



Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI3104-1: Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería.

Tarea N°3

Interpolación de Polinomios.

José Ignacio Vines.
Profesor: Valentino González.
Auxiliares: Mario Aguilar.
Ignacio Armijo.
María Constanza Flores.
Fecha: 17 de octubre de 2016



Índice

1. Introducción	2
2. Procedimiento	2
2.1. Comparación de Métodos	2
2.2. Reparación de Imagen	3
3. Resultados	3
4. Conclusiones	9

Índice de figuras

1. Distintas interpolaciones utilizando polinomios de Lagrange.	5
2. Distintas interpolaciones utilizando Spline.	6
3. Diferencia entre la función original y las aproximaciones de Lagrange y Spline para 50 puntos en el intervalo $[-1, 1]$	7
4. Imagen arreglada de la galaxia.	8

1. Introducción

La fotometría es el área de la ciencia donde se mide la luz, es decir, la cantidad de fotones que llegan a partir de una fuente. En particular, en astronomía se cuantifican los fotones que llegan por estrella. Una de las razones por las que esto se estudia es para buscar exoplanetas: al tomar la luz que proviene de una estrella y medirla periódicamente por un tiempo, uno forma una curva de luz: si en esa curva hay decrecimientos notorios (y periódicos, en teoría), puede ser porque hay un planeta orbitando que tapa la luz proveniente de la estrella.

Hay varias técnicas de fotometría; para este trabajo, se utiliza una llamada Fotometría de Apertura. Ésta consiste en tomar la imagen de la estrella y elegir un radio de apertura, el cual define un círculo dentro del cual debiese estar todo el flujo de la estrella, para integrar el brillo proveniente de ese círculo (es decir, sumar la información de los electrones excitados en ese pixel del CCD). Con esto, se obtiene el flujo de la luz proveniente de toda la estrella. Además del radio de apertura, se elige un anillo alrededor de la estrella (caracterizado por dos radios) el cual se usa como corrección, ya que el cielo alrededor de la estrella no es completamente negro en la imagen captada.

El objetivo de este trabajo es armar desde cero las herramientas computacionales que se utilizan para hacer fotometría de apertura. Se debe armar el programa que, teniendo los datos, puedan leerlos y realizar una lectura de la cantidad de luz (cantidad de electrones excitados en la placa CCD). El programa se hace en lenguaje Python 2.7, usando el paquete `astropy.io` para el manejo de los archivos que se entregan (de extensión `.fits`), `matplotlib` para todos los gráficos e imágenes resultantes y `scipy` para las funciones matemáticas necesarias.

2. Procedimiento

2.1. Comparación de Métodos

Para comparar como funcionan los métodos, éstos se aplicarán a una función Gaussiana definida como sigue:

$$f(x) = e^{-x^2/0,05} \quad (1)$$

En primera instancia se divide el intervalo $[-1, 1]$ en 4 tramos equiespaciados con la función **linspace**, dejando un total de 5 puntos para llevar a cabo la interpolación, luego, haciendo uso del módulo **scipy.interpolate** y de la función **lagrange** y clase **UnivariateSpline** se hace la interpolación, aumentando en 5 el número de puntos para la interpolación hasta llegar a 20, siempre manteniendo el equiespaciado del intervalo.

La función **lagrange** recibe como argumentos dos vectores, x e $y = f(x)$: un vector con el intervalo de puntos a samplear, uno con la función evaluada en dichos puntos respectivamente, y retorna un polinomio de Lagrange que pasa por todos los puntos de x . Como nota adicional, la implementación de Spline es numéricamente inestable y el resultado sólo es confiable hasta un intervalo con veinte puntos¹.

La clase **UnivariateSpline** recibe como argumentos dos vectores, x e $y = f(x)$: un vector con el intervalo de puntos a samplear y uno con la función evaluada en dichos puntos respectivamente, y como

¹<http://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.interpolate.lagrange.html#scipy.interpolate.lagrange>

parámetros adicionales recibe s , un factor de suavidad utilizado para elegir el número de nudos del Spline, y k , el orden del Spline. Se elige $s = 0$ para que pase por todos los puntos del intervalo y $k = 3$ para que sea un Spline cúbico. Esta clase instancia un objeto de tipo **UnivariateSpline**, que representa un Spline que pasa por todos los puntos de x , que luego se puede evaluar.

