Algèbre Linéaire II

Exercices complémentaires – Feuille 2

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2} & \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}$ et prenons $\zeta = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

1. Est-ce que ζ est-elle une racine de l'unité ? Si oui, quel est l'ordre de ζ ?
   Réécrire A en fonction de ζ.
2. Prouver que $A^2 + \zeta A + 2\bar{\zeta} I_2 = O_2$.
3. En utilisant la formule précédente, justifier que A est inversible et calculer l'inverse de A.
4. Calculer A^{-1} via la méthode du pivot de Gauss et comparer avec le résultat précédent.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{-1+3i}{2} & 0 & \frac{-1-3i}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1+3i}{2} & \frac{1-3i}{2} & \frac{-1-3i}{2} \end{pmatrix}$.
Soit $a = \frac{-1+3i}{2}$.

1. Exprimer A en fonction de a.
2. Vérifier que $A^2 - I_3 \neq O_3$ et prouver que $A^3 - A = O_3$.
3. À partir des arguments précédentes démontrer que A n'est pas inversible. Vérifier que A n'est pas inversible en calculant le déterminant.

Important : **Dans la suite, justifier que les matrices sont inversibles en calculant leurs déterminants.**

Exercice 3. Trouver l'inverse de la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ par la méthode du pivot de Gauss. Comparer le résultat obtenu avec celui de l'exercice 14 de la feuille 1.

Exercice 4. Calculer A^{-1} et B^{-1} en utilisant la méthode du pivot de Gauss où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

et comparer le résultat avec l'exercice 13 de la feuille 1.

Exercice 5. Calculer A^{-1} en utilisant la méthode du pivot de Gauss où $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ et comparer le résultat obtenu avec celui de l'exercice 15 de la feuille 1.

Exercice 6. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^{-1} et B^{-1} en utilisant la méthode du pivot de Gauss.
2. Vérifier les résultats avec un produit.

Exercice 7. Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer :

1. La matrice P^{-1}.
2. La matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}XP = Q$. [Remarque : utiliser calcul littéral]
3. La matrice $(PQP^{-1})^2$.

Exercice 8. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

1. Trouver les valeurs de a telles que A soit inversible.
2. Pour $a = 2$, calculer A^{-1} en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

Exercice 9. Résoudre par la méthode du pivot de Gauss les systèmes suivantes :

$$\text{a)} \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 1 \\ 2x + y + 2z & = & 2 \\ x + y + z & = & 1 \end{array} \right. \qquad \text{b)} \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 1 \\ y + 2z & = & 0 \\ x + 3y & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\text{c)} \left\{ \begin{array}{rcl} x + y - z & = & 1 \\ x - y + z & = & 1 \\ -x + y + z & = & 1 \end{array} \right. \qquad \text{d)} \left\{ \begin{array}{rcl} 3x - 2y + 4z & = & 8 \\ 2x + 3y - 3z & = & 4 \\ x - 3y - 5z & = & -6 \\ 4x + 4y + 6z & = & 18 \end{array} \right.$$

Exercice 10. Résoudre par la méthode du pivot de Gauss le systèmes suivante, en posant comme paramètres libres les inconnues de subindice plus grande :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 & = & 0 \\ x_1 + x_3 - x_5 & = & 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 - 2x_5 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Exercice 11. Étudier l'existence et déterminer les solutions pour $a \in \mathbb{R}$ du système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - ay & = & 2 \\ ax - y & = & a + 1 \end{array} \right.$$

Exercice 12. Étudier l'existence et déterminer les solutions pour $a \in \mathbb{R}$ du système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + az & = & 1 \\ 2x + z & = & 2 \end{array} \right.$$

Exercice 13 (Extra ball). Étudier l'existence et déterminer les solutions pour $m \in \mathbb{R}$ du système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - my + m^2z & = & m \\ mx - m^2y + mz & = & 1 \\ mx + y - m^3z & = & -1 \end{array} \right.$$