Équations différentielles I

TD2 – Équations différentielles de second ordre

Exercice 1. Soit l'équation différentielle ordinaire de second ordre de la forme

$$ax'' + bx' + cx = 0, \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{R}. \tag{$E_{a,b,c}$}$$

On cherche des solutions $x(t)$ de *forme exponentielle*, c.-à.-d. sous la forme $x(t) = e^{\lambda t}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

a) Prouver que $x(t) = e^{\lambda t}$ est solution de $(E_{a,b,c})$ si et seulement si $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

b) Trouver les solutions de forme exponentielle de :
   i) $x'' - 4x' + x = 0$.
   ii) $x'' - 3x' + 5x = 0$.
   iii) $x'' - 2x' + x = 0$.

c) Pour chacune des équations précédentes, montrer que les solutions exponentielles sont linéairement indépendantes.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles de second ordre suivantes :

a) $x'' + 2x' - 3x = -t + 1$.

b) $x'' + 2x' - 3x = e^{2t}$.

c) $x'' + 2x' - 3x = -t + 1 + e^{2t} + \cos(t)$.

d) $x'' - 6x' + 9x = 3 + e^{t}$.

e) $x'' - 3x' = e^{-2t}$.

f) $x'' - 3x' = 3 + t^2$.

g) $x'' + x = \sin(\omega t)$, avec $\omega \in \mathbb{R}$.

h) $x'' + x = t + \sin(2t)$.

Donner la solution qui vérifie les conditions initiales $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$ pour les équations (a)-(b)-(d)-(f)-(g)-(h).

Exercice 3 (Modéle de chute libre et chute avec des frottements). Le principe fondamental de la dynamique de Newton dit que le centre d'inertie d'un corps de masse m subit une accélération $\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F_e}$ où $\vec{F_e}$ est la somme des forces extérieures exercées sur l'objet.
On choisit un axe vertical repéré par le vecteur $\vec{j}$ orienté vers le haut et d'origine O d'altitude 0. Ainsi le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{j}$ et la vecteur accélération $\vec{a} = a(t)\vec{j}$.

a) Si $z(t)$ désigne l'altitude du centre d'inertie du corps à l'instant t, exprimer $a(t)$ en fonction de $z(t)$.

b) En l'absente de frottement, la seule force extérieure est la force de pesanteur $m\vec{g}$. En déduire que la fonction z satisfait l'équation différentielle :

$$z'' = -g$$

Puis la résoudre es supposant que la position initiale est $z(0) = h$ et que le corps m'a pas de vitesse initiale.

c) Avec frottements, on suppose que le corps est soumis à une force de frottements proportionnelle à la vitesse (hypothèse valable seulement pour une vitesse pas trop élevée). Vérifier que la fonction z vérifie alors l'équation différentielle :

$$z'' = -g - \frac{k}{m}z'$$

puis la résoudre.

d) Dans le cas précédent, calculer la limite de z' lorsque t tend vers l'infini. Quel interprétation pouvez vous en donner ?

Exercice 4. Trouver les solutions des problèmes de valeur initiale suivantes :

a) $\begin{cases} x'' + 5x' - 6x = e^t \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x'' + 5x' - 6x = 256e^{2t}(t^2+1) \\ x(0) = 107 \\ x'(0) = 210 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x'' + 5x' - 6x = \cos(3t) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x'' + 3x' + 2x = e^{3t} \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x'' - 8x' + 16x = e^{4t} \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x'' + 9x = 27 \\ x(0) = 4 \\ x'(0) = 6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x'' + 2x' - 3x = 1 + t + e^t \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x'' - x = t^2 \\ x(0) = e - 2 \\ x'(0) = e \end{cases}$

i) $\begin{cases} y'' + y' + y = 1 + t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

j) $\begin{cases} y'' + y' + y = 1 + t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

k) $\begin{cases} y'' + 4y = t + \sin(2t) \\ y(\pi) = 1 \\ y'(\pi) = 0 \end{cases}$

l) $\begin{cases} y'' + y' - 12y = e^t + e^{2t} - 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$

m) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = t^2 + 1 - e^t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

n) $\begin{cases} y'' - y = e^{-t} + 2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

o) $\begin{cases} y'' - y = \sin(t) - e^{2t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

p) $\begin{cases} y'' - y' - 2y = \cos(t) - \sin(2t) \\ y(0) = -7/20 \\ y'(0) = 1/5 \end{cases}$

Exercice 5 (Modèle d'une masse suspendue à un ressort). On considère un corps ponctuel M de masse m suspendu à un ressort et plongé dans un milieu ayant une certaine viscosité (air, eau, huile,...) On repère la position de M sur un axe vertical, repéré par un vecteur $\vec{j}$ orienté vers le haut, et on prend pour origine la position d'équilibre de M. On note $y(t)$ la cote de M sur cet axe à l'instant t (soit $\overrightarrow{OM} = y(t)\vec{j}$).

a) En absence de force d'excitation agissant sur M, trois forces interviennent pour déterminer le mouvement de M : la force inertielle proportionelle à y'' (coefficient de masse m), la force de viscosité proportionelle à y' (coefficient de viscosité $b > 0$) et la force de rappel proportionelle à y (coefficient de raideur du ressort $c > 0$). Alors y vérifie l'équation :

$$my'' + by' + cy = 0$$

Résoudre cette équation en cas de

i) Viscosité nulle ($b = 0$).

ii) Viscosité faible (b petit tel que $b^2 - 4mc < 0$).

iii) Viscosité grande (b petit tel que $b^2 - 4mc > 0$).

b) On suppose maintenant de plus que M est soumis à une force sinusoïdale de pulsation $\lambda \in \mathbb{R}$, soit :

$$my'' + by' + cy = k\sin(\lambda t)$$

où k est une constante. Résoudre cette équation dans chacun des cas précédentes.

c) **(Billan extra)** Dans chacune des solutions $y(t)$ trouvées dans (a) et (b), que peut-on dire sur $y(t)$ lorsque t tend vers l'infini ?