Notas - preferências sobre menus

March 26, 2015

Contents

1 Introdução

Como modelar a decisão de um agente cujas alternativas têm resultados que dependem de uma realização futura de estados da natureza e, ao ter que escolher um conjunto dessas alternativas, esse agente o faz sem possuir informação completa a respeito desses estados? Para abordar o problema, utilizaremos o *framework* de preferência sobre menus e alguns dos principais resultados de representação funcional das preferências encontrados na literatura até o momento.

Para compreender a motivação do nosso trabalho, considere o caso de um gerente de investimentos de uma instituição financeira que deve decidir como alocar os recursos de seus clientes. Cada portfólio escolhido, trará retornos condicionados a contingências (políticas, econômicas, institucionais etc) que caracterizarão a economia em um futuro próximo. Contudo, apesar de conseguir conjecturar acerca dos estados da natureza que se realizarão, o gerente não possui uma descrição completa de cada um deles. Há aspectos sutis de cada uma dessas contingências, suficientemente importantes para influenciar o retorno dos portfólios, mas que o agente os desconhece e tem consciência disso. Isto significa que, para cada estado da natureza, não há uma única crença a respeito dos possíveis retornos associados ao estado.

Uma primeira abordagem à decisão sobre menus com incerteza foi proposta em Kreps (1979) e Kreps (1992). A sugestão do autor foi axiomatizar a preferência sobre menus de alternativas levando em conta a *preferência por flexibilidade*, uma hipótese natural a respeito do comportamento de um agente que não tem certeza a respeito dos seus gostos futuros. Na presença de incerteza, os menus, vistos como *conjuntos de oportunidades*, são tão preferíveis quanto maiores as possibilidades oferecidas por eles. A representação de Kreps (1979), todavia, não capta integralmente nossa motivação, pois, nela, o tomador de decisão age *como se* houvesse um espaço subjetivo de estados da natureza completamente conhecidos pelo agente, no sentido de não haver ambiguidade dos *payoffs* associados a eles[1].

De fato, a imprecisão que caracteriza as contingências antecipadas pelo tomador de decisão está associada à ambiguidade presente em modelos de preferência com múltiplas *priors*, como é o caso de Gilboa and Schmeidler (1989). Veremos que a representação da preferência sobre menus com contingências imprecisas tem um formato semelhante àquele encontrado na modelagem de decisão sobre atos com ambiguidade.

Modelaremos nosso problema baseando-nos no trabalho de Epstein et al. (2007) - EMS, daqui por diante - que, por sua vez, generalizaram o arcabouço DLR [2], no qual os agentes possuem uma preferência sobre menus de loterias derivadas de um espaço de alternativas finito. EMS estendem esse modelo ao incorporar a imprecisão das contingências que se realizarão após a escolha dos menus.

Observe que a utilidade dos menus encontrada em DLR, dada por,

$$W^{DLR}(x) = \int \max_{\beta \in x} u(\beta) d\mu(u)$$

toma uma única crença μ a respeito do conjunto de estados da natureza como suficiente para a tomada de decisão do agente. Isso não é por acaso, pois eles modelam um tomador de decisão que possui uma descrição completa a respeito dos estados, de modo que o retorno de cada loteria para um certo estado é único. EMS incorporam a imprecisão das contingências ao modelar um agente com múltiplas crenças a respeito do retorno das loterias em cada estado e, como em Gilboa and Schmeidler (1989), o agente toma sua decisão com "cautela", visto que a representação de sua preferências sobre menus é do tipo min-max:

$$W^{EMS}(x) = \min_{\pi \in \Pi} \int \max_{\beta \in x} u(\beta) d\pi(u)$$

onde Π é o conjunto de medidas de probabilidade sobre o espaço subjetivo de estados.

[1] Uma abordagem do tipo Savage também seria inadequada pela mesma razão. Ademais, interessa ao pesquisador obter um espaço de estados da natureza subjetivo, observável pelo próprio comportamento do agente *ex post*, quando realizadas as contingências.

[2] Dekel et al. (2001)

Um característica comum aos modelos apresentados acima é a de que a preferência sobre menus é completa e, portanto, mesmo no caso de não possuir uma descrição exaustiva das contingências futuras, o agente é capaz de comparar quaisquer dois menus que lhe são oferecidos. Nós construiremos uma demonstração alternativa ao modelo EMS que leva em conta a representação obtida em Kochov (2007) para preferências incompletas sobre menus. À semelhança da decisão sobre atos com múltiplas *priors* modelada por Gilboa et al. (2010), o trabalho de Kochov (2007) nos fornece uma regra de decisão unânime para os menus. Na sua representação, um menu x é preferível a outro menu y se, e somente se, a utilidade em x é maior ou igual à de y para *todas* as crenças formadas a respeito do espaço subjetivo de estados. Adicionalmente, faremos a hipótese de que, ao observar um menu de loterias, nosso agente necessita de apenas um número finito delas para avaliar o menu. O axioma de *Finitiness* nos permitirá concluir que o espaço subjetivo de estados é finito, como veremos adiante.

