El Grupo Fundamental y sus aplicaciones en la clasificación de superficies compactas

Becario de colaboración en el Departamento de Matemáticas e Informática aplicadas a la Ingeniería Civil y Naval, 2024.
Guillermo Gómez Tejedor
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

La topología es una rama de las matemáticas que estudia el comportamiento de ciertos objetos a través de funciones continuas. La "equivalencia topológica" entre dos objetos viene dada por los homeomorfismos: funciones biyectivas continuas de inversa continuas. De aquí surge el problema fundamental de la topología, discernir si dos objetos son homeomorfos o no. Sin embargo, esto puede ser un problema muy complicado.
A finales del siglo XIX Henri Poincaré inicia una nueva rama de las matemáticas, la topología algebraica. Esta rama busca invariantes topológicos que tengan una estructura algebraica. Esto presenta una gran ventaja, ya que en general los objetos algebraicos suelen ser más fáciles de tratar.
Es en la topología algebraica donde entra el grupo fundamental: una herramienta algebraica permitirá asociar espacios topológicos con grupos, y funciones continuas con morfismos de grupos.

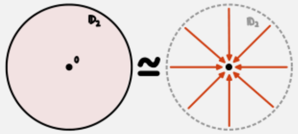
Henri Poincaré 1854-1912

HOMOTOPÍA una NOCIÓN más DÉBIL

IDEA: Definir un concepto menos restrictivo que el homeomorfismo puede facilitar la resolución de estos problemas.

Definición:
Sean $f, g: X \longrightarrow Y$ continuas. Una ***homotopía*** *es una aplicación*
$$\begin{array}{ll} F: X \times [0,1] \longrightarrow Y & \text{continua tal que } F(x,0) = f(x) \text{ y } F(x,1) = g(x). \\ \quad (x,t) \quad \longmapsto y & \text{Si una homotopía existe, denotamos } \boldsymbol{f \simeq g}. \end{array}$$

F actúa como una deformación continua de parámetro t entre las funciones.
NOTA: La igualdad entre funciones es un caso concreto de homotopía.

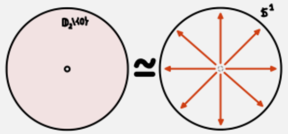


El disco $\mathbb{D}_2$ es homotópico a un punto.

Definición:
Se dice que X e Y son ***homotópicos*** $(\boldsymbol{X \simeq Y})$ *si existen $f: X \longrightarrow Y$ y $g: Y \longrightarrow X$ continuas tal que $\boldsymbol{f \circ g \simeq id_Y}$ y $\boldsymbol{g \circ f \simeq id_X}$.*
A f se le llama ***equivalencia de homotopía*** *entre X e Y.*

Como consecuencia, el homeomorfismo es un caso concreto de homotopía.

Teorema:
Si X e Y son homeomorfos, entonces son homotópicos.



$\mathbb{D}_2 \backslash \{0\}$ es homotópico a la circunferencia $\mathbb{S}^1$.

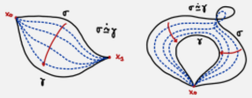
IDEA: si se prueba que dos espacios no son homotópicos entonces no son homeomorfos.

El GRUPO FUNDAMENTAL

La homotopía sigue siendo una noción difícil de tratar. Mediante el grupo de transformaciones continuas de lazos en un espacio definiremos una herramienta algebraica invariante por homótopía que nos permita simplificar el problema.

Definición:
Un ***lazo*** *basado en $x_0 \in X$ es un camino $\sigma: [0,1] \to X$ tal que $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$.*

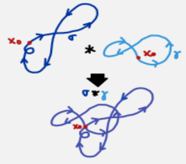
Definición:
Se dice que dos caminos son homotópicos ($\doteq$) si existe una homotopía entre ellos que mantenga fijos los extremos.



Homotopía de caminos.

Definición:
Definimos el ***grupo fundamental de X basado en x_0*** *como:*
$$\pi_1(X, x_0) := \{\text{Lazos basados en } x_0\}/\doteq$$
Con la operación $*$, que dados dos lazos da la clase de su concatenación.

NOTA: El grupo fundamental de un espacio arcoconexo no depende del punto base.



Producto de caminos.

Teorema:
Si X e Y son homotópicos, entonces dado $x_0 \in X$, se tiene que $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$ donde $y_0 = f(x_0)$ siendo f una equivalencia de homotopía entre X e Y.

IDEA: Si dos espacios arcoconexos no grupos fundamentales isomormorfos, entonces no son homeomorfos

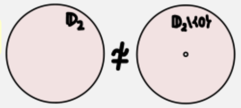
El GRUPO FUNDAMENTAL de la CIRCUNFERENCIA basado en 1

Usaremos la aplicación $p: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $p(t) = e^{2\pi i t}$. Dado un lazo σ *en* $\mathbb{S}^1$ basado en 1, llamamos levantamiento de σ a un camino en $\mathbb{R}$ $\tilde{\sigma}$ tal que $p(\tilde{\sigma}) = \sigma$, y se puede probar que es único salvo el punto inicial.

