UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ

Mestrado em Modelagem Computacional

Lista 3

MÉTODOS NUMÉRICOS I

Professor: Dany S. Dominguez

Alunos: Everaldina Guimarães Barbosa
João Vitor Nascimento Ramos

Ilhéus – BA
Novembro

Sumário

Introdução

A aproximação polinomial desempenha um papel fundamental na análise de funções e no estudo do comportamento local de modelos matemáticos. Quando uma função é complexa ou custosa de avaliar, aproximá-la por polinômios torna-se uma estratégia eficiente para estimar valores, analisar tendências e compreender sua dinâmica em torno de pontos específicos.

Neste trabalho, investiga-se o uso dos polinômios de Taylor e de Lagrange como ferramentas para aproximar funções reais, avaliando sua precisão em diferentes *pontos de operação*. A partir dessas aproximações, é possível observar como termos de ordem superior influenciam a qualidade da estimativa e como o afastamento do ponto de expansão impacta o erro resultante.

O objetivo não é apenas construir os polinômios aproximadores, mas também examinar o desempenho de cada método, discutir suas limitações e interpretar os resultados obtidos. Dessa forma, a análise permite compreender de maneira mais profunda a relação entre suavidade da função, ordem do polinômio, comportamento local e erro de aproximação.

Exercício 1: Polinômios de Taylor

Considere a função:

$$f(x) = \sin(2x) + \cos(3x)$$

a) Obtenha o polinômio de Taylor de grau 2, $P_2(x)$, e de grau 3, $P_3(x)$, que aproximem a função no ponto $x = \pi$.

A forma geral do polinômio de Taylor de ordem n em torno de $x = a$ é dada por

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Neste caso, precisamos de $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ e $f^{(3)}(x)$ avaliadas em $x = \pi$.

Cálculo das derivadas

As derivadas sucessivas de $f(x) = \sin(2x) + \cos(3x)$ são:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(2x) + \cos(3x), \\ f'(x) &= 2\cos(2x) - 3\sin(3x), \\ f''(x) &= -4\sin(2x) - 9\cos(3x), \\ f^{(3)}(x) &= -8\cos(2x) + 27\sin(3x). \end{aligned}$$

Avaliado em $x = \pi$, obtemos:

$$f(\pi) = -1, \qquad f'(\pi) = 2, \qquad f''(\pi) = 9, \qquad f^{(3)}(\pi) = -8.$$

Polinômio de Taylor de grau 2

A expansão de Taylor de ordem 2 da função f em torno de $x = \pi$ é dada por

$$P_2(x) = f(\pi) + \frac{f'(\pi)}{1!}(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2.$$

Substituindo os valores encontrados:

$$P_2(x) = -1 + 2(x - \pi) + \frac{9}{2}(x - \pi)^2.$$

Polinômio de Taylor de grau 3

A expansão de Taylor de ordem 3 da função f em torno de $x = \pi$ é dada por

$$P_3(x) = f(\pi) + \frac{f'(\pi)}{1!}(x - \pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x - \pi)^2 + \frac{f^{(3)}(\pi)}{3!}(x - \pi)^3,$$

o que resulta em

$$P_3(x) = -1 + 2(x - \pi) + \frac{9}{2}(x - \pi)^2 - \frac{4}{3}(x - \pi)^3.$$

b) Utilize os polinômios $P_2(x)$ e $P_3(x)$ para aproximar a função nos pontos $x_1 = \pi + 0{,}1$ e $x_2 = \pi - 0{,}5$; calcule os desvios absolutos em relação ao valor verdadeiro em cada caso.

Os pontos de interesse são

$$x_1 = \pi + 0{,}1 \approx 3{,}24159, \qquad x_2 = \pi - 0{,}5 \approx 2{,}64159.$$

Aproximação por $P_2(x)$

Para o polinômio de Taylor de ordem 2, definimos o erro absoluto como

$$E_2(x) = |f(x) - P_2(x)|.$$

A partir da implementação numérica em , obtiveram-se os seguintes valores:

Ponto	$f(x)$	$P_2(x)$	$E_2(x)$
x_1	$-0{,}756667$	$-0{,}755000$	$0{,}001667$
x_2	$-0{,}912208$	$-0{,}875000$	$0{,}037208$

Tabela 1: Aproximação de $f(x)$ pelo polinômio $P_2(x)$ e erro absoluto nos pontos x_1 e x_2.

Aproximação por $P_3(x)$

Analogamente, para o polinômio de Taylor de ordem 3, o erro absoluto é dado por

$$E_3(x) = |f(x) - P_3(x)|.$$

Os valores numéricos obtidos foram:

Ponto	$f(x)$	$P_3(x)$	$E_3(x)$
x_1	$-0{,}756667$	$-0{,}756333$	$0{,}000334$
x_2	$-0{,}912208$	$-0{,}708333$	$0{,}203875$

Tabela 2: Aproximação de $f(x)$ pelo polinômio $P_3(x)$ e erro absoluto nos pontos x_1 e x_2.

c) Obtenha um limite superior para os polinômios de Taylor $P_2(x)$ e $P_3(x)$.

