#### Análise de Complexidade de Tempo do Método Heap Sort

Eduardo Costa de Paiva eduardocspv@gmail.com Frederico Franco Calhau fredericoffc@gmail.com Gabriel Augusto Marson gabrielmarson@live.com

Faculdade de Computação Universidade Federal de Uberlândia

18 de dezembro de 2015

# Lista de Figuras

2.1	Complexidade de custo do método Heap Sort (Vetor Aleatório)	11
2.2	Complexidade de tempo do método Heap Sort com mínimos quadrados (Vetor	10
	Aleatório)	12
2.3	Complexidade de custo do método Heap Sort (Vetor Ordenado Crescente) .	12
2.4	Complexidade de tempo do método Heap Sort (Vetor Ordenado Crescente)	13
2.5	Complexidade de tempo do método Heap Sort com mínimos quadrados (Vetor	
	Ordenado Crescente)	13
2.6	Complexidade de custo do método Heap Sort (Vetor Ordenado Decrescente)	14
2.7	Complexidade de tempo do método Heap Sort (Vetor Ordenado Decrescente)	14
2.8	Complexidade de tempo do método Heap Sort com mínimos quadrados (Vetor	
	Ordenado Decrescente)	15
2.9	Complexidade de custo do método Heap Sort (Vetor Parcialmente Ordenado	
	Crescente)	15
2.10	Complexidade de tempo do método Heap Sort com mínimos quadrados (Vetor	
	Parcialmente Ordenado Crescente)	16
2.11	Complexidade de custo do método Heap Sort (Vetor Parcialmente Ordenado	
	Decrescente)	16
2.12	Complexidade de tempo do método Heap Sort (Vetor Parcialmente Ordenado	
	Decrescente)	17
2.13	Complexidade de tempo do método Heap Sort com mínimos quadrados (Vetor	
	Parcialmente Ordenado Decrescente)	17

## Lista de Tabelas

3.1	Vetor Aleatorio	18
3.2	Vetor Ordenado Crescente	19
3.3	Vetor Ordenado Decrescente	19
3.4	Vetor Parcialmente Ordenado Crescente	20
3.5	Vetor Parcialmente Ordenado Decrescente	20

# Lista de Listagens

1.1	HeapSort.py	7
	testeGeneric.py	
1.3	monitor.py	9
A.1	testdriver.py	3

### Sumário

Li	ista de Figuras	
Li	sta de Tabelas	3
1	Introdução           1.1 Diretório	<b>6</b> 6 7
2	Gráficos	11
3	Tabelas	18
4	Análise	21
5	Citações e referências bibliográficas	22
$\mathbf{A}$	pêndice	23
A	Códigos extensos	23
	A.1 testdriver.py	23

### Introdução

Este documento foi feito com o intuito de exibir uma análise do algoritmo Heap Sort com relação a tempo. Além disso, será feita uma comparação da curva de tempo do que se espera do algoritmo, ou seja, O(nlgn) com o caso prático.

#### 1.1 Diretório

Dada a seguinte organização das pastas, utilizamos o arquivo testdriver.py, executando, uma função conveniente por vez. Para mais informações vá até ao apêndice.

OBS.: É necessário instalar o programa tree pelo terminal. Isso pode ser feito da seguinte maneira.

```
> sudo apt-get install tree
```

A seguir é mostrada a organização das pastas sendo que os diretórios significativas para o projeto são Codigos e Relatorio além do raíz:

```
tree --charset=ASCII
|-- Codigos
   |-- Bubble
       `-- __pycache__
    |-- Bucket
       `-- <u>__</u>pycache__
    |-- Counting
       `-- __pycache__
   |-- Heap
        `-- __pycache__
  |-- Insertion
  | `-- __pycache__
    |-- Merge
      `-- __pycache__
    |-- Quick
   | `-- __pycache__
|-- Radix
    `-- Selection
        `-- ___pycache___
```

```
|-- Other
|-- Plot
|-- __pycache__
`-- relatorio
    |-- imagens
       |-- Bubble
       |-- Bucket
        |-- Counting
        |-- Heap
        |-- Insertion
        |-- Merge
        |-- Quick
        |-- Radix
        `-- Selection
    |-- Relatorio_Bubble
    |-- Relatorio_Bucket
    |-- Relatorio_Counting
    |-- Relatorio_Heap
    |-- Relatorio_Insertion
    |-- Relatorio_Merge
    |-- Relatorio_Selection
    `-- Resultados
        |-- Bubble
        |-- Bucket
        |-- Counting
        |-- Heap
        |-- Insertion
        |-- Merge
        |-- Quick
        `-- Selection
48 directories
```

#### 1.2 Códigos de programas

Seguem os códigos utilizados na análise de tempo do algoritmo Heap Sort.

