainottumiselle, joka suoritetaan aina jokaisen rakenteeseen tehdyn muutoksen jälkeen. Nämä ehdot järjestävät puun siten, että sen pahin mahdollinen aikavaatimus yksittäiselle haulle on sen koko korkeus $O(\log\ n)$. Punamusta hakupuu ei kuitenkaan ota huomioon rakenteen uudelleen järjestämisessä millään tavalla tulevia suoritettavia hakuja, vaan on täysin sokea omalle käytölleen tahtoen vain pitää hakupuun rakenteen tasapainossa.

Siispä yhdistämme punamustaan hakupuuhun optimaalisesta hakupuusta tutun laskutavan, jossa jokaiselle solmulle on olemassa kerroin, joka vastaa sen haun todennäköisyyttä. Nyt voimme laskea punamustan hakupuun solmuille uudenlaiset tasapainotusarvot, huomioiden niihin kuhunkin kohdistuvan haun todennäköisyyden,

ja muuttaa punamustan hakupuun uudelleen järjestäviä algoritmeja siten, että ne huomioivat uudet tasapainotusarvomme. Yksinkertaisimmillaan siis yritämme vain hieman muuttaa punamustan hakupuun omaa toimintalogiikkaa siten, että tasapainotusalgoritmi siirtäisi useimmin haettuja solmuja lähemmäs puun juurta.[BST85]

Ennakoivien binääristen hakupuiden suuri ongelma on kuitenkin niiden vielä optimoituja hakupuitakin paljon hankalammat algoritmit ja vielä tasapainotettuja hakupuitakin monimutkaisemmat ja vaikeammin ylläpidettävät ehdot. Ennakoiville binäärisille hakupuille onkin olemassa vaihtoehtoisia hakupuurakenteita, jotka lähestyvät hakupuun optimointiongelmaa aivan uudella tavalla.

2.4 Tasoitettu analyysi

Usein binäärisen hakupuun aikavaativuutta tarkasteltaessa sille pyritään esittämään yläraja pahimpien mahdollisten käyttötapauksien summana. Näin laskettu aikavaativuuden yläraja on monesti kuitenkin jo liioitellun pessimistinen, eikä se usein huomioi ollenkaan niitä positiivisia ominaisuuksia, joita yksittäiset pyynnöt voivat saada aikaan hakupuun rakenteessa. Aikavaativuuden määrittämistä ei kannata myöskään yrittää lähestyä määrittämällä jokaiselle yksittäiselle pyynnölle keskimääräistä aikavaativuutta lähinnä sen haastavuuden ja hyvin helpon oletuksissa erehtymisen takia.

Sen sijaan binääristen hakupuiden aikavaativuuden analysoimiseen on kehitetty ihan oma metodinsa; niin kutsuttu *tasoitettu analyysi*. Tasoitetussa analyysissa jokaiselle yksittäiselle operaatiolle lasketun keskimääräisen suoritusajan sijaan muodostamme yhden yleisen keskiarvon, jolla kuvaamme jokaista yksittäistä hakupuulle suoritettavaa pyyntöä perättäisessä sarjassa aikavaativuudeltaan raskaimpia mahdollisia operaatioita. Näin saadut laskelmat antavat meille sekä vahvoja että realistisia tuloksia.

