Curso: Métodos Numéricos II
Professor: Creto Augusto Vidal
Semestre: 2021.1
Aula # 19

1. Objetivo: Continuar a apresentar a família de métodos de potência e sua utilidade.

2. Método da Potência (continuação)

Nesta seção, vamos apresentar os últimos dois métodos de potência: 1) Potência Regular, 2) Potência Inversa, 3) Potência com deslocamento.

Entendendo as condições para que o método da Potência Regular funcione, é fácil entender as condições para que os outros métodos funcionem. Assim, é bom revisar a Aula#18..

2.1 Método da Potência Inverso.

Dada a matriz $\mathbf{A}$, este método determina seu autovalor com menor valor absoluto diferente de zero.

Se você entender o desenvolvimento apresentado na Aula#18, verá que este método é uma pequena modificação do método da Potência Regular.

2.1.1 Discussões preliminares

Se ordenarmos o espectro da matriz $\mathbf{A}$ em ordem decrescente em valor absoluto temos:

(1) $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots |\lambda_i| \cdots > |\lambda_n| > 0.$

O método da potência inverso acha o par $(\lambda_n, \mathbf{x}_n)$.

Note na equação (1) que o **autovalor desejado é diferente dos demais**, isto é, a **multiplicidade algébrica de λ_n é igual a 1**. Para que o método funcione, isso tem que ser verdade para a matriz $\mathbf{A}$. Se isso não for o caso, o método vai falhar.

Vamos escrever a relação entre qualquer autovalor λ_i e seu autovetor correspondente $\mathbf{x}_i$, isto é,

(2) $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i.$

Na equação (1) assumimos que $\mathbf{A}$ não tem nenhum autovalor nulo, e, portanto, tem uma inversa, $\mathbf{A}^{-1}$.

Vamos multiplicar os dois lados da equação (2) por $\mathbf{A}^{-1}$ e dividir os dois lados por λ_i. Assim, obtemos

(3) $\frac{1}{\lambda_i}\underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}\mathbf{x}_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_i \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_i = \frac{1}{\lambda_i}\mathbf{x}_i \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_i = \bar{\lambda}_i \mathbf{x}_i.$

As operações sobre a equação (2) para obter a equação (3) não modificaram o autovetor $\mathbf{x}_i$ que agora também é o autovetor da matriz $\mathbf{A}^{-1}$ correspondente ao autovalor $\bar{\lambda}_i$ que é o inverso do autovalor λ_i da matriz $\mathbf{A}$. Assim, podemos concluir que

(4) Se $\mathbf{A}$ tem uma inversa $\mathbf{A}^{-1}$, então $(\lambda_i, \mathbf{x}_i)$ de $\mathbf{A} \Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda_i}, \mathbf{x}_i\right)$ de $\mathbf{A}^{-1}$.

Pela equação (4), podemos concluir que o espectro de $\mathbf{A}$ está relacionado ao espectro de $\mathbf{A}^{-1}$ da seguinte forma

$$
(5) \qquad
\begin{array}{lcl}
\lambda(\mathbf{A}) & = & \{\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \cdots \quad \lambda_i, \quad \cdots \quad \lambda_n\} \\
\lambda(\mathbf{A}^{-1}) & = & \left\{\frac{1}{\lambda_1}, \quad \frac{1}{\lambda_2}, \quad \cdots \quad \frac{1}{\lambda_i}, \quad \cdots, \quad \frac{1}{\lambda_n}\right\} \\
 & & \quad \uparrow \qquad \uparrow \qquad \cdots \quad \uparrow \qquad \cdots \qquad \uparrow \\
\mathbf{x}(\mathbf{A}) = \mathbf{x}(\mathbf{A}^{-1}) & = & \{\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_2, \quad \cdots \quad \mathbf{x}_i, \quad \cdots \quad \mathbf{x}_n\}
\end{array}
$$

Assumindo que os autovalores do espectro $\lambda(\mathbf{A})$ na equação (5) estejam em ordem decrescente de seus valores absolutos, podemos concluir que o espectro $\lambda(\mathbf{A}^{-1})$ está em ordem crescente de seus valores absolutos. Assim, $\frac{1}{\lambda_n}$ **é o autovalor dominante de $\mathbf{A}^{-1}$**.

Portanto, **se aplicarmos o método da Potência Regular sobre $\mathbf{A}^{-1}$**, encontraremos seu autovalor dominante e seu autovetor correspondente, isto é,

$$
(6) \qquad \left(\bar{\lambda}_{dominante}, \bar{\mathbf{x}}_{dominante}\right) \equiv \left(\frac{1}{\lambda_n}, \mathbf{x}_n\right)
$$

2.1.2 Cálculo do par $(\lambda_n, \mathbf{x}_n)$

Há duas maneiras alternativas de proceder:

1) Usando o método (subrotina, subprograma etc.) da Potência Regular

   $(\bar{\lambda}_{dominante}, \bar{\mathbf{x}}_{dominante}) \leftarrow$ potenciaRegular(**A**,**v**,eps); ou

2) Usando o método da Potência Inverso construído a partir de pequenas modificações do método da potência regular.