1. HeapSort.py: Disponível na Listagem 1.1.

Listagem 1.1: HeapSort.py

```
1 #@profile
2 def trocaElementos(A,x,y):
      aux = A[y]
      A[y] = A[x]
4
      A[x] = aux
5
7 #@profile
8 def maxHeapify(A,n,i):
      esquerda = 2*i + 1 #Pq o indice começa de 0
9
      direita = 2*i +2 #Pq o indice começa de 0
10
11
      if esquerda < n and A[esquerda] > A[i]:
12
          maior = esquerda
13
      else:
```

```
maior = i
      if direita < n and A[direita] > A[maior]:
16
          maior = direita
17
      if maior!=i:
1.8
          trocaElementos(A,i,maior)
          maxHeapify(A, n, maior)
20
2.1
22 #@profile
23 def constroiMaxHeap(A,n):
      for i in range(n // 2, -1, -1):
          maxHeapify(A,n,i)
25
26
28 @profile
29 def heapSort(A):
      n = len(A)
      constroiMaxHeap(A,n)
31
32
      m = n
33
      for i in range((n-1), 0, -1):
          trocaElementos(A,0,i)
          m = m - 1
35
          maxHeapify(A, m, 0)
36
37
38 #lista = [13,46,17,34,41,15,14,23,30,21,10,12,21]
39 #heapSort(lista, 13)
40 #print(lista)
41
43 #heapSort([i for i in range(524288)])
```

2. testeGeneric.py Disponível na Listagem 1.2

#### Listagem 1.2: testeGeneric.py

```
1 ##adicionei - Serve para importar arquivos em outro diretório
2 ### A CADA NOVO MÉTODO MUDAR O IMPORT, A CHAMADA DA FUNÇÃO E O SYS.
     PATH
4 import sys
5 sys.path.append('/home/gmarson/Git/AnaliseDeAlgoritmos/Trabalho_Final
     /Codigos/Radix')
6 sys.path.append('/home/gmarson/Git/AnaliseDeAlgoritmos/Trabalho_Final
     1)
8 sys.setrecursionlimit(200000)
10 from monitor import *
11 from memoria import *
13 from RadixSort import *
14 import argparse
16 parser = argparse.ArgumentParser()
17 parser.add_argument("n", type=int, help="número de elementos no vetor
      de teste")
18 args = parser.parse_args()
20 v = criavet(args.n)
21 radix(v)
```

```
22
23
24
25 ## A EXECUÇÃO DESSE ARQUIVO EH ASSIM
26 ## NA LINHA DE COMANDO VC MANDA O NOME DO ARQUIVO E O TAMANHO DO
ELEMNTO DO vetor
27 ##EXEMPLO testeBubble.py 10
28 ##ele gera um vetor aleatório (criavet) e manda pro bubble_sort
```