Havainnollistaaksemme tasoitettua analyysia, oletamme että meillä on keko, jolle

voidaan suorittaa kahta erilaista operaatiota: *push* ja *pop*. Push lisää keon päälle aina yhden uuden arvon, ja vastaavasti pop poistaa keosta aina siihen viimeisimpänä lisätyn arvon. Pop-operaatiota ei voida suorittaa, jos keko on tyhjä. Analysoimme keolle suoritettavan sarjan pyyntöjä aikavaativuutta, kun jokaista push-operaatiota voi seurata aina nolla tai useampi pop. Oletetaan, että keko on aloittaessamme tyhjä, ja että suoritamme sille määrän m operaatioita. Nyt yhdelle yksittäiselle operaatiolle voidaan määrittää aikavaativuuden yläraja $O(m)$, mikä seuraa jos kaikki m-1 ensimmäistä operaatiota ovat olleet pelkästään push, ja näiden jälkeen viimeisenä suoritettava operaatio on push ja m kertaa pop, poistaen keosta myös kaikki aiempien push-operaatioiden siihen lisäämät arvot. Näin saatua yksittäisen operaation pahimman tapauksen aikavaativuuden ylärajaa hyödyntäen, voidaan edelleen laskea koko suoritettavalle sarjalle operaatioita aikavaativuuden yläraja $O(m^2)$.

Näin laskettu aikavaativuuden yläraja on kuitenkin selkeästi liioitellun pessimistinen, sillä se jättää täysin huomiotta sen keon rakenteellisen ominaisuuden, että jokaista pop-operaatiota on täytynyt vastata aina vähintään yksi aiempi push-operaatio, mikä rajaa suoritettavien operaatioiden yhteenlasketuksi lukumääräksi aina enimmilläänkin $2m$. Siispä saadaksemme tarkempia tuloksia analysoidessamme binääristen hakupuiden aikavaativuuksia, tulee meidän huomioida sarjassa suoritettavien operaatioiden vaikutukset toisiinsa. Näin ollen analysoimme tästedes binääristen hakupuiden ominaisuuksia tasoitetulla analyysillä.[Tar85]

2.5 Mukautuva binäärinen hakupuu

Mukautuva binäärinen hakupuu on hakurakenne, joka jokaisen yksittäisen operaation aikavaativuuden minimoimisen sijaan pyrkii aina uudelleen järjestämään rakennettaan siten, että kaikki kutakin sille suoritettavaa operaatiota seuraavat operaatiot olisivat nopeampia. Sillä voi siis olla yksittäisiä aikavaativuudeltaan hyvinkin kal-

liita operaatioita, mutta tasoitetulla analyysilla tarkasteltaessa sen keskimääräinen aikavaativuus kullekin operaatiolle on kuitenkin pieni.

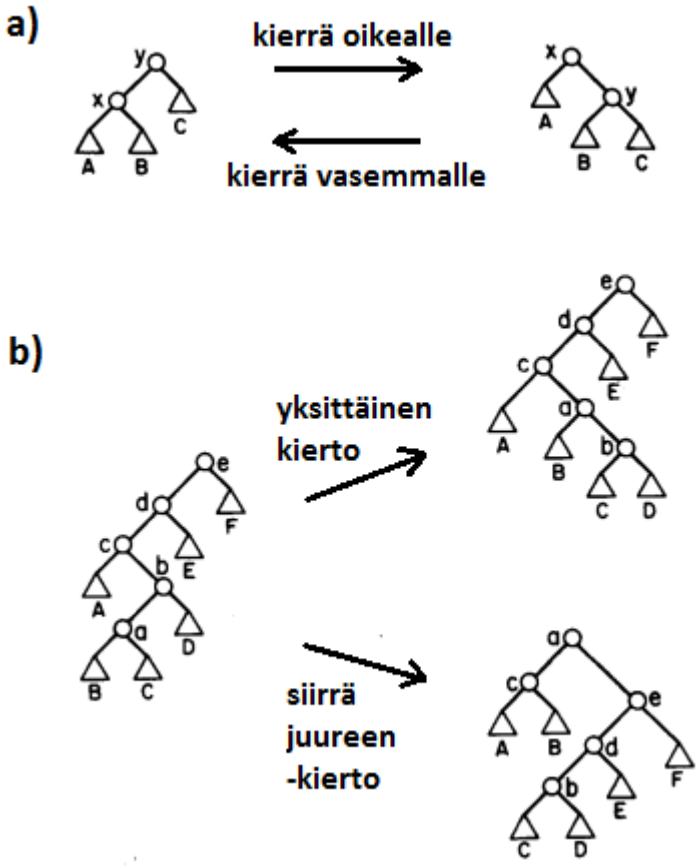
Toisin kuin ennakoivat ja optimoidut hakupuut, mukautuva binäärinen hakupuu ei myöskään tarvitse sille suoritettavista operaatioista ollenkaan mitään ennakkotietoja, vaan sen tehokkuus perustuu olettamukseen tiedonhaun *klusteroitumisesta*, eli siitä, että jokaista usein haettua arvoa tullaan todennäköisesti hakemaan pian uudestaan. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että mukautuva binäärinen hakupuu on rakenteeltaan aina ennalta määräämättömässä muodossa, mutta kuitenkin siten, että jokaisella sille suoritettavalla haulla se uudelleenjärjestää haetun arvon sen uudeksi juureksi olettaen, että samaa arvoa haetaan pian uudestaan.