La clase **UnivariateSpline** es un wrapper de FITPACK, un paquete de subrutinas escrito en FORTRAN utilizado para calcular Splines suaves para distintos tipos de datos y geometrías²; en particular **UnivariateSpline** hace uso de la subrutina **fpcurf0**, que a su vez utiliza la subrutina **fpcurf**³ para calcular el Spline. La condición de suavidad que se debe cumplir en los nodos es que la k -ésima derivada del Spline sea 0. La documentación de **fpcurf** no contiene información de cómo maneja la implementación los extremos del intervalo, sin embargo la implementación clásica del método de Spline es imponer que la segunda derivada del Spline en los extremos sea 0, así el Spline sigue una línea recta desde los extremos.

2.2. Reparación de Imagen

Primero, usando el módulo **skimage**, **skimage.io** y la función **img_as_float**, se carga la imagen a reparar como un tensor de floats, compuesto por tres matrices que representan las capas R, G y B (red, green y blue) de la imagen. Luego de cargar la imagen se toma una estampilla de la imagen, es decir, se toma la sección de esta que requiere reconstrucción. Utilizando la función **scipy.where** se eligen los puntos de la estampilla no tiene errores para la interpolación, después de obtener los puntos en donde la estampilla no tiene pixeles muertos se hace una interpolación Spline en dos dimensiones para cada capa de la estampilla utilizando la clase **SmoothBivariateSpline**, luego se arreglan los puntos dañados por capa y se juntan todas para recrear la imagen original reconstruida.

La clase **SmoothBivariateSpline** también es un wrapper de FITPACK. Esta clase en particular utiliza la subrutina **surfit**. La clase recibe tres vectores de una dimensión; x, y, z ; que representan las coordenadas de los puntos para la interpolación (es necesario notar que el orden de estos argumentos no es importante para el funcionamiento del algoritmo), y un parámetro adicional kx y ky , los órdenes del Spline para x e y respectivamente, éstos se eligen como $kx = ky = 3$.

A la clase **SmoothBivariateSpline** se le dio como argumentos los bordes de la estampilla y un vector con los valores de la estampilla en todos los pixeles no dañados.

3. Resultados

La figura 1 muestra la interpolación con polinomios de Lagrange. De la figura se aprecia que ésta aproximación es más fiel a la función original a medida se aumenta la cantidad de puntos utilizados para la interpolación, sin embargo a los extremos se observa un comportamiento oscilatorio de la aproximación, conocido como el Fenómeno de Runge⁴.

²<http://www.netlib.org/dierckx/>

³El archivo **fpcurf.f** está incluido en la carpeta **for_routines** en el repositorio.

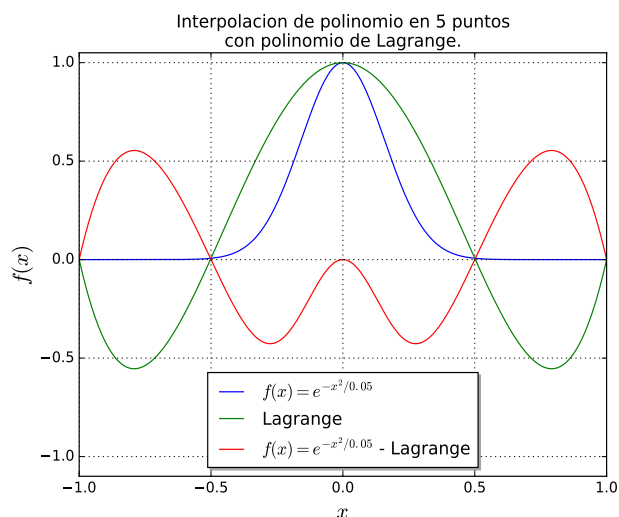
⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%27s_phenomenon