Para estimar o erro da aproximação por um polinômio de Taylor, utilizamos o resto da série, dado por

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

onde ξ está entre a e x. Como o valor exato de ξ é desconhecido, substitui-se $|f^{(n+1)}(\xi)|$ pelo *maior valor possível* de $|f^{(n+1)}(x)|$ no intervalo de interesse. O resultado obtido é um **limite superior** para o erro:

$$|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}\,|x-a|^{n+1},$$

com $M = \max_{x\in I} |f^{(n+1)}(x)|$.

Neste problema, o ponto de expansão é $a = \pi$, e os pontos avaliados são

$$x_1 = \pi + 0{,}1, \qquad x_2 = \pi - 0{,}5.$$

Limite superior para o erro de $P_2(x)$

O termo de resto de ordem 2 envolve a terceira derivada:

$$f^{(3)}(x) = -8\cos(2x) + 27\sin(3x).$$

Como

$$|\cos(2x)| \le 1, \qquad |\sin(3x)| \le 1,$$

segue que

$$|f^{(3)}(x)| \le 8 + 27 = 35.$$

Assim, o erro máximo garantido de P_2 é:

$$\boxed{|R_2(x)| \le \frac{35}{3!}\,|x-\pi|^3}$$

Aplicando aos pontos avaliados:

$$|R_2(x_1)| \le \frac{35}{6}(0{,}1)^3 = 0{,}005833,$$

$$|R_2(x_2)| \leq \frac{35}{6}(0{,}5)^3 = 0{,}729167.$$

Limite superior para o erro de $P_3(x)$

O termo de resto de ordem 3 envolve a quarta derivada:

$$f^{(4)}(x) = 16\sin(2x) + 81\cos(3x).$$

Usando novamente os limites dos termos trigonométricos:

$$|f^{(4)}(x)| \leq 16 + 81 = 97.$$

Logo, o limite superior do erro de P_3 é:

$$\boxed{|R_3(x)| \leq \frac{97}{4!}\,|x-\pi|^4}$$

Aplicando aos pontos:

$$|R_3(x_1)| \leq \frac{97}{24}(0{,}1)^4 = 0{,}000404,$$

$$|R_3(x_2)| \leq \frac{97}{24}(0{,}5)^4 = 0{,}252083.$$

(d) Comente sobre a precisão dos valores aproximados em cada caso. Qual a melhor alternativa? Como podemos melhorar a precisão para o ponto x_2?

Ponto	Aproximação	Erro real	Limite superior	Razão (erro / limite)
$x_1 = \pi + 0{,}1$	P_2	0,001667	0,005833	0,286
$x_1 = \pi + 0{,}1$	P_3	0,000334	0,000404	0,827
$x_2 = \pi - 0{,}5$	P_2	0,037208	0,729167	0,051
$x_2 = \pi - 0{,}5$	P_3	0,203875	0,252083	0,808

Tabela 3: Comparação entre erro real e limite superior para as aproximações $P_2(x)$ e $P_3(x)$.

A partir dos resultados apresentados na Tabela 3, é possível analisar de forma clara o comportamento das aproximações obtidas pelos polinômios de Taylor de segunda e terceira ordem. Observa-se inicialmente que, no ponto $x_1 = \pi + 0{,}1$, ambos os polinômios apresentam erros pequenos, compatíveis com a proximidade em relação ao ponto de expansão $x = \pi$. Para este caso, o polinômio de ordem 3 fornece a melhor aproximação, reduzindo o erro para cerca de um quinto daquele obtido com P_2. Além disso, nota-se que os erros reais são significativamente menores do que os limites superiores estimados, indicando que os majorantes obtidos para $R_2(x_1)$ e $R_3(x_1)$ são válidos, porém bastante conservadores.

A situação muda quando analisamos o ponto $x_2 = \pi - 0{,}5$. Conforme evidencia a Tabela 3, o erro associado ao polinômio de terceira ordem cresce substancialmente, superando, inclusive, o erro produzido pelo polinômio de ordem 2. Esse comportamento está diretamente relacionado ao termo $|x-\pi|^{n+1}$ do resto de Taylor, que aumenta rapidamente com a ordem do polinômio quando o ponto de avaliação se afasta do centro da expansão. Dessa forma, a inclusão do termo cúbico não melhora a aproximação; ao contrário, amplifica a discrepância.

Outro aspecto importante, também visível na Tabela 3, é a relação entre erro real e limite superior. Em x_2, a razão erro/limite permanece pequena para P_2, indicando que o limite superior ainda é muito mais amplo do que o erro efetivo. Já para P_3, essa razão sobe para aproximadamente 0,8, sugerindo que, neste ponto, o comportamento do polinômio cúbico aproxima-se mais do pior caso previsto teoricamente. Isso reforça a ideia de que a ordem superior não apenas deixa de representar uma melhoria, mas torna-se mais sensível ao afastamento do ponto de expansão.

Por fim, considerando especificamente o ponto x_2, a precisão pode ser aprimorada modificando-se o ponto de expansão do polinômio de Taylor. Como o erro cresce de forma significativa com o afastamento em relação a $x = \pi$, uma alternativa eficiente seria expandir a função em torno de um ponto mais próximo de x_2. Essa escolha reduz o termo $|x - a|^{n+1}$ do resto de Taylor e, consequentemente, diminui o erro associado mesmo para polinômios de ordem mais elevada.

