Équations différentielles I

TD1 – Équations différentielles de premier ordre

Exercice 1. Soient les équations différentielles :

(E_1) $x' = x + e^{2t}$	(E_2) $x' = x + t^2$	(E_3) $x' = x + \sin(t)$	(E_4) $x' = 2x + t^2 + 5$
(E_5) $xy' + 4y = x^3 - x$	(E_6) $xy' + 2y = 3$	(E_7) $y' = \left(\frac{-1}{1+x}\right) y + x$	(E_8) $y' + \frac{1}{\tan(x)} y = 2\cos(x)$

Pour chacune des équations différentielles (E_i) précédentes :

a) Donner la solution générale du système homogène associé.

b) Trouver une solution particulière dans l'espace vectoriel de fonctions précisé pour chaque équation.

(E_1) $x_P(t) \in \mathbb{R}\langle e^{2t}\rangle$.
(E_2) $x_P(t) \in \mathbb{R}\langle 1, t, t^2\rangle$.
(E_3) $x_P(t) \in \mathbb{R}\langle \cos(t), \sin(t)\rangle$.
(E_4) $x_P(t) \in \mathbb{R}\langle 1, t, t^2\rangle$.
(E_5) $y_P(x) \in \mathbb{R}\langle 1, x, x^2, x^3\rangle$.
(E_6) $y_P(x) \in \mathbb{R}\langle 1, x\rangle$.
(E_7) $y_P(x) \in \mathbb{R}\left\langle \frac{1}{1+x}, \frac{x}{1+x}, \frac{x^2}{1+x}, \frac{x^3}{1+x}\right\rangle$.
(E_8) $y_P(x) \in \mathbb{R}\langle 1, \sin(x)\rangle$.

c) Décrire la forme des solutions générales pour chaque équation différentielle.

d) Trouver une solution qui vérifie la condition initiale $x(0) = 1$ pour $(E_1), \dots, (E_4)$, $y(1) = 0$ pour $(E_5), (E_6), (E_7)$, et $y(\pi/2) = 0$ pour (E_8).

Exercice 2 (Méthode de la variation des constantes). Soit l'équation différentielle définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$:

$$x' = p(t)x + q(t) \qquad p, q \in \mathcal{C}(I) \tag{E}$$

Soit $P(t)$ une fonction primitive de $p(t)$. La forme générale des solutions de l'équation homogène associé est

$$x_H(t) = ce^{P(t)}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Supposons qu'il existe une solution particulière de la forme $x_P(t) = c(t) \cdot e^{P(t)}$, où $c(t)$ est une fonction différentiable sur I. Trouver une expression explicite pour $c(t)$.

Exercice 3. Trouver les solutions générales des équations différentielles suivantes par la méthode des coefficients indéterminés et par la méthode de la variation des constantes, si possible.

a) $tx' = x + t^2$.

b) $x' = ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

c) $x' = tx + 1$.

d) $x' = x + e^t$.

e) $x' = x + e^{-t}$.

f) $x' = \frac{2}{t+1}x + (t+1)^2$.

g) $x' = -\cos(t)x + \frac{1}{2}\sin(2t)$.

Exercice 4. Résoudre les problèmes de valeur initiale suivantes par la méthode des coefficients indéterminés et par la méthode de la variation des constantes. Comparez les résultats.

a) $\begin{cases} x' = 2x + t^2 - t \\ x(0) = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2tx' = x \\ x(1) = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{4+t^2}x' = tx \\ x(0) = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' = \sin(t)\cos(t)x \\ x(\pi/2) = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x' = e^t(x-1) \\ x(0) = e \end{cases}$

f) $\begin{cases} x' = e^t(x-1) \\ x(0) = 1 \end{cases}$

Exercice 5. Résoudre les problèmes de valeur initiale suivantes par la méthode des variables séparables en explicitant l'intervalle maximal de définition de la solution :

a) $\begin{cases} x' = -\frac{t}{x} \\ x(1) = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = \frac{t^2+1}{2-2x} \\ x(-3) = 4 \text{ et } x(-3) = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = \frac{t+tx^2}{4x} \\ x(1) = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' = \sqrt{\frac{t^2+t^2x^2}{x^2+t^2x^2}} \\ x(1) = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x' = \frac{-3x}{\tan(t)} \\ x(\pi/2) = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x' = -\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(t)} \\ x(\pi/4) = \pi/4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y' = -\frac{3x+xy^2}{2y+x^2y} \\ y(2) = 1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\,\rho}{\mathrm{d}\,\theta} = \frac{\sin\theta + e^{2\rho}\sin\theta}{3e^{\rho}+e^{\rho}\cos\theta} \\ \rho(\pi/2) = 0 \end{cases}$

