Curso: Métodos Numéricos II
Professor: Creto Augusto Vidal
Semestre: 2021.1
Aula # 18

1. Objetivo: Continuar a discussão dos conceitos básicos de Autovalores e Autovetores de matrizes simétricas e apresentar o método da potência regular.

Novidades desta aula:

Autovalores de matrizes simétricas cujos elementos são números reais são todos reais.
Autovetores de matrizes simétricas correspondentes a autovalores distintos são ortogonais.
Complexo conjugado de um número complexo.
Transposta Hermitiana.
Espaço nulo.
Multiplicidade algébrica de um autovalor.
Multiplicidade geométrica associada a um autovalor.
Espectro de uma matriz.
Autovalor dominante.

---

2. Conceitos preliminares

Continuando a discussão dos conceitos preliminares, vamos mostrar duas coisas principais:

a) toda matriz simétrica, $\mathbf{A}$, cujos elementos são números reais tem autovalores reais, isto é, $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R} \Longrightarrow \forall \lambda_k \in \mathbb{R}$ (aqui, o símbolo λ_k representa um autovalor de $\mathbf{A}$);
b) se dois autovalores quaisquer da matriz $\mathbf{A}$ forem diferentes, os autovetores correspondentes são ortogonais entre si, isto é, se $\lambda_r \neq \lambda_s$ então $\mathbf{x}_r \perp \mathbf{x}_s \equiv \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_s = 0$.

2.1 Mostrar que $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R} \Longrightarrow \forall \lambda_k \in \mathbb{R}$

Vamos começar dizendo que um autovalor λ_k da matriz $\mathbf{A}$ é um número que pertence ao conjunto dos números complexos e sua parte imaginária é diferente de zero, ou seja, estamos dizendo que

(1) $\lambda_k = c + d\mathrm{i}$,

onde c e d são números reais (c e d $\in \mathbb{R}$) e i é o número imaginário ($\mathrm{i} = \sqrt{-1}$).

Assim, se λ_k é um autovalor da matriz $\mathbf{A}$, então o autovetor associado a ele é o vetor $\mathbf{x}_k$, e este par autovalor-autovetor deve satisfazer a expressão

(2) $\mathbf{A}\,\mathbf{x}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k$.

Vamos assumir que os elementos do vetor $\mathbf{x}_k$ podem ser números complexos. Assim, vamos multiplicar os dois lados da equação (2) pela **transposta Hermitiana** do vetor $\mathbf{x}_k$, isto é,

(3) $(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\,\mathbf{x}_k = \lambda_k (\mathbf{x}_k)^{\mathrm{H}}\mathbf{x}_k$.

Pausa para apresentação de conceitos novos!

O que é **transposta Hermitiana** de um vetor $\mathbf{x}_k$?

Resposta: Simplesmente escreva a transposta do vetor e troque os elementos pelos seus conjugados complexos.

Vamos dar um exemplo. Suponha que $\mathbf{x}_k$ seja o seguinte vetor

$$(4) \qquad \mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ 3-4\mathrm{i} \\ 4-6\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Assim, a transposta deste vetor é

$$(5) \qquad (\mathbf{x}_k)^{\mathrm{T}} = (1+2\mathrm{i} \quad 3-4\mathrm{i} \quad 4-6\mathrm{i}),$$

e a transposta Hermitiana simplesmente troca os elementos de $(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{T}}$ por seus conjugados complexos, isto é, troca o número complexo $z = a + b\mathrm{i}$ por $\bar{z} = a - b\mathrm{i}$. Portanto

$$(6) \qquad (\mathbf{x}_k)^{\mathrm{H}} = (1-2\mathrm{i} \quad 3+4\mathrm{i} \quad 4+6\mathrm{i})$$

Só mais uma curiosidade, aproveitando a pausa.

Qual seria o resultado de $(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{H}}\mathbf{x}_k$ neste exemplo?