Exercício 2: Polinômios de Lagrange

Considere agora a função

$$f(x) = \ln(x+1)$$

e os pontos de interpolação

$$x_0 = 0{,}0 \qquad x_1 = 0{,}6 \qquad x_2 = 0{,}9 \qquad x_3 = 1{,}1$$

Os valores da função nesses pontos são

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(0{,}0) = \ln(1) = 0 \\ f(x_1) &= f(0{,}6) = \ln(1{,}6) \\ f(x_2) &= f(0{,}9) = \ln(1{,}9) \\ f(x_3) &= f(1{,}1) = \ln(2{,}1) \end{aligned}$$

A forma geral do polinômio interpolador de Lagrange de grau n, construído a partir de pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, é dada por

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, L_k(x)$$

onde os polinômios básicos de Lagrange são

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

Construção dos polinômios de Lagrange de graus 1, 2 e 3

Polinômio de grau 1: $P_1(x)$

Para o polinômio de grau 1, utilizam-se apenas os pontos x_0 e x_3. Os polinômios básicos são

$$L_0(x) = \frac{x - x_3}{x_0 - x_3} \qquad L_3(x) = \frac{x - x_0}{x_3 - x_0}$$

Substituindo $x_0 = 0{,}0$ e $x_3 = 1{,}1$, obtemos

$$L_0(x) = -\frac{x - 1{,}1}{1{,}1} \qquad L_3(x) = \frac{x}{1{,}1}$$

O polinômio interpolador de grau 1 é dado por:

$$P_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_3)L_3(x)$$

Como $f(x_0) = 0$, o termo associado a $L_0(x)$ é nulo, resultando em

$$\boxed{P_1(x) = \ln(2{,}1)\,\frac{x}{1{,}1}}$$

Polinômio de grau 2: $P_2(x)$

Para o polinômio de grau 2, utilizam-se os pontos x_0, x_1 e x_3. Os polinômios básicos são

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_3)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_3)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)}$$

Substituindo $x_0 = 0{,}0$, $x_1 = 0{,}6$ e $x_3 = 1{,}1$ temos

$$L_0(x) = \frac{(x - 0{,}6)(x - 1{,}1)}{0{,}66}$$

$$L_1(x) = \frac{x(x - 1{,}1)}{-0{,}3}$$

$$L_3(x) = \frac{x(x - 0{,}6)}{0{,}55}$$

O polinômio interpolador de grau 2 é dado por

$$P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_3)L_3(x)$$

Como $f(x_0) = 0$, o termo associado a $L_0(x)$ é novamente nulo, e obtemos

$$\boxed{P_2(x) = \ln(1{,}6)\,\frac{x(x-1{,}1)}{-0{,}3} + \ln(2{,}1)\,\frac{x(x-0{,}6)}{0{,}55}}$$

Polinômio de grau 3: $P_3(x)$

Para o polinômio de grau 3, utilizam-se todos os pontos x_0, x_1, x_2 e x_3. Os polinômios básicos são

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Substituindo $x_0 = 0{,}0$, $x_1 = 0{,}6$, $x_2 = 0{,}9$ e $x_3 = 1{,}1$. Os polinômios básicos que de fato contribuem para a interpolação (isto é, aqueles associados a valores não nulos de $f(x_k)$) podem ser escritos como

$$L_1(x) = \frac{x(x-0{,}9)(x-1{,}1)}{0{,}09}$$

$$L_2(x) = \frac{x(x-0{,}6)(x-1{,}1)}{-0{,}054}$$

$$L_3(x) = \frac{x(x-0{,}6)(x-0{,}9)}{0{,}11}$$

O polinômio interpolador de grau 3 é dado por

$$P_3(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x)$$

Como $f(x_0) = 0$, o termo associado a $L_0(x)$ é eliminado, resultando em

$$\boxed{P_3(x) = \ln(1{,}6)\,\frac{x(x-0{,}9)(x-1{,}1)}{0{,}09} + \ln(1{,}9)\,\frac{x(x-0{,}6)(x-1{,}1)}{-0{,}054} + \ln(2{,}1)\,\frac{x(x-0{,}6)(x-0{,}9)}{0{,}11}}$$

Polinômios obtidos

Ao final dos cálculos, obtiveram-se explicitamente os seguintes polinômios interpoladores:

$$\boxed{P_1(x) = \ln(2{,}1)\,\frac{x}{1{,}1}}$$

$$\boxed{P_2(x) = \ln(1{,}6)\,\frac{x(x-1{,}1)}{-0{,}3} + \ln(2{,}1)\,\frac{x(x-0{,}6)}{0{,}55}}$$

$$\boxed{P_3(x) = \ln(1{,}6)\,\frac{x(x-0{,}9)(x-1{,}1)}{0{,}09} + \ln(1{,}9)\,\frac{x(x-0{,}6)(x-1{,}1)}{-0{,}054} + \ln(2{,}1)\,\frac{x(x-0{,}6)(x-0{,}9)}{0{,}11}}$$

Esses polinômios $P_1(x)$, $P_2(x)$ e $P_3(x)$ serão utilizados, nos itens seguintes, para aproximar a função $f(x)$ nos pontos $x = 0{,}3$ e $x = 0{,}75$, bem como para calcular o desvio relativo em relação ao valor verdadeiro da função.