O restante do trabalho dispõe-se da seguinte forma: na seção 2 descrevemos as primitivas do nosso modelo e, na 3, derivamos o principal resultado a partir da representação de Kochov (2007). Na seção 4, sugerimos caminhos pelos quais nosso resultado pode ser estendido.

2 Axiomatização da preferência sobre menus

Modelamos um agente que toma sua decisão em dois estágios: no primeiro, os menus são comparados tendo em vista que, em um segundo momento, após a realização do estado da natureza, uma loteria será escolhida de acordo com a preferência *ex post* do agente. Seja B um conjunto finito de alternativas e $\Delta(B)$ o conjunto das medidas de probabilidade sobre B. $\mathbb{X}$ é a coleção de subconjuntos fechados de $\Delta(B)$, os menus, e $\succsim$ denotará a preferência sobre $\mathbb{X}$. Os axiomas a seguir caracterizam essa relação.

Order $\succsim$ é completa e transitiva

Continuity Para todo x, $\{y \in \mathbb{X} : y \succsim x\}$ e $\{y \in \mathbb{X} : x \succsim y\}$ são fechados

Monotonicity Para quaisquer x, $x' \in \mathbb{X}$ com $x \supseteq x'$, temos $x \succsim x'$.

Indifference to Randomization (IR) $x \sim co(x)$, o fecho convexo de x.

Nondegeneracy Existem menus x,$x' \in \mathbb{X}$ tais que $x \succ x'$.

Preference Convexity $x \succsim x' \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)x' \succsim x'$.

Finiteness Para todo x, existe um menu finito x^f tal que, para todo $\lambda \in (0,1]$ e qualquer menu x', $\lambda x + (1-\lambda)x' \sim \lambda x^f + (1-\lambda)x'$.

Prevenimos indiferença total ao supor *Nondegeneracy*. Para um tomador de decisão que não está certo a respeito das probabilidades dos estados futuros, é natural assumir preferência por flexibilidade, como em (Kreps, 1979). Por conta disso, assumimos monotonicidade da preferência. O axioma de *Preference Convexity* tem a mesma motivação e traduz a idéia de que o agente tem ganhos de *hedging* ao misturar dois menus quaisquer, dada a incerteza *ex ante* que caracteriza o estágio de comparação dos menus. A motivação para *Continuity* tem caráter técnico. Assumir que a preferência não experimenta "saltos" em qualquer par de menus nos permitirá invocar a representação de preferências incompletas de Kochov (2007), como ficará claro adiante.

Ao assumirmos *Indifference to Randomization*, estamos, implicitamente, fazendo uma hipótese a respeito do *timing* da incerteza enfrentada pelo agente. Mais especificamente, estamos supondo que quando um estado da natureza se realiza, toda a ambiguidade que marcava a decisão *ex ante* desaparece, pois, nesse momento, uma descrição completa daquele estado está disponível ao tomador de decisão. A ambiguidade não persiste e, desse modo, o agente antecipa a escolha entre as loterias do menu previamente optado com intuito de maximizar uma utilidade vNM e, portanto, os menus x e $co(x)$ lhe são indiferentes. Se, contudo, a ambiguidade persiste *ex post*, IR deixa de ser razoável pois o agente pode experimentar ganhos estritos de randomização no segundo estágio.

Quanto à hipótese de *Finitiness*, a intuição é a de que, mesmo sem possuir uma descrição completa dos estados subjetivos, nosso agente necessita de apenas um subconjunto finito de loterias dentro de cada menu para avaliá-lo. Veremos na demonstração do Lema 1 que essa hipótese está diretamente relacionada à estrutura aditiva finita da representação do Teorema 1, visto que ela é condição suficiente para garantir a finitude do espaço de estados subjetivos[3].

Adicionalmente, suponha que o tomador de decisão tenha certeza *ex ante* de que há uma alternativa b_* que é o pior resultado *ex post* - o mesmo vale para a loteria degenerada δ_{b_*}. Assumiremos também que o agente saiba *ex ante* que o menu $\Delta(B)$ lhe trará o melhor resultado *ex post* ainda que não conheça qual loteria maximizará sua utilidade após a realização do estado.

Worst Para a pior alternativa b_*, temos $\lambda\left(x \cup \{b_*\}\right) + (1-\lambda)y \sim \lambda x + (1-\lambda)y$ para quaisquer menus $x, y \in \mathbb{X}$ e $\lambda \in (0,1)$.

Worst formaliza a idéia de que o agente não experimenta ganhos de flexibilidade ao incluir em qualquer menu x a loteria degenerada da pior

[3]Outras formas de *Finitiness* foram utilizadas na literatura, e.g. Dekel et al. (2009). Para uma discussão da relação entre *Finiteness* e formas aditivas finitas de utilidade, veja o trabalho de Kopylov (2009).

alternativa b_*. Um raciocínio rápido nos garante que

$$\Delta(B) \sim B \succsim x \succsim \{b_*\} \text{ e } B \succ \{b_*\}$$

para todo x. Por *Indifference to Randomization* e *Monotonicity*, $\Delta(B) \sim B \succsim x$. Além disso, dado que o agente está certo de que b_* é o pior resultado, $x \succsim \{b_*\}$ vale para todo x. Por fim, *Monotonicity* garante que $B \succsim \{b_*\}$. Caso $B \sim \{b_*\}$, contrariamos *Nondegeneracy*.