Lema:
Sean σ, γ dos lazos de $\mathbb{S}^1$ basados en 1, entonces: $\sigma \doteq \gamma \Leftrightarrow \widetilde{\sigma_0} \doteq \widetilde{\gamma_0} \Leftrightarrow \widetilde{\sigma_0}(1) = \widetilde{\gamma_0}(1)$
Siendo $\widetilde{\sigma_0}$ y $\widetilde{\gamma_0}$ los levantamientos de σ y γ que comienzan en 0.

Definimos $\omega_n(s) := e^{2\pi n s}$, el camino que da n vueltas a la circunferencia. El lema anterior permite probar que $\omega_n = \omega_1^n$. Además, también permite probar que todo camino σ *en* $\mathbb{S}^1$ es homotópico a ω_n para algún $n \in \mathbb{Z}$, pues $p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$. Luego:

$$\begin{array}{rcc} \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) = \{[\omega_n] | n \in \mathbb{Z}\} & \cong & \mathbb{Z} \\ \omega_n & \leftrightarrow & n \end{array}$$



$\mathbb{D}_2 \backslash \{0\}$ y $\mathbb{D}_2$ no son homotópicos pues $\pi_1(\mathbb{D}_2 \backslash \{0\}) = \mathbb{Z} \ncong \{1\} = \pi_1(\mathbb{D}_2)$

El TEOREMA de SEIFERT-VAN KAMPEN

PRESENTACIÓN FINITA DE GRUPO:
$\langle \textit{generadores} | \textit{relaciones} \rangle$

EJEMPLO:
$\langle a, b | aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}^2$

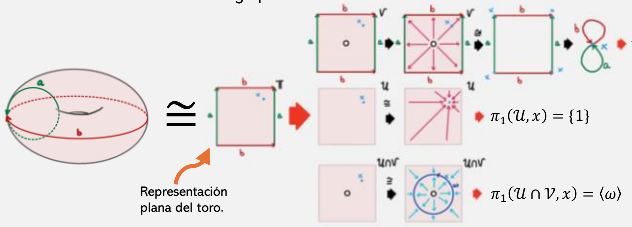
El siguiente resultado facilita obtener los grupos fundamentales.

TEOREMA DE SEIFERT-VAN KAMPEN (Versión de presentaciones de grupos)
Sea X un E.T. arcoconexo. Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ abiertos arcoconexos tal que $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = X$ y $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ sea arcoconexo.
Sea $x_0 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ entonces si $\pi_1(\mathcal{U}, x_0) = \langle A | \Theta \rangle, \pi_1(\mathcal{V}, x_0) = \langle B | \Sigma \rangle$ y $\pi_1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}, x_0) = \langle C | \Gamma \rangle$ entonces:
$$\pi_1(X, x_0) = \langle A, B | \Theta, \Sigma, R \rangle$$
Donde $R = \{[i(c) j(c)^{-1}] : c \in C\}$ siendo $i: \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ y $j: \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ las inclusiones naturales.

IDEA: Un lazo en X se puede expresar como producto de lazos en $\mathcal{U}$ y en $\mathcal{V}$. Sin embargo, se debe considerar que los lazos de $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ se pueden poner en función tanto de lazos de $\mathcal{U}$ como de $\mathcal{V}$.

El GRUPO FUNDAMENTAL del TORO

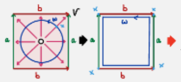
Observemos cómo calcularíamos el grupo fundamental del toro mediante el teorema de Seifert-Van Kampen.



$\pi_1(\mathcal{V}, x) = \langle a, b \rangle$
$\pi_1(\mathcal{U}, x) = \{1\}$
$\pi_1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}, x) = \langle \omega \rangle$

Representación plana del toro.

Por último, debemos encontrar la familia de relaciones 'R' del teorema.



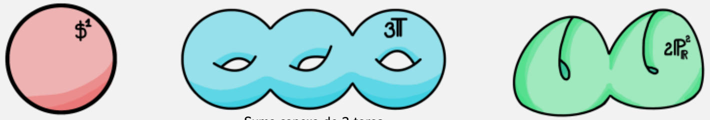
$j(\omega) = b^{-1}a^{-1}ba$

Como el grupo fundamental de $\mathcal{U}$ es el trivial, $R = \{b^{-1}a^{-1}ba\}$, y por tanto obtenemos que el grupo fundamental del toro es:
$$\pi_1(\mathbb{T}, x) = \langle a, b | b^{-1}a^{-1}ba \rangle$$

TEOREMA de CLASIFICACIÓN de SUPERFICIES COMPACTAS

Definición:
Una ***superficie compacta*** *es un E.T. compacto localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^2$.*

TEOREMA DE CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES COMPACTAS
Sea S una superficie compacta, entonces S es homeomorfa a una de las siguientes superficies.
$\mathbb{S}^1$ ó $g\mathbb{T}$ ó $\mathrm{k}\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ (*Para cierto* $g, k \in \mathbb{N}$).