Resposta: É como se fosse um produto escalar, mas cada elemento do vetor, em vez de ser multiplicado por si mesmo, é multiplicado por seu conjugado complexo. Assim, se um elemento qualquer for representado por $z = a + b\mathrm{i}$, ele será multiplicado por $\bar{z} = a - b\mathrm{i}$ e o resultado dessa multiplicação é

$$(7) \qquad \begin{aligned} \bar{z}z &= (a - b\mathrm{i})(a + b\mathrm{i}) \\ &= a(a) + a(b\mathrm{i}) - b\mathrm{i}(\mathrm{a}) - b\mathrm{i}(b\mathrm{i}) \\ &= a^2 + a(b\mathrm{i}) - (\mathrm{a})b\mathrm{i} - (b\mathrm{i})^2 \\ &= a^2 - (b)^2(\mathrm{i})^2 \\ &= a^2 - (b)^2\left(\sqrt{-1}\right)^2 \Rightarrow \\ \bar{z}z &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Voilà!! Cada elemento do produto escalar será um número real

Assim, para o exemplo dato, $(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{H}}\mathbf{x}_k$ ficará assim

$$(8) \qquad \begin{aligned} (\mathbf{x}_k)^{\mathrm{H}}\mathbf{x}_k &= (1-2\mathrm{i} \quad 3+4\mathrm{i} \quad 4+6\mathrm{i}) \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ 3-4\mathrm{i} \\ 4-6\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &= ((1)^2 + (2)^2) + ((3)^2 + (4)^2) + ((4)^2 + (6)^2) \\ &= 5 + 25 + 52 \\ (\mathbf{x}_k)^{\mathrm{H}}\mathbf{x}_k &= 82. \end{aligned}$$

Vamos voltar para a equação (3) que repetimos aqui,

$$(3) \qquad (\mathbf{x}_k)^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\,\mathbf{x}_k = \lambda_k(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{H}}\mathbf{x}_k.$$

Calculando a transposta Hermitiana de cada lado da equação (3), podemos escrever

$$(9) \qquad [(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\,\mathbf{x}_k]^{\mathrm{H}} = [\lambda_k(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{H}}\mathbf{x}_k]^{\mathrm{H}} \Rightarrow (\mathbf{x}_k)^{\mathrm{H}}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\,\mathbf{x}_k = [(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{H}}\mathbf{x}_k]^{\mathrm{H}}(\lambda_k)^{\mathrm{H}}.$$

Três observações podem ser feitas sobre a equação (9):

a) Como a matriz $\mathbf{A}$ é simétrica e seus elemento são números reais, então $\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}$;
b) Como $(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{H}}\mathbf{x}_k$ resulta em um número real, então $[(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{H}}\mathbf{x}_k]^{\mathrm{H}} = (\mathbf{x}_k)^{\mathrm{H}}\mathbf{x}_k$;
c) A transposta Hermitiana de um número complexo é apenas o seu complexo conjugado.

Assim, a equação (9) pode ser reescrita como

$$(10) \qquad (\mathbf{x}_k)^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\,\mathbf{x}_k = \bar{\lambda}_k(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{H}}\mathbf{x}_k.$$

Comparando as equações (3) e (10), podemos ver que seus lados esquerdos são iguais. Assim, seus lados direitos têm de ser iguais. Portanto,

(11) $\lambda_k(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{H}}\mathbf{x}_k = \bar{\lambda}_k(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{H}}\mathbf{x}_k \Longrightarrow \lambda_k = \bar{\lambda}_k.$

A equação (11) diz que λ_k é igual ao seu complexo conjugado, isto é,

(12) $\lambda_k = c + d\mathrm{i} = \bar{\lambda}_k = c - d\mathrm{i}.$

Isso só pode acontecer se $d = 0$. Portanto, $\lambda_k = c \in \mathbb{R}$, ou seja,

os autovalores de uma matriz simétrica cujos elementos são números reais são reais,

isto é

Se $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R} \Longrightarrow \forall \lambda_k \in \mathbb{R}$.

2.2 Mostrar que, se $\lambda_r \neq \lambda_s$, então $\mathbf{x}_r \perp \mathbf{x}_s \equiv \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_s = 0$.

Vamos começar escrevendo as relações entre os autovalores e seus respectivos autovetores, isto é,

(13) $\mathbf{A}\,\mathbf{x}_r = \lambda_r\mathbf{x}_r.$

(14) $\mathbf{A}\,\mathbf{x}_s = \lambda_s\mathbf{x}_s.$

Agora vamos multiplicar os dois lados da equação (13) pelo autovetor $(\mathbf{x}_s)^{\mathrm{T}}$ e, os dois lados da equação (14) por $(\mathbf{x}_r)^{\mathrm{T}}$. Assim, teremos

(15) $(\mathbf{x}_s)^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}_r = \lambda_r(\mathbf{x}_s)^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}_r.$

(16) $(\mathbf{x}_r)^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}_s = \lambda_s(\mathbf{x}_r)^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}_s.$