Tendo conhecido o comportamento do agente face aos menus $\Delta(B)$ e $\{b_*\}$, podemos definir o menu certo x_p como $x_p := p\Delta(B) + (1-p)\{b_*\}$, i.e. a composição do melhor e pior menu com peso $p \in [0,1]$. Como misturá-los a um menu qualquer não traz ganhos de *hedging*, assumiremos o seguinte axioma.

Certainty Independence Para $\lambda \in (0,1)$ e $x_p = p\Delta(B) + (1-p)b_*$, temos

$$x \succsim x' \Leftrightarrow \lambda x + (1-\lambda)x_p \succsim \lambda x' + (1-\lambda)x_p$$

O principal resultado do nosso trabalho é a construção da representação funcional da preferência sobre menus satisfazendo os axiomas acima, baseada em Epstein et al. (2007), conforme o teorema abaixo.

Teorema 1 *A preferência $\succsim$ sobre o espaço de menus $\mathbb{X}$ satisfaz* Order, Continuity, Monotonicity, Indifference to Randomization, Nondegeneracy, Preference Convexity, Finiteness, Worst *e* Certainty Independence *se, e somente se, existe um conjunto finito de utilidades $N \subseteq \{u \in \mathbb{R}_+^B : u(b_*) = 0 \text{ e } \max_B u(b) = 1\}$ e um conjunto fechado e convexo Π de medidas de probabilidade sobre N tais que*

$$x \succsim y \;\Leftrightarrow\; \min_{\pi\in\Pi} \sum_{u\in N} \pi(u) \max_{\beta\in x} u(\beta) \geq \min_{\pi\in\Pi} \sum_{u\in N} \pi(u) \max_{\beta\in y} u(\beta)$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{X}$.

Um resultado importante para a demonstração do Teorema 1 é o de que todo menu x possui um menu certo x_p indiferente a ele, o que traduz a idéia de que existe um peso p na mistura entre o pior e melhor resultados suficiente para que o tomador de decisão conjecture receber o mesmo *payoff* de um menu com menor nível de certeza.

Afirmação 1 *Para todo menu x, existe $p \in [0,1]$ tal que $x \sim x_p = p\Delta(B) + (1-p)b_*$.*

Dem.: *Para um menu qualquer x, defina $S := \{p \in [0,1] : x_p \succsim x\}$, $I := \{p \in [0,1] : x \succsim x_p\}$ e note que $1 \in S$ e $0 \in I$. Como $\succsim$ é contínua e completa, podemos afirmar que S e I são fechados e $S \cup I = [0,1]$. Dada a conexidade de $[0,1]$, sabemos que $S \cap I \neq \emptyset$. Portanto, para $p \in S \cap I$, temos que $x \sim x_p$.* □

Na próxima seção, construiremos a representação funcional de $\succsim$ sobre o espaço de menus $\mathbb{X}$ a partir da maior restrição dessa relação invariante com respeito a misturas entre menus, isto é, a maior restrição que satisfaz o axioma da Independência, tradicional na literatura de decisão sob incerteza.

3 Representação funcional de $\succsim$

Suponha que $\succsim$ satisfaz *Order*, *Nondegeneracy*, *Indifference to randomization*, *Preference Convexity*, *Certainty Independence*, *Continuity*, *Monotonicity*, *Worst* e *Finiteness*. Considere agora seu maior subconjunto que satisfaça também o axioma tradicional de independência. Para isso, defina a relação $\succsim^*$ sobre $\mathbb{X}$ por

$$x \succsim^* x' \Leftrightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \succsim \lambda x' + (1-\lambda)y$$

para todo $y \in \mathbb{X}$ e $\lambda \in (0,1]$.

Naturalmente, algumas das propriedades de $\succsim$ serão herdadas por sua restrição $\succsim^*$. *Finitiness* e *Worst*, em especial, assumirão formatos mais intuitivos, como veremos em seguida. Contudo, observe que, como a relação primitiva satisfaz independência apenas com relação aos menus certos x_p, a relação induzida $\succsim^*$ não é completa sobre o espaço de menus. Exploramos essas constatações na sequência de afirmações abaixo.

