Álgebra Linear Algorítmica - ICP115 (2021-2)
João Vitor de Oliveira Silva

P2

Todas as respostas **devem ser justificadas**, por meio de **cálculos, explicação textual e/ou argumentos geométricos**. É possível (e recomendado) usar a função `gaussian_elimination`, disponibilizada no Classroom, nas questões. Coloque um print da saída do algoritmo na questão (matriz aumentada inicial e final, as intermediárias também se julgar necessário). **OBS: a substituição reversa dos sistemas deve ser feita toda por você, com os passos apresentados em sua prova.** Não será aceito apenas o print de uma execução da função nativa `sym.linsolve`. Respostas que carecem de justificativa **não serão consideradas.**

1. (25 pontos) Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ e o vetor $b \in \mathbb{R}^4$ abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -8 & 5 & 5 & -5 \\ 3 & -1 & -2 & 2 & -3 \\ 6 & -4 & -4 & 3 & -4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 8 \\ -32 \\ -33 \\ -14 \end{bmatrix}.$$

   (a) O sistema $Ax = b$ é um sistema determinado, indeterminado ou impossível? Justifique.

   (b) Calcule uma base do espaço de colunas $C(A)$ e do espaço nulo $\mathcal{N}(A)$.

   (c) A partir da sua resposta anterior, qual é o posto da matriz A?

   (d) É possível afirmar que $x \in \mathcal{N}(A)$? Justifique.

   (e) Dê uma base do $\mathbb{R}^4$. Sua base deve ser composta pelos vetores de sua base de $C(A)$ e outro(s) vetor(es) adicional(ais) (caso julgue necessário).

2. (30 pontos) Usando os dados das temperaturas máximas médias da Wikipedia (`https://pt.wikipedia.org/wiki/Predefiniç~ao:Tabela_climática_de_Pelotas`), estamos interessados em encontrar uma curva $y = f(x)$ que represente a relação entre o mês e temperatura na cidade de Pelotas.

   (a) Existe uma reta $y = \beta_0 x + \beta_1$ que passe por cima de pontos na tabela? Justifique sua resposta usando um sistema linear.

   (b) Qual a melhor reta (no sentido dos mínimos quadrados) $y = \beta_0 x + \beta_1$, ou seja, quais os coeficientes β_0 e β_1 seriam obtidos ao se tentar um ajuste sobre os pontos na tabela?

(c) Uma pessoa afirmou que uma função periódica faria mais sentido que uma reta. Pensando no que a distribuição de pontos representa, disserte sobre a afirmação desta pessoa.

(d) A pessoa que fez a afirmação anterior disse que seria interessante usar uma função $y = \beta_0 \cos\left(\frac{\pi}{6}(x-1)\right) + \beta_1$ para se descrever a distribuição de pontos. Quais seriam os coeficientes que se obteria por meio de mínimos quadrados? *Obs: a função cosseno recebe como argumentos um ângulo em radianos, não graus. É recomendado o uso da função do Numpy* `np.cos` e constante `np.pi`.

mês	Temperatura (Celsius)
1	28.5
2	27.9
3	27
4	24.4
5	20.5
6	17.9
7	17.5
8	18.7
9	19.6
10	22.3
11	24.9
12	27.3

3. (20 pontos) Responda se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. No caso de uma certa afirmação ser verdadeira, prove. Já no caso de ser falsa, dê um contra-exemplo.

   (a) Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Se $m > n$, então o posto desta matriz será maior do que 0.

   (b) Apenas sistemas lineares $Ax = b$ em que A é uma matriz quadrada possuem solução única.

   (c) Sejam $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Considere a matriz $M = AB$. É possível afirmar que o posto de M é igual ao produto dos postos de A e B.

4. (25 pontos) Matrizes tridiagonais costumam ser muito comuns de aparecer em problemas físicos. Uma matriz M é dita tridiagonal se for uma matriz quadrada tal que apenas os elementos M_{ij} em que $|i - j| < 2$ podem ser diferentes de 0. Um exemplo de matriz tridiagonal 4×4 é

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

   Em muitas destes problemas físicos, é comum ser necessário resolver sistemas lineares com uma mesma matriz tridiagonal M, variando apenas o vetor b do sistema $Mx = b$.

   Um certo cientista precisa resolver problemas que envolvem matriz tridiagonais. O mesmo está usando o seguinte algoritmo para se obter a solução dos sistemas lineares.

   (a) Qual o algoritmo apresentado?

   (b) Mostre o funcionamento do algoritmo para as entradas

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

   (c) O desempenho do algoritmo não pareceu tão satisfatório para matrizes tridiagonais muito grandes. Seria possível alterar o código anterior, de modo que a solução dos sistemas lineares ocorresse de forma mais eficiente? Explique detalhadamente sua resposta.

Algoritmo 1: resolve_sistema(M, b)

Entrada: MATRIZ $(n \times n)$ M, VETOR $(n \times 1)$ b
Variável: MATRIZ $(n \times n)$ U, VETOR $(n \times 1)$ y, VETOR $(n \times 1)$ x,
NUMREAL m, NUMREAL soma, NUMINTEIRO i, j, k, n

```
início
    n ← número de elementos de b
    U ← M
    y ← b
    x ← b * 0
    para  i = 0, ..., n − 1 faça
        para j = i + 1, ..., n − 1 faça
            m ← − U[j,i] / U[i,i]
            para k = i, ..., n − 1 faça
                U[j,k] ← U[j,k] + m * U[i,k]
            fim
            y[j] ← y[j] + m * y[i]
        fim
    fim
    para  i = 0, ..., n − 1 faça
        soma ← 0
        para j = 0, ..., i − 1 faça
            soma ← soma + U[n − 1 − i, n − 1 − j] * x[n − 1 − j]
        fim
        x[n − 1 − i] ← (y[n − 1 − i] − soma) / U[n − 1 − i, n − 1 − i]
    fim
    retorna x
fim
```

OBS: o loop `for` inclui o último número apresentado no comando, só para após seu sucessor.