Mukautuvan binäärisen hakupuun uudelleen järjestävät algoritmit perustuvat erilaisiin kiertoihin, jotka muokkaavat sen rakennetta jokaisella operaatiolla:

- Yksittäinen kierto: Haku arvoon i solmussa x. Kierrä solmua x sen vanhemman kanssa. (Paitsi jos solmu x on hakupuun juuri.)
- Siirrä juureen -kierto: Haku arvoon i solmussa x. Kierrä solmua x sen vanhemman kanssa, ja toista kunnes solmu x on hakupuun uusi juuri.

Mukautuvan binäärisen hakupuun etuja *staattisiin*, rakenteeltaan muuttumattomiin, hakupuihin nähden on erityisesti sen kyky sopeutua sille suoritettaviin sarjoihin operaatioita. Tasoitetulla analyysilla tarkasteltaessa mukautuva hakupuu ei olekaan ikinä paljon staattisia hakupuita huonompi, vaan joillain optimaalisilla syötteillä se saattaa olla jopa huomattavasti niitä tehokkaampi. Myös sen laitteelta vaatima muistitila toimiakseen on pienempi, sillä esimerkiksi tasapainotukseen tarvittavaa muistitilaa ei tarvita ja sen haku-, lisäys- ja poistoalgoritmit ovat yksinkertaisia ja helppoja implementoida.

Tavallisen mukautuvan binäärisen hakupuun heikkoutena on kuitenkin sen paikalliset muokkaukset, joita on paljon erityisesti hakuoperaation aikana, kun taas staat-



Kuva 6.1: mukautuvan binäärisen hakupuun kierrot. Kolmiot kuvaavat alapuita. Kuvien puut voivat olla myös suuremman puun alapuita. Jokainen yksittäinen kierto on aikavaativuudeltaan O(1) ja säilyttää solmujen symmetrisen järjestyksen. a) Kierretään solmuja x ja y keskenään. b) Mukautuvan hakupuun kierto solmussa a.

tiset hakupuut vaativat muokkausta vain uuden solmun lisäyksen tai poiston aikana. Mukautuvalle hakupuulle voi myös olla joskus yksittäisiä hakuja, joilla rakenteita muokkaavat kierrot ovat hyvinkin raskaita, mikä saattaa näkyä reaaliaikaisissa sovelluksissa huomattavana heikkoutena. Tasoitetulla analyysilla tarkasteltaessa esittämäämme hakupuuta muokkaavat kierrot eivät olekaan erityisen tehokkaita, sillä on olemassa satunnaisen pitkiä sarjoja pyyntöjä, joilla aikavaatimus jokaista yksittäistä pyyntöä kohden on $O(n)$.[Slt85]