Afirmação 2 *$\succsim^*$ é uma pré-ordem.*

Dem.: *Pela reflexividade de $\succsim$, é claro que $x \succsim^* x$ para todo $x \in \mathbb{X}$. Suponha x,y e z tais que $x \succsim^* y$ e $y \succsim^* z$. Então, para um menu x' qualquer e $\lambda \in (0,1]$, temos $\lambda x + (1-\lambda)x' \succsim \lambda y + (1-\lambda)x' \succsim \lambda z + (1-\lambda)x'$. Para concluir, basta usar a transitividade de $\succsim$.* □

Afirmação 3 *$\succsim^*$ satisfaz Monotonicity.*

Dem.: *Isto é consequência imediata da monotonicidade de $\succsim$.* □

Afirmação 4 *Sejam $\{x^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{y^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ sequências em $\mathbb{X}$ convergentes para x e y, respectivamente, tais que $x^m \succsim^* y^m$ $\forall m \in \mathbb{N}$. Então $x \succsim^* y$.*

Dem.: *Pela definição de $\succsim^*$, temos que para todo $\lambda \in (0,1]$ e qualquer menu z, temos*

$$\lambda x^m + (1-\lambda)z \succsim \lambda y^m + (1-\lambda)z$$

Como $\succsim$ satisfaz Order e Continuity, concluímos que $\lambda x + (1-\lambda)z \succsim \lambda y + (1-\lambda)z$ e, portanto, $x \succsim^* y$. □

Afirmação 5 *$\succsim^*$ satisfaz* Nondegeneracy

Dem.: *Pela Afirmação 3, sabemos que* $\Delta(B) \succsim^* \{b_*\}$. *Como* $\succsim$ *satisfaz* Nondegeneracy, *temos que* $\Delta(B) \succ \{b_*\}$ *e, consequentemente, não é verdade que* $\{b_*\} \succsim^* \Delta(B)$. □

Afirmação 6 $\succsim^*$ *satisfaz* Indifference to randomization.

Dem.: *Tome um menu* x *qualquer. Note que, para todo menu* $y \in \mathbb{X}$ *e* $\lambda \in (0,1]$, *temos*

$$\begin{aligned}\lambda x + (1-\lambda)y &\sim co(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ &= co(\lambda co(x) + (1-\lambda)y) \\ &\sim \lambda co(x) + (1-\lambda)y\end{aligned}$$

Isto mostra que $co(x) \sim^* x$. □

Afirmação 7 (Finitiness*) *Para todo menu* x, *existe um subconjunto finito* x^f *tal que* $x \sim^* x'$.

Dem.: *Basta utilizar Finitiness de* $\succsim$ *e a definição de* $\succsim^*$. □

Afirmação 8 (Worst*) *Para a pior alternativa* b_*, *temos* $x \cup \{b_*\} \sim^* x$.

Dem.: *Implicação de Worst em* $\succsim$ *e da definição de* $\succsim^*$. □

Repare que a Afirmação 3 nos ensina que, se dois menus são $\subseteq$-comparáveis, então também serão $\succsim^*$-comparáveis. Além disso, a Afirmação 4 nos mostra que a continuidade de $\succsim$ é preservada em $\succsim^*$. Novamente, um raciocínio análogo ao feito para a relação $\succsim$ nos mostra que

$$B \sim^* \Delta(B) \succsim^* x \succsim^* b_* \text{ e } B \succ^* b_*$$

Vamos, por fim, demonstrar que $\succsim^*$ satisfaz o axioma da Independência.

Afirmação 9 (Independence) $x \succsim^* x'$ *se, e somente se,* $\lambda x + (1-\lambda)y \succsim^* \lambda x' + (1-\lambda)y$, *para quaisquer menus* $x, x', y \in \mathbb{X}$ *e para todo* $\lambda \in [0,1]$.

Dem.: *Considere menus* x *e* x' *tais que* $x \succsim^* x'$. *Então, para quaisquer* λ,θ $\in (0,1)$ *e* $y, z \in \mathbb{X}$, *temos*

$$\begin{aligned}\theta(\lambda x + (1-\lambda)y) + (1-\theta)z &= \theta\lambda x + (1-\theta\lambda)\left(\frac{\theta(1-\lambda)}{1-\theta\lambda}y + \frac{1-\theta}{1-\theta\lambda}z\right) \\ &\succsim \theta\lambda x' + (1-\theta\lambda)\left(\frac{\theta(1-\lambda)}{1-\theta\lambda}y + \frac{1-\theta}{1-\theta\lambda}z\right) \\ &= \theta(\lambda x' + (1-\lambda)y) + (1-\theta)z\end{aligned}$$

Pela definição de $\succsim^*$, *concluímos que* $\lambda x + (1-\lambda)y \succsim^* \lambda x' + (1-\lambda)y$. *Agora, suponha que* $\lambda x + (1-\lambda)y \succsim^* \lambda x' + (1-\lambda)y$ *para* $\lambda \in (0,1)$ *e um menu* y *qualquer. Pela Afirmação 5, o conjunto* $\{\lambda \in [0,1] : \lambda x + (1-\lambda)y \succsim^* \lambda x' + (1-\lambda)y\}$

