Estadística y Optimización

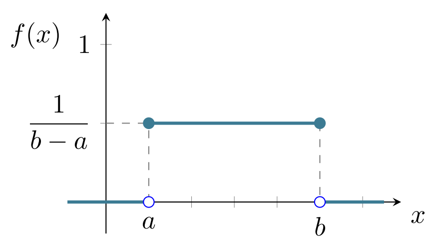
Modelos de variables aleatorias continuas

Distribución uniforme continua: $X \sim \mathcal{U}\big([a,b]\big)$

- **Noción del "modelo equiprobable" en el caso continuo:** Sea $[a,b]$ un intervalo acotado de $\mathbb{R}$ y consideramos que la densidad puntual es constante a lo largo de este intervalo.

- **Función de densidad de probabilidad:** $X \sim \mathcal{U}\big([a,b]\big)$ toma valores en $[a,b]$ y

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathsf{longitud}([a,b])} = \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}}$$



- **Ejemplos:**
  - Cortes aleatorios en vigas, varas, cuerdas, etc de longitud ℓ unidades: $X \sim \mathcal{U}\big([0,\ell]\big)$
  - Tiempos de llegada de un autobús con frecuencia de 15 mins.: $X \sim \mathcal{U}\big([0,15]\big)$.
  - Nota de un/a estudiante de Estadística que ha llevado el curso al dia: $X \sim \mathcal{U}\big([8.5,10]\big)$.

- **Función de distribución:**

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{\mathsf{longitud}([a,x])}{\mathsf{longitud}([a,b])} = \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 1, & x > b \end{cases}}$$

- **Esperanza y varianza:** Basta integrar,

$$\boxed{E[X] = \frac{a+b}{2}} \qquad \boxed{V[X] = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

- **Fun. gen. de momentos y func. carac.:**

$$\boxed{M(t) = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}} \qquad \boxed{\varphi(t) = \frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}}$$

- **Ejemplo:** $X =$ "tiempo de llegada de un autobús" $\sim \mathcal{U}\big([0,15]\big)$,

$$P(0 \le X \le x) = \frac{x}{15}, \qquad 0 \le x \le 15.$$

Por ejemplo, $\frac{1}{2} = P(0 \le X \le 7.5) = P(7.5 \le X \le 15) = P(3.5 \le X \le 11)$.

$$E[X] = \frac{15}{2} = 7.5, \quad V[X] = \frac{15^2}{12} = 18.75, \quad M(t) = \frac{e^{t\cdot 15} - e^{t\cdot 0}}{t\cdot 15} = \frac{e^{15t}-1}{15t}, \quad \varphi(t) = \frac{e^{15it}-1}{15it}.$$

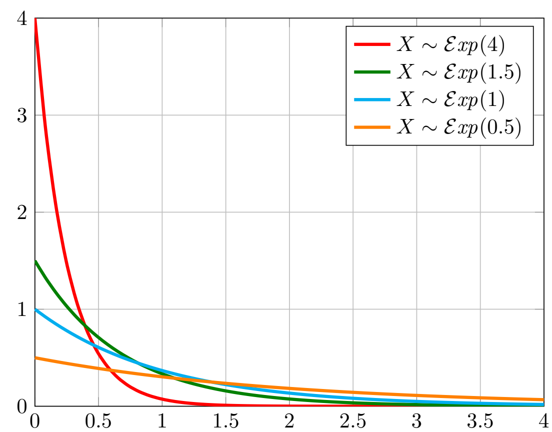
Distribución exponencial: $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$

- **Versión contínua de la geométrica:** contar X = tiempo *continuo* de espera hasta la primera ocurrencia de un cierto evento, el cual aparece con un promedio de $\lambda > 0$ veces por unidad de tiempo. Ejemplos:
  - Tiempo de vida de una máquina.
  - Tiempo hasta la aparición de un fallo/avería en componentes electrónicos.
  - Tiempo hasta que ocurra un fenómeno natural (como una erupción o un tornado).
  - Tiempo que pasa un teleoperador con cada cliente.
  - Tiempo de diferencia entre el paso de dos camiones pesados por un puente.

- **Función de densidad**: $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ si toma valores en $x \in [0, +\infty]$ con densidad

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}}$$

- Intuitivamente, se vé que cuanto mayor sea el parámetro $\lambda > 0$, mayor se concentrará la probabilidad cerca del origen y mayor será el decaimiento de la exponencial.