3. monitor.py Disponível na Listagem 1.3

#### Listagem 1.3: monitor.py

```
1 # Para instalar o Python 3 no Ubuntu 14 ou 15
2 #
3 # sudo apt-get install python3 python3-numpy python3-matplotlib
      ipython3 python3-psutil
5
6 from math import *
7 import gc
8 import random
9 import numpy as np
1.0
11
12 from tempo import *
13
14 # Vetores de teste
15 def troca(m, v, n): ## seleciona o nível de embaralhamento do vetor
      m = trunc(m)
16
      mi = (n-m)//2
17
      mf = (n+m)//2
18
      for num in range(mi, mf):
19
           i = np.random.randint(mi, mf)
20
           j = np.random.randint(mi, mf)
21
          #print("i= ", i, " j= ", j)
22
          t = v[i]
          v[i] = v[j]
24
          v[j] = t
25
      return v
26
27
28
29 def criavet(n, grau=0, inf=0, sup=0.999999999):
30
      passo = (sup - inf)/n
      if grau < 0.0:
31
          v = np.arange(sup, inf, -passo)
32
          if grau <= -1.0:
33
34
               return v
          else:
35
               return troca (-grau*n, v, n)
36
      elif grau > 0.0:
37
          v = np.arange(inf, sup, passo)
38
          if grau >= 1.0:
39
               return v
40
          else:
41
               return troca(grau*n, v, n)
43
           #return np.random.randint(inf, sup, size=n)
44
          return [random.random() for i in range(n)] # for bucket sort
45
```

```
46
47
48
49 #print(criavet(20))
51 #Tipo
                                                  grau
52 #aleatorio
                                                   0
53 #ordenado_crescente
                                                   1
54 #ordenado_decrescente
                                                  -1
55 #parcialmente_ordenado_crescente
                                                  0.5
56 #parcialmente_ordenado_decrescente
                                                -0.5
58
59 def executa(fn, v):
      gc.disable()
60
      with Tempo(True) as tempo:
           fn(v)
62
      gc.enable()
63
```

4. testdriver.py Referenciado no apêndice A.

#### Gráficos

Seguem os Gráficos utilizadas no processo de análise do método Heap Sort:

- 1. Para um vetor aleatório
  - (a) Complexidade de custo do método Heap Sort disponível na lista de imagens 2.1.

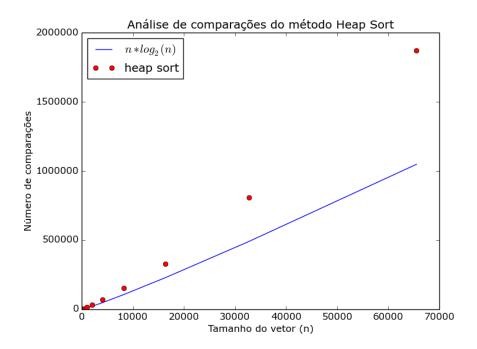


Figura 2.1: Complexidade de custo do método Heap Sort (Vetor Aleatório)

- (b) Complexidade de tempo do método Heap Sort com mínimos quadrados disponível na lista de imagens 2.2.
- 2. Para um vetor ordenado crescente
  - (a) Complexidade de custo do método Heap Sort disponível na lista de imagens 2.3.

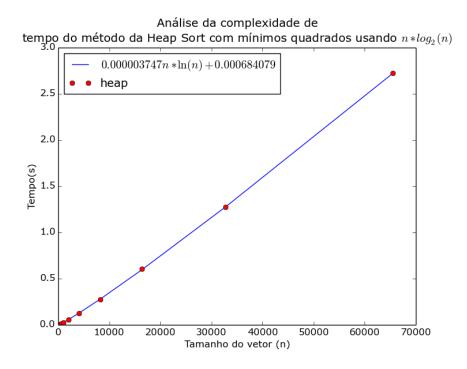


Figura 2.2: Complexidade de tempo do método Heap Sort com mínimos quadrados (Vetor Aleatório)

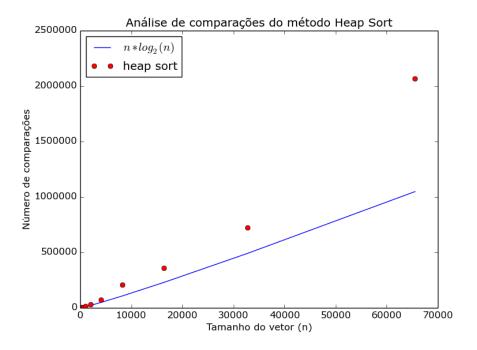


Figura 2.3: Complexidade de custo do método Heap Sort (Vetor Ordenado Crescente)

- (b) Complexidade de tempo do método Heap Sort disponível na lista de imagens 2.4.
- (c) Complexidade de tempo do método Heap Sort com mínimos quadrados disponível na lista de imagens 2.5.
- 3. Para um vetor ordenado decrescente