Suma conexa de 3 toros.
Suma conexa de 2 planos proyectivos reales.

Demostraremos este teorema haciendo uso de sus grupos fundamentales.

REFERENCIAS

[1] Héctor Barge Yáñez y Alfonso Zamora Saiz, *Topología*, Sans y Torres S.L 2021.
[2] Juan Viu Sos, *Apuntes de topología*.

Contacto
guillermo.gomeztej@alumnos.upm.es

ALGORITMO de CLASIFICACIÓN de SUPERFICIES COMPACTAS

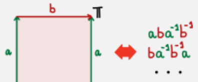
Definición:
Una ***representación plana*** *de una superficie compacta es un polígono con lados identificados dos a dos que es homemorfa a dicha superficie.*

IDEA: Reducir el problema de clasificación a un problema de combinatoria.

Esto lo permite el siguiente teorema.

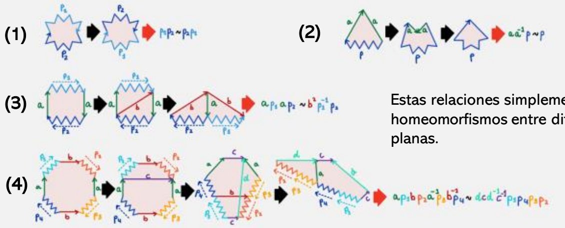
Teorema:
Toda superficie compacta admite una representación plana.

Las representaciones planas se pueden identificar con "palabras" según su borde. Sin embargo, una misma superficie puede tener diferentes representaciones planas y por tanto diferentes palabras.



El toro se puede identificar con diferentes palabras.

Para distinguir qué superficie es, se siguen diferentes pasos:



Estas relaciones simplemente indican homeomorfismos entre diferentes representaciones planas.

(5) Si p_1 y p_2 no comparten letras y $p_2 \sim p_2'$ entonces $p_1 p_2 \sim p_1 p_2'$.

Repitiendo estas identificaciones, se puede llegar a tres tipos de palabras diferentes:
- p = 1 que corresponde a que la superficie sea homeomorfa a $\mathbb{S}^1$.
- p = $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ que corresponde a que la superficie sea homeomorfa a $g\mathbb{T}$.
- p = $a_1^2 \dots a_k^2$ que corresponde a que la superficie sea homeomorfa a $\mathrm{k}\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

CONCLUSIÓN: Se obtienen 3 familias de superficies. Pero… ¿Son diferentes?

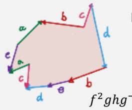
FINAL de la DEMOSTRACIÓN: COMPARACIÓN de SUPERFICIES

Basta observar que estas superficies no son homeomorfas entre sí. Para ello emplearemos el grupo fundamental. Obtenemos los grupos fundamentales de cada una de ellas
- $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \cong \{1\}$ que es simplemente el grupo trivial.
- $\pi_1(g\mathbb{T}, x_0) \cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g | a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle$ cuya abelianización es: $\mathrm{Ab}(\pi_1(g\mathbb{T}, x_0)) \cong \mathbb{Z}^{2g}$
- $\pi_1(\mathrm{k}\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}, x_0) \cong \langle a_1, \dots, a_k | a_1^2 \dots a_k^2 \rangle$ cuya abelianización es: $\mathrm{Ab}(\pi_1(\mathrm{k}\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}, x_0)) \cong \mathbb{Z}^{k-1} \oplus \mathbb{Z}_2$

Dado que las abelianizaciones no son isomorfas, los grupos fundamentales tampoco lo serán, y por tanto las superficies no pueden ser homemorfas. Concluyendo así la clasificación.

EJEMPLO de CLASIFICACIÓN de una SUPERFICIE

Dada una superficie obtenemos una representación plana.



Esta representación plana se identifica con la palabra $ab^{-1}cdbedc^{-1}ae^{-1}$.
$$ab^{-1}cdbedc^{-1}ae^{-1} \overset{(3)}{\sim} f^2cd^{-1}e^{-1}b^{-1}d^{-1}c^{-1}be^{-1} \overset{(4)}{\sim} f^2ghg^{-1}h^{-1}d^{-1}e^{-1}e^{-1}d^{-1}$$
Si nos fijamos en trozos por separado aplicando (5):
$$f^2ghg^{-1}h^{-1} \overset{(3)}{\sim} ih^{-1}g^{-1}ig^{-1}h^{-1} \overset{(3)}{\sim} h^{-1}g^{-1}ig^{-1}h^{-1}i \overset{(1)}{\sim} j^2gi^{-1}gi \overset{(3)}{\sim} gi^{-1}gij^2 \overset{(3)}{\sim} k^2i^2j^2 \qquad d^{-1}e^{-2}d^{-1} \overset{(1)}{\sim} e^{-2}d^{-2}$$

Uniendo las dos partes la palabra se corresponde con $a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2a_5^2$, y por tanto esta superficie es homeomorfa a un $5\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.