- **Función de distribución:**

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}}$$

- **"Función de supervivencia":** Esta función da la probabilidad de que el suceso (p.ej. "fallo") no haya aparecido hasta un momento dado,

$$\boxed{S(x) := P\left(X > x\right) = 1 - F(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}}$$

- **Esperanza y varianza:**

$$\boxed{E[X] = \frac{1}{\lambda}} \qquad \boxed{V[X] = \frac{1}{\lambda^2}.}$$

- **Fun. gen. de momentos y func. carac.:**

$$\boxed{M(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}} \qquad \boxed{\varphi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}}$$

Notar que $M(t)$ solo está definida para $t < \lambda$, debido a la convergencia de la integral.

☞ **Ejemplo:** $X =$ "tiempo de vida (en años) de un marcapasos" $\sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ con vida media de 16 años.

a) ¿Qué tipo de exponencial sigue X? Tenemos que $16 = E[X] = \frac{1}{\lambda}$. Por lo que $X \sim \mathcal{E}xp(1/16)$.

b) Probabilidad de que haya que cambiarlo entre los primeros 10 y 20 años:

$$P\left(10 \leq X \leq 20\right) = \frac{1}{16}\int_{10}^{20} e^{-x/16}\mathrm{d}x = F(20) - F(10) = e^{-10/16} - e^{-20/16} = 0.2487.$$

c) Probabilidad de que el marcapasos dure maś de 20 años:

$$P\left(X > 20\right) = \frac{1}{16}\int_{0}^{20} e^{-x/16}\mathrm{d}x = 1 - F(20) = S(20) = e^{-20/16} = 0.2865.$$

☞ **Conexión con la Poisson:** si $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$,

- Y cuenta la aparición de un suceso en una unidad de tiempo,
- $Y_t =$"núm. de veces que aparece el suceso en $[0,t]$"$\sim \mathcal{P}(\lambda t)$, para un $t \geq 0$
- definiendo $X =$"tiempo hasta la primera ocurrencia":

$$\begin{aligned} F_X(t) = P\left(X \leq t\right) = 1 - P\left(X > t\right) = 1 - P\left(Y_t = 0\right) = 1 - e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda t}, \\ \Longrightarrow f_X(t) = F_X'(x) = \lambda e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Es decir, que $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$.

☞ **Propiedad de "falta de memoria":** Si $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$, para todos $x_0, x_1 \geq 0$ se tiene:

$$P\left(X > x_0 + x_1 \,|\, X > x_0\right) = P\left(X > x_1\right).$$

☞ **Ejemplo:** Siguiendo con $X =$ "tiempo de vida (en años) de un marcapasos" $\sim \mathcal{E}xp(1/16)$. Si el marcapasos lleva 5 años funcionando correctamente, ¿cuál es la probabilidad de que no haya que caabiarlo antes de que pasen otros 15 años?

$$\begin{aligned} P\left(X > 20 \,|\, X > 5\right) &= \frac{P\left(\{X > 20\} \cap \{X > 5\}\right)}{P\left(X > 5\right)} = \frac{P\left(X > 20\right)}{P\left(X > 5\right)} \\ &= \frac{S(20)}{S(5)} = \frac{e^{-20/16}}{e^{-5/16}} = e^{-15/16} = 0.3916. \end{aligned}$$

☞ **Mínimo de dos exponenciales:** Si $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda_1)$ y $Y \sim \mathcal{E}xp(\lambda_2)$ son independientes, entonces

$$Z = \text{mín}(X,Y) \sim \mathcal{E}xp(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Distribución normal: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

- La distibución continua más conocida y una de las más usuales en el estudio de todas las Ciencias Naturales y Sociales. Ejemplos:
  - Alturas/pesos de una población.
  - Errores de medida en experimentos.
  - Precipitaciones y descargas de ríos a largo plazo.
  - Si tenemos un vector aleatorio $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables independientes y con misma distribución, la variable aleatoria "promedio"
  $$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$
  se aproxima por una normal cuando n es grande (Teorema Central del Límite).