<u>Alternativa 1</u>: Algoritmo 2.1a Potência Inverso

potenciaInverso1($\mathbf{A}$, $\mathbf{v}_0$, ε)		
Input	:	Matriz **A,** vetor inicial $\mathbf{v}_0$, tolerância ε
Output	:	Autovalor, λ_n e Autovetor correspondente, $\mathbf{x}_n$
Step 1	:	$\mathbf{A}^{-1} \leftarrow$ calculaInversa($\mathbf{A}$)
Step 2	:	$(\bar{\lambda}_{dominante}, \bar{\mathbf{x}}_{dominante}) \leftarrow$ potenciaRegular($\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{v}_0$, ε)
Step 3	:	$\lambda_n \leftarrow \dfrac{1}{\bar{\lambda}_{dominante}}$
Step 4	:	$\mathbf{x}_n \leftarrow \bar{\mathbf{x}}_{dominante}$
Step 5	:	**Imprimir ou retornar resposta** $(\lambda_n, \mathbf{x}_n)$

<u>Alternativa 2</u>: Algoritmo 2.1b Potência Inverso

potenciaInverso2($\mathbf{A}$, $\mathbf{v}_0$, ε)		
Input	:	Matriz **A,** vetor inicial $\mathbf{v}_0$, tolerância ε
Output	:	Autovalor, λ_n e Autovetor correspondente, $\mathbf{x}_n$

Step 1	:	// Receber a matriz **A**, o vetor inicial, $\mathbf{v}_0$, e a tolerância, ε
Step 2	:	// Calcular a decomposição LU de **A**: $(\mathbf{L}, \mathbf{U}) \leftarrow \text{decompLU}(\mathbf{A})$
Step 3	:	// Inicializar o autovalor, $\bar{\lambda}_1$: $(\bar{\lambda}_1)_{Novo} \leftarrow 0$
Step 4	:	// Copiar o vetor, $\mathbf{v}_0$ para $(\mathbf{v}_k)_{Novo}$: $(\mathbf{v}_k)_{Novo} \leftarrow \mathbf{v}_0$
Step 5	:	// Copiar $(\bar{\lambda}_1)_{Novo}$ para $(\bar{\lambda}_1)_{Velho}$: $(\bar{\lambda}_1)_{Velho} \leftarrow (\bar{\lambda}_1)_{Novo}$
Step 6	:	// Copiar $(\mathbf{v}_k)_{Novo}$ para $(\mathbf{v}_k)_{Velho}$: $(\mathbf{v}_k)_{Velho} \leftarrow (\mathbf{v}_k)_{Novo}$
Step 7	:	// Normalizar $(\mathbf{v}_k)_{Velho}$: $(\mathbf{x}_1)_{Velho} \leftarrow \frac{(\mathbf{v}_k)_{Velho}}{\Vert(\mathbf{v}_k)_{Velho}\Vert} = \frac{(\mathbf{v}_k)_{Velho}}{\sqrt{((\mathbf{v}_k)_{Velho})^{\mathrm{T}}(\mathbf{v}_k)_{Velho}}}$
Step 8	:	// Calcular $(\mathbf{v}_k)_{Novo}$ não normalizado: $(\mathbf{v}_k)_{Novo} \leftarrow \text{solverLU}(\mathbf{A}, (\mathbf{x}_1)_{Velho})$
Step 9	:	// Calcular a nova estimativa de $\bar{\lambda}_1$: $(\bar{\lambda}_1)_{Novo} \leftarrow (\mathbf{x}_1)^{\mathrm{T}}_{Velho}(\mathbf{v}_k)_{Novo}$
Step 10	:	// Verificar convergência de $\bar{\lambda}_1$: Se $\left\vert\frac{(\bar{\lambda}_1)_{Novo}-(\bar{\lambda}_1)_{Velho}}{(\bar{\lambda}_1)_{Novo}}\right\vert > \varepsilon$, voltar para Step 5
Step 11	:	// Calcular λ_n: $\lambda_n \leftarrow \frac{\mathbf{1}}{(\bar{\lambda}_1)_{Novo}}$
Step 12	:	// Copiar $(\mathbf{x}_1)_{Velho}$ **em** $\mathbf{x}_n$: $\mathbf{x}_n \leftarrow (\mathbf{x}_1)_{Velho}$
Step 13	:	// Retornar ou imprimir o output: **Imprimir ou retornar resposta** $(\lambda_n, \mathbf{x}_n)$

Os steps 1 a 4 são passos de inicialização.