é um conjunto fechado e, portanto,

$$\hat{\lambda} := \max\left\{\lambda \in [0,1] : \lambda x + (1-\lambda)y \succsim^* \lambda x' + (1-\lambda)y\right\}$$

está bem definido. Defina ainda $\theta := \frac{1}{1+\hat{\lambda}}$*. Então,*

$$\begin{aligned}\theta(\hat{\lambda}x + (1-\hat{\lambda})y) + (1-\theta)x &\succsim^* \theta(\hat{\lambda}x' + (1-\hat{\lambda})y) + (1-\theta)x \\ &= \theta(\hat{\lambda}x + (1-\hat{\lambda})y) + (1-\theta)x' \\ &\succsim^* \theta(\hat{\lambda}x' + (1-\hat{\lambda})y) + (1-\theta)x'\end{aligned}$$

pela primeira parte desta demonstração. Usando a transitividade de $\succsim^*$ *e reescrevendo os coeficientes da expressão acima, temos*

$$\frac{2\hat{\lambda}}{1+\hat{\lambda}}x + \frac{1-\hat{\lambda}}{1+\hat{\lambda}}y \succsim^* \frac{2\hat{\lambda}}{1+\hat{\lambda}}x' + \frac{1-\hat{\lambda}}{1+\hat{\lambda}}y \qquad (\star)$$

Como $\hat{\lambda}$ *é máximo,* $\hat{\lambda} \geq \frac{2\hat{\lambda}}{1+\hat{\lambda}}$ *e, consequentemente,* $\hat{\lambda}(\hat{\lambda}) \geq 0$*. Isto implica que* $\hat{\lambda} = 1$ *e, por* $(\star)$*,* $x \succsim^* x'$*.* □

3.1 Representação de preferências incompletas sobre menus

Uma vez exploradas as propriedades de $\succsim^*$, podemos enunciar o resultado de Kochov (2007) para representação de preferências incompletas.

Teorema 2 (Kochov (2007)) *Uma preordem* $\succcurlyeq \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{X}$ *satisfaz* Continuity*,* Nondegeneracy*,* Independence *e* Monotonicity *se, e somente se, existe um conjunto* S*, uma função utilidade dependente de estado* $U : \Delta(B) \times S \to R$ *e um conjunto fechado e convexo* $\mathcal{M}$ *de medidas de probabilidade sobre* S *tais que*

(i) $x \succcurlyeq y$ *se, e somente se,*

$$\int_S \max_{\beta \in x} U(\beta, s) d\mu \geq \int_S \max_{\beta \in y} U(\beta, s) d\mu \quad \forall \mu \in \mathcal{M};$$

(ii) cada $U(\cdot, s)$ *é uma função utilidade esperada, i.e.*

$$U(\beta, s) = \sum_{b \in B} \beta(b) U(b, s).$$

Perceba que, do Teorema 2, é possível concluir que o relaxamento da hipótese de completude da preferência tem o mesmo efeito de ambiguidade anteriormente gerado pela imprecisão de contingências, que motiva a representação no Teorema 1. Contudo, apesar de a ambiguidade nos dois casos estar relacionada ao conceito de incerteza Knightiana tratado em (Bewley, 1986), as representações enunciadas até o momento derivam um espaço de estados subjetivo, observável pelas preferências a*a posteriori* do agente, não sendo necessário tomá-lo como uma primitiva do modelo.

Assim como no caso da preferência DLR, o estado subjetivo em Kochov (2007) é único. Isso significa que, para quaisquer duas representações da preferência incompleta, os estados subjetivos associados são o mesmo. Mais ainda, esse espaço é mínimo no sentido de não haver dois estados s e s' que geram uma mesma preferência *ex post*. No lema abaixo, adaptamos o resultado de Kochov (2007) para a relação $\succsim^*$.

Lema 1 *Existe um conjunto finito de funções* $N \subseteq \{u \in \mathbb{R}^B_+ : u(b_*) = 0$ *e* $\max_B u(b) = 1\}$ *e um conjunto fechado e convexo* Π *de medidas de probabilidade sobre* N *tais que, para todo* $x, y \in \mathbb{X}$*:*

(i) $x \succsim^* y$ *se, e somente se,*

$$\sum_{u \in N} \pi(u) \max_{\beta \in x} u(\beta) \geq \sum_{u \in N} \pi(u) \max_{\beta \in y} u(\beta) \quad \forall \pi \in \Pi$$

(ii) cada $u \in N$ *é uma função utilidade esperada, i.e.*

$$u(\beta) = \sum_{b \in B} \beta(b) u(b).$$

Dem.: *Prosseguiremos a demonstração do lema em dois passos.*
Passo 1 *Vamos mostrar que* Finitiness *é condição suficiente para que o conjunto* S *de estados da natureza no Teorema 2 seja finito. Seja* $(U, \mathcal{M}, S)$ *uma representação de* $\succsim^*$ *nos termos do Teorema 2. De Kochov (2007), sabemos que tal representação pode ser construída sem estados redundantes e apenas com estados relevantes. Isto é, para todo par distinto* $s, s' \in S$, $U(\cdot, s)$ *e* $U(\cdot, s')$ *representam preferências distintas e, para todo par de menus* x, y *com* $x \subseteq y$ *e* $\max_{\beta \in x} U(\beta, s) > \max_{\beta \in y} U(\beta, s)$ *para algum* $s \in S$*, nós temos* $y \succ^* x$*. Considere ainda um menu* x^* *que é uma esfera em* $\Delta(B)$*, i.e. seja* x^* *tal que exista* $\beta^* \in \Delta(B)$ *e* $\delta > 0$ *com*

$$x^* = \{\beta \in \Delta(B) : ||\beta - \beta^*|| \leq \delta\} \subseteq \Delta(B).$$