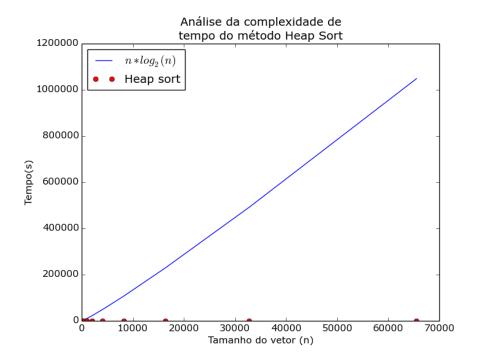


Figura 2.4: Complexidade de tempo do método Heap Sort (Vetor Ordenado Crescente)

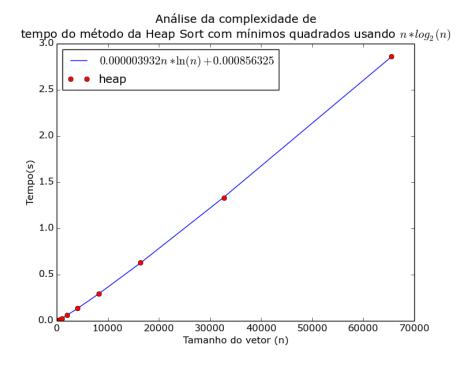


Figura 2.5: Complexidade de tempo do método Heap Sort com mínimos quadrados (Vetor Ordenado Crescente)

- (a) Complexidade de custo do método Heap Sort disponível na lista de imagens 2.6.
- (b) Complexidade de tempo do método Heap Sort disponível na lista de imagens 2.7.
- (c) Complexidade de tempo do método Heap Sort com mínimos quadrados disponível na lista de imagens 2.8.

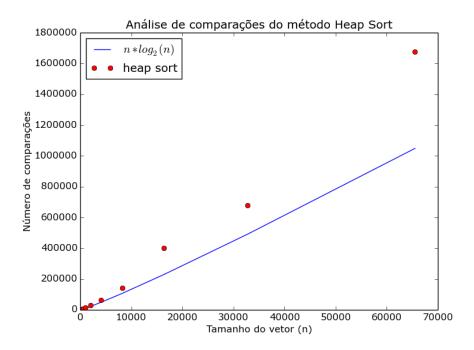


Figura 2.6: Complexidade de custo do método Heap Sort (Vetor Ordenado Decrescente)

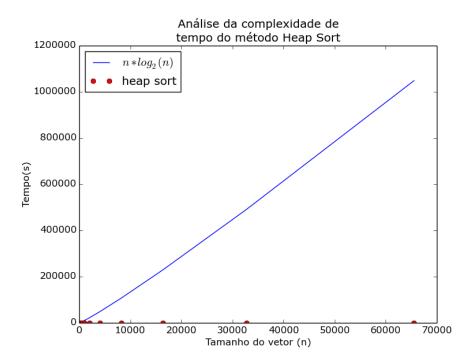


Figura 2.7: Complexidade de tempo do método Heap Sort (Vetor Ordenado Decrescente)

- 4. Para um vetor parcialmente ordenado crescente
  - (a) Complexidade de custo do método Heap Sort disponível na lista de imagens 2.9.
  - (b) Complexidade de tempo do método Heap Sort com mínimos quadrados disponível na lista de imagens 2.10.
- 5. Para um vetor parcialmente ordenado decrescente

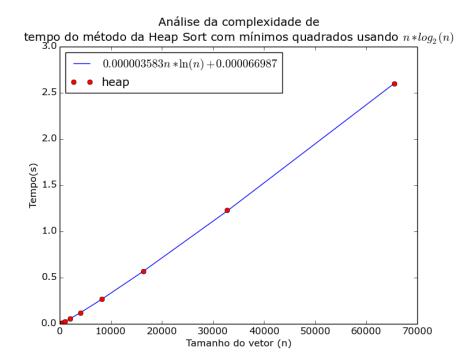


Figura 2.8: Complexidade de tempo do método Heap Sort com mínimos quadrados (Vetor Ordenado Decrescente)

