Álgebra Linear Algorítmica - ICP115 (2021-2)
João Vitor de Oliveira Silva

Revisão para P1

Todas as respostas devem ser justificadas, por meio de cálculos e/ou argumentos geométricos. Mesmo que use alguma ferramenta computacional para os cálculos, deve-se apresentar os passos envolvidos em sua resposta.

1. Diga se os conjuntos abaixo de vetores do plano são linearmente dependentes ou independentes. **Justifique suas respostas.**

   (a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

   (b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$

   (c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

   (d) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

   (e) $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

2. Determine as matrizes na base canônica $\beta = \{e_1, e_2\}$ que correspondem aos seguintes operadores lineares.

   (a) Um cisalhamento C que leva a reta $x = 0$ em $y = 2\pi x$;

   (b) Uma rotação R anti-horária de $\frac{\pi}{6}$ radianos;

   (c) Uma reflexão E cujo espelho é a reta $x + y = 0$;

   (d) Uma projeção ortogonal P sobre a reta $y = 0$;

   (e) $E^{80}R^8$;

   (f) $E^{11}P^5$

3. Em computação quântica a matriz

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

descreve a chamada *porta de Hadamard*.

(a) Mostre que H descreve uma reflexão do plano.

(b) Calcule o espelho desta reflexão.

4. Considere a seguinte matriz

$$Z = \begin{bmatrix} -17 & -18 \\ -15 & 4 \end{bmatrix}$$

Responda as seguintes perguntas, **justificando**:

(a) Esta matriz é inversível? Justifique.

(b) Qual o seu determinante?

(c) Quais são seus autovalores e seus autoespaços correspondentes?

(d) Qual o determinante de Z^{20}?

5. Encontre a matriz A (na base canônica) que possui como autovalores $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$ e seus respectivos autovetores $v_1 = [2, -1]^t$ e $v_2 = [2, 1]^t$.

6. Considere o seguinte algoritmo:

Algoritmo 1: calculo_misterioso

Entrada: Matriz (2×2) A

Variável: Vetor (2×1) v, Vetor (2×1) $e_1 = [1, 0]^T$, Matriz (2×2) $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, NumReal γ

início

  se $A^T A \neq I$ **ou** $\det(A) \neq 1$ **então**

    retorna ERRO!

  fim

  $v \leftarrow A e_1$

  $\gamma \leftarrow v^t e_1$

  retorna $\arccos(\gamma)$

fim

Pede-se que responda:

(a) Se fosse executado calculo_misterioso(A_1), em que $A_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, qual seria o resultado?

(b) Se fosse executado calculo_misterioso(A_1^T), qual seria o resultado?

(c) Se fosse executado calculo_misterioso($8A_1$), qual seria o resultado?

(d) Descreva com suas palavras o que é retornado pelo algoritmo e como isso é feito.