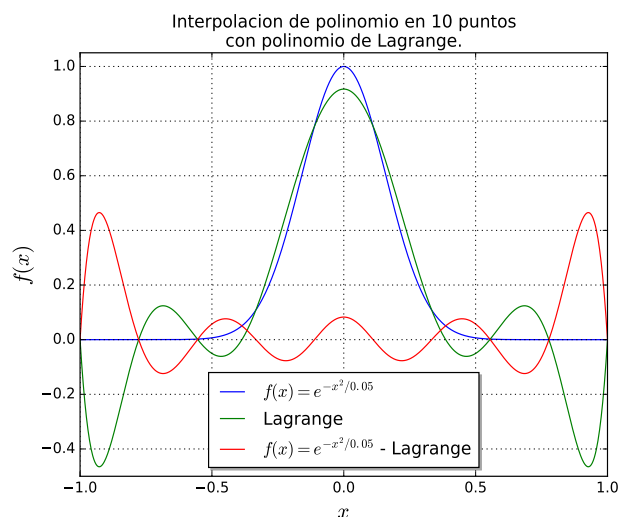
La figura 2 muestra la interpolación con Spline. A mayor cantidad de puntos la interpolación con Spline es mejor aproximación que la interpolación con Lagrange. La interpolación con Spline no presenta el Fenómeno de Runge cuando se usa una cantidad grande de puntos.

La figura 3 muestra la diferencia entre ambos métodos de interpolación y la función original. Se puede apreciar de ella que la aproximación Spline es mejor que la aproximación con Lagrange.

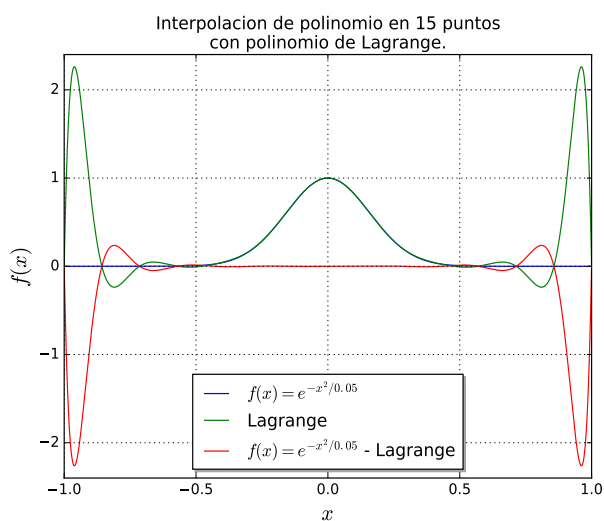
La figura 4 muestra la imagen de la galaxia reconstruida.



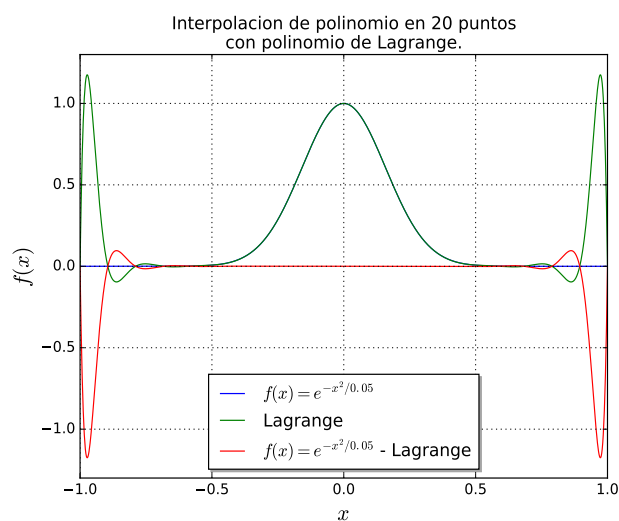
(a) Interpolación con Lagrange para un intervalo $[-1, 1]$ equiespaciado con 5 puntos.



