ÁLGEBRA LINEAR ALGORÍTMICA – UFRJ – 2021.1

ESTUDO DIRIGIDO 6 (RASCUNHO)

SEVERINO COLLIER COUTINHO E JOÃO VITOR DE OLIVEIRA SILVA

Leia com atenção antes de iniciar:

1. **Não serão aceitas respostas sem justificativa**.
2. Os cálculos referentes às várias questões devem constar da sua solução; mas você pode usar o computador para calcular determinantes, raízes de polinômios, eliminação gaussiana, Gram-Schmidt, além de inverter e multiplicar matrizes.
3. As questões 7 e 8 ao final deste estudo dirigido podem ser usadas para substituir a nota mais baixa de um estudo dirigido ou laboratório, à sua escolha.

Questões sobre os temas da Semana 13

Questão 1. *Calcule uma base para os autoespaços de cada um dos operadores cujas matrizes são dadas abaixo e determine se são diagonalizáveis. Quando possível, ache uma base ortonormal de autovetores que diagonaliza o operador.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Questão 2. *Determine a matriz na base canônica de um operador linear do $\mathbb{R}^4$ que tenha autovalores 1, -2 e 0 e cujos autoespaços são*

$$V_1 = \langle (1,1,0,0) \rangle, \quad V_0 = \langle (1,-1,0,0) \rangle \quad e \quad V_{-2} = \langle (1,1,1,0), (0,0,0,1) \rangle.$$

Questão 3. *Sejam A uma matriz quadrada $n \times n$ e $p(t)$ seu polinômio característico.*

(a) Mostre como é possível calcular o determinante de A a partir de $p(t)$.

Date: 2 de abril de 2022.

(b) Use (a) para mostrar que o determinante de A é igual ao produto de seus autovalores.

Questões sobre os temas da Semana 14

Questão 4. *Determine os valores de a e b para os quais a matriz*

$$R = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ a & b & 4 \\ 8 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma rotação.

Questão 5. *Seja R uma rotação de eixo ℓ em $\mathbb{R}^3$ e $v = (1, 1, 1)$ um vetor ortogonal a ℓ. Sabendo-se que $Rv = (1, -1, 1)$, determine:*

(a) o cosseno do ângulo de rotação de R;
(b) o eixo da rotação R;
(c) a matriz de R na base canônica.

Questão 6. *Determine quais das afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas. Você deve dar um contra-exemplo para as afirmações falsas e provar as verdadeiras.*

(a) se uma matriz tem zero como um de seus autovalores então suas colunas são linearmente dependentes;

(b) toda matriz quadrada diagonalizável é simétrica;

(c) se ρ é uma rotação e v é um vetor unitário, então o cosseno do ângulo de rotação é igual ao produto interno entre v e $\rho(v)$;

(d) se uma matriz 3×3 é ortogonal e tem determinante igual a -1, então é uma rotação.

Método da potência

Questão 7. *Analisando uma população de uma dada espécie de coelho, observou-se que:*

1. *uma fêmea se torna fértil aos 3 meses de idade de idade;*
2. *o período de gestação de cada fêmea também é de 3 meses;*
3. *em cada gestação uma fêmea produz um filhote fêmea.*

A quantidade de fêmeas em uma dada população destes coelhos pode ser representada por um vetor $x^{(t)} \in \mathbb{R}^2$ *cuja primeira coordenada é a quantidade de filhotes e cuja segunda coordenada é o total de adultos em um dado trimestre* t.

(a) *Determine a matriz* A*, de tamanho* 2×2*, para a qual* $x^{(t+1)} = Ax^{(t)}$.

(b) *Supondo que a população inicial tinha duas fêmeas filhotes, calcule o total de coelhos filhotes e adultos após 7 trimestres.*

(c) *Se o estudo tivesse iniciado com 2 filhotes e 1 adulto fêmea, qual seria o total de coelhos filhotes e adultos após 7 trimestres?*

(d) *Calcule o ângulo entre os vetores obtidos no item (c) e (d). Os vetores são quase próximos de serem paralelos ou ortogonais entre si?*

(e) *Justifique a razão do resultado obtido no item anterior usando o método da potência.*

Questão 8. *Considere uma matriz quadrada* A*, de tamanho* 3×3 *, que tem autovalores* $\lambda_1 = 1$*,* $\lambda_2 = 3$ *e* $\lambda_3 = -5$.

(a) *Qual será o autovetor obtido, se aplicarmos o método da potência à matriz* A*?*

(b) *Determine os autovalores da matriz* $B = A + 2I$.

(c) *Qual será o autovetor obtido, se aplicarmos o método da potência à matriz* B*?*

(d) *Determine os autovalores da matriz* $C = A^{-1}$.

(e) *Qual será o autovetor obtido, se aplicarmos o método da potência á matriz* C*?*

(f) Utilize as estratégias anteriores para calcular os autovalores e autovetores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 9 & 4 & 9 \\ -14 & -6 & -11 \end{bmatrix}$$

usando o método da potência.

Dicas:

(1) *Em (b) verifique o que ocorre na operação* Bv_i*, em que* v_i *é um autovetor associado ao autovalor* λ_i*.*

(2) *Em (d), lembre-se que* $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathrm{I}$.