

Álgebra Linear Algorítmica - ICP115 (2021-2)
João Vitor de Oliveira Silva

P1

TODAS AS RESPOSTAS **devem ser justificadas**, POR MEIO DE **cálculos, explicação textual e/ou argumentos geométricos**. MESMO QUE USE ALGUMA FERRAMENTA COMPUTACIONAL PARA CÁLCULOS/DESENHOS, DEVE-SE APRESENTAR OS PASSOS ENVOLVIDOS EM SUA RESPOSTA E *PRINTS* DA FERRAMENTA SENDO USADA. RESPOSTAS QUE CARECEM DE JUSTIFICATIVA **não serão consideradas**.

ENVIE UM DOCUMENTO **.PDF** COM SUAS RESPOSTAS PARA ATIVIDADE DO GOOGLE CLASSROOM ATÉ O FINAL DO PRAZO. SE OPTAR POR FAZER A MÃO, USE CANETA PRETA E CERTIFIQUE-SE DE QUE O DOCUMENTO ESCANEADO É LEGÍVEL.

1. (20 pontos) Verifique se os conjuntos de vetores abaixo formam uma base do plano. No caso do conjunto ser uma base, indique também se tratar de uma base ortonormal ou não. **Justifique suas respostas**.

(a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{17}}{17} \\ -4\frac{\sqrt{17}}{17} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4\frac{\sqrt{17}}{17} \\ \frac{\sqrt{17}}{17} \end{bmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(d) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

(e) $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\}$

2. (25 pontos) Sabemos que é possível escrever certas transformações como a composição de outras. Uma certa pessoa afirmou a você que é possível escrever uma rotação anti-horária de ângulo θ como a composição de

- um cisalhamento horizontal com fator de cisalhamento m_1 ;
- um cisalhamento vertical com fator de cisalhamento m_2 ;
- um cisalhamento horizontal com fator de cisalhamento m_3 ;

nesta mesma ordem.

Pede-se que faça:

- (a) Encontre uma matriz M associada a composição de cisalhamentos acima.
 - (b) Encontre (se possível) os valores m_1 , m_2 e m_3 que façam com que a matriz M seja igual a uma matriz $R_{\frac{\pi}{3}}$ de rotação anti-horária de ângulo $\frac{\pi}{3}$.
3. (25 pontos) Responda se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. No caso de uma certa afirmação ser verdadeira, prove. Já no caso de ser falsa, dê um contra-exemplo.
- (a) Sejam q_1, q_2 dois vetores do plano tais que $q_1^t q_2 = 0$. Um vetor arbitrário do plano w pode ser escrito como $w = \text{Proj}_{q_1}(w)q_1 + \text{Proj}_{q_2}(w)q_2$.
 - (b) Seja A uma matriz que possui autovetores v_1 e v_2 . A matriz A^n ($n \geq 2$) possui os mesmos autovetores.
 - (c) A composição de duas reflexões é também uma reflexão.
 - (d) Sejam B e C matrizes quadradas de tamanho 2×2 . Se o produto BC resulta na matriz nula, então B ou C são iguais a matriz nula.
 - (e) Seja A uma matriz simétrica de tamanho 2×2 . Se $Av_1 = \lambda_1 v_1$ e $Av_2 = \lambda_2 v_2$, então v_1 e v_2 são perpendiculares entre si.
4. (30 pontos) Considere o seguinte algoritmo:

Algoritmo 1: calculo_misterioso(A, b)

Entrada: MATRIZ (2×2) A , VETOR (2×1) b

Variável: MATRIZ (2×2) U , MATRIZ (2×2) C , VETOR (2×1) y , VETOR (2×1) x , NUMREAL (2×1) m

início

$$m \leftarrow -\frac{A[1, 0]}{A[0, 0]}$$

$C \leftarrow \text{cria_matriz_cisalhamento_vertical}(m)$

$U \leftarrow CA$

$y \leftarrow Cb$

$$x[1] \leftarrow \frac{y[1]}{U[1, 1]}$$

$$x[0] \leftarrow \frac{y[0] - U[0, 1] \times x[1]}{U[0, 0]}$$

retorna x

fim

Pede-se que responda:

- (a) Se fosse executado `calculo_misterioso(A, b)`, em que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, qual seria o resultado? Ocorreria algum erro de execução?
- (b) Se fosse executado `calculo_misterioso(R, w)`, em que $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix}$, qual seria o resultado? Ocorreria algum erro de execução?
- (c) Se fosse executado `calculo_misterioso(L, s)`, em que $L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ e $s = \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix}$, qual seria o resultado? Ocorreria algum erro de execução?
- (d) Um sistema linear de 2 variáveis e 2 incógnitas pode ser expresso matricialmente da forma:

$$\begin{cases} \alpha x_0 + \beta x_1 = b_0 \\ \gamma x_0 + \omega x_1 = b_1 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

É possível relacionar isto com o que é realizado pelo algoritmo apresentado? Justifique sua resposta.