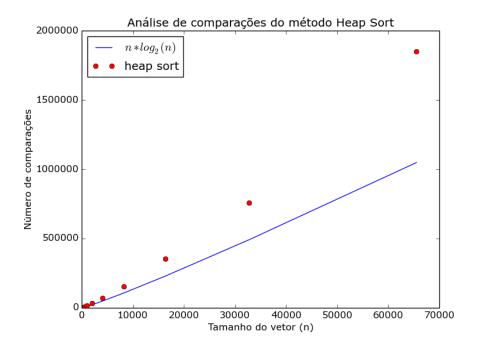


Figura 2.9: Complexidade de custo do método Heap Sort (Vetor Parcialmente Ordenado Crescente)

- (a) Complexidade de custo do método Heap Sort disponível na lista de imagens 2.11.
- (b) Complexidade de tempo do método Heap Sort disponível na lista de imagens 2.12.
- (c) Complexidade de tempo do método Heap Sort com mínimos quadrados disponível

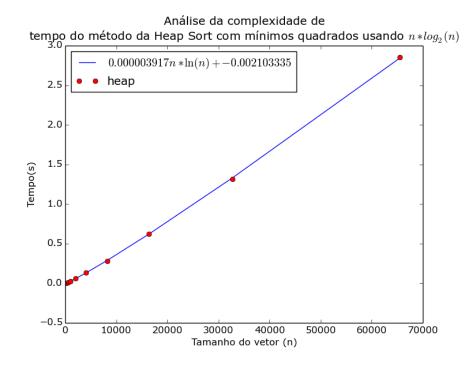


Figura 2.10: Complexidade de tempo do método Heap Sort com mínimos quadrados (Vetor Parcialmente Ordenado Crescente)

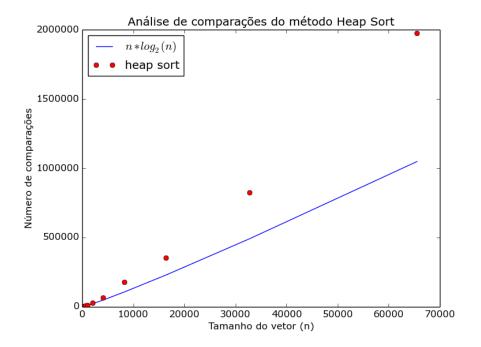


Figura 2.11: Complexidade de custo do método Heap Sort (Vetor Parcialmente Ordenado Decrescente)

na lista de imagens 2.13.

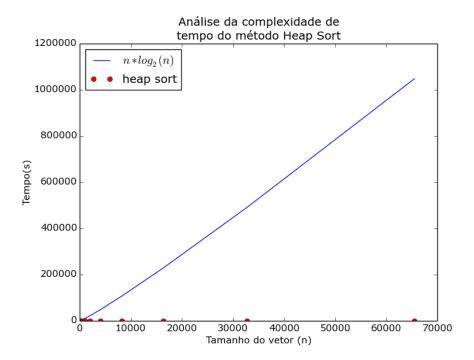


Figura 2.12: Complexidade de tempo do método Heap Sort (Vetor Parcialmente Ordenado Decrescente)

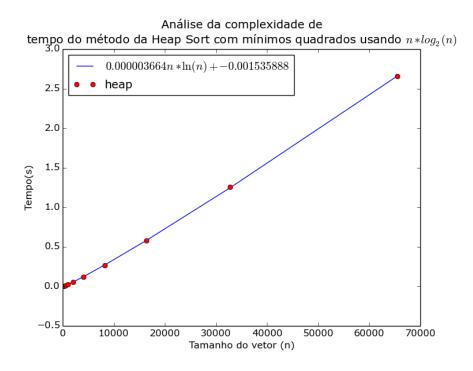


Figura 2.13: Complexidade de tempo do método Heap Sort com mínimos quadrados (Vetor Parcialmente Ordenado Decrescente)

### Tabelas

Seguem as tabelas utilizadas para a análise do método Heap Sort.

