

Álgebra Linear Algorítmica - ICP115 (2021-2)
João Vitor de Oliveira Silva

P2

TODAS AS RESPOSTAS **devem ser justificadas**, POR MEIO DE **cálculos, explicação textual e/ou argumentos geométricos**. É POSSÍVEL USAR A FUNÇÃO `GAUSSIAN_ELIMINATION`, DISPONIBILIZADA NO CLASSROOM, NAS QUESTÕES. COLOQUE UM PRINT DA SAÍDA DO ALGORITMO NA QUESTÃO (MATRIZ AUMENTADA INICIAL E FINAL, AS INTERMEDIÁRIAS TAMBÉM SE JULGAR NECESSÁRIO). **OBS: a substituição reversa dos sistemas deve ser feita toda por você, com os passos apresentados em sua prova.** NÃO SERÁ ACEITO APENAS O PRINT DE UMA EXECUÇÃO DA FUNÇÃO NATIVA `SYM.LINSOLVE`. RESPOSTAS QUE CARECEM DE JUSTIFICATIVA **não serão consideradas**.

1. (25 pontos) Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{5 \times 4}$ e o vetor $b \in \mathbb{R}^5$ abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & -7 & -8 & 24 \\ 5 & 2 & -6 & 5 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \\ -14 & 4 & 17 & -33 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ -32 \\ -33 \\ -14 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

- (a) O sistema $Ax = b$ é um sistema determinado, indeterminado ou impossível? Justifique.
 - (b) Calcule uma base do espaço de colunas $C(A)$ e do espaço nulo $\mathcal{N}(A)$.
 - (c) A partir da sua resposta anterior, qual é o posto da matriz A ?
 - (d) É possível afirmar que $x \in \mathcal{N}(A)$? Justifique.
 - (e) Dê uma base do \mathbb{R}^5 . Sua base deve ser composta pelos vetores de sua base de $C(A)$ e outro(s) vetor(es) adicional(ais) (caso julgue necessário).
2. (30 pontos) Usando os dados das temperaturas máximas médias da Wikipedia (https://pt.wikipedia.org/wiki/Predefiniç~ao:Tabela_climática_de_S~ao_Paulo), estamos interessados em encontrar uma curva $y = f(x)$ que represente a relação entre o mês e temperatura na cidade de São Paulo.
- (a) Existe uma reta $y = \beta_0 x + \beta_1$ que passe por cima de pontos na tabela? Justifique sua resposta usando um sistema linear.

- (b) Qual a melhor reta (no sentido dos mínimos quadrados) $y = \beta_0 x + \beta_1$, ou seja, quais os coeficientes β_0 e β_1 seriam obtidos ao se tentar um ajuste sobre os pontos na tabela?
- (c) Uma pessoa afirmou que uma função periódica faria mais sentido que uma reta. Pensando no que a distribuição de pontos representa, disserte sobre a afirmação desta pessoa.
- (d) A pessoa que fez a afirmação anterior disse que seria interessante usar uma função $y = \beta_0 \cos\left(\frac{\pi}{6}(x - 1)\right) + \beta_1$ para se descrever a distribuição de pontos. Quais seriam os coeficientes que se obteria por meio de mínimos quadrados? *Obs: a função cosseno recebe como argumentos um ângulo em radianos, não graus. É recomendado o uso da função do Numpy `np.cos` e constante `np.pi`.*

mês	Temperatura (Celsius)
1	28.2
2	28.8
3	28
4	26.2
5	23.3
6	22.6
7	22.4
8	24.1
9	24.4
10	25.9
11	26.9
12	27.6

3. (20 pontos) Responda se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. No caso de uma certa afirmação ser verdadeira, prove. Já no caso de ser falsa, dê um contra-exemplo.
- (a) Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Se $m > n$, então a nulidade desta matriz será maior do que 0.
 - (b) Apenas sistemas lineares $Ax = b$ em que A é uma matriz quadrada possuem solução única.
 - (c) Sejam $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Considere a matriz $M = AB$. É possível afirmar que o posto de M é igual a soma entre os postos de A e B .
4. (25 pontos) Matrizes tridiagonais costumam ser muito comuns de aparecer em problemas físicos. Uma matriz M é dita tridiagonal se for uma matriz quadrada tal que apenas os elementos M_{ij} em que $|i - j| < 2$ podem ser diferentes de 0. Um exemplo de matriz tridiagonal 4×4 é

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Em muitas destes problemas físicos, é comum ser necessário resolver sistemas lineares com uma mesma matriz tridiagonal M , variando apenas o vetor b do sistema $Mx = b$.

Um certo cientista precisa resolver problemas que envolvem matriz tridiagonais. O mesmo está usando o seguinte algoritmo para se obter a solução dos sistemas lineares.

- (a) Qual o algoritmo apresentado?
- (b) Mostre o funcionamento do algoritmo para as entradas

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 80 \end{bmatrix}.$$

- (c) O desempenho do algoritmo não pareceu tão satisfatório para matrizes tridiagonais muito grandes. Seria possível alterar o código anterior, de modo que a solução dos sistemas lineares ocorresse de forma mais eficiente? Explique detalhadamente sua resposta.

Algoritmo 1: resolve_sistema(M, b)

Entrada: MATRIZ $(n \times n)$ M , VETOR $(n \times 1)$ b

Variável: MATRIZ $(n \times n)$ U , VETOR $(n \times 1)$ y , VETOR $(n \times 1)$ x ,
NUMREAL m , NUMREAL soma, NUMINTEIRO i, j, k, n

início

$n \leftarrow$ número de elementos de b

$U \leftarrow M$

$y \leftarrow b$

$x \leftarrow b * 0$

para $i = 0, \dots, n - 1$ **faça**

para $j = i + 1, \dots, n - 1$ **faça**

$m \leftarrow -\frac{U[j, i]}{U[i, i]}$

para $k = i, \dots, n - 1$ **faça**

$U[j, k] \leftarrow U[j, k] + m * U[i, k]$

fim

$y[j] \leftarrow y[j] + m * y[i]$

fim

fim

para $i = 0, \dots, n - 1$ **faça**

 soma $\leftarrow 0$

para $j = 0, \dots, i - 1$ **faça**

 soma \leftarrow soma + $U[n - 1 - i, n - 1 - j] * x[n - 1 - j]$

fim

$x[n - 1 - i] \leftarrow \frac{y[n - 1 - i] - \text{soma}}{U[n - 1 - i, n - 1 - i]}$

fim

retorna x

fim

OBS: o loop for inclui o último número apresentado no comando, só para após seu sucessor.