Vamos agora argumentar que o conjunto S *necessariamente é finito. Para tanto, note primeiro que, como* x^* *é uma esfera, para cada* $s \in S$, $U(\cdot, s)$ *é maximizada por uma única loteria* $\beta \in x^*$*. Similarmente, cada loteria* $\beta \in x^*$ *maximiza, no máximo, uma função em* $\{U(\cdot, s) : s \in S\}$*. Mas então,* $x \subseteq x^*$ *é tal que* $x \sim^* x^*$ *somente se*

$$\{\beta^* \in x^* : \{\beta^*\} = \operatorname*{argmax}_{\beta \in x^*} U(\beta, s) \text{ para algum } s \in S\} \subseteq x.$$

Como, por Finitiness*, *existe um menu finito que satisfaz essa condição, concluímos que S é finito.*

Como não há estados redundantes em S e ele é único, não precisamos indexar as utilidades no espaço subjetivo $\{U(\cdot, s) : s \in S\}$. Portanto, considere para o Passo 2 abaixo, que S é simplesmente o conjunto de utilidades sobre loterias geradas a posteriori.

<u>*Passo 2*</u> *Mas agora note que podemos normalizar os estados da natureza de modo a obter o conjunto N utilizado na representação do Teorema 1. Para isso, escreva:*

$$u(b) = \frac{U(b) - U(b_*)}{\max_b U(b) - U(b_*)}$$

e veja que, de fato, $u(b_*) = 0$ e $\max_B u(b) = 1$. Todavia, isso não necessariamente preserva o ordenamento dos menus e, para corrigir esse problema, teremos de normalizar as medidas de probabilidade em $\mathcal{M}$ da seguinte maneira:

$$\hat{\pi}(u) = \mu(U)\left[max_B U(b) - U(b_*)\right]$$

Finalmente, para que as medidas normalizadas somem a unidade, precisamos reescrevê-las como abaixo:

$$\pi(u) = \frac{\hat{\pi}(u)}{\sum_{u \in N} \hat{\pi}(u)}.$$

<u>*Passo 3*</u> *Dos Passos 1 e 2, podemos reescrever o resultado do Teorema 2 da seguinte maneira*

$$x \succsim^* y \text{ se, e somente se, } \sum_{u \in N} \mu(u) \max_{\beta \in x} u(\beta) \geq \sum_{u \in N} \mu(u) \max_{\beta \in y} u(\beta)$$

mantendo o formato de utilidade esperada para $u \in N$. □

3.2 Obtendo a forma funcional de $\succsim$

Seja $w : \mathbb{X} \times \Pi \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$w(x, \pi) = \sum_{u \in N} \pi(u) \max_{\beta \in x} u(\beta).$$

Vamos examinar o valor que ela assume nos menus certos x_p, para cada $\pi \in \Pi$:

$$
\begin{aligned}
w(x_p, \pi) &= \sum_{u \in N} \pi(u) \max_{\beta \in x_p} u(\beta) \\
&= \sum_{u \in N} \pi(u) \max_{\beta \in x_p} u(p\beta' + (1-p)\delta_{b_*}), \quad \beta' \in \Delta(B) \\
&= \sum_{u \in N} \pi(u) \max_{\beta \in x_p} \left\{ p \sum_{b \in B} \beta'(b) u(b) + (1-p) \sum_{b \in B} \delta_{b_*}(b) u(b) \right\} \\
&= \sum_{u \in N} \pi(u) p \max_{\beta' \in \Delta(B)} \sum_{b \in B} \beta'(b) u(b), \quad \textit{pois } u(b_*) = 0 \text{ e } \delta_{b_*}(b) = 0 \; \forall b \neq b_* \\
&= \sum_{u \in N} \pi(u) p \max_{\beta' \in \Delta(B)} u(\beta') \\
&= p \sum_{u \in N} \pi(u) \cdot 1 \\
&= p
\end{aligned}
$$

donde a penúltima igualdade é consequência do fato de que o elemento que maximiza $u(\beta')$ é a loteria degenerada $\delta_{\bar{b}}$ na qual $\bar{b} \in \operatorname{argmax} u(b)$, ou seja, $u(\bar{b}) = 1$. É importante notar ainda que $w(x_p, \pi) = p$ para qualquer *prior* $\pi \in \Pi$. Portanto, podemos afirmar que para dois menus certos x_p e $x_{p'}$, temos que $x_p \succsim^* x_{p'}$ se, e somente se, $p \geq p'$.