Calculando a transposta dos dois lados da equação (16) temos

(17) $(\mathbf{x}_s)^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}_r = \lambda_s(\mathbf{x}_s)^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}_r.$

Sabendo que a matriz **A** é simétrica, isto é, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$, então os lados esquerdos das equações (15) e (17) são iguais. Portanto, seus lados direitos também são iguais. Assim

(18) $\lambda_r(\mathbf{x}_s)^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}_r = \lambda_s(\mathbf{x}_s)^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}_r \Longrightarrow \lambda_r(\mathbf{x}_s)^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}_r - \lambda_s(\mathbf{x}_s)^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}_r = 0 \Longrightarrow (\lambda_r - \lambda_s)(\mathbf{x}_s)^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}_r = 0.$

Porém, $\lambda_r \neq \lambda_s$ e assim $\lambda_r - \lambda_s \neq 0$. Logo $(\mathbf{x}_s)^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}_r = \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_s = 0$ e fica demonstrado que $\mathbf{x}_r \perp \mathbf{x}_s$.

2.3 Verdades que não vou demonstrar.

Verdade V1: Se **A** é uma matriz simétrica cujos elementos são números reais, **a multiplicidade algébrica de qualquer autovalor é igual à sua multiplicidade geométrica**.

Vamos traduzir isso. Na Aula#17, vimos que o **polinômio característico de uma matriz A $n \times n$ tem grau n** e suas raízes são os autovalores de **A**. No caso geral, tudo pode acontecer com essas raízes: raízes reais ou complexas e algumas raízes diferentes e outras repetidas. Esse polinômio na forma fatorada levaria a escrever a equação característica da seguinte forma

(19) $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{a_1}(\lambda - \lambda_2)^{a_2} \cdots (\lambda - \lambda_i)^{a_i} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{a_k} = 0.$

Os expoentes dos termos fatorados mostram quantas vezes aquela raiz está repetida. Esse número é chamado de multiplicidade algébrica do autovalor. Assim, na equação (19), o autovalor λ_1 tem multiplicidade algébrica igual a a_1, o autovalor λ_2 tem multiplicidade algébrica igual a a_2, o autovalor λ_i tem multiplicidade algébrica igual a a_i e assim por diante. É claro que a soma dos expoentes tem de ser igual a n.

A multiplicidade geométrica associada a um autovalor qualquer λ_i é o número de autovetores distintos associados àquele autovalor. No caso geral, a multiplicidade geométrica pode ser menor do que a multiplicidade algébrica, e, quando isso acontece, a matriz é chamada defectiva. No caso das matrizes simétrica cujos elementos são números reais, sempre existem a_i autovetores associados ao autovalor λ_i. Portanto, sua multiplicidade geométrica é igual à sua multiplicidade algébrica.

Verdade V2: Se **A** é uma matriz simétrica cujos elementos são números reais, e como consequência da **Verdade V1** e do que foi discutido nas seções 2.1 e 2.2, ela **tem n autovetores ortogonais que podem ser utilizados como base do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$**.

3. Método da potência

Nesta seção, vamos apresentar o primeiro dos métodos de potência: 1) Potência Regular, 2) Potência Inversa, 3) Potência com deslocamento.

Entendendo as condições para que o método da Potência Regular funcione, é fácil entender as condições para que os outros métodos funcionem. Assim, vamos detalhar o método da potência Regular e apenas apontar as pequenas diferenças dos outros dois métodos (**na próxima aula**).

3.1 Método da Potência Regular.

3.1.1 Discussão preliminar

Vamos analisar o problema de autovalores e autovetores da matriz M4 da **Tarefa 10**. Assim, a matriz que aqui vamos chamar de **A** é

$$(20)\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Essa matriz projeta um vetor **v** qualquer do $\mathbb{R}^3$ sobre o vetor unitário **u (vetor unitário é um vetor que tem comprimento igual a 1)** dado por

$$(21)\quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \Longrightarrow \|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}} = 1.$$

A operação linear de projeção é dada por

$$(22)\quad \mathbf{v}' = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}.$$

Assim, as colunas da matriz **A** são obtidas quando colocamos os vetores da base canônica na equação (22), isto é,

$$(23)\quad \mathbf{c_1} = (\mathbf{e_1}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$(24)\quad \mathbf{c_2} = (\mathbf{e_2}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u} = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

$$(25)\quad \mathbf{c_3} = (\mathbf{e_3}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u} = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

