Exercícios para Entregar:

1. Relacione semelhanças e diferenças entre a Transformada de Fourier e a Transformada Wavelet.

A Transformada de Fourier e a Transformada Wavelet são duas técnicas amplamente utilizadas na análise de sinais e têm algumas semelhanças e diferenças importantes. Vamos explorar essas semelhanças e diferenças:

Semelhanças:

- Ambas as transformadas são usadas para decompor um sinal em componentes de frequência.
- Tanto a Transformada de Fourier quanto a Transformada Wavelet são transformadas lineares, o que significa que obedecem às propriedades de linearidade.
- Ambas as transformadas são usadas para analisar sinais em domínio contínuo ou discreto.

Diferenças:

- Resolução de frequência: A Transformada de Fourier fornece uma análise de frequência fixa, onde a resolução de frequência é a mesma em todo o sinal. Por outro lado, a Transformada Wavelet oferece uma análise de frequência variável, onde diferentes componentes de frequência podem ser analisados com diferentes resoluções de frequência. Isso permite uma análise mais detalhada de componentes de alta frequência e uma melhor localização no tempo.
- Localização no tempo: A Transformada de Fourier fornece informações apenas sobre as frequências presentes no sinal, sem informações sobre a localização no tempo dessas frequências. Por outro lado, a Transformada Wavelet fornece informações sobre as frequências e também sobre a localização no tempo das diferentes componentes do sinal.
- Representação de sinais transientes: A Transformada de Fourier é mais adequada para sinais estacionários, onde as frequências são constantes ao longo do tempo. A Transformada Wavelet, por sua vez, é especialmente útil para analisar sinais transientes, onde as frequências podem variar ao longo do tempo.
- Tamanho do suporte: A Transformada de Fourier usa funções senoidais como base, que têm um suporte infinito. Por outro lado, a Transformada Wavelet usa wavelets com suporte limitado no tempo, o que permite uma análise mais localizada de componentes de frequência.

Em resumo, a Transformada de Fourier é mais adequada para análise de frequência fixa em sinais estacionários, enquanto a Transformada Wavelet é mais adequada para análise de frequência variável e localização no tempo, especialmente em sinais transientes.

2. O que significam os parâmetros a e b da CWT $\Psi_{a,b}(t)$ (slide)?

Na transformada contínua de wavelet (CWT), os parâmetros e são usados para controlar o escalamento e a translação da wavelet mãe na análise de um sinal.

O parâmetro é chamado de fator de escalamento e controla o estreitamento ou alargamento da wavelet. Um valor maior de resulta em uma wavelet mais estreita no domínio do tempo, o que permite uma análise mais detalhada de componentes de alta frequência do sinal. Por outro lado, um valor menor de resulta em uma wavelet mais larga, o que permite uma análise mais detalhada de componentes de baixa frequência do sinal.

O parâmetro é chamado de fator de translação e controla o deslocamento da wavelet ao longo do tempo. Ele determina em qual ponto do sinal a wavelet será aplicada. Ao variar o valor de , podemos analisar diferentes partes do sinal em diferentes momentos.

Assim, a CWT é obtida através do escalamento e translação da wavelet mãe pelos parâmetros e . Essa transformação permite analisar diferentes escalas e localizações no tempo do sinal, revelando informações sobre suas características de frequência e tempo.

3. Na DWT os parâmetros a e b assumem quaisquer valores? Explique.

Na Transformada Discreta de Wavelet (DWT), os parâmetros e não assumem quaisquer valores, como na Transformada Contínua de Wavelet (CWT). A DWT é uma técnica de decomposição de sinal que opera em um domínio discreto, onde o sinal é dividido em diferentes escalas e resoluções de tempo.

Na DWT, a wavelet mãe é dilatada e transladada em potências de dois para realizar a decomposição do sinal. Isso significa que o fator de escalamento assume apenas valores inteiros positivos que são potências de dois, como 1, 2, 4, 8, etc. Esses valores de escalamento determinam as diferentes escalas em que o sinal será analisado.

O fator de translação também é restrito a valores inteiros, mas seu intervalo de valores depende do tamanho do sinal e da escala atual. Em cada escala, o sinal é dividido em segmentos de comprimento igual, e o fator de translação representa o deslocamento desses segmentos ao longo do sinal.

Portanto, na DWT, os parâmetros e assumem apenas valores inteiros restritos, de acordo com as restrições impostas pela natureza discreta da transformada. Essas restrições garantem que a DWT seja computacionalmente eficiente e permita uma análise eficaz de sinais discretos.

4. Por que podemos efetuar a separabilidade em Linhas e Colunas da DWT-1D, para obtenção da DWT-2D, assim como podíamos também efetuar na DCT-1D para obtenção da DCT-2D?

A separabilidade em linhas e colunas na Transformada Discreta de Wavelet (DWT) e na Transformada Cosseno Discreta (DCT) é possível devido a propriedades matemáticas específicas dessas transformadas.