Os steps 5 a 10 representa um Loop do tipo **Do...While(condição)**

Os steps 11 a 13 são a finalização do algoritmo, imprimindo o resultado ou retornando o resultado.

Nota: O Step 8 é quivale a $(\mathbf{v}_k)_{Novo} \leftarrow \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_1)_{Velho}$

2.2 Método da Potência com deslocamento.

Dada a matriz **A**, este método determina o autovalor que estiver mais próximo de um número real **μ** dado pelo usuário.

2.2.1 Discussões preliminares

Se ordenarmos o espectro da matriz **A** em ordem decrescente em valor absoluto temos:

(7) $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_{i-1}| > |\lambda_i| > |\lambda_{i+1}| \cdots > |\lambda_n| > 0.$

O método da potência com deslocamento acha o par $(\lambda_i, \mathbf{x}_i)$ correspondente ao λ_i que estiver mais próximo de **μ** e seja diferente de seus vizinhos.

Note na equação (7) que o **autovalor desejado é diferente dos demais**, isto é, a **multiplicidade algébrica de λ_i é igual a 1**. Para que o método funcione, isso tem que ser verdade para a matriz **A**. Se isso não for o caso, o método vai falhar.

Vamos escrever a relação entre o autovalor λ_i e seu autovetor correspondente $\mathbf{x}_i$, isto é,

(8) $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$.

Agora vamos subtrair o vetor $\mu\mathbf{x}_i$ dos dois lados da equação (8) e vamos por o vetor $\mathbf{x}_i$ em evidência. Lembre-se que, no lado esquerdo, vamos usar o artifício de multiplicar o vetor $\mathbf{x}_i$ pela matriz identidade **I**, isto é,

(9) $[\mathbf{A} - \mu\mathbf{I}]\mathbf{x}_i = (\lambda_i - \mu)\mathbf{x}_i \equiv \widehat{\mathbf{A}}\mathbf{x}_i = \hat{\lambda}_i \mathbf{x}_i$,

onde $\widehat{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} - \mu\mathbf{I}]$ e $\hat{\lambda}_i = (\lambda_i - \mu)$.

Note que:

1) se aplicarmos o método da Potência Regular sobre a matriz $\widehat{\mathbf{A}}$, vamos encontrar o autovalor dominante $\hat{\lambda}$, e isso significa que $|\lambda_i - \mu|$ é o maior possível, e não é isso que queremos.

2) Por sua vez, **se aplicarmos o método da Potência Inverso** sobre a matriz $\widehat{\mathbf{A}}$, **vamos encontrar** o autovalor $\hat{\lambda}$ de menor valor absoluto, e isso significa que **$|\lambda_i - \mu|$ é o menor possível**, e isso é **justamente o que queremos**.

As operações sobre a equação (8) para obter a equação (9) não modificaram o autovetor $\mathbf{x}_i$ que agora também é o autovetor da matriz $\widehat{\mathbf{A}}$ correspondente ao autovalor $\hat{\lambda} = \lambda_i - \mu$. Assim, o autovalor λ_i da matriz **A** é simplesmente $\lambda_i = \hat{\lambda} + \mu$.

2.2.2 Cálculo do par $(\lambda_i, \mathbf{x}_i)$ mais próximo de μ

Algoritmo 2.2 Potência com deslocamento

potenciaComDeslocamento($\mathbf{A}$, $\mathbf{v}_0$, ε, μ)		
Input	:	Matriz **A,** vetor inicial $\mathbf{v}_0$, tolerância ε, deslocamento μ
Output	:	Autovalor, λ_i próximo de μ e Autovetor correspondente, $\mathbf{x}_i$
Step 1	:	$\widehat{\mathbf{A}} \leftarrow \mathbf{A} - \mu\mathbf{I}$
Step 2	:	$(\hat{\lambda}, \hat{\mathbf{x}}) \leftarrow$ potenciaInverso($\widehat{\mathbf{A}}$, $\mathbf{v}_0$, ε)
Step 3	:	$\lambda_i \leftarrow \hat{\lambda} + \mu$
Step 4	:	$\mathbf{x}_i \leftarrow \hat{\mathbf{x}}$
Step 5	:	**Imprimir ou retornar resposta** $(\lambda_i, \mathbf{x}_i)$

Tarefa #12:

Implemente os Algoritmos 2.1b e 2.2 e utilize-os, junto com o algoritmo de potência regular, para achar todos os autovalores e os autovetores correspondentes de cada uma das seguintes matrizes.

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} -14 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 40 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 8 & 30 & 12 & 6 & 2 \\ 4 & 12 & 20 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 25 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$