2.6 Splay-puu

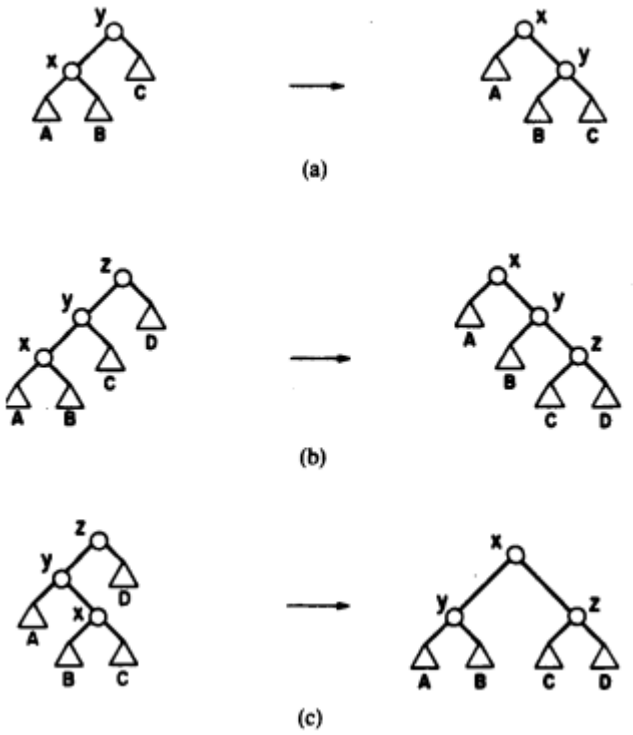
Splay-puu on Daniel Sleatorin ja Robert Tarjanin vuonna 1985 kehittämä tavallista mukautuvaa binääristä hakupuuta hyvin paljon muistuttava hakupuu, mutta jonka poikkeukselliset uudelleen järjestävät kierrot takaavat sille kuitenkin paremman tehokkuuden kuin tavalliselle mukautuvalle hakupuulle. Tasoitetulla analyysilla tarkasteltaessa splay-puun haku-, lisäys- ja poisto-operaatiot ovat aikavaativuudeltaan $O(\log\ n)$ ja täten splay-puu on hakupuuna ainakin yhtä tehokas kuin dynaamisesti tasapainotetut ja staattiset optimoidut hakupuut. Voidaan myös olettaa, että millä tahansa riittävän pitkällä sarjalla suoritettavia operaatioita, splay-puu on aina ainakin yhtä tehokas kuin mikä tahansa dynaamisesti päivittyvä binäärinen hakupuu.

Splay-puuta uudelleen järjestävät kierrot, niin kutsutut *splay-kierrot*, poikkeavat tavallisen mukautuvan binäärisen hakupuun kierroista siinä, että ne tehdään pareittain, järjestyksessä joka riippuu tehdyn hakuoperaation reitistä hakupuussa haettuun solmuun. Suorittaaksemme splay-kierron solmussa x, toistamme seuraavanlaisia askelia, kunnes x on hakupuun uusi juurisolmu:

1. Zig: Jos $p(x)$, solmun x vanhempi, on juuri, kierrä solmuja x ja $p(x)$ keskenään.

2. Zig-zig: Jos $p(x)$ ei ole juuri, ja x ja $p(x)$ ovat molemmat vasempia tai oikeita lapsia, kierrä solmuja liittämällä $p(x)$ sen isovanhempaan $g(x)$ ja sen jälkeen kierrä solmuja x ja $p(x)$ keskenään.

3. Zig-zag: Jos $p(x)$ ei ole juuri, ja x on vasen lapsi ja $p(x)$ oikea lapsi, tai päinvastoin, niin kierrä solmuja x ja $p(x)$ keskenään ja sen jälkeen kierrä solmua x vielä sen uuden vanhemman kanssa.



Kuva 7.1: Splay-kierto solmussa x. Jokaisella tapauksista on symmetrinen vastine. a) Zig: splay-kierrot päättävä yksinkertainen kierto, kun solmu y on puun juuri. b) Zig-zig: Kaksi yksinkertaista kiertoa. c) Zig-zag: Tuplakierto.

