Álgebra Linear Algorítmica - ICP115 (2021-2)
João Vitor de Oliveira Silva

P1

Todas as respostas **devem ser justificadas**, por meio de **cálculos, explicação textual e/ou argumentos geométricos**. Mesmo que use alguma ferramenta computacional para cálculos/desenhos, deve-se apresentar os passos envolvidos em sua resposta e *prints* da ferramenta sendo usada. Respostas que carecem de justificativa **não serão consideradas.**

Envie um documento `.pdf` com suas respostas para atividade do Google Classroom até o final do prazo. Se optar por fazer a mão, use caneta preta e certifique-se de que o documento escaneado é legível.

1. (20 pontos) Verifique se os conjuntos de vetores abaixo formam uma base do plano. No caso do conjunto ser uma base, indique também se tratar de uma base ortonormal ou não. **Justifique suas respostas.**

   (a) $\left\{\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\-6\end{bmatrix}\right\}$

   (b) $\left\{\begin{bmatrix}\frac{-\sqrt{17}}{17}\\-4\frac{\sqrt{17}}{17}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4\frac{\sqrt{17}}{17}\\\frac{\sqrt{17}}{17}\end{bmatrix}\right\}$

   (c) $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\right\}$

   (d) $\left\{\begin{bmatrix}\cos(82)\\\sin(82)\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\sin(82)\\-\cos(82)\end{bmatrix}\right\}$

   (e) $\left\{\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}\right\}$

2. (20 pontos) Sabemos que é possível escrever certas transformações como a composição de outras. Uma certa pessoa afirmou a você que é possível escrever uma reflexão como a composição de

   - uma rotação anti-horária de θ graus;
   - um escalonamento não uniforme com $s_1 = -1$, $s_2 = 1$;

nesta mesma ordem.

Pede-se que faça:

(a) Encontre uma matriz M associada a composição de transformações acima.

(b) Verifique se M é de fato uma reflexão.

(c) No caso de M ser uma reflexão, encontre o vetor diretor da reta espelho.

3. (25 pontos) Responda se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. No caso de uma certa afirmação ser verdadeira, prove. Já no caso de ser falsa, dê um contra-exemplo.

   (a) Sejam v e w dois vetores do plano que possuem mesmo tamanho. O resultado do produto interno $v^t w$ irá assumir valor máximo quando v e w forem colineares.

   (b) Seja A uma matriz que possui autovetores v_1 e v_2, com seus autovalores correspondentes sendo λ_1 e λ_2. Sabendo que $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$, a matriz A^{-1} existe e possui os mesmos autovetores.

   (c) A aplicação de uma reflexão seguida de uma outra reflexão é uma rotação.

   (d) Toda matriz simétrica P tal que $P^2 = P$ é uma matriz de projeção.

   (e) Seja E uma reflexão com espelho sendo a reta $x - 2y = 0$, P uma matriz de projeção sobre a reta que tem como vetor diretor $w = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e R_π uma matriz de rotação horária de ângulo π. As colunas da matriz $M = EPE^{2000}R_\pi^{25}$ formam um conjunto linearmente dependente.

4. (35 pontos) Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 34 & -33 \\ 22 & -21 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -16 & 0 \\ -\frac{33}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(a) Sabendo que os autovalores de A são iguais a $\lambda_1 = 12$ e $\lambda_2 = 1$, encontre seus respectivos autovetores **normalizados**.

(b) Sabendo que os autovalores de B são iguais a $\lambda_1 = -16$ e $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, encontre seus respectivos autovetores **normalizados**.

(c) Considere algora o algoritmo abaixo:

Algoritmo 1: calculo_misterioso(A, iter_max)

Entrada: MATRIZ (2×2) A, NUMINTEIRO iter_max
Variável: VETOR (2×1) w, VETOR (2×1) z, VETOR (2×1) v, NUMINTEIRO i
início
  Sortear vetor aleatório não-nulo de tamanho 2×1 e atribuir a variável w
  $v \leftarrow \dfrac{w}{\|w\|}$
  para $i \leftarrow 1$ **até** iter_max **faça**
    $z \leftarrow Av$
    $v \leftarrow \dfrac{z}{\|z\|}$
  fim
  retorna v
fim

Para os cálculos que serão realizados abaixo, é interessante usar de aproximações numéricas (floats) pelo excesso de raízes quadradas.

(d) Se fosse executado calculo_misterioso(A, 3), qual seria o resultado?

(e) Se fosse executado calculo_misterioso(B, 3) qual seria o resultado?

(f) É possível relacionar o vetor retornado pelo algoritmo com algum dos autovetores da matriz dada como entrada? **Justifique**.
Dica: desenhar os autovetores e o vetor retornado pelo algoritmo pode ajudar.