- **Función de densidad**: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ es *normal de media* μ *y varianza* σ^2 si toma valores en $x \in \mathbb{R}$ con

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.}$$

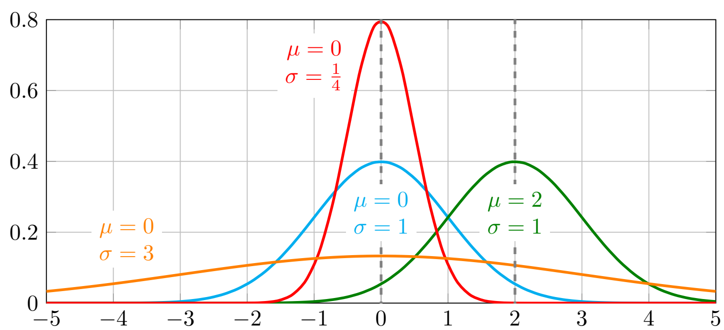


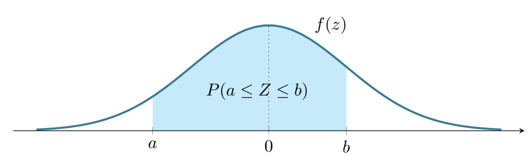
Figura 1: Las distribuciones normales $\mathcal{N}(0, 1)$, $\mathcal{N}(2, 1)$, $\mathcal{N}(0, 1/2)$ y $\mathcal{N}(0, 3)$.

- Vamos a comenzar estudiando el caso $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, conocida como la *normal tipificada*. En la práctica, siempre podremos reducirnos a este caso.

Normal tipificada: En general, usaremos la notación $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

- **Función de densidad:**

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz, \qquad z \in \mathbb{R}.}$$



- **Propiedades de $f(z)$:**

  a) $f(z)$ es par, es decir simétrica con respecto a $z = 0$.

  b) tiene máximos en $z = 0$ y puntos de inflexión en $z = \pm 1$.

☞ **Fun. gen. de momentos y func. carac.:**

$$\boxed{M(t) = e^{\frac{t^2}{2}}} \qquad \boxed{\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}}$$

(Calculadas en el Ejercicio 42)

Notar que $M(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

☞ **Esperanza y varianza:** Calculando $M'(0)$ y $M''(0)$ a partir de lo anterior o mediante integrales,

$$\boxed{E[X] = 0} \qquad \boxed{V[X] = 1}$$

☞ **Función de distribución:** No existe primitiva conocida de esta función de densidad, debemos usar tablas con aproximaciones numéricas de:

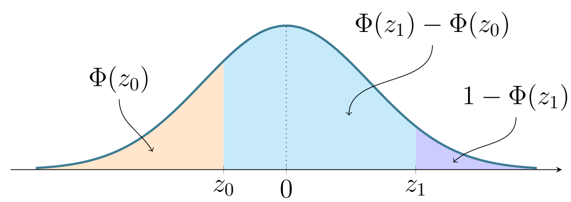
$$\boxed{\Phi(z_0) := P(Z \leq z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{\frac{-x^2}{2}} \mathrm{d}x}$$

☞ Para $z_0 < z_1$ reales, tenemos:

a) $P(z_0 \leq Z \leq z_1) = \Phi(z_1) - \Phi(z_0)$.

b) $P(Z \geq z_1) = 1 - \Phi(z_1) = \Phi(-z_1)$.

Con estas propiedades podemos calcular cualquier probabilidad a partir de la tabla.



☞ **Ejemplo:** Dada $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, calculamos usando la tabla de la normal tipificada:

- $P(0 \leq X \leq 1.5) = \Phi(1.5) - \Phi(0) = 0.9332 - 0.5 = 0.4332$.
- $P(-1.2 \leq X \leq 1.2) = 2 \times P(0 \leq X \leq 1.2) = 2 \times (\Phi(1.2) - \Phi(0)) = 2 \times (0.8849 - 0.5) = 0.7698$.
- $P(X \leq -1.85) = 1 - P(X \leq 1.85) = 1 - \Phi(1.85) = 1 - 0.9678 = 0.0322$.

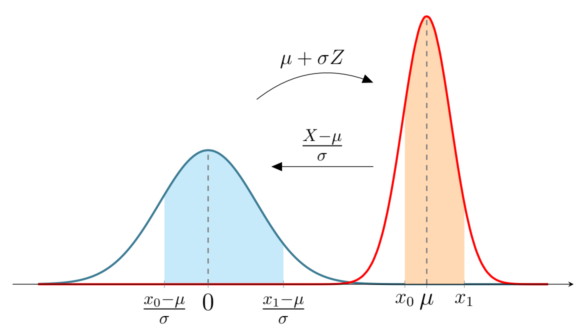
Normal general: Cualquier otra normal $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ se puede tipificar por traslación y escalado.