Visualização gráfica das aproximações em $x = 0{,}3$

A Figura 1 mostra o comportamento global da função $f(x)$ e dos polinômios P_1, P_2 e P_3. Observa-se que, fora do intervalo de interpolação, as curvas começam a divergir, e já é possível notar que o polinômio linear $P_1(x)$ permanece mais distante da função real, enquanto P_2 e P_3 acompanham melhor sua curvatura.

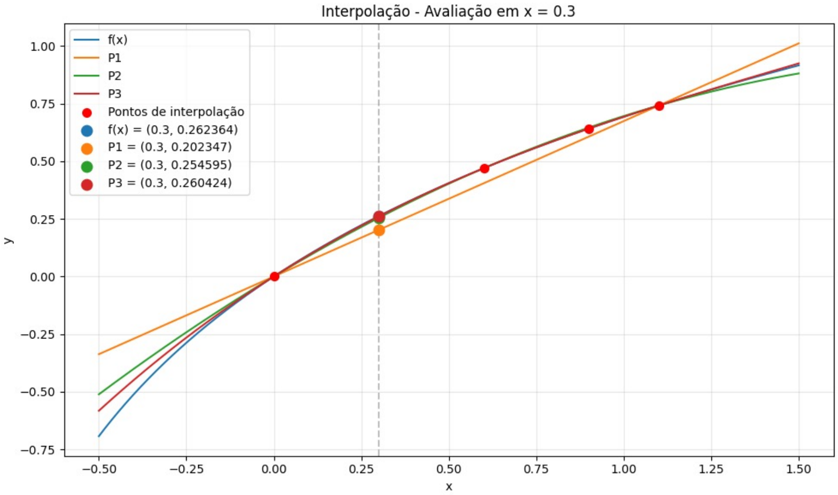


Figura 1: Interpolação polinomial em $x = 0{,}3$ — visão geral

A Figura 2 apresenta a região ampliada ao redor de $x = 0{,}3$. O zoom confirma o que já era visível na análise global: $P_1(x)$ é a pior aproximação, exibindo um erro relativo elevado ($\approx 22{,}9\%$). O polinômio $P_2(x)$ reduz substancialmente essa discrepância ($\approx 2{,}96\%$), enquanto $P_3(x)$ praticamente se sobrepõe à função real, apresentando o menor erro relativo dentre as três aproximações ($\approx 0{,}74\%$).

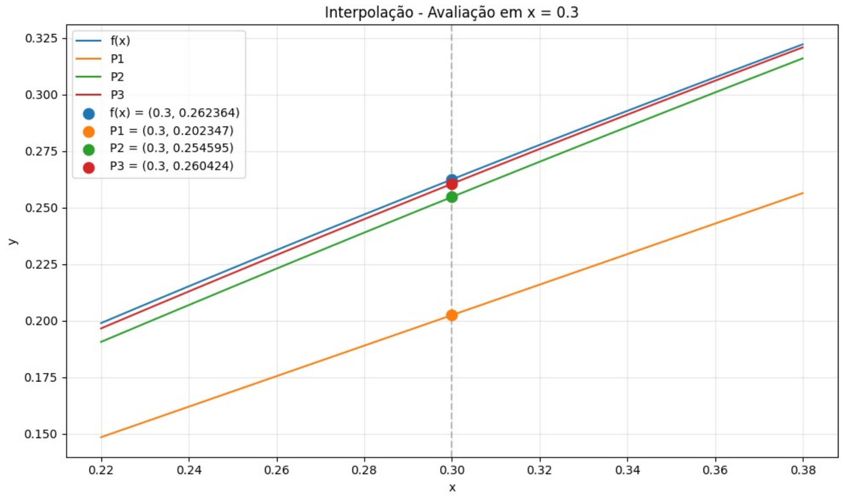


Figura 2: Interpolação polinomial em $x = 0{,}3$ — região ampliada (com zoom).

Visualização gráfica das aproximações em $x = 0{,}75$

A Figura 3 apresenta a região ampliada em torno de $x = 0{,}75$, permitindo analisar a precisão local das aproximações. Assim como no caso anterior, observa-se que o polinômio linear $P_1(x)$ é claramente a pior aproximação, fato coerente com seu erro relativo elevado, em torno de $9{,}61\%$.