A equação característica é dada por

$$(26)\quad p(\lambda) = \begin{vmatrix}\frac{1}{3}-\lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\lambda & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\lambda\end{vmatrix} = (\lambda-1)^1(\lambda-0)^2 = 0.$$

Assim, o **espectro da matriz A**, isto é, o conjunto de autovalores da matriz **A** é

$$(27)\quad \lambda(\mathbf{A}) = \{1,0,0\}.$$

Os autovetores podem ser obtidos resolvendo os seguintes sistemas homogêneos:

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{3}-\lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\lambda & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\lambda\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$(28)\quad \begin{bmatrix}\frac{1}{3}-1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}-1 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}-1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Pondo a terceira equação em (26) na forma escalonada temos

$$(29)\quad \begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \mathbf{u} \Rightarrow (\lambda_1, \mathbf{x}_1) = \left(1, \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}\right).$$

Repetindo o processo para o autovalor $\lambda = 0$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}-0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}-0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}-0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(30)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pondo a segunda equação em (30) na forma escalonada temos

(31) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, os dois autovetores associados ao autovalor $\lambda = 0$ depois de normalizados são

(32) $$(\lambda_2, \mathbf{x}_2) = \left(0, \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{e} \quad (\lambda_3, \mathbf{x}_3) = \left(0, \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right).$$

Note que $\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1 = 0$ e $\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{x}_1 = 0$, ou seja, como já sabíamos, os autovetores de autovalores diferentes são ortogonais entre si. Os autovetores $\mathbf{x}_2$ e $\mathbf{x}_3$ são linearmente independentes, mas não são ortogonais. Porém, como eles são linearmente independentes, eles podem ser usados para achar dois vetores que estejam no subespaço gerado por eles e que sejam ortogonais entre si. Esses dois vetores continuarão perpendiculares ao autovetor $\mathbf{x}_1$ e formarão uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$. Neste caso, basta achar um novo vetor $\mathbf{x}_3$ que seja ortonormal aos vetores $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$.

Há um algoritmo chamado **ortogonalização de Gran-Schmidt** que acha $\mathbf{x}_3$ como

(33) $$\mathbf{x}_3^{Novo} = \mathbf{x}_3 - (\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{x}_1)\mathbf{x}_1 - (\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2$$

$$\mathbf{x}_3^{Novo} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(34) $$= \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - (0)\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{x}_3^{Novo} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{4} \\ \frac{-\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Observação importante: Quando um autovalor de **A** é zero, o autovalor ou os autovalores associados a este autovalor estão no chamado **Espaço nulo de A**. O **Espaço nulo de A** é o conjunto de vetores que ao serem multiplicados por **A** resultam no vetor nulo (veja equação (30)).

Neste exemplo, como a multiplicidade algébrica de = 0 é igual a 2, o Espaço nulo tem dimensão igual a 2 e a base ortogonal deste espaço pode ser usada como autovetores ortogonais de **A**.

3.1.2 Achar o autovetor associado ao autovalor dominante da matriz A

O método da potência regular calcula justamente isso: o autovetor associado ao autovalor dominante da matriz **A**.

Se ordenarmos o espectro da matriz **A** em ordem decrescente em valor absoluto temos:

(35) $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_2| \cdots \geq |\lambda_n|.$

Assim, λ_1 é o que chamamos de autovalor dominante. O método da potência acha o par $(\lambda_1, \mathbf{x}_1)$.

Note na equação (35) que o **autovalor dominante é diferente dos demais**, isto é, a **multiplicidade algébrica de λ_1 é igual a 1**. Para que o método funcione, isso tem que ser verdade para a matriz **A**. Se isso não for o caso, o método vai falhar.

Agora, vamos desenvolver o algoritmo de maneira absolutamente intuitiva para que você chegue a suas próprias conclusões de como o método funciona (quando funciona).

Partindo da constatação de que quando uma matriz **A** multiplica um vetor **v**, o resultado é um vetor **v'** que, em geral, tem uma outra direção e um outro tamanho, devemos perguntar o que acontece se multiplicarmos repetidas vezes o resultado da multiplicação anterior pela matriz **A**?

