

ESTADÍSTICA Y OPTIMIZACIÓN

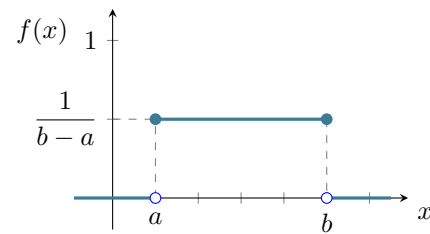
MODELOS DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Distribución uniforme continua: $X \sim \mathcal{U}([a, b])$

✚ **Noción del “modelo equiprobable” en el caso continuo:** Sea $[a, b]$ un intervalo acotado de \mathbb{R} y consideramos que la densidad puntual es constante a lo largo de este intervalo.

✚ **Función de densidad de probabilidad:** $X \sim \mathcal{U}([a, b])$ toma valores en $[a, b]$ y

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\text{longitud}([a, b])} = \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$



✚ **Ejemplos:**

- Cortes aleatorios en vigas, varas, cuerdas, etc de longitud ℓ unidades: $X \sim \mathcal{U}([0, \ell])$
- Tiempos de llegada de un autobús con frecuencia de 15 mins.: $X \sim \mathcal{U}([0, 15])$.
- Nota de un/a estudiante de Estadística que ha llevado el curso al día: $X \sim \mathcal{U}([8.5, 10])$.

✚ **Función de distribución:**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{\text{longitud}([a, x])}{\text{longitud}([a, b])} = \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 1, & x > b \end{cases}$$

✚ **Esperanza y varianza:** Basta integrar,

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

$$V[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

✚ **Fun. gen. de momentos y func. carac.:**

$$M(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$$

$$\varphi(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

✚ **Ejemplo:** $X = \text{“tiempo de llegada de un autobús”} \sim \mathcal{U}([0, 15])$,

$$P(0 \leq X \leq x) = \frac{x}{15}, \quad 0 \leq x \leq 15.$$

Por ejemplo, $1/2 = P(0 \leq X \leq 7.5) = P(7.5 \leq X \leq 15) = P(3.5 \leq X \leq 11)$.

$$E[X] = \frac{15}{2} = 7.5, \quad V[X] = \frac{15^2}{12} = 18.75, \quad M(t) = \frac{e^{t \cdot 15} - e^{t \cdot 0}}{t \cdot 15} = \frac{e^{15t} - 1}{15t}, \quad \varphi(t) = \frac{e^{15it} - 1}{15it}.$$

Distribución exponencial: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

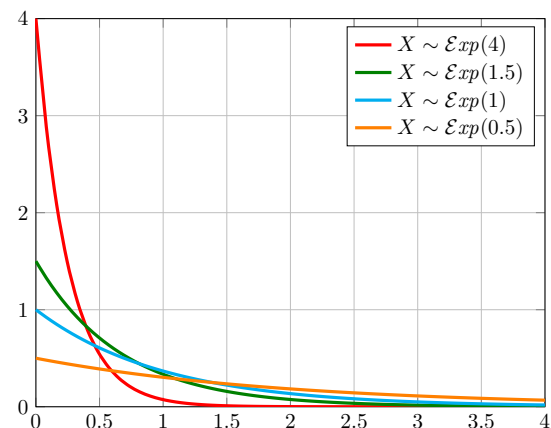
✚ **Versión continua de la geométrica:** contar $X =$ tiempo *continuo* de espera hasta la primera ocurrencia de un cierto evento, el cual aparece con un promedio de $\lambda > 0$ veces por unidad de tiempo. Ejemplos:

- Tiempo de vida de una máquina.
- Tiempo hasta la aparición de un fallo/avería en componentes electrónicos.
- Tiempo hasta que ocurra un fenómeno natural (como una erupción o un tornado).
- Tiempo que pasa un teleoperador con cada cliente.
- Tiempo de diferencia entre el paso de dos camiones pesados por un puente.

✚ **Función de densidad:** $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ si toma valores en $x \in [0, +\infty]$ con densidad

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

✚ Intuitivamente, se ve que cuanto mayor sea el parámetro $\lambda > 0$, mayor se concentrará la probabilidad cerca del origen y mayor será el decaimiento de la exponencial.