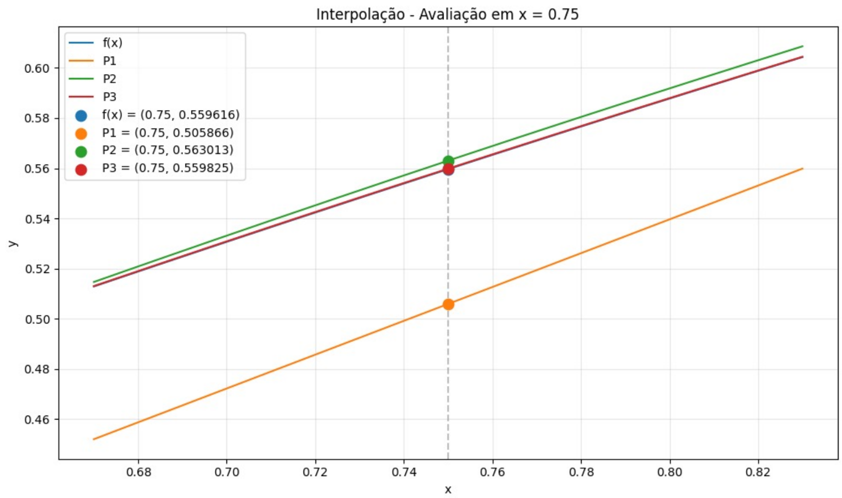


Figura 3: Interpolação polinomial em $x = 0{,}75$ — região ampliada (com zoom).

O polinômio quadrático $P_2(x)$ apresenta melhora significativa, reduzindo o erro relativo para aproximadamente 0,61%. Já o polinômio cúbico $P_3(x)$ praticamente coincide com a curva real da função, atingindo um erro relativo muito pequeno, próximo de 0,037%. Esse comportamento é visível no zoom, onde a curva de $P_3(x)$ se sobrepõe quase totalmente à função real.

Outro aspecto importante é que as aproximações em $x = 0{,}75$ são mais precisas do que as obtidas em $x = 0{,}3$. Isso ocorre porque $x = 0{,}75$ está situado entre os pontos intermediários da interpolação (0,6 e 0,9), intervalo onde os polinômios tendem a acompanhar com maior fidelidade o comportamento da função. Já o ponto $x = 0{,}3$ encontra-se em um subintervalo mais amplo e menos central (0,0 a 0,6), o que naturalmente aumenta o erro relativo observado naquele caso.

Exercício 3: Função de Runge

A função de Runge é dada por

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

O objetivo deste exercício é construir polinômios interpolantes de Lagrange no intervalo $[-5, 5]$ utilizando pontos equidistantes para os casos $n = 4, 6, 8$ e 12. Para cada valor de n, serão determinados os respectivos polinômios, bem como seus gráficos comparativos com a função original.

A partir dessas representações gráficas, será analisado o comportamento da interpolação ao longo do intervalo, com ênfase no centro e nos extremos.

a) Polinômio de Lagrange para $n = 4$

Para $n = 4$, desejamos interpolar a função de Runge,

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Os quatro pontos amostrados são:

$$x_0 = -5, \qquad x_1 = -\frac{5}{3} \approx -1{,}66667, \qquad x_2 = \frac{5}{3} \approx 1{,}66667, \qquad x_3 = 5.$$

Seguindo o mesmo padrão de construção utilizado na Questão 2, o polinômio interpolante de Lagrange de grau 3 é expresso como

$$\boxed{\begin{aligned} P_3(x) = &-\frac{9}{52000}\,(x+\tfrac{5}{3})(x-\tfrac{5}{3})(x-5) + \frac{243}{68000}\,(x+5)(x-\tfrac{5}{3})(x-5) \\ &-\frac{243}{68000}\,(x+5)(x+\tfrac{5}{3})(x-5) + \frac{9}{52000}\,(x+5)(x+\tfrac{5}{3})(x-\tfrac{5}{3}). \end{aligned}}$$

A Figura 4 mostra a comparação entre a função de Runge e o polinômio interpolante construído com quatro pontos equidistantes. Observa-se que o polinômio acompanha razoavelmente bem a função nos próprios pontos de interpolação, mas apresenta uma discrepância significativa no centro do intervalo.

Em $x = 0$, por exemplo, isso corresponde a um erro relativo de aproximadamente 70,7%.

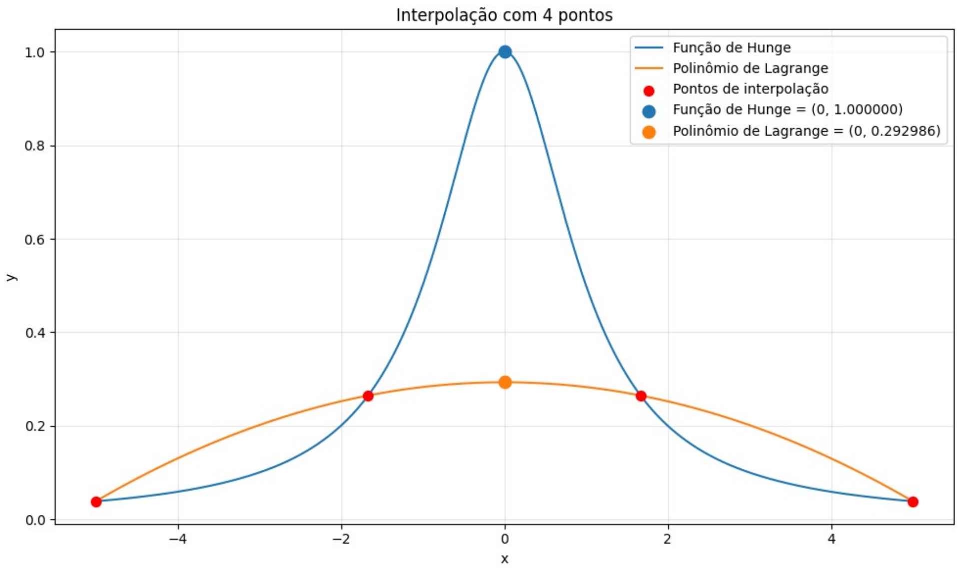


Figura 4: Interpolação da função de Runge utilizando $n = 4$ pontos equidistantes.

