Álgebra Linear Algorítmica - MAB115 (2021-1)
João Vitor de Oliveira Silva e
Severino Collier Coutinho

Estudo Dirigido 1

Leia as instruções abaixo antes de começar o estudo dirigido:

1. **não serão aceitas respostas sem justificativa**;
2. o estudo dirigido pode ser feito usando um software (latex, word, jamboard...), mas você também pode escrever em **papel branco** com caneta **preta** e fotografar ou escanear o papel;
3. caso escreva em papel, Jamboard ou algo equivalente seja organizado, use letra legível e certifique-se que a imagem está legível;
4. o arquivo deve então ser convertido em **PDF**;
5. para cada estudo dirigido deve ser enviado **um único arquivo obrigatoriamente em formato PDF**;
6. o nome do arquivo PDF deve estar no formato `seu nome_seu DRE_EDn.pdf` em que `n` é o número do estudo dirigido;
7. seu nome completo e DRE devem encabeçar a primeira página do PDF;
8. o código de conduta apresentado junto com o programa do curso deve ser integralmente respeitado.

Questões sobre os temas da Semana 1

1. Considere v e w vetores no plano. Prove, a partir da desigualdade triangular, que
$$|v + w\| \geq \|v\| - \|w\|.$$
Lembrete: A desigualdade triangular diz que $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

2. Em cada um dos itens deste exercício, você receberá a descrição das duas coordenadas do vetor $r = (r_1, r_2)$ e uma pergunta. A resposta à pergunta deve ser dada pelo $\langle r \mid s \rangle$, em que s é um dos seguintes vetores

- $\lambda(1,0)$;
- $\lambda(0,1)$;
- $\lambda(1,1)$;
- $(1,\lambda)$;
- $(\lambda,1)$;
- $\lambda(1,-1)$.

e λ é um número real à sua escolha.

(a) A primeira coordenada de r corresponde à quantidade de carneiros e a segunda à quantidade de ovelhas em um rebanho. Qual o total de animais desta espécie neste mesmo local?

(b) A primeira coordenada de r representa o valor em reais e a segunda o valor em libras esterlinas que João possui. Como ele vai se mudar para Londres, será necessário converter seus reais em libras. Sabendo-se que £1 = R\$7,256 [1] qual o valor total em libras que João levará quando se mudar?

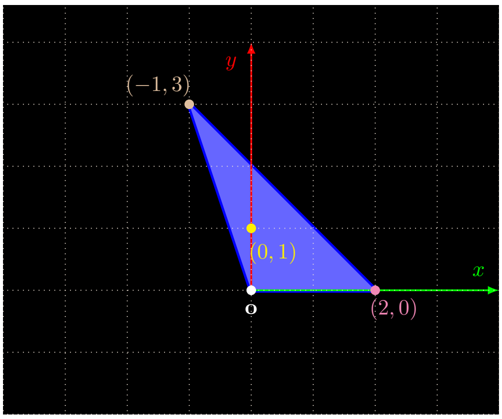
(c) A primeira coordenada de r representa a quantidade de pessoas assintomáticas e a segunda a quantidade de pessoas sintomáticas identificadas após um teste de covid-19. Qual o total de pessoas sintomáticas identificadas neste teste?

3. Considere as retas $2x - 7y = 0$ e $2x + y = 0$.

   (a) Ache um vetor normal a cada reta dada e calcule o ângulo entre eles.

   (b) Desenhe as duas retas e seus respectivos vetores diretores e vetores normais.