(b) Interpolación con Lagrange para un intervalo $[-1, 1]$ equiespaciado con 10 puntos.

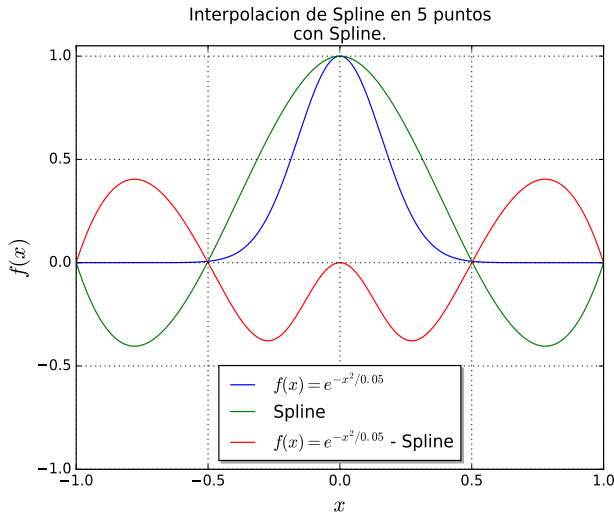


(c) Interpolación con Lagrange para un intervalo $[-1, 1]$ equiespaciado con 15 puntos.

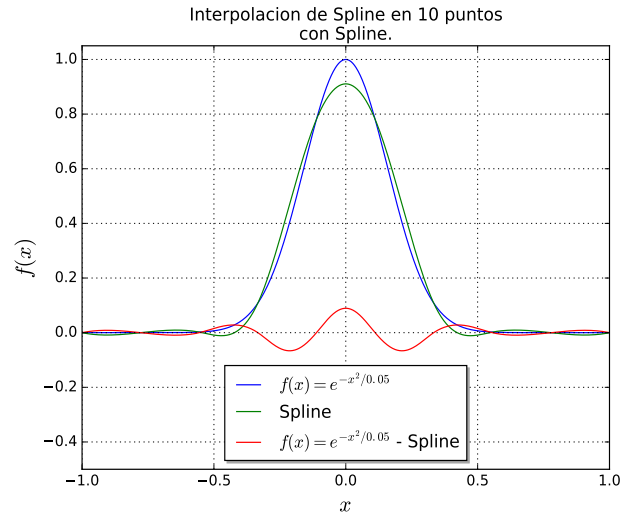


(d) Interpolación con Lagrange para un intervalo $[-1, 1]$ equiespaciado con 20 puntos.

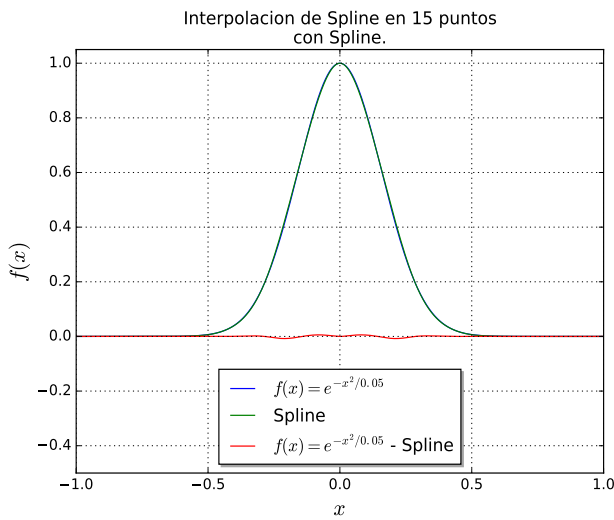
Figura 1: Distintas interpolaciones utilizando polinomios de Lagrange.