b) Polinômio de Lagrange para $n = 6$

Os pontos de interpolação utilizados são

$$x_0 = -5, \quad x_1 = -3, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 3, \quad x_5 = 5.$$

Como a função de Runge é par e os pontos são simétricos em torno da origem, os termos ímpares do polinômio se anulam. Assim, o polinômio pode ser escrito como

$$\boxed{P_5(x) = \frac{1}{520}\,x^4 \;-\; \frac{9}{130}\,x^2 \;+\; \frac{59}{104}.}$$

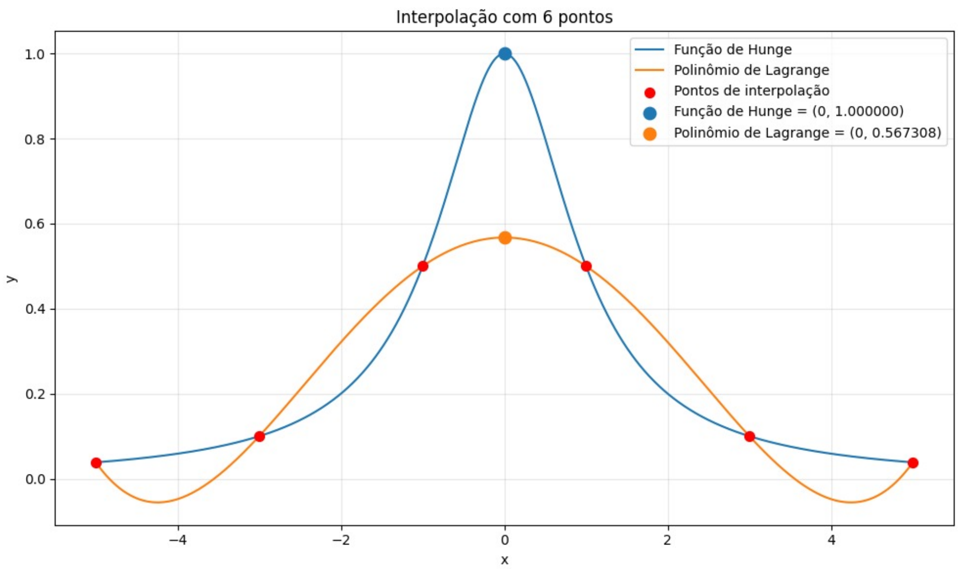


Figura 5: Interpolação da função de Runge utilizando $n = 6$ pontos equidistantes.

A Figura 5 mostra que, com $n = 6$, o polinômio passa a representar melhor a forma geral da função de Runge, embora ainda subestime o valor máximo no centro do intervalo. Em $x = 0$, o erro relativo permanece elevado, cerca de 43,3%, o que indica melhora em relação ao caso $n = 4$, mas evidencia que a escolha de pontos equidistantes ainda não é suficiente para reproduzir adequadamente o pico central da função.

c) Polinômio de Lagrange para $n = 8$

Os pontos de interpolação utilizados são

$$x_0 = -5, \quad x_1 = -3{,}57143, \quad x_2 = -2{,}14286, \quad x_3 = -0{,}71429,$$
$$x_4 = 0{,}71429, \quad x_5 = 2{,}14286, \quad x_6 = 3{,}57143, \quad x_7 = 5.$$

O polinômio interpolante resultante, de grau 7, pode ser escrito na forma

$$\boxed{P_7(x) = -\frac{1}{8000}\,x^6 + \frac{11}{3000}\,x^4 - \frac{29}{750}\,x^2 + \frac{241}{320}.}$$

