Notas - preferências sobre menus

24 de março de 2015

Sumário

1 Introdução

2 Axiomatização da prefrência sobre menus

Seja B um conjunto finito de alternativas e $\Delta(B)$ o conjunto das medidas de probabilidade sobre B. $\mathbb{X}$ é a coleção de subconjuntos fechados de $\Delta(B)$, os menus, e $\succsim$ denotará a preferência sobre $\mathbb{X}$. Os axiomas a seguir caracterizam essa relação.

Order $\succsim$ é completa e transitiva

Continuity Para todo x, $\{y \in \mathbb{X} : y \succsim x\}$ e $\{y \in \mathbb{X} : x \succsim y\}$ são fechados

Monotonicity Para quaisquer x, $x' \in \mathbb{X}$ com $x \supseteq x'$, temos $x \succsim x'$.

Indifference to Randomization $x \sim co(x)$, o fecho convexo de x.

Nondegeneracy Existem menus x,$x' \in \mathbb{X}$ tais que $x \succ x'$.

Preference Convexity $x \succsim x' \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)x' \succsim x'$.

Finiteness Para todo x, existe um menu finito x^f tal que, para todo $\lambda \in (0,1)$ e qualquer menu x', $\lambda x + (1-\lambda)x' \sim \lambda x^f + (1-\lambda)x'$.

Adicionalmente, suponha que o tomador de decisão tenha certeza *ex ante* de que há uma alternativa b_* que é o pior resultado *ex post* - o mesmo vale para a loteria degenerada δ_{b_*}. Assumiremos também que o agente saiba *ex ante* que o menu $\Delta(B)$ lhe trará o melhor resultado *ex post* ainda que não conheça qual loteria maximizará sua utilidade após a realização do estado.

Worst Para a pior alternativa b_*, temos $\lambda\,(x \cup \{b_*\}) + (1-\lambda)y \sim \lambda x + (1-\lambda)y$ para quaisquer menus $x, y \in \mathbb{X}$ e $\lambda \in (0,1)$.

Worst formaliza a idéia de que o agente não experimenta ganhos de flexibilidade ao incluir em qualquer menu x a loteria degenerada da pior alternativa b_*. Um raciocínio rápido nos garante que

$$\Delta(B) \sim B \succsim x \succsim \{b_*\} \text{ e } B \succ \{b_*\}$$

para todo x. Por *Indifference to Randomization* e *Monotonicity*, $\Delta(B) \sim B \succsim x$. Além disso, dado que o agente está certo de que b_* é o pior resultado, $x \succsim \{b_*\}$ vale para todo x. Por fim, *Monotonicity* garante que $B \succsim \{b_*\}$. Caso $B \sim \{b_*\}$, contrariamos *Nondegeneracy*.

Tendo conhecido o comportamento do agente face aos menus $\Delta(B)$ e $\{b_*\}$, podemos definir o menu certo x_p como $x_p := p\Delta(B) + (1-p)\{b_*\}$, i.e. a composição do melhor e pior menu com peso $p \in [0,1]$. O axioma abaixo enuncia a independência de $\succsim$ com relação a menus certos.

Certainty Independence Para $\lambda \in (0,1)$ e $x_p = p\Delta(B) + (1-p)b_*$, temos

$$x \succsim x' \Leftrightarrow \lambda x + (1-\lambda)x_p \succsim \lambda x' + (1-\lambda)x_p$$

O principal resultado do nosso trabalho é a construção da representação funcional da preferência sobre menus satisfazendo os axiomas acima, baseada em Epstein et al. (2007), conforme o teorema abaixo.

Teorema 1 *A preferência $\succsim$ sobre o espaço de menus $\mathbb{X}$ satisfaz* Order, Continuity, Monotonicity, Indifference to Randomization, Nondegeneracy, Preference Convexity, Finiteness, Worst *e* Certainty Independence *se, e somente se, existe um conjunto de utilidades $N = \{u \in \mathbb{R}_+^B : u(b_*) = 0$ e $\max_B u(b) = 1\}$ e um conjunto fechado e convexo Π de medidas de probabilidade sobre N tais que*

$$x \succsim y \;\Leftrightarrow\; \min_{\pi \in \Pi} \sum_{u \in N} \pi(u) \max_{\beta \in x} u(\beta) \geq \min_{\pi \in \Pi} \sum_{u \in N} \pi(u) \max_{\beta \in y} u(\beta)$$

Um resultado importante para a demonstração do Teorema 1 é o de que todo menu x possui um menu certo x_p $\succsim$-indiferente a ele, o que traduz a idéia de que existe um peso p na mistura entre o pior e melhor resultados suficiente para que o tomador de decisão conjecture receber o mesmo *payoff* de um menu com menor nível de certeza.