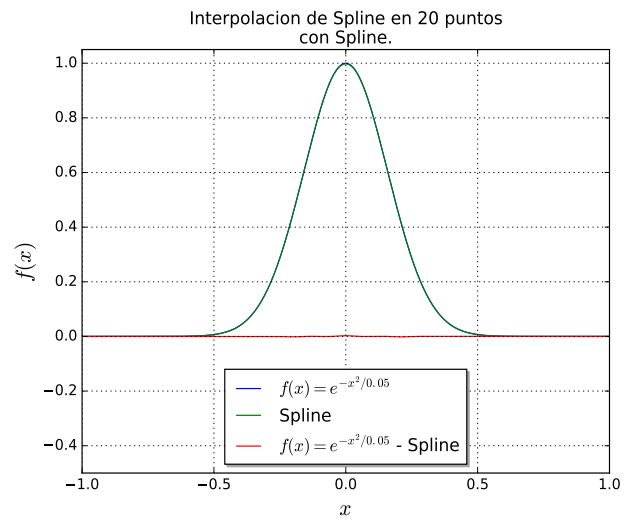
(a) Interpolación con Spline para un intervalo $[-1, 1]$ equiespaciado con 5 puntos.



(b) Interpolación con Spline para un intervalo $[-1, 1]$ equiespaciado con 10 puntos.



(c) Interpolación con Spline para un intervalo $[-1, 1]$ equiespaciado con 15 puntos.



(d) Interpolación con Spline para un intervalo $[-1, 1]$ equiespaciado con 20 puntos.

Figura 2: Distintas interpolaciones utilizando Spline.

Interpolación de polinomio en 50 puntos con metodo de Spline y Lagrange.