Tendo estudado o valor que w assume sobre os menus certos x_p, precisamos ainda de uma propriedade da relação primitiva $\succsim$ referente a misturas convexas entre menus. Mais precisamente, mostramos abaixo que o Lema 1, *Preference Convexity* e *Certainty Independence* são suficientes para afirmar que se um menu é $\succsim$-preferido a um menu certo, misturá-los a um terceiro menu com pesos iguais mantém a relação invariante.

Lema 2 *A relação $\succsim$ satisfaz* Negative Certainty Independence (NCI), *i.e. se $x \succsim x_p$, então $\lambda x + (1-\lambda) y \succsim \lambda x_p + (1-\lambda) y$ para todo $\lambda \in (0,1)$ e $y \in \mathbb{X}$.*

Dem.: *Tome x e x_p em $\mathbb{X}$, com um p qualquer no intervalo $[0,1]$, tais que $x \succsim x_p$. Pela Afirmação 1, sabemos que existe $\bar{p} \in [0,1]$ tal que $x \sim x_{\bar{p}}$. Logo, $x \sim x_{\bar{p}} \succsim x_p$. Como $\succsim$ satisfaz* Certainty Independence, *isto implica que $\bar{p} \geq p$.De observação quue fizemos antes do lema, sabemos que, por sua vez, isto implica que $x_{\bar{p}} \succsim^* x_p$.*

Se $y \sim x \sim x_{\bar{p}}$, então $x_{\bar{p}} = \lambda x_{\bar{p}} + (1-\lambda) x_{\bar{p}} \sim \lambda x_{\bar{p}} + (1-\lambda) y$, por Certainty Independence. Preference Convexity *nos permite afirmar que $\lambda x + (1-\lambda) y \succsim x \sim x_{\bar{p}} \sim \lambda x_{\bar{p}} + (1-\lambda) y$. Usando transitividade e a discussão no parágrafo anterior, chegamos em $\lambda x + (1-\lambda) y \succsim \lambda x_p + (1-\lambda) y$.*

Contudo, se não vale que $y \sim x$, então considere o ato simples $x_{p'} := \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) x_{\hat{p}} + \left(\frac{1-2\theta}{1-\theta}\right) x_{\bar{p}}$, com $\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $x_{\hat{p}}$ o menu simples tal que $y \sim x_{\hat{p}}$.

Observe que

$$\begin{aligned}\theta x_{\bar{p}} + (1-\theta)x_{p'} &= \theta x_{\bar{p}} + (1-\theta)\left[\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)x_{\hat{p}} + \left(\frac{1-2\theta}{1-\theta}\right)x_{\bar{p}}\right] \\ &= \theta x_{\bar{p}} + \theta x_{\hat{p}} + (1-2\theta)x_{\bar{p}} \\ &= \theta x_{\hat{p}} + (1-\theta)x_{\bar{p}} \\ &\sim \theta y + (1-\theta)x_{\bar{p}}, \text{ \textit{por} Certainty Independence.}\end{aligned}$$

Aplicando Certainty Independence *mais uma vez, temos*

$$\theta x + (1-\theta)x_{p'} \sim \theta x_{\bar{p}} + (1-\theta)x_{p'} \sim \theta y + (1-\theta)x_{\bar{p}}$$

Ao aplicarmos Preference Convexity *na expressão acima, obtemos*

$$\begin{aligned}\lambda(\theta x + (1-\theta)x_{p'}) + (1-\lambda)(\theta y + (1-\theta)x_{\bar{p}}) &\succsim \theta x_{\bar{p}} + (1-\theta)x_{p'} \\ &= \lambda(\theta x_{\bar{p}} + (1-\theta)x_{p'}) + (1-\lambda)(\theta x_{\bar{p}} + (1-\theta)x_{p'}) \\ &\sim \lambda(\theta x_{\bar{p}} + (1-\theta)x_{p'}) + (1-\lambda)(\theta y + (1-\theta)x_{\bar{p}})\end{aligned}$$

cuja última linha é consequência de Certainty Independence. *Podemos reescrever a expressão acima da seguinte forma*

$$\theta(\lambda x+(1-\lambda)y)+(1-\theta)(\lambda x_{p'}+(1-\lambda)x_{\bar{p}}) \succsim \theta(\lambda x_{\bar{p}}+(1-\lambda)y)+(1-\theta)(\lambda x_{p'}+(1-\lambda)x_{\bar{p}})$$

donde Certainty Independence *nos permite afirmar que* $\lambda x + (1-\lambda)y \succsim \lambda x_{\bar{p}} + (1-\lambda)y$. *Rocorde-se que* $\lambda x_{\bar{p}} + (1-\lambda)y \succsim \lambda x_p + (1-\lambda)y$, *do início da demonstração. Como* $\succsim$ *é transitiva, concluímos que* $\lambda x + (1-\lambda)y \succsim \lambda x_p + (1-\lambda)y$ *para todo* $\lambda \in (0,1)$ *e* $y \in \mathbb{X}$. □

Munidos dos Lemas 1 e 2, podemos, por fim, estabelecer a forma funcional descrita no Teorema 1 para a representação de $\succsim$.