☞ **Teorema:** Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, entonces

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

☞ Del mismo modo, si $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, entonces

$$X = \mu + \sigma Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma).$$



☞ **Ejemplo:** Dada $X \sim \mathcal{N}(80, 10)$, podemos tipificar $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-80}{10}$ y leemos en la tabla para calcular:

- $P\left(X \leq 90\right) = P\left(X - 80 \leq 90 - 80\right) = P\left(\frac{X - 80}{10} \leq \frac{90 - 80}{10}\right) = P\left(Z \leq 1\right) = \Phi(1) = 0.8413$.
- $P(65 \leq X \leq 100) = P\left(\frac{65 - 80}{10} \leq \frac{X - 80}{10} \leq \frac{100 - 80}{10}\right) = P(-1.5 \leq Z \leq 2) = \Phi(2) - (1 - \Phi(1.5)) = 0.9772 - (1 - 0.9332) = 0.9104$

☞ **Propiedades "gratis" de la tipificación:** Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, se tiene:

a) La función de densidad $f(x)$ es simétrica con respecto a la recta $x = \mu$, donde además tiene un máximo. También tiene dos puntos de inflexión en $x = \mu \pm \sigma$.

b) **Esperanza y varianza:** $\boxed{E[X] = \mu \text{ y } V[X] = \sigma^2}$.

c) **Función generadora de momentos y función característica:**

$$\boxed{M(t) = e^{\mu t} e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}}, \qquad \boxed{\varphi(t) = e^{i\mu t} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}}.$$

Y ambas funciones existen para todo $t \in \mathbb{R}$.

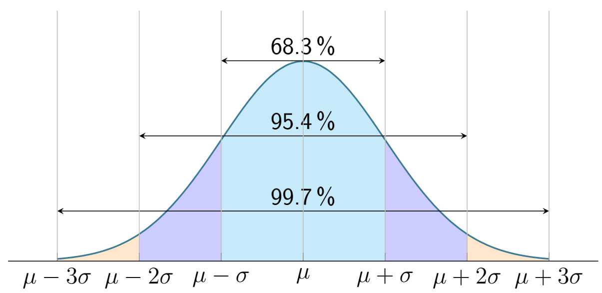
☞ **Agrupamiento central de probabilidades:** tomando intervalos con centro μ y rádios siendo múltiplos de σ,

a) $P(X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]) \approx 0.683$.

b) $P(X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]) \approx 0.954$.

c) $P(X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]) \approx 0.997$.

Notar: estos resultados mejoran con creces las cotas obtenidas mediante la Desigualdad de Chebyshev.



☞ **Transformaciones y sumas de normales:**

a) Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ y definimos $Y = aX + b$ para $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a\sigma)$.

b) Si $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ e $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ independientes, entonces

$$X + Y \sim \mathcal{N}\left(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right).$$

☞ **Propiedad aditiva de las normales:** En general, si X_1, X_2, ..., X_n son independientes y normales con $X_k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k)$ y $a_0, \ldots, a_n$ son unos números reales, entonces la variable aleatoria

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n \sim \mathcal{N}\left(a_0 + a_1\mu_1 + \cdots + a_n\mu_n, \sqrt{a_1^2\sigma_1^2 + \cdots + {a_n}^2\sigma_n^2}\right).$$

En resumen: la comb. lineal de normales indep. es una normal con la media y varianza correspondientes.

☞ **Ejemplo:** Si $X_1 \sim \mathcal{N}(1, 1), X_2 \sim \mathcal{N}(3, 3), X_3 \sim \mathcal{N}(4, 3)$ independientes y definimos $Y = X_1 + 3X_2 - X_3$.

- Tenemos una normal $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$ con:

$$\mu_Y = E[Y] = E[X_1] + 3E[X_2] - E[X_3] = 1 + 9 - 4 = 6.$$
$$\sigma_Y^2 = V[Y] = V[X_1] + 3^2 V[X_2] + (-1)^2 V[X_3] = 1 + 9 \times 4 + 9 = 46.$$

  Por lo que $Y \sim \mathcal{N}(6, \sqrt{46}) = \mathcal{N}(6, 6.78)$.

- $P(Y > 4) = P\left(\frac{Y-6}{6.78} > \frac{4-6}{6.78}\right) = P(Z > -0.295) \overset{\text{sime.}}{=} \Phi(0.295) \approx \frac{\Phi(0.29) + \Phi(0.30)}{2} = 0.616.$