Splay-kierto solmussa x syvyydessä d vie ajan $\Theta(d)$, joka vastaa hakuoperaation aikaa kulkea hakupuun juuresta sen solmuun x. Splay-kierto ei pelkästään tee solmusta x uutta hakupuun juurta, vaan karkeasti määriteltynä puolittaa jokaisen hakuoperaation reitillä olevan solmun syvyyden. Juuri tämä syvyyksien puolittaminen zig-zig ja zig-zag -tapauksissa toisistaan eroavin kierroin on se, mikä tekee splay-kierrosta niin tehokkaan ja ainutlaatuisen, sillä mikään muu yksinkertaisempi algoritmi, kuten vaikkapa tavallisen mukautuvan hakupuun *siirrä juureen* -kierto, ei jaa sen ominaisuuksia.

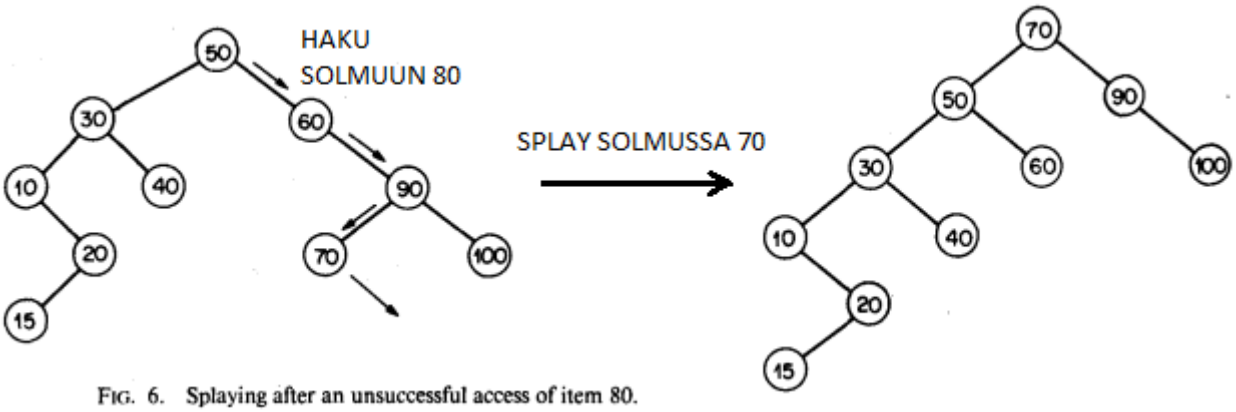


FIG. 6. Splaying after an unsuccessful access of item 80.

(Kuva: Splay at 80, kun arvoa ei löydy.)if the search reaches a null node indivating that i is not in the tree, we complete access by splaying at the last nonnull node reached during the search and return a pointer to null

Myös splay-puun lisäys- ja poisto-operaatiot ovat aiemmin esitellyistä hakupuista poikkeavat. Koska splay-kierroilla on ominaisuus siirtää nimetty solmu juureen, on uuden solmun lisäys ja poistaminen helpointa tehdä *liitoksella* ja *halkaisulla*:

> Liitos(T_1,T_2): Yhdistää hakupuut T_1 ja T_2 toisiinsa muodostaen yhden suuremman hakupuun, joka sisältää molempen T_1 ja T_2 kaikki arvot. Ehtona liitokselle on, että kaikki hakupuun T_1 arvot ovat pienempiä kuin hakupuun T_2 arvot.
>
> Halkaisu(i, T): Halkaisee hakupuun T kahteen hakupuuhun T_1 ja T_2, joista T_1 sisältää kaikki hakupuun T arvot, jotka ovat pienempiä tai yhtäsuuria kuin i, ja joista T_2 sisältää kaikki hakupuun T arvot, jotka ovat suurempia kuin i.