Exercice 6. Résoudre avec la méthode des séries entières les problèmes de valeurs initiales suivantes :

a) $(1+t)x' - kx = 0$ avec $x(0) = 1$ ($k \in \mathbb{R}$).

b) $x'' + x = 0$ avec :
   i) $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$.
   ii) $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$.

c) $x' = 3t^2x$ avec $x(0) = 2$.

d) $(1+t^2)y'' - 8ty' + 15 = 0$ où $y(0) = 3, y'(0) = 8$.

e) $y'' - ty = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Notation pratique : $n! = n(n-1)(n-2)\ldots$, $n!! = n(n-2)(n-4)\ldots$, $n!!! = n(n-3)(n-6)\ldots$

Exercice 7 (Loi de la décroissance radioactive). Pour les substances radioactives, des expériences ont montré que, en l'absence d'apport extérieur, le taux de variation du nombre $Q(t)$ d'atomes radioactifs est proportionnel au nombre d'atomes radioactifs présents. La fonction Q est donc solution de l'équation

$$\frac{\mathrm{d}\,Q}{\mathrm{d}\,t} = -\lambda Q$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante propre à la substance radioactive.

a) Résoudre l'équation précédente avec condition initial $Q(0) = Q_0 \in \mathbb{R}_+$.

b) On appelle *temps de demi-vie* pour une substance radioactive le temps $T > 0$ nécessaire pour que la moitié de ses noyaux radioactifs disparaissent. Trouver une relation reliant T et λ.

c) Pour le carbone–14 (C–14), le temps de demi-vie est de 5700 ans. Que vaut approximativement λ ?

d) L'analyse des restes d'un arbre mort lors d'une éruption volcanique faut apparaître que l'arbre ne contient plus que 40% du C–14 qu'il contenait avant l'éruption. De quand date l'éruption si l'analyse a été effectuée en 2006 ? (*Indication : utiliser le temps de demi-vie du C–14*)

Exercice 8 (Modèles de croissance de population). On considère une population formée de $N = N(t)$ individus en évoluant en fonction du temps t, où N est dérivable.

a) **(Malthus, 1798)** On suppose que le taux d'accroissement de la population est proportionnel au nombre d'individus, c-à-d $N' = kN$ avec $k \in \mathbb{R}$ constante (égale à la différence entre la taux de natalité et de mortalité qui sont supposés constants dans ce modèle). Déterminer la solution N si à l'instant $t = 0$ la population est de $N_0 \in \mathbb{R}_+$ individus. Comment évolue cette population lorsque t tend vers l'infinie ?

b) **(Verhulst, 1838)** Ce modèle prend en compte que les ressources de l'environnement ne sont pas illimitées et suppose que le taux k n'est plus constat mais proportionnel à la différence entre une population maximale $N_{\max} > 0$ et la population à l'instant t. On a donc, pour un certain $r \in \mathbb{R}$, l'équation du modèle :

$$N'(t) = rN(t)(N_{\max} - N(t)) \qquad \text{(Équation logistique)}$$

   i) On admet que la population n'est jamais nulle et on pose $y(t) = \frac{1}{N(t)}$. Justifier que y est dérivable puis calculer N' en fonction de y et y'.

   ii) Remplacer N et N' par leurs expressions en fonction de y et y' dans l'équation logistique et vérifier que y est solution de l'équation différentielle

$$y' = r(1 - N_{\max}y)$$

   iii) Résoudre l'équation précédente. En déduire la solution générale pour l'équation logistique.

   iv) Comment évolue cette population lorsque t tends vers l'infinie ?