✚ **Función de distribución:**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

✚ **“Función de supervivencia”:** Esta función da la probabilidad de que el suceso (p.ej. “fallo”) no haya aparecido hasta un momento dado,

$$S(x) := P(X > x) = 1 - F(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

✚ **Esperanza y varianza:**

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$V[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

✚ **Fun. gen. de momentos y func. carac.:**

$$M(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

$$\varphi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Notar que $M(t)$ solo está definida para $t < \lambda$, debido a la convergencia de la integral.

✚ **Ejemplo:** $X = \text{“tiempo de vida (en años) de un marcapasos”} \sim \mathcal{Exp}(\lambda)$ con vida media de 16 años.

a) ¿Qué tipo de exponencial sigue X ? Tenemos que $16 = E[X] = \frac{1}{\lambda}$. Por lo que $X \sim \mathcal{Exp}(1/16)$.

b) Probabilidad de que haya que cambiarlo entre los primeros 10 y 20 años:

$$P(10 \leq X \leq 20) = \frac{1}{16} \int_{10}^{20} e^{-x/16} dx = F(20) - F(10) = e^{-10/16} - e^{-20/16} = 0.2487.$$

c) Probabilidad de que el marcapasos dure más de 20 años:

$$P(X > 20) = \frac{1}{16} \int_0^{20} e^{-x/16} dx = 1 - F(20) = S(20) = e^{-20/16} = 0.2865.$$

✚ **Conexión con la Poisson:** si $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$,

- Y cuenta la aparición de un suceso en una unidad de tiempo,
- $Y_t = \text{“núm. de veces que aparece el suceso en } [0, t] \text{”} \sim \mathcal{P}(\lambda t)$, para un $t \geq 0$
- definiendo $X = \text{“tiempo hasta la primera ocurrencia”}$:

$$\begin{aligned} F_X(t) &= P(X \leq t) = 1 - P(X > t) = 1 - P(Y_t = 0) = 1 - e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda t}, \\ \implies f_X(t) &= F'_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Es decir, que $X \sim \mathcal{Exp}(\lambda)$.

✚ **Propiedad de “falta de memoria”:** Si $X \sim \mathcal{Exp}(\lambda)$, para todos $x_0, x_1 \geq 0$ se tiene:

$$P(X > x_0 + x_1 | X > x_0) = P(X > x_1).$$

✚ **Ejemplo:** Siguiendo con $X = \text{“tiempo de vida (en años) de un marcapasos”} \sim \mathcal{Exp}(1/16)$. Si el marcapasos lleva 5 años funcionando correctamente, ¿cuál es la probabilidad de que no haya que caabiarlo antes de que pasen otros 15 años?

$$\begin{aligned} P(X > 20 | X > 5) &= \frac{P(\{X > 20\} \cap \{X > 5\})}{P(X > 5)} = \frac{P(X > 20)}{P(X > 5)} \\ &= \frac{S(20)}{S(5)} = \frac{e^{-20/16}}{e^{-5/16}} = e^{-15/16} = 0.3916. \end{aligned}$$

✚ **Mínimo de dos exponenciales:** Si $X \sim \mathcal{Exp}(\lambda_1)$ y $Y \sim \mathcal{Exp}(\lambda_2)$ son independientes, entonces

$$Z = \min(X, Y) \sim \mathcal{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Distribución normal: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

✚ La distribución continua más conocida y una de las más usuales en el estudio de todas las Ciencias Naturales y Sociales. Ejemplos:

- Alturas/pesos de una población.
- Errores de medida en experimentos.
- Precipitaciones y descargas de ríos a largo plazo.
- Si tenemos un vector aleatorio (X_1, \dots, X_n) de variables independientes y con misma distribución, la variable aleatoria “promedio”

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

se aproxima por una normal cuando n es grande (Teorema Central del Límite).