1) Escolha um vetor $\mathbf{v_0}$ qualquer (chute inicial).
2) Sabendo que os **autovetores** da matriz **A formam uma base** do $\mathbb{R}^n$, isto é,

(36) $Base = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n\},$

o vetor $\mathbf{v_0}$ pode ser escrito como uma combinação dos vetores da base. Assim,

(37) $\mathbf{v}_0 = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n.$

3) Multiplique o vetor $\mathbf{v}_0$ pela matriz **A** para obter $\mathbf{v_1}$ como

$$(38)\quad \begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{v}_0 \\ &\overset{Eq.(37)}{\triangleq} \mathbf{A}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n) \\ &= \alpha_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{A}\mathbf{x}_n \\ \mathbf{v}_1 &= \alpha_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n\mathbf{x}_n \end{aligned}$$

4) Multiplique o vetor $\mathbf{v}_1$ pela matriz **A** para obter $\mathbf{v}_2$ como

$$(39)\quad \begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{v}_0 = \mathbf{A}^2\mathbf{v}_0 \\ &\overset{Eq.(38)}{\triangleq} \mathbf{A}(\alpha_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n\mathbf{x}_n) \\ &= \alpha_1\lambda_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n\mathbf{A}\mathbf{x}_n \\ \mathbf{v}_2 &= \alpha_1\lambda_1^2\mathbf{x}_1 + \alpha_2\lambda_2^2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n^2\mathbf{x}_n \end{aligned}$$

5) Repita o processo k vezes para obter

$$
(40)\quad \begin{aligned}
\mathbf{v}_k &= \mathbf{A}\mathbf{v}_{k-1} = \mathbf{A}^k\mathbf{v}_0 \\
&\overset{Eq.(39)}{\triangleq} \mathbf{A}\left(\alpha_1\lambda_1^{k-1}\mathbf{x}_1 + \alpha_2\lambda_2^{k-1}\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n^{k-1}\mathbf{x}_n\right) \\
&= \alpha_1\lambda_1^{k-1}\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \alpha_2\lambda_2^{k-1}\mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n^{k-1}\mathbf{A}\mathbf{x}_n \\
\mathbf{v}_k &= \alpha_1\lambda_1^{k}\mathbf{x}_1 + \alpha_2\lambda_2^{k}\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n^{k}\mathbf{x}_n
\end{aligned}
$$

Colocando o termo λ_1^k em evidência na equação (40), obtemos

$$
(41)\quad \begin{aligned}
\mathbf{v}_k &= \lambda_1^k\left(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\frac{\lambda_2^k}{\lambda_1^k}\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\frac{\lambda_n^k}{\lambda_1^k}\mathbf{x}_n\right) \\
&= \lambda_1^k\left(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{x}_n\right)
\end{aligned}
$$

Note que os termos nos $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k$ o denominador é sempre maior do que o numerador (veja equação (35)). Assim, **quando k vai aumentando**, os termos $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k$ vão **tendendo a zero**, e, portanto, a equação (41) vai ficando muito próxima de

$$
(42)\quad \mathbf{v}_k \approx \lambda_1^k(\alpha_1\mathbf{x}_1).
$$

A equação (42) indica que o vetor $\mathbf{v}_k$ e veto $\mathbf{x}_1$ têm a mesma orientação e simplesmente têm tamanhos diferentes por conta da multiplicação do fator escalar $\lambda_1^k\alpha_1$. Portanto, $\mathbf{v}_k$ é o autovetor associado ao autovalor λ_1.

Se k for suficientemente grande, a equação (42) indica que $\mathbf{v}_k$ é o autovetor $\mathbf{x}_1$. Assim, pela equação (2), temos

$$
(43)\quad \mathbf{A}\mathbf{v}_k \approx \lambda_1\mathbf{v}_k \Longrightarrow (\mathbf{v}_k)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{v}_k \approx \lambda_1(\mathbf{v}_k)^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_k \Longrightarrow \lambda_1 \approx \frac{(\mathbf{v}_k)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{v}_k}{(\mathbf{v}_k)^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_k}
$$

A estimativa $\lambda_1 \approx \frac{(\mathbf{v}_k)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{v}_k}{(\mathbf{v}_k)^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_k}$ obtida na equação (43) quando k é pequeno é péssima. No entanto, quando k vai crescendo, a estimativa vai ficando cada vez melhor. Portanto, podemos usar a convergência de λ_1 como critério de parada do algoritmo.