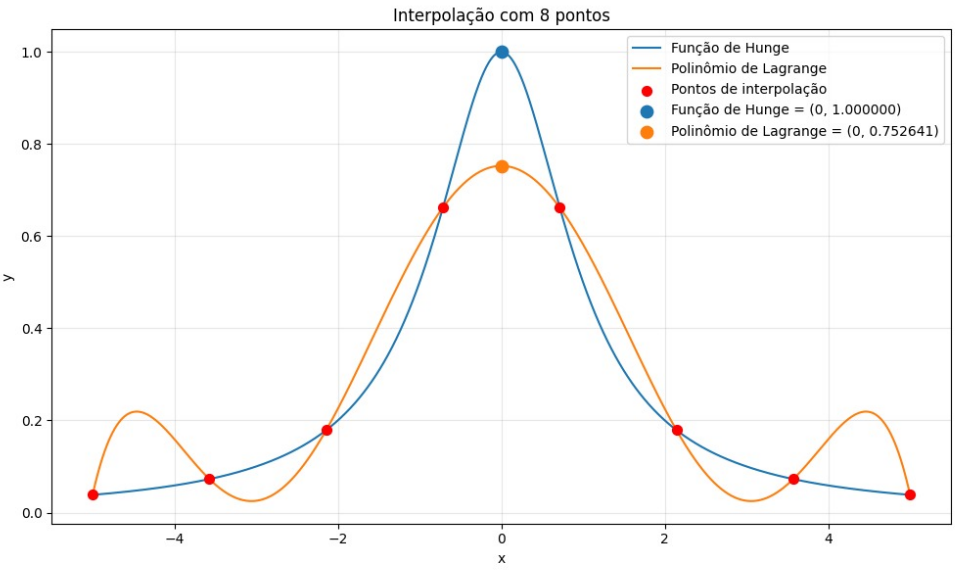


Figura 6: Interpolação da função de Runge utilizando $n = 8$ pontos equidistantes.

A Figura 6 mostra que, para $n = 8$, o polinômio passa a reproduzir com maior precisão a região central da função, reduzindo a subestimação observada nos casos anteriores. Mesmo assim, o valor em $x = 0$ ainda apresenta discrepância relevante, com erro relativo de aproximadamente 24,7%, embora melhor que nos casos $n = 4$ e $n = 6$.

Além disso, observa-se que o aumento do grau do polinômio intensifica as oscilações nas extremidades do intervalo, resultando em desvios pronunciados longe do centro. Esse comportamento indica que, apesar do acréscimo de pontos, a interpolação com nós equidistantes não garante estabilidade nem boa aproximação nas bordas do domínio.

d) Polinômio de Lagrange para $n = 12$

Os doze pontos de interpolação são equidistantes no intervalo $[-5, 5]$, com espaçamento

$$\Delta x = \frac{10}{11} \approx 0{,}90909.$$

Assim, os pontos utilizados são:

$$\begin{array}{llll} x_0 = -5.00000, & x_1 = -4.09091, & x_2 = -3.18182, & x_3 = -2.27273 \\ x_4 = -1.36364, & x_5 = -0.45455, & x_6 = 0.45455, & x_7 = 1.36364 \\ x_8 = 2.27273, & x_9 = 3.18182, & x_{10} = 4.09091, & x_{11} = 5.00000. \end{array}$$

O polinômio obtido é:

$$\boxed{\begin{aligned} P_{11}(x) = 0.925925 \; - \; 0.263374\,x^2 \; + \; 0.027972\,x^4 \; - \; 0.001542\,x^6 \\ + \; 5.06 \times 10^{-5}\,x^8 \; - \; 8.36 \times 10^{-7}\,x^{10}. \end{aligned}}$$

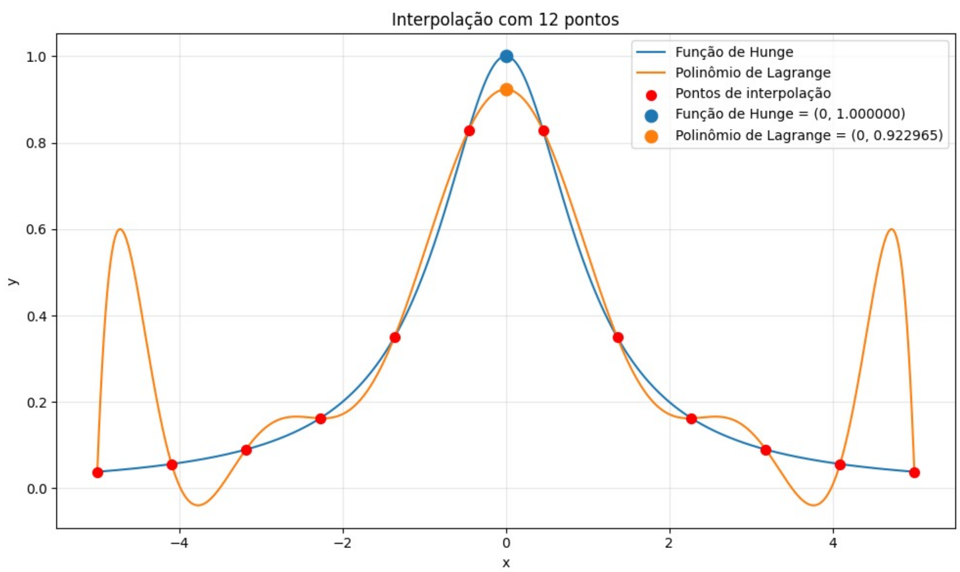


Figura 7: Interpolação da função de Runge utilizando $n = 12$ pontos equidistantes.

A Figura 7 mostra que, com $n = 12$, a aproximação melhora ainda mais na região central do intervalo. Em $x = 0$, o erro relativo cai para aproximadamente 7,7%, indicando avanço claro em relação aos casos anteriores.

Entretanto, o gráfico também revela oscilações muito mais pronunciadas nas extremidades. Essas ondulações fazem com que o polinômio se afaste drasticamente da função verdadeira fora da região central, confirmando que o aumento do número de pontos equidistantes tende a melhorar a precisão apenas no meio do intervalo, ao custo de instabilidade crescente nas bordas.