✚ **Función de densidad:** $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ es normal de media μ y varianza σ^2 si toma valores en $x \in \mathbb{R}$ con

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

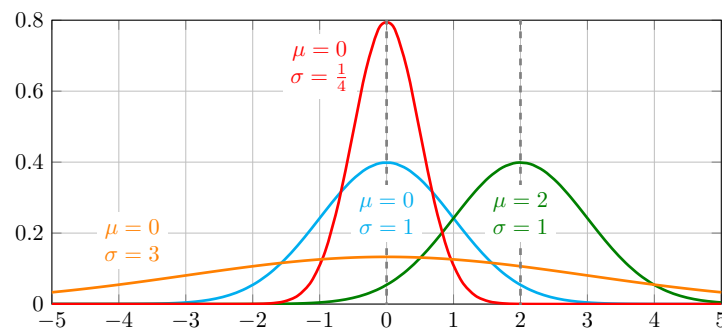


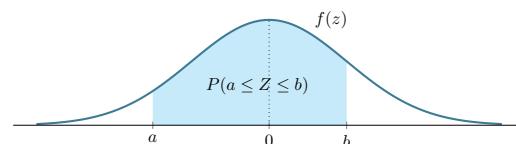
Figura 1: Las distribuciones normales $\mathcal{N}(0, 1)$, $\mathcal{N}(2, 1)$, $\mathcal{N}(0, 1/2)$ y $\mathcal{N}(0, 3)$.

✚ Vamos a comenzar estudiando el caso $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, conocida como la *normal tipificada*. En la práctica, siempre podremos reducirnos a este caso.

Normal tipificada: En general, usaremos la notación $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

✚ **Función de densidad:**

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad z \in \mathbb{R}.$$



✚ **Propiedades de $f(z)$:**

- $f(z)$ es par, es decir simétrica con respecto a $z = 0$.
- tiene máximos en $z = 0$ y puntos de inflexión en $z = \pm 1$.

✚ **Fun. gen. de momentos y func. carac.:**

$$M(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

(Calculadas en el Ejercicio 42)

Notar que $M(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

✚ **Esperanza y varianza:** Calculando $M'(0)$ y $M''(0)$ a partir de lo anterior o mediante integrales,

$$E[X] = 0$$

$$V[X] = 1$$

✚ **Función de distribución:** No existe primitiva conocida de esta función de densidad, debemos usar tablas con aproximaciones numéricas de:

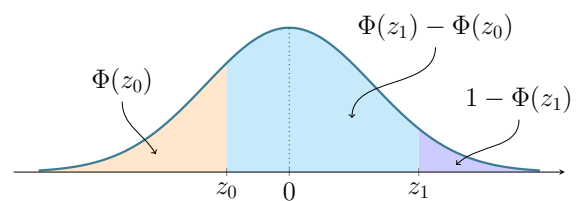
$$\Phi(z_0) := P(Z \leq z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

✚ Para $z_0 < z_1$ reales, tenemos:

a) $P(z_0 \leq Z \leq z_1) = \Phi(z_1) - \Phi(z_0)$.

b) $P(Z \geq z_1) = 1 - \Phi(z_1) = \Phi(-z_1)$.

Con estas propiedades podemos calcular cualquier probabilidad a partir de la tabla.



✚ **Ejemplo:** Dada $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, calculamos usando la tabla de la normal tipificada:

- $P(0 \leq X \leq 1.5) = \Phi(1.5) - \Phi(0) = 0.9332 - 0.5 = 0.4332$.
- $P(-1.2 \leq X \leq 1.2) = 2 \times P(0 \leq X \leq 1.2) = 2 \times (\Phi(1.2) - \Phi(0)) = 2 \times (0.8849 - 0.5) = 0.7698$.
- $P(X \leq -1.85) = 1 - P(X \leq 1.85) = 1 - \Phi(1.85) = 1 - 0.9678 = 0.0322$.

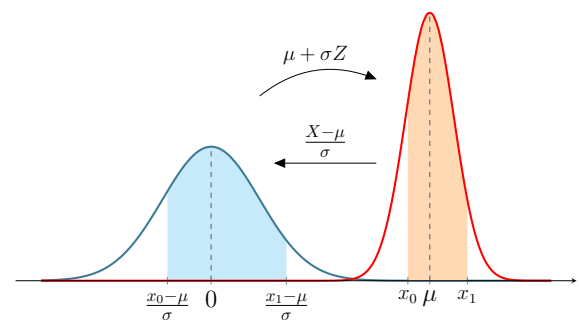
Normal general: Cualquier otra normal $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ se puede tipificar por traslación y escalado.

