Álgebra Linear Algorítmica - ICP115 (2021-2)
João Vitor de Oliveira Silva

Lista para Revisão P2

1. Escreva o vetor v como combinação linear dos vetores do conjunto G, para cada um dos exemplos abaixo.
   (a) $v = (1, 1, -19, -1)$ e $G = \{(1, -1, -1, 4), (2, -4, -2, 11), (-3, 9, 12, -20)\}$;
   (b) $v = (1, 1, 1, 1)$ e $G = \{(1, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 1)\}$.

2. Dê uma base para os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^4$:
   (a) $\langle(5, -3, -4, 0), (-4, 6, 8, 1), (-18, 25, 38, -4), (-18, -25, 38, 4)\rangle$;
   (b) $\langle(3, -1, -4, 2), (3, -2, -1, 0), (-6, 1, 11, -7), (6, -2, -8, 6)\rangle$
   (c) $\langle(5, 0, -1, 8), (-4, 2, 2, -8), (-4, 2, 4, -14), (2, -1, 0, 1), (0, 1, -3, 10), (-1, -3, 1, -7)\rangle$
   (d) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y + z + w = x + y - z - w = 0\}$.
   (e) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, 2x + y - z = x + 2w = x + y - 2z = 0\}$.

3. Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ e os vetores $b, d \in \mathbb{R}^4$ abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} -14 & -4 & -9 \\ 2 & 4 & 3 \\ -12 & 6 & -3 \\ -21 & 3 & -9 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -39 \\ 45 \\ 75 \\ 45 \end{bmatrix}, \qquad d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) O sistema $Ax = b$ é um sistema determinado, indeterminado ou impossível? Justifique.
   (b) O sistema $Ax = d$ é um sistema determinado, indeterminado ou impossível? Justifique.
   (c) Calcule uma base do espaço de colunas $C(A)$ e do espaço nulo $\mathcal{N}(A)$.
   (d) A partir da sua resposta anterior, qual é o posto da matriz A?
   (e) É possível afirmar que $b \in C(A)$? Justifique.
   (f) É possível afirmar que $d \in C(A)$? Justifique.
   (g) O subespaço $\mathcal{N}(A^t)$ tem qual dimensão? Qual o ângulo formado entre os vetores coluna de A e os vetores que pertencem à $\mathcal{N}(A^t)$?

4. Considere o sistema linear $Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 27 & 56 \\ 58 & 15 \\ 94 & 45 \\ 84 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Mostre que o sistema linear acima é impossível.

   (b) Determina uma solução aproximada, no sentido dos mínimos quadrados, do sistema linear acima .

   (c) Qual a projeção do vetor b no espaço de colunas $C(A)$?

   (d) Calcule o erro cometido ao se usar a solução aproximada.

5. Responda se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. No caso de uma certa afirmação ser verdadeira, prove. Já no caso de ser falsa, dê um contra-exemplo.

   (a) Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Se a nulidade da matriz A for maior do que 0, sempre existirá um vetor $b \in \mathbb{R}^m$ tal que o sistema linear $Ax = b$ não terá solução.

   (b) Se o posto de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ for igual a n, então as colunas desta matriz formam um conjunto linearmente independente.

   (c) Apenas sistemas lineares $Ax = b$ em que A é uma matriz quadrada possuem solução única.

   (d) Se β_1 e β_2 são bases de subespaços U_1 e U_2 do $\mathbb{R}^n$, então $\beta_1 \cap \beta_2$ é base de $U_1 \cap U_2$.

   (e) Seja $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$. O subespaço $\mathcal{N}(A^t)$ terá dimensão 1 e será uma reta perpendicular ao plano do $\mathbb{R}^3$ gerado pelas colunas da matriz A.

   (f) Se uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tiver posto igual a n, então a mesma será inversível, isto é, existe uma matriz A^{-1} tal que $A^{-1}A = AA^{-1} = \mathrm{I}_{n \times n}$.

6. A caixa de um cereal para o café da manhã apresenta o número de calorias e as quatidades de proteínas, carboidratos e gordura contidos em uma porção do cereal. As quatidades para dois cereais conhecidos são dadas a seguir: uma porção do cereal 1 contém 50 calorias, 20g de carboidratos e 2g de gordura e uma porção do cereal 2 contém 100 calorias, 15g de carboidratos e 1g de gordura.

   (a) É possível preparar uma mistura desses dois cereais que contenha exatamente 350 calorias, 65g de carboidratos e 5g de gordura?

   (b) É possível preparar uma mistura desses dois cereais que contenha exatamente 350 calorias, 65g de carboidratos e 8g de gordura?

7. O problema de interpolação é um problema bastante comum em diversas áreas da ciência. Dado um conjunto discreto de pontos

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

deseja-se encontrar uma função $p(x)$ tal que $p(x_i) = y_i$.

O exemplo mais simples de interpolação é determinar uma reta que passa por dois pontos. Considere o caso em que deseja-se achar uma reta que passe pelo par de pontos $\{(0, 1), (1, 2)\}$. Sabemos que uma reta é dada por

$$p(x) = \beta_0 x + \beta_1,$$

em que os coeficientes β_0 e β_1 são o coeficiente angular e linear da reta, respectivamente. Para encontrar a reta que passa pelo par de pontos de interesse, é possível construir um sistema linear usando que $p(x_i) = y_i$:

$$\begin{cases} \beta_0 .0 + \beta_1 = 1 \\ \beta_0 .1 + \beta_1 = 2 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b}$$

Resolvendo este sistema linear $Ax = b$, concluímos que $\beta_0 = 1$ e $\beta_1 = 1$.

Sobre o problema de interpolação, responda:

(a) Existe uma reta $y = ax + b$ que passa pelos pontos $(1, 3)$ e $(-1, 2)$?

(b) Existe uma reta $y = ax + b$ que passa pelos pontos $(1, 3)$, $(-1, 2)$ e $(2, 4)$?

(c) Existe uma parábola $y = ax^2 + bx + c$ que passa pelos pontos $(1, 3)$ e $(-1, 2)$?

(d) Existe uma parábola $y = ax^2 + bx + c$ que passa pelos pontos $(1, 1)$, $(4, 2)$, $(9, 3)$?