Alternativa para aprimorar a interpolação sem usar *splines*

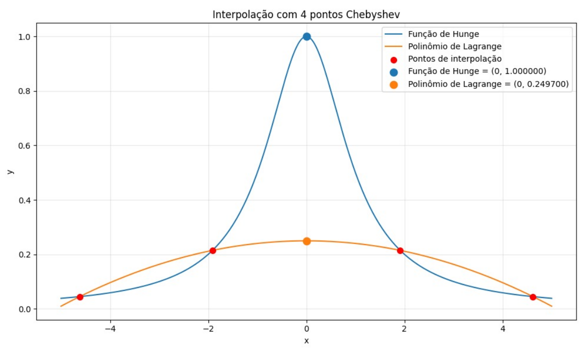
Uma forma de aprimorar a interpolação polinomial global, sem recorrer a *splines*, consiste em substituir os pontos equidistantes pelos chamados *pontos de Chebyshev*. Esses pontos não são uniformemente espaçados: eles se concentram nas extremidades do intervalo e são mais espaçados na região central, o que reduz de forma significativa as oscilações do polinômio interpolante.

Para $n+1$ pontos no intervalo $[a, b]$, os pontos de Chebyshev são dados por

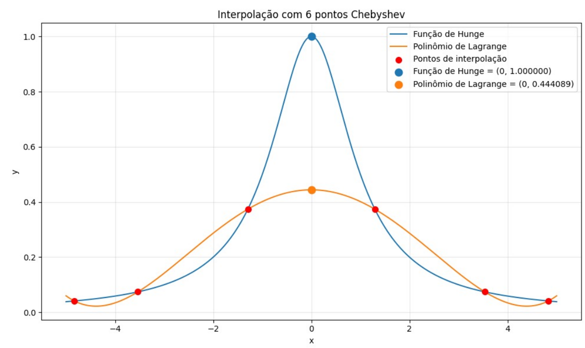
$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right), \qquad k = 0, 1, \dots, n.$$

Essa escolha de nós melhora a estabilidade numérica e tende a minimizar o erro máximo da interpolação, produzindo polinômios globais que aproximam melhor funções como a de Runge, mesmo para valores elevados de n, sem apresentar oscilações excessivas nas extremidades do intervalo.

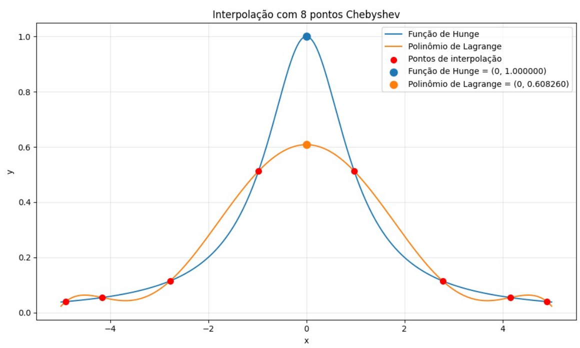
Para avaliar o efeito da utilização de pontos de Chebyshev na interpolação da função de Runge, foram gerados polinômios interpolantes para $n = 4, 6, 8$ e 12 nós. A Figura 8 apresenta os gráficos para cada valor de n, permitindo visualizar a estabilidade das aproximações e o efeito do aumento do número de pontos.



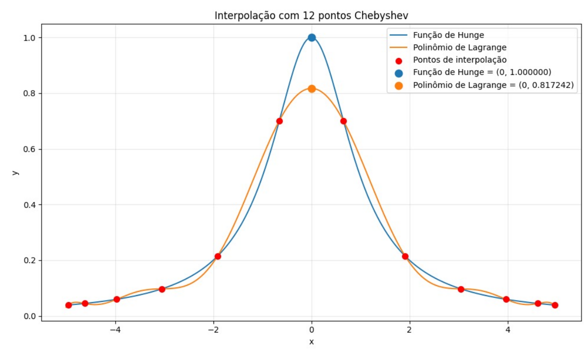
(a) Interpolação com 4 pontos de Chebyshev.



(b) Interpolação com 6 pontos de Chebyshev.



(c) Interpolação com 8 pontos de Chebyshev.



(d) Interpolação com 12 pontos de Chebyshev.

Figura 8: Interpolação da função de Runge utilizando nós de Chebyshev para diferentes números de pontos.

Por outro lado, essa melhora de estabilidade nas bordas vem acompanhada de uma perda de precisão no centro do intervalo. Para $n = 12$, por exemplo, o polinômio com pontos equidistantes fornece em $x = 0$ um erro relativo de cerca de 7,7%. Já a interpolação com 12 pontos de Chebyshev produz um erro relativo em torno de 18,3%.

A comparação mostra que a aproximação com pontos equidistantes pode até ser precisa no centro do intervalo quando n é grande, mas sofre com oscilações intensas nas extremidades. Já ao utilizar pontos de *Chebyshev*, há uma pequena perda de precisão em $x = 0$, mas a interpolação se torna muito mais estável e apresenta erros bem mais uniformes ao longo de todo o intervalo.