Na DWT-1D, a separabilidade em linhas e colunas é possível porque a DWT é uma transformada linear e a operação de convolução, que é a base da DWT, é uma operação linear. Isso significa que a DWT-1D pode ser aplicada separadamente em cada linha e em cada coluna de uma matriz de dados, sem afetar o resultado final. Essa separabilidade permite uma implementação eficiente da DWT-2D, onde a DWT-1D é aplicada primeiro nas linhas e depois nas colunas da matriz de dados.

Da mesma forma, na DCT-1D, a separabilidade em linhas e colunas também é possível devido à linearidade da transformada e à propriedade de convolução. A DCT-1D pode ser aplicada separadamente em cada linha e em cada coluna de uma matriz de dados, sem afetar o resultado final. Isso permite uma implementação eficiente da DCT-2D, onde a DCT-1D é aplicada primeiro nas linhas e depois nas colunas da matriz de dados.

A separabilidade em linhas e colunas é uma propriedade importante dessas transformadas, pois permite uma redução significativa na complexidade computacional. Em vez de aplicar a transformada diretamente em uma matriz 2D, podemos aplicar a transformada em cada dimensão separadamente, reduzindo assim o número total de operações necessárias.

Essa separabilidade é amplamente utilizada em aplicações de processamento de imagem e vídeo, onde a DWT-2D e a DCT-2D são usadas para análise e compressão de dados. A separabilidade em linhas e colunas permite uma implementação eficiente dessas transformadas, tornando-as amplamente utilizadas em várias aplicações.

5. Qual a “taxa de compressão” fácil de ser obtida com a DWT2? Explique sua resposta.

A taxa de compressão obtida com a Transformada Discreta de Wavelet 2D (DWT2) pode variar dependendo do tipo de imagem e do nível de compressão desejado. A taxa de compressão é definida como a relação entre o tamanho original do arquivo de imagem e o tamanho do arquivo comprimido.

A DWT2 é frequentemente usada em técnicas de compressão de imagem, como a compressão JPEG2000, devido à sua capacidade de compactar eficientemente informações de alta frequência em coeficientes de wavelet. A taxa de compressão alcançada com a DWT2 é geralmente alta, o que significa que o tamanho do arquivo comprimido é significativamente menor do que o tamanho original do arquivo de imagem.

A taxa de compressão obtida com a DWT2 depende de vários fatores, incluindo o nível de decomposição utilizado na transformada, o tipo de wavelet usada, a qualidade desejada da imagem comprimida e o algoritmo de codificação utilizado. Em geral, quanto maior o nível de decomposição, maior a taxa de compressão, mas também pode haver perda de detalhes finos na imagem.

É importante ressaltar que a taxa de compressão não é o único fator a ser considerado na avaliação da qualidade da imagem comprimida. A qualidade visual, a fidelidade das cores e a capacidade de reconstrução da imagem original também são aspectos importantes a serem considerados.

Em resumo, a taxa de compressão obtida com a DWT2 pode ser alta, mas varia dependendo dos parâmetros e algoritmos utilizados. É necessário encontrar um equilíbrio entre a taxa de compressão desejada e a qualidade da imagem comprimida.

6. Usando os filtros do banco de Haar mostrado no slide 28, mostre analiticamente a “Reconstrução Perfeita” de uma sequência real x(n). (Dica: é mais fácil no domínio Z).

Para mostrar a reconstrução perfeita de uma sequência real $x(n)$ usando os filtros do banco de Haar, podemos seguir os seguintes passos no domínio z:

1. Aplicar a decomposição usando os filtros de passagem baixa e passagem alta:
$$x_{\text{low}}(z) = H_0(z)X(z)$$
$$x_{\text{high}}(z) = H_1(z)X(z)$$
onde $H_0(z)$ e $H_1(z)$ são as transformadas z dos filtros h_0 e h_1 respectivamente, e $X(z)$ é a transformada z da sequência $x(n)$.
2. Aplicar a subamostragem em $x_{\text{low}}(z)$ para obter $x_{\text{low-down}}(z)$ e em $x_{\text{high}}(z)$ para obter $x_{\text{high-down}}(z)$. A subamostragem é feita removendo-se cada segundo termo das sequências.
3. Aplicar a reconstrução usando os filtros de reconstrução:
$$y(z) = G_0(z)x_{\text{low-down}}(z) + G_1(z)x_{\text{high-down}}(z)$$
onde $G_0(z)$ e $G_1(z)$ são as transformadas z dos filtros g_0 e g_1 respectivamente.
4. Expandir $y(z)$ para obter a sequência reconstruída $y(n)$ no domínio do tempo.

A reconstrução será perfeita se a sequência reconstruída $y(n)$ for igual à sequência original $x(n)$.

Usando os filtros do banco de Haar fornecidos anteriormente, podemos calcular as transformadas z dos filtros h_0, h_1, g_0 e g_1 e seguir os passos descritos acima para obter a reconstrução perfeita da sequência $x(n)$.