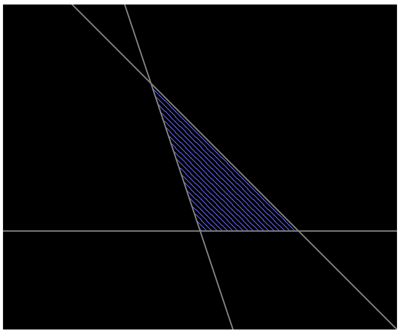
4. Em computação gráfica, uma operação muito comum no processo de renderização consiste em verificar se um ponto está no interior de um triângulo. Por exemplo, considere o triângulo abaixo:



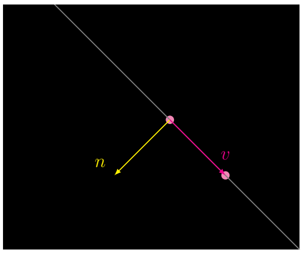
Usando os conceitos de vetor normal à retas e produto interno, mostre que o ponto $(0,1)$ está no interior deste triângulo.

[1] https://economia.uol.com.br/cotacoes/cambio/libra-esterlina-reino-unido/ (acessado em 09/06)

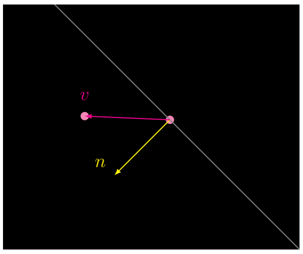
Dicas:



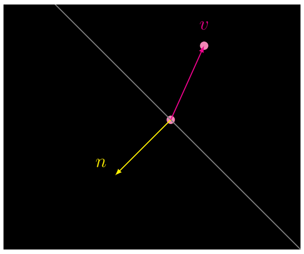
(a) Todos os pontos na região rachurada estão no interior do triângulo.



(b) $\langle n \,|\, v \rangle = 0$



(c) $\langle n \,|\, v \rangle > 0$



(d) $\langle n \,|\, v \rangle < 0$

Questões sobre os temas da Semana 2

1. Considere duas matrizes de rotação anti-horária R_θ e R_ω por ângulos θ e ω, respectivamente.
   (a) Mostre que $R_\theta R_\omega$ também é uma rotação e determine o ângulo da rotação correspondente.
   (b) Mostre que $R_\omega R_\theta = R_\theta R_\omega$.
   (c) Explique como deduzir estes resultados das propriedades geométricas da rotação e das propriedades dos operadores de rotação e de suas representações matriciais.

2. Determine as matrizes na base canônica $\beta = \{e_1, e_2\}$ que correspondem aos seguintes operadores lineares.
   (a) Um cisalhamento C que leva a reta $x = 0$ em $y = 2\pi x$;

(b) Uma rotação R anti-horária de $\frac{\pi}{6}$ radianos;

(c) Uma reflexão E cujo espelho é a reta $y = -x$;

(d) Uma projeção ortogonal sobre a reta $y = 0$;

(e) $E \circ E \circ E \circ E \circ E \circ E \circ E \circ E \circ R \circ R \circ R \circ R \circ R \circ R$;

(f) $E \circ E \circ E \circ E \circ E \circ E \circ E \circ E \circ E \circ E \circ E \circ P \circ P \circ P \circ P \circ P$

3. Em computação quântica a matriz

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

descreve a chamada *porta de Hadamard*.

(a) Mostre que H descreve uma reflexão do plano.

(b) Calcule o espelho desta reflexão.

4. Sejam Q o quadrado cujos vértices são a origem e as extremidades dos vetores

$$e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (0, 1) \ \text{ e } \ e_1 + e_2 = (1, 1).$$

e P o paralelogramo cujos vértices são a origem e as extremidades dos vetores

$$v_1 = (3, 0), \quad v_2 = (4, 9) \ \text{ e } \ v_1 + v_2 = (7, 9).$$

(a) Mostre que qualquer operador linear T que leva e_1 em v_1 e e_2 em v_2 também leva $e_1 + e_2$ em $v_1 + v_2$.

(b) Determine a matriz $(T)_\varepsilon$ de um operador linear T que leva Q em P.

(c) Mostre que há mais de um operador linear que leva Q em P.

(d) Mostre que o operador linear cuja matriz é $(T)_\varepsilon^{-1}$ leva P em Q.