Tabela 3.1: Vetor Aleatorio

Tamanho do Vetor	Comparações	$\overline{\text{Tempo}(s)}$
32	221	0.000426
64	554	0.000986
128	1220	0.002270
256	2972	0.005184
512	6241	0.011752
1024	15566	0.027853
2048	31729	0.057643
4096	72772	0.126244
8192	152718	0.277538
16384	329817	0.605080
32768	809967	1.276530
65536	1975300	2.722260

Tabela 3.2: Vetor Ordenado Crescente

Tamanho do Vetor	Comparações	Tempo(s)
32	224	0.000487
64	570	0.001093
128	1301	0.002462
256	3045	0.005639
512	6879	0.012489
1024	15139	0.027764
2048	33154	0.061132
4096	75236	0.137670
8192	208341	0.295912
16384	359038	0.630963
32768	725481	1.332000
65536	2068944	2.861320

Tabela 3.3: Vetor Ordenado Decrescente

Tamanho do Vetor	Comparações	Tempo(s)
32	189	0.000358
64	472	0.000872
128	1137	0.002065
256	2799	0.004933
512	5920	0.010676
1024	13172	0.024015
2048	29450	0.053877
4096	65470	0.118622
8192	141369	0.266659
16384	399986	0.569335
32768	677610	1.233740
65536	1675479	2.598320

Tabela 3.4: Vetor Parcialmente Ordenado Crescente

Tamanho do Vetor	Comparações	$\overline{\text{Tempo}(s)}$
32	215	0.000445
64	545	0.001079
128	1430	0.002356
256	3021	0.005471
512	6668	0.012695
1024	15339	0.027567
2048	33122	0.059426
4096	72154	0.132382
8192	153615	0.281161
16384	353799	0.619655
32768	758077	1.318140
65536	1850046	2.852490

Tabela 3.5: Vetor Parcialmente Ordenado Decrescente

Tamanho do Vetor	Comparações	$\overline{\text{Tempo(s)}}$
32	204	0.000365
64	453	0.000956
128	1361	0.002139
256	2659	0.004903
512	6338	0.011068
1024	13982	0.024252
2048	30510	0.055387
4096	66639	0.119625
8192	177670	0.263413
16384	352288	0.579364
32768	826238	1.253710
65536	1975300	2.659330

#### Análise

Podemos observar que todas as curvas de todos os gráficos, exceto os de complexidade de tempo sem a interpolação dos mínimos quadrados (Gráficos ??,2.4,2.7,??,2.12), apresentaram uma correspondência forte com a curva da função F(x) = xlg(x), o que nos permite concluir que, dada a complexidade de tempo do algoritmo Heap Sort por G(x) então F(x) = c\*G(x) sendo que c é uma constante maior que zero e  $x > x_0$ . Portanto, podemos verificar que pelo fato do algoritmo heapSort envolver n chamadas da função maxHeapify, que possui complexidade O(lg(n)), sua complexidade é O(nlg(n)).

