ÁLGEBRA LINEAR ALGORÍTMICA – UFRJ – 2021.1

ESTUDO DIRIGIDO 4

Severino Collier Coutinho e João Vitor de Oliveira Silva

Leia com atenção:

1. A partir deste estudo dirigido você pode escrever diretamente a matriz escada, sem a necessidade de incluir o passo-a-passo da eliminação gaussiana.
2. **Não serão aceitas respostas sem justificativa**, exceto pelos cálculos referentes à eliminação mencionados no item 1.
3. Em particular, as aplicações do algoritmo de Gram-Schimdt devem incluir os detalhes dos passos usados para chegar à base ortonormal.

Questões sobre os temas da Semana 7

Questão 1. *Use o algoritmo de Gram-Schimdt para achar uma base ortonormal para os seguintes subespaços do* $\mathbb{R}^4$*:*

(a) $\langle (1,1,0,-1),(1,-1,0,1),(1,1,0,1)\rangle$*;*
(b) $\langle (1,2,-1,1),(1,1,-1,1),(-1,1,1,-1)\rangle$*.*

Questão 2. *Determine todos os valores para* a, b *e* c *para os quais a matriz*

$$Q = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ a & 2/3 & 1/3 \\ b & 1/3 & c \end{bmatrix}$$

é ortogonal.

Questão 3. *Considere que o algoritmo de Gram-Schimdt foi executado na lista de vetores* $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$ *e foram retornados* q_1, q_2, q_3*. Em seguida, o algoritmo foi executado sobre a lista de vetores* q_1, q_2, q_3*, sendo retornado* z_1, z_2, z_3*. O que podemos afirmar sobre os vetores* z_1, z_2, z_3*? Justifique textualmente.*

Date: 28 de fevereiro de 2022.

Questão 4. *Considere agora que o algoritmo de Gram-Schimdt foi executado na lista de vetores* $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$ *e, na terceira iteração do algoritmo, houve uma divisão por zero. Foram dadas as seguintes justificativas para isso ter ocorrido:*

(a) w_1, w_2 *são colineares*
(b) w_2, w_3 *são colineares*
(c) w_1, w_2, w_3 *são coplanares*

Quais destas afirmações estão corretas? Justifique em palavras.

Questões sobre os temas da Semana 8

Questão 5. *Sejam* W_1 *e* W_2 *os seguintes subespaços do* $\mathbb{R}^4$*:*

$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,|\, x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = x_1 + x_3 + 3x_5 = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 6x_5 = 0\};$

$W_2 = \langle (1, 8, -4, 1, 5), (1, 2, -1, 0, 2), (1, -1, -2, 3, 1), (4, -1, -2, 2, 4) \rangle$

Determine uma base e a dimensão de $W_1 \cap W_2$ *e de* $W_1^{\perp}$.

Questão 6. *Sejam* U *e* W *os seguintes subespaços de* $\mathbb{R}^4$*:*

$$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + z = y - w = 0\}$$
$$W = \langle (-1, 5, 2, 4), (1, -1, -3, 1), (1, 1, 0, 0), (-13, -2, 13, -2) \rangle.$$

Determine uma base e a dimensão de $U + W$ *e de* $W^{\perp}$.

Questão 7. *Determine quais das afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas. Você deve dar um contra-exemplo para as afirmações falsas e provar as verdadeiras.*

(a) se $U \subset W$ *são subespaços do* $\mathbb{R}^n$ *e* β *é uma base de* W*, então alguns dos vetores de* β *geram* U*;*

(b) se U *é um subespaço do* $\mathbb{R}^n$ *gerado por um conjunto com* k *elementos, então* $U^{\perp}$ *tem dimensão* $n - k$*;*

(c) se β_1 *e* β_2 *são bases dos subespaços* U_1 *e* U_2 *do* $\mathbb{R}^n$*, então* $\beta_1 \cap \beta_2$ *é base de* $U_1 \cap U_2$.