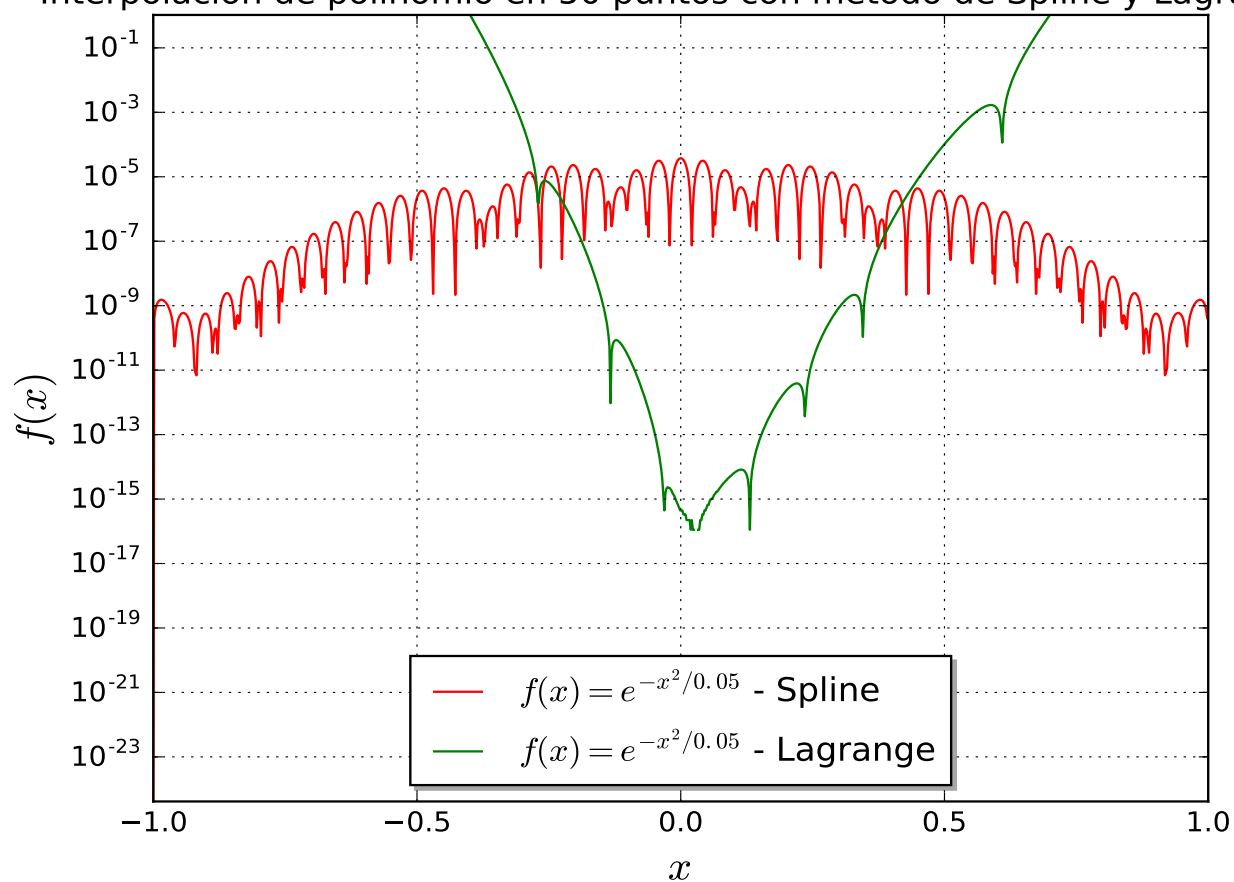


Figura 3: Diferencia entre la función original y las aproximaciones de Lagrange y Spline para 50 puntos en el intervalo $[-1, 1]$.

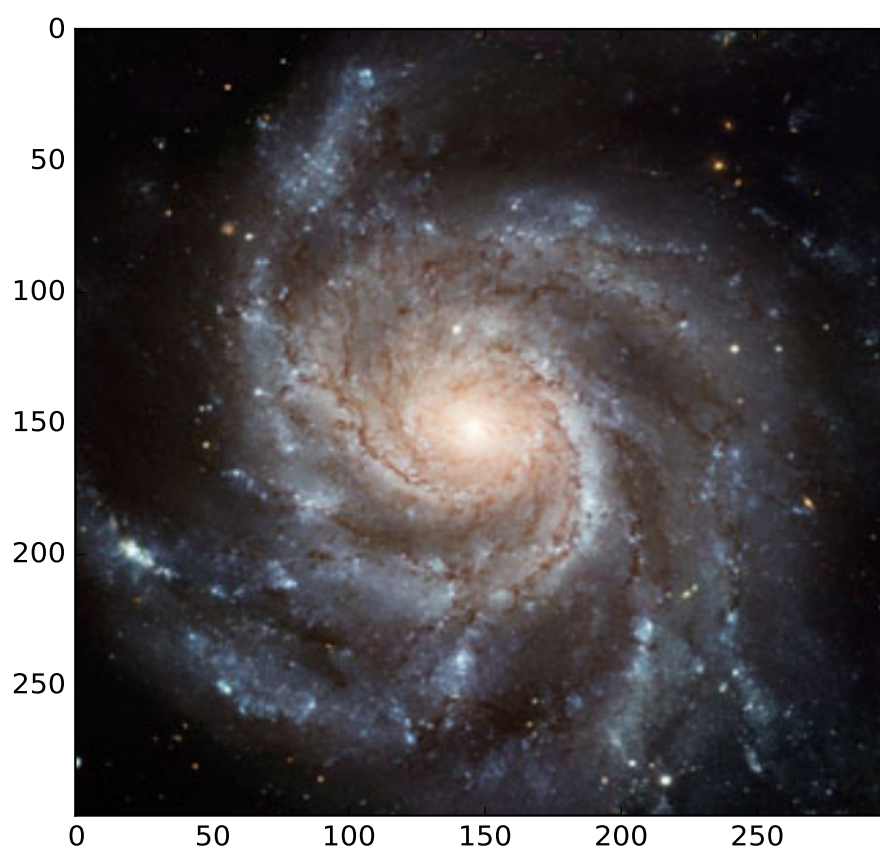


Figura 4: Imagen arreglada de la galaxia.



4. Conclusiones

Se concluye que una interpolación con Spline cúbico es una mejor aproximación a mayor cantidad de puntos que una interpolación con un polinomio de Lagrange, o si es de interés analizar los extremos de la función a interpolar ya que, a diferencia de ésta, Spline no presenta el Fenómeno de Runge.

Se concluye que la interpolación es una herramienta útil en el análisis de imágenes, en particular si se busca reparar una imagen dañada.