Algèbre Linéaire II

Exercices complémentaires – Feuille 4

1 Rang d'une matrice

Exercice 1. Calculer par la méthode de Gauss le rang des matrices suivantes :

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

Exercice 2. Calculer par la méthode de Gauss le rang des matrices suivantes en fonction des différentes valeurs de $t \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & t \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & t \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Discuter le rang de la matrice suivante en fonction des différentes valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ par la méthode de Gauss

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 & 12 & 6 \\ b & 1 & 4 & 2 \\ a+b & 4 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Calculer par déterminants le rang des matrices suivantes :

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Exercice 5. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Est-ce qu'est-il vrai que $\mathrm{rang}(AB) = \mathrm{rang}(A)\,\mathrm{rang}(B)$?

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \\ -1 & 1 \\ -3 & c \end{pmatrix}$. Calculer les valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{rang}(A) = 1$.

Exercice 7. Calculer le rang des matrices suivantes en fonction des différentes valeurs de $a \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & a & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 (Extra ball). Les matrices A et B ont 3 lignes et 12 colonnes, mais pendant l'impression de cette feuille quelques colonnes se sont effacées :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \dots & \dots \\ 3 & -1 & 0 & \dots & \dots \\ -7 & 5 & -2 & \dots & \dots \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \dots & \dots \\ 3 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ 5 & 4 & 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

1. Qu'est-ce qu'on peut dire des possibles valeurs de $\mathrm{rang}(A)$ et $\mathrm{rang}(B)$?
2. Si on construit une matrice C dont ses colonnes sont les 24 colonnes de A et B, quel est le rang de C ?

2 Applications linéaires

Exercice 9. Vérifier si les applications entre $\mathbb{R}$-espaces vectoriels suivantes sont-elles linéaires :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par
   (a) $f(x, y) = x + y + 1$
   (b) $f(x, y) = xy$
   (c) $g(x, y, z) = x + y + 2z$
   (d) $g(x, y, z) = x - z$
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par
   (a) $f(x, y) = (x, 0)$
   (b) $f(x, y) = (x, 1)$
   (c) $f(x, y) = (x^2, y^2)$
   (d) $f(x, y) = (x + 1, y + 1)$
   (e) $f(x, y) = (e^x, e^y)$
   (f) $f(x, y) = (2x - y, x + y)$
3. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par
   (a) $g(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$
   (b) $g(x, y, z) = (x, y^2, z^3)$
   (c) $g(x, y, z) = (x + 1, y + 2, z + 3)$
   (d) $g(x, y, z) = (x + z, 0, x + y)$

Exercice 10. Calculer les sous-espaces *noyau* et *image* des applications de l'exercice précèdent et en déduire si sont injectives, surjectives, bijectives.

Exercice 11. Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et d'inconnue X. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg p \leq n\}$.

1. Est-ce que les applications suivantes sont-elles linéaires ?
   (a) $f_1 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ avec $f_1(P) = P'$.
   (b) $f_2 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ avec $f_2(P) = P'$.
   (c) $f_3 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3$ avec $f_3(P) = (P(-1), P(0), P(1))$.
   (d) $f_4 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ avec $f_4(P) = P - (X - 2)P'$.
2. Pour les applications linéaires trouvées ci-dessus, déterminer $\ker(f_i), \mathrm{im}(f_i)$. Est-ce que f_i est-elle injective, surjective, bijective ?

3 Changement de base

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire décrite par la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Soient $\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1), (0,1,-1), (0,0,1)\}$ et $\mathcal{B}_2 = \{(1,2),(0,1)\}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement.
2. Donner les matrices de passage de bases.
3. Calculer B la matrice de l'application linéaire f relativement aux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.
4. Trouver des bases de $\ker f$ et $\operatorname{im} f$.

Exercice 13. Trouver les matrices des applications linéaires suivantes dans la base canonique et dans les bases spécifiées dans chaque section et donner la matrice de passage entre bases :

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x+2y, 3y+z)$ avec $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,-2),(0,1,1),(1,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_2 = \{(1,1),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

2. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z,t) = (48y - 57z, x, x+t)$ avec $\mathcal{B}_1 = \{(0,114,96,0), (1,3,20,0), (0,0,1,1), (2,6,40,1)\}$ de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}_2 = \{(-996,1,1),(-57,0,1),(-1992,2,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

3. $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $f(P) = P(1)(1+X^2) + P(0)X^3$ dans la base $\mathcal{B} = \{1, X, X^2 - 4, X^3 - X\}$.

Exercice 14. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On définit $\tilde{\mathcal{B}} = \{w_1, w_2, w_3\}$ où $w_1 = v_1 + v_2 + v_3$, $w_2 = v_1 - v_2$, $w_3 = v_1 + v_3$.

1. Montrer que $\tilde{\mathcal{B}}$ constitue une base de E.
2. Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\tilde{\mathcal{B}}$ et écrire la matrice de f dans cette base.
3. Déterminer une base de $\ker f$ et de $\operatorname{im} f$.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'application définie par $f(P) = -P(0) + P'$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Trouver A la matrice de f relativement aux bases $\{1, X, X^2, X^3\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\{1, X, X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. On fixe la base $\{1, X, X^2\}$ dans $\mathbb{R}_2[X]$. Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ telle que la matrice de f relativement à $\mathcal{B}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donner la matrice de passage.
4. Utiliser B pour trouver tous les $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ tels que $f(Q) = -2 + 2X$.

Exercice 16 (Extra ball). Soit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ application}\}$ et on considère le sous-espace $V = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\{f_1, f_2, f_3\}$ où $f_1(x) = 3$, $f_2(x) = x^2 + 2$ et $f_3(x) = \sin(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que V est de dimension 3.
2. Soit $F_\alpha : V \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ définie par $F_\alpha(f) = \begin{pmatrix} f(0) & f'(0) \\ \alpha & f'(0) - f(0) \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que F_α soit une application linéaire.
3. Trouver la matrice de F relativement à $\{f_1, f_2, f_3\}$ dans V et la base canonique dans $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
4. Déterminer une base de $\ker F$ et de $\operatorname{im} F$.