✚ **Teorema:** Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, entonces

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

✚ Del mismo modo, si $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, entonces

$$X = \mu + \sigma Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma).$$



✚ **Ejemplo:** Dada $X \sim \mathcal{N}(80, 10)$, podemos tipificar $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 80}{10}$ y leemos en la tabla para calcular:

- $P(X \leq 90) = P(X - 80 \leq 90 - 80) = P\left(\frac{X - 80}{10} \leq \frac{90 - 80}{10}\right) = P(Z \leq 1) = \Phi(1) = 0.8413$.
- $P(65 \leq X \leq 100) = P\left(\frac{65 - 80}{10} \leq \frac{X - 80}{10} \leq \frac{100 - 80}{10}\right) = P(-1.5 \leq Z \leq 2) = \Phi(2) - (1 - \Phi(1.5)) = 0.9772 - (1 - 0.9332) = 0.9104$

✚ **Propiedades “gratis” de la tipificación:** Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, se tiene:

a) La función de densidad $f(x)$ es simétrica con respecto a la recta $x = \mu$, donde además tiene un máximo. También tiene dos puntos de inflexión en $x = \mu \pm \sigma$.

b) **Esperanza y varianza:** $E[X] = \mu$ y $V[X] = \sigma^2$.

c) **Función generadora de momentos y función característica:**

$$M(t) = e^{\mu t} e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}, \quad \varphi(t) = e^{i\mu t} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Y ambas funciones existen para todo $t \in \mathbb{R}$.

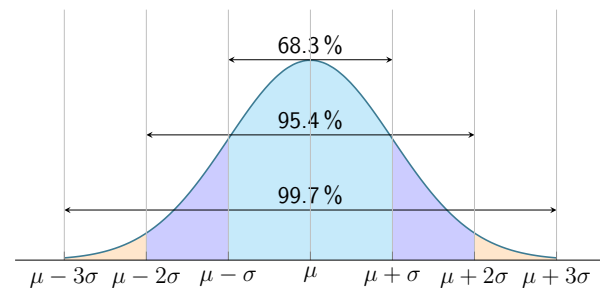
✚ **Agrupamiento central de probabilidades:** tomando intervalos con centro μ y radios siendo múltiplos de σ ,

a) $P(X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]) \approx 0.683$.

b) $P(X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]) \approx 0.954$.

c) $P(X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]) \approx 0.997$.

Notar: estos resultados mejoran con creces las cotas obtenidas mediante la Desigualdad de Chebyshev.



✚ **Transformaciones y sumas de normales:**

a) Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ y definimos $Y = aX + b$ para $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a\sigma)$.

b) Si $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ e $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ independientes, entonces

$$X + Y \sim \mathcal{N}\left(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right).$$

✚ **Propiedad aditiva de las normales:** En general, si X_1, X_2, \dots, X_n son independientes y normales con $X_k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k)$ y a_0, \dots, a_n son unos números reales, entonces la variable aleatoria

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n \sim \mathcal{N}\left(a_0 + a_1 \mu_1 + \dots + a_n \mu_n, \sqrt{a_1^2 \sigma_1^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2}\right).$$

En resumen: la comb. lineal de normales indep. es una normal con la media y varianza correspondientes.

✚ **Ejemplo:** Si $X_1 \sim \mathcal{N}(1, 1)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(3, 3)$, $X_3 \sim \mathcal{N}(4, 3)$ independientes y definimos $Y = X_1 + 3X_2 - X_3$.

• Tenemos una normal $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$ con:

$$\mu_Y = E[Y] = E[X_1] + 3E[X_2] - E[X_3] = 1 + 9 - 4 = 6.$$

$$\sigma_Y^2 = V[Y] = V[X_1] + 3^2 V[X_2] + (-1)^2 V[X_3] = 1 + 9 \times 4 + 9 = 46.$$

Por lo que $Y \sim \mathcal{N}(6, \sqrt{46}) = \mathcal{N}(6, 6.78)$.

• $P(Y > 4) = P\left(\frac{Y - 6}{6.78} > \frac{4 - 6}{6.78}\right) = P(Z > -0.295) \stackrel{\text{time.}}{=} \Phi(0.295) \approx \frac{\Phi(0.29) + \Phi(0.30)}{2} = 0.616.$