Suorittaaksemme liitoksen, aloitamme nostamalla pienempiä arvoja sisältävän puun T_1 suurimman arvon i sen uudeksi juureksi suorittamalla siihen haun. Tämän jälkeen asetamme vain puun T_1 puun T_2 pienimmän solmun vasemmaksi lapseksi. Vastaavasti halkaisu arvolla i hakupuussa T aloitetaan haulla arvolle i, jonka jälkeen puu T_1 on puun T juuri ja juuren vasen alapuu ja puu T_2 on puun T juuren oikea alapuu.

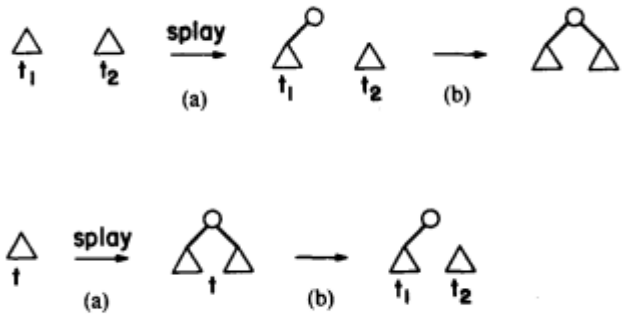
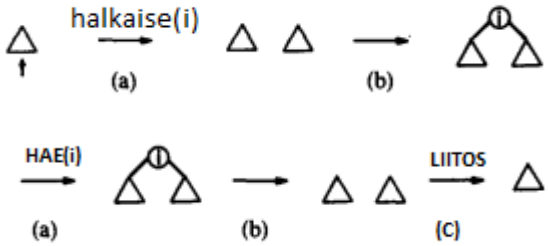


FIG. 7. Implementation of *join* and *split*: (a) *join*(t_1, t_2). (b) *split*(i, t).

(Kuvat split ja join.)

Näin saamme edelleen määriteltyä lisäyksen ja poiston seuraavanlaisesti. Uuden yksittäisen solmun lisääminen tehdään suorittamalla halkaisu lisättävällä arvolla i, jonka jälkeen lisäämme lisättävälle solmulle arvolla i näin saadut puut T_1 ja T_2 sen oikeaksi ja vasemmaksi alapuuksi. Vastaavast jo olemassa olevan solmun poistaminen tehdään suorittamalla ensin haku poistettavalla arvolla i, jonka jälkeen suoritetaan juureen nousseen arvon i sisältävän solmun oikealle ja vasemmalle alapuulle liitos.



Reaaliaikaisessa käytössä, kuten tavallisille mukautuville puille, myös splay-puulle on olemassa yksittisiä hakuja, jotka aiheuttavat suuren määrän kiertoja ja saattavat näkyä huomattavanakin heikkoutena. Yksi tähän kehitelty ratkaisu on suorittaa splay-askel vain osittain kullakin suoritettavalla haulla. Tämä pienentää pahimpien yksittäisten tapausten aikavaativuutta, mutta samalla tasoitetulla analyysilla tarkasteltaessa koko puun käytön aikavaativuus saattaa hieman kasvaa.

(Kuva: esimerkki osittaisesta splay-asekeleesta. a) tavallinen zig-zig b) osittainen zig-zig)