## Citações e referências bibliográficas

[1] Algoritmos: Teoria e Prática. Thomas H. Cormen Today

### Apêndice A

#### Códigos extensos

#### A.1 testdriver.py

#### Listagem A.1: testdriver.py

```
1 # coding = utf-8
2 import subprocess
3 import numpy as np
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 import sys , shutil
8 ##PRA CADA NOVO METODO TEM QUE MUDAR
9 #Sys.path()
11 ## PARA CADA VETOR NOVO OU NOVO METODO TEM QUE MUDAR
12 #Para o executa_teste a chamada das funções e o shutil.move()
13 #para os plots
                        a chamada das funções e o savefig
15 sys.path.append('/home/gmarson/Git/AnaliseDeAlgoritmos/Trabalho_Final/
     Codigos/Bucket') ## adicionei o código de ordenação
16 sys.path.append('/home/gmarson/Git/AnaliseDeAlgoritmos/Trabalho_Final/
     relatorio/Resultados/Bucket') ## adicionei o resultado do executa_teste
17
18
  def executa_teste(arqteste, arqsaida, nlin, intervalo):
      """Executa uma sequência de testes contidos em arqteste, com:
         arqsaida: nome do arquivo de saída, ex: tBolha.dat
21
         nlin: número da linha no arquivo gerado pelo line_profiler contendo
22
               os dados de interesse. Ex: 14
23
         intervalo: tamanhos dos vetores: Ex: 2 ** np.arange(5,10)
24
25
      f = open(arqsaida, mode='w', encoding='utf-8')
26
      f.write('# n
                         tempo(s)\n')
27
      for n in intervalo:
29
          cmd = ' '.join(["kernprof -l -v", "testeGeneric.py", str(n)])
30
          str_saida = subprocess.check_output(cmd, shell=True).decode('utf-8
31
          linhas = str_saida.split('\n')
32
          #for i in linhas:
```

```
print(i)
34
          #print (linhas)
35
          unidade_tempo = float(linhas[1].split()[2])
36
          tempo_total = float(linhas[3].split()[2])
37
          #lcomp = linhas[nlin].split()
39
          #print ("unidade tempo: ",unidade_tempo )
40
          #print("lcomp: ",lcomp)
41
42
          #print("tempo total",tempo_total)
43
          #num_comps = int(lcomp[1])
44
          str_res = '{:>8} {:13.6f}'.format(n, tempo_total)
45
          print (str_res)
46
          f.write(str_res + '\n')
47
      f.close()
48
      #shutil.move("tBucket_vetor_parcialmente_ordenado_decrescente.dat", "/
          home/gmarson/Git/AnaliseDeAlgoritmos/Trabalho_Final/relatorio/
          Resultados/Bucket/tBucket_vetor_parcialmente_ordenado_decrescente.
          dat")
51 executa_teste("testeGeneric.py", "
     tBucket_vetor_parcialmente_ordenado_decrescente.dat", 46, 2 ** np.
     arange(5,15))
53 def executa_teste_memoria(arqteste, arqsaida, nlin, intervalo):
      """Executa uma sequência de testes contidos em arqteste, com:
54
         arqsaida: nome do arquivo de saída, ex: tBolha.dat
55
         nlin: número da linha no arquivo gerado pelo line_profiler contendo
56
57
                os dados de interesse. Ex: 14
         intervalo: tamanhos dos vetores: Ex: 2 ** np.arange(5,10)
58
      11 11 11
59
      f = open(arqsaida, mode='w', encoding='utf-8')
      f.write('#
                       n
                          comparações
                                             tempo(s)\n')
61
62
      for n in intervalo:
63
          cmd = ' '.join(["kernprof -l -v ", "testeGeneric.py", str(n)])
64
65
          str_saida = subprocess.check_output(cmd, shell=True).decode('utf-8
66
              ')
67
          linhas = str_saida.split('\n')
68
          for i in linhas:
69
              print(i)
70
71
          print ("Linhas:", linhas[1])
72
73
          unidade_tempo = float(linhas[1].split()[2])
75
76
77
          str_res = '{:>8} {:>13} {:13.6f}'.format(n, n, n)
          print (str_res)
          f.write(str_res + '\n')
79
      f.close()
80
      #shutil.move("tSelection_memoria.dat", "/home/gmarson/Git/
81
          AnaliseDeAlgoritmos/Trabalho_Final/relatorio/Resultados/Selection/
          tSelection memoria.dat")
82
83 #executa_teste_memoria("testeGeneric.py", "tSelection_memoria.dat", 14, 2
     ** np.arange(5,15))
```

```
84
  def plota_teste1(argsaida):
85
       n, c, t = np.loadtxt(arqsaida, unpack=True)
86
       #print("n: ",n,"\nc: ",c,"\nt: ",t)
87
       #n eh o tamanho da entrada , c eh o tanto de comparações e t eh o