Demonstração do Teorema 1: Vamos agora estabelecer a representação da relação $\succsim$ original a partir dos resultados do Lema 1 e Lema 2. Recorde que, de *NCI*, aprendemos que as relações $\succsim$ e $\succsim^*$ coincidem para os menus certos, ou seja

$$\begin{aligned}x_p \succsim x_{\bar{p}} &\Leftrightarrow p \geq \bar{p} \\ &\Leftrightarrow w(x_p, \pi) \geq w(x_{\bar{p}}, \pi)\ \forall \pi \in \Pi \\ &\Leftrightarrow x_p \succsim^* x_{\bar{p}}\end{aligned}$$

Agora, fixe $x \in \mathbb{X}$ e $p \in [0,1]$ tal que $x \sim x_p$. Sabemos que $x \succsim^* x_p$. Logo,

$$w(x,\pi) \geq w(x_p,\pi) = p \quad \forall \pi \in \Pi$$

e, consequentemente, $\min_{\pi\in\Pi} w(x,\pi) \geq p$. Mas, agora, suponha que

$$\min_{\pi\in\Pi} w(x,\pi) > p$$

Então, para qualquer $p' \in (p, \min_{\pi\in\Pi} w(x,\pi))$, temos que $x_{p'} \succ^* x_p \sim^* x$, uma contradição. Portanto,

$$\min_{\pi\in\Pi} \sum_{u\in N} \pi(u) \max_{\beta\in x} u(\beta) = p$$

Argumentos usuais da literatura de menus garantem que a forma funcional acima implica na axiomatização de $\succsim$.

■

4 Observações finais

A representação obtida no Teorema 1 acrescenta à literatura de utilidades aditivas finitas o tratamento de preferências sobre menus com contingências imprecisas. Apesar de semelhante àquela encontrada em EMS, nossa representação exige mais estrutura da relação de preferência, visto que assumimos *Finitiness* e uma forma mais forte de continuidade - EMS assumem que os contornos superior e inferior são fechados pelo menos para os menus certos, e não para qualquer menu, como é o nosso caso. A opção de axiomatização que fizemos, contudo, nos permitiu aproveitar o resultado da representação para preferências incompletas de Kochov (2007), à semelhança do que é feito no caso de preferências sobre atos, onde a representação em Bewley (2002) pode ser usada como degrau para se chegar ao resultado clássico de (Gilboa and Schmeidler, 1989)[4].

Recorde-se que, ao assumir *IR* na preferência, estamos supondo que a ambiguidade não persiste após a realização de um estado no espaço subjetivo do agente. Se, entretanto, a imprecisão das contingências remanesce no estágio de escolha das loterias, EMS mostram que é possível obter a seguinte representação

$$W^{EMS}(x) = \int \min_{\pi\in\Pi} \max_{\beta\in x} u(\beta) d\pi(u)$$

abrindo-se mão de *IR*. Um exame de como *Finitiness* e o resultado de Kochov (2007) podem ser utilizados no caso de imprecisão persistente das contingências ainda está por ser feito.

[4]Para uma versão completa dessa demonstração, ver (Riella, 2014).

References

Bewley, T. (2002). Knightian decision theory. Part I. *Decisions in economics and finance 110*(807), 79–110.

Bewley, T. F. (1986). Knightian Decision Theory: Part I.

Dekel, E., B. Lipman, and A. Rustichini (2001). Representing preferences with a unique subjective state space. *Econometrica 69*(4), 891–934.

Dekel, E., B. L. Lipman, and A. Rustichini (2009). Temptation-driven preferences. *Review of Economic Studies 76*, 937–971.

Epstein, L. G., M. Marinacci, and K. Seo (2007). Coarse contingencies and ambiguity. *Theoretical Economics 2*, 355–394.

Gilboa, I., F. Maccheroni, M. Marinacci, and D. Schmeidler (2010). Objective and Subjective Rationality in a Multiple Prior Model. *Econometrica 78*(2), 755–770.

Gilboa, I. and D. Schmeidler (1989). Maxmin expected utility with non-unique prior. *Journal of mathematical economics* (December).

Kochov, A. S. (2007). Subjective States without the Completeness Axiom.

Kopylov, I. (2009). Finite additive utility representations for preferences over menus. *Journal of Economic Theory 144*(1), 354–374.

Kreps, D. M. (1979). A Representation Theorem for 'Preference for Flexibility'. *Econometrica 47*(3), 565–577.

Kreps, D. M. (1992). Static choice in the presence of unforeseen contingencies. In *Economic Analysis of Markets and Games: Essays in Honor of Frank Hahn*, pp. 258–281. MIT Press.

Riella, G. (2014). Notas de Aula do Curso de Teoria da Decisão - UnB.