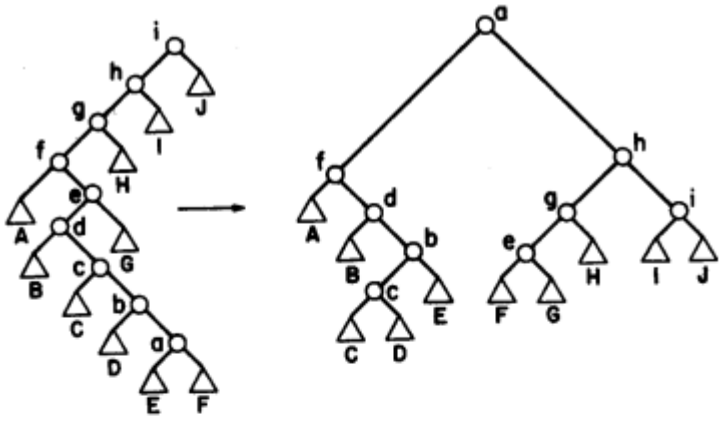
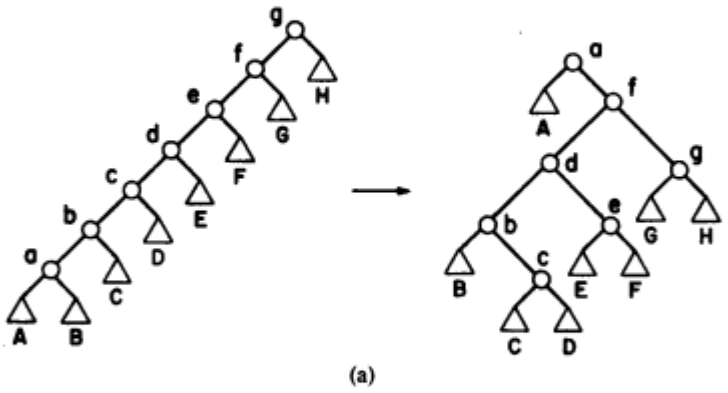
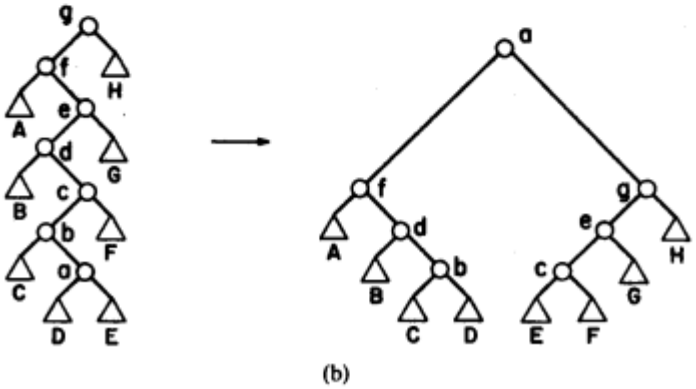


FIG. 4. Splaying at node *a*.



(a)



(b)

FIG. 5. Extreme cases of splaying. (a) All zig–zig steps. (b) All zig–zag steps.

3 Yhteenveto

yhteenveto täs

4 Lähteet

[AdL62] Georgy Adelson-Velsky ja Evgenii Landis, An algorithm for the organization of information, Teoksessa *Soviet Mathematics Doklady*, 3, sivut 1259-1263.

[BST85] Samuel W. Bent, Daniel D. Sleator ja Robert E. Tarjan, Biased Search Trees, Julkaisussa *SIAM Journal on Computing*, Vol. 14, Nro. 3, Elokuu 1985, sivut 545-568.

[CLR09] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest ja Clifford Stein, 12: Binary search trees. Teoksessa *Introduction to Algorithms*, 3. painos, The MIT Press, 2009, sivut 286-298.

[Huf52] D. A. Huffman, A Method for the Construction of Minimum-Redundancy Codes, Julkaisussa *Proceedings of the I.R.E.*, September 1952, sivut 1098-1102.

[Knu70] D. E. Knuth, Optimum Binary Search Trees, Julkaisussa *Acta Informatica*, 1, 1971, sivut 14-25

[SlT85] Daniel D. Sleator ja Robert E. Tarjan, Self-Adjusting Binary Search Trees, Julkaisussa *Journal of the Association Machinery*, Vol. 32, Nro. 3, 1985, s. 685.

[Tar83] Robert Endre Tarjan, 4.2. Balanced binary trees, Teoksessa *Data Structures and Network Algorithms*, Bell Laboratories, New Jersey, 1983, sivut 48-53.

[Tar85] Robert Endre Tarjan, Amortized Computational Complexity, Julkaisussa *Journal of the ACM*, Bell Laboratories, New Jersey, 1985, s. 306.