Para evitar que o vetor $\mathbf{v}_k$ cresça ou diminua muito, e sabendo que tudo que nos interessa é a direção do vetor, em cada passo é feito um reescalonamento do tamanho do vetor. Aqui, nós vamos fazer com que o vetor fique um vetor unitário (tamanho igual a 1). Assim,

$$
(44)\quad \mathbf{u}_k = \frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|} = \frac{\mathbf{v}_k}{\sqrt{(\mathbf{v}_k)^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_k}}
$$

Portanto, dividindo os dois lados da equação $\mathbf{A}\mathbf{v}_k \approx \lambda_1\mathbf{v}_k$ por $\|\mathbf{v}_k\|$ temos

$$
(45)\quad \mathbf{A}\frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|} \approx \lambda_1\frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|} \Longrightarrow (\mathbf{u}_k)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{u}_k \approx \lambda_1(\mathbf{u}_k)^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_k \Longrightarrow \lambda_1 \approx \frac{(\mathbf{u}_k)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{u}_k}{(\mathbf{u}_k)^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_k} = (\mathbf{u}_k)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{u}_k
$$

Note que, como $\mathbf{u}_k$ é um vetor unitário, $(\mathbf{u}_k)^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_k = \|\mathbf{u}_k\|^2 = 1$.

No Algoritmo 1, a nova aproximação não normalizada será chamada de $(\mathbf{v}_k)_{Novo}$ e, ao ser normalizada, será chamada de $(\mathbf{x}_1)_{Novo}$ ao invés de $\mathbf{u}_k$. O $(\mathbf{x}_1)_{Novo}$ do passo anterior é chamado de $(\mathbf{x}_1)_{Velho}$ no novo passo.

Algoritmo 1: Método da Potência Regular		
Input	:	Matriz do problema, $\mathbf{A}$, vetor arbitrário, $\mathbf{v}_0$, tolerância do erro, ε
Output	:	Autovalor dominante, λ_1 e Autovetor correspondente, $\mathbf{x}_1$
Step 1	:	// Receber a matriz $\mathbf{A}$, o vetor inicial, $\mathbf{v}_0$, e a tolerância, ε
Step 2	:	// Inicializar o autovalor, λ_1: $(\lambda_1)_{Novo} \leftarrow 0$
Step 3	:	// Copiar o vetor, $\mathbf{v}_0$ para $(\mathbf{v}_k)_{Novo}$: $(\mathbf{v}_k)_{Novo} \leftarrow \mathbf{v}_0$
Step 4	:	// Copiar $(\lambda_1)_{Novo}$ para $(\lambda_1)_{Velho}$: $(\lambda_1)_{Velho} \leftarrow (\lambda_1)_{Novo}$
Step 5	:	// Copiar $(\mathbf{v}_k)_{Novo}$ para $(\mathbf{v}_k)_{Velho}$: $(\mathbf{v}_k)_{Velho} \leftarrow (\mathbf{v}_k)_{Novo}$
Step 6	:	// Normalizar $(\mathbf{v}_k)_{Velho}$: $(\mathbf{x}_1)_{Velho} \leftarrow \frac{(\mathbf{v}_k)_{Velho}}{\lVert(\mathbf{v}_k)_{Velho}\rVert} = \frac{(\mathbf{v}_k)_{Velho}}{\sqrt{((\mathbf{v}_k)_{Velho})^{\mathrm{T}}(\mathbf{v}_k)_{Velho}}}$
Step 7	:	// Calcular o vetor não normalizado, $(\mathbf{v}_k)_{Novo}$: $(\mathbf{v}_k)_{Novo} \leftarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}_1)_{Velho}$
Step 8	:	// Calcular a nova estimativa de λ_1: $(\lambda_1)_{Novo} \leftarrow (\mathbf{x}_1)^{\mathrm{T}}_{Velho}(\mathbf{v}_k)_{Novo}$
Step 9	:	// Verificar convergência de λ_1: Se $\left\lvert\frac{(\lambda_1)_{Novo}-(\lambda_1)_{Velho}}{(\lambda_1)_{Novo}}\right\rvert > \varepsilon$, voltar para Step 4
Step 10	:	// Retornar ou imprimir o output: Imprimir $((\lambda_1)_{Novo}, (\mathbf{x}_1)_{Velho})$

Os steps 1 a 3 são passos de inicialização.

Os steps 4 a 9 representa um Loop do tipo **Do...While(condição)**

O step 10 é a finalização do algoritmo, imprimindo o resultado ou retornando o resultado.

Tarefa #11:

Implemente o Algoritmo 1 e utilize-o para achar o autovalor dominante e o autovetor correspondente de cada uma das seguintes matrizes:

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 40 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 8 & 30 & 12 & 6 & 2 \\ 4 & 12 & 20 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 25 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$