          tempo gasto
       plt.plot(n, n ** 2, label='$n^2$') ## custo esperado bubble Sort
89
       plt.plot(n, c, 'ro', label='selection sort')
90
91
       # Posiciona a legenda
92
       plt.legend(loc='upper left')
93
94
       # Posiciona o título
95
       plt.title('Análise de comparações do método da seleção')
96
97
       # Rotula os eixos
       plt.xlabel('Tamanho do vetor (n)')
99
       plt.ylabel('Número de comparações')
100
101
       plt.savefig('relatorio/imagens/Selection/
102
          selection_plot_1_ordenado_descresente.png')
       plt.show()
103
104
105
106
  def plota_teste2(arqsaida):
107
       n, t = np.loadtxt(arqsaida, unpack=True)
108
       plt.plot(n, n , label='$n$')
109
       plt.plot(n, t, 'ro', label='bucket sort')
110
111
       # Posiciona a legenda
112
       plt.legend(loc='upper left')
113
114
       # Posiciona o título
115
       plt.title('Análise da complexidade de \ntempo do método Bucket Sort')
116
117
       # Rotula os eixos
118
       plt.xlabel('Tamanho do vetor (n)')
119
120
       plt.ylabel('Tempo(s)')
121
       plt.savefig('relatorio/imagens/Bucket/
122
          bucket_plot_2_parcialmente_ordenado_decrescente.png')
       plt.show()
123
124
125
126 def plota_teste3(arqsaida):
       n, t = np.loadtxt(arqsaida, unpack=True)
127
128
       # Calcula os coeficientes de um ajuste a um polinômio de grau 2 usando
129
       # o método dos mínimos quadrados
130
131
       coefs = np.polyfit(n, t, 2)
       p = np.poly1d(coefs)
132
133
       plt.plot(n, p(n), label='$n$')
134
       plt.plot(n, t, 'ro', label='bucket sort')
135
136
       # Posiciona a legenda
137
       plt.legend(loc='upper left')
138
139
```

```
# Posiciona o título
       plt.title('Análise da complexidade de \ntempo do método Bucket Sort
141
          com mínimos quadrados')
149
       # Rotula os eixos
143
       plt.xlabel('Tamanho do vetor (n)')
144
      plt.ylabel('Tempo(s)')
145
146
147
       plt.savefig('relatorio/imagens/Bucket/
          bucket_plot_3_parcialmente_ordenado_decrescente.png')
       plt.show()
148
149
150 #plota_teste1("/home/gmarson/Git/AnaliseDeAlgoritmos/Trabalho_Final/
      \verb|relatorio|/Resultados/Selection_vetor_ordenado_descresente.|
      dat")
151 plota_teste2("/home/gmarson/Git/AnaliseDeAlgoritmos/Trabalho_Final/
      relatorio/Resultados/Bucket/
      tBucket_vetor_parcialmente_ordenado_decrescente.dat")
152 plota_teste3("/home/gmarson/Git/AnaliseDeAlgoritmos/Trabalho_Final/
      relatorio/Resultados/Bucket/
      tBucket_vetor_parcialmente_ordenado_decrescente.dat")
153
154
155
  def plota_teste4(arqsaida):
       n, c, t = np.loadtxt(arqsaida, unpack=True)
156
157
       # Calcula os coeficientes de um ajuste a um polinômio de grau 2 usando
158
       # o método dos mínimos quadrados
159
160
       coefs = np.polyfit(n, c, 2)
       p = np.poly1d(coefs)
161
162
       plt.plot(n, p(n), label='$n^2$')
       plt.plot(n, c, 'ro', label='bubble sort')
164
165
       # Posiciona a legenda
166
       plt.legend(loc='upper left')
167
168
       # Posiciona o título
169
       plt.title('Análise da complexidade de \ntempo do método da bolha')
170
171
       # Rotula os eixos
172
       plt.xlabel('Tamanho do vetor (n)')
173
       plt.ylabel('Número de comparações')
174
175
       plt.savefig('bubble4.png')
176
      plt.show()
177
179 def plota_teste5(arqsaida):
       n, c, t = np.loadtxt(arqsaida, unpack=True)
180
181
182
       # Calcula os coeficientes de um ajuste a um polinômio de grau 2 usando
       # o método dos mínimos quadrados
183
       coefs = np.polyfit(n, c, 2)
184
       p = np.poly1d(coefs)
185
186
       # set_yscale('log')
187
       # set_yscale('log')
188
       plt.semilogy(n, p(n), label='n^2')
189
       plt.semilogy(n, c, 'ro', label='bubble sort')
```

```
191
       # Posiciona a legenda
192
       plt.legend(loc='upper left')
193
194
       # Posiciona o título
195
       plt.title('Análise da complexidade de \ntempo do método da bolha')
196
197
       # Rotula os eixos
198
       plt.xlabel('Tamanho do vetor (n)')
199
       plt.ylabel('Número de comparações')
200
201
       plt.savefig('bubble5.png')
202
       plt.show()
203
```