Afirmação 1 *Para todo menu x, existe $p \in [0,1]$ tal que $x \sim x_p = p\Delta(B) + (1-p)b_*$.*

Dem.: *Para um menu qualquer x, defina $S := \{p \in [0,1] : x_p \succsim x\}$, $I := \{p \in [0,1] : x \succsim x_p\}$ e note que $1 \in S$ e $0 \in I$. Como $\succsim$ é contínua e completa, podemos afirmar que S e I são fechados e $S \cup I = [0,1]$. Dada a conexidade de $[0,1]$, sabemos que $S \cap I \neq \emptyset$. Portanto, para $p \in S \cap I$, temos que $x \sim x_p$.* □

Na próxima seção, construiremos a representação funcional de $\succsim$ sobre o espaço de menus $\mathbb{X}$ a partir da maior restrição dessa relação invariante com respeito a misturas entre menus, isto é, a maior restrição que satisfaz o axioma da Independência, tradicional na literatura de decisão sob incerteza.

3 Representação funcional de $\succsim$

Suponha que $\succsim$ satisfaz *Order*, *Nondegeneracy*, *Indifference to randomization*, *Preference Convexity*, *Certainty Independence*, *Continuity*, *Monotonicity*, *Worst* e *Finiteness*. Considere agora seu maior subconjunto que satisfaça também o axioma tradicional de independência. Para isso, defina a relação $\succsim^*$ sobre $\mathbb{X}$ por

$$x \succsim^* x' \Leftrightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \succsim \lambda x' + (1-\lambda)y$$

para todo $y \in \mathbb{X}$ e $\lambda \in (0,1)$.

Naturalmente, algumas das propriedades de $\succsim$ serão herdadas por sua restrição $\succsim^*$. *Finitiness* e *Worst*, em especial, assumirão formatos mais intuitivos, como veremos em seguida. Contudo, observe que, como a relação primitiva satisfaz independência apenas com relação aos menus certos x_p, a relação induzida $\succsim^*$ não é completa sobre o espaço de menus. Exploramos essas constatações na sequência de afirmações abaixo.

Afirmação 2 *$\succsim^*$ é uma pré-ordem.*

Dem.: *Pela reflexividade de $\succsim$, é claro que $x \succsim^* x$ para todo $x \in \mathbb{X}$. Suponha x,y e z tais que $x \succsim^* y$ e $y \succsim^* z$. Então, para um menu x' qualquer e $\lambda \in (0,1)$, temos $\lambda x + (1-\lambda)x' \succsim \lambda y + (1-\lambda)x' \succsim \lambda z + (1-\lambda)x'$. Para concluir, basta usar a transitividade de $\succsim$.* □

Afirmação 3 *$\succsim^*$ satisfaz Monotonicity.*

Dem.: *Suponha x e x' tais que $x \supseteq x'$, mas não vale que $x \succsim^* x'$. Temos dois casos, (i) existe um menu y tal que $\lambda x + (1-\lambda)y \succsim \lambda x' + (1-\lambda)y$ não é verdade para todo $\lambda \in (0,1)$ ou (ii) para algum $\lambda \in (0,1)$, o mesmo ocorre para qualquer menu y. Em ambos os casos, Monotonicity em $\succsim$ implica que $\lambda x + (1-\lambda)y \not\supseteq \lambda x' + (1-\lambda)y$, uma contradição.* □

Afirmação 4 *Sejam $\{x^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{y^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ sequências em $\mathbb{X}$ convergentes para x e y, respectivamente, tais que $x^m \succsim^* y^m$ $\forall m \in \mathbb{N}$. Então $x \succsim^* y$.*

Dem.: *Pela definição de $\succsim^*$, temos que para todo $\lambda \in (0,1)$ e qualquer menu z, temos*

$$\lambda x^m + (1-\lambda)z \succsim \lambda y^m + (1-\lambda)z$$

Como $\succsim$ satisfaz Order e Continuity, concluímos que $\lambda x + (1-\lambda)z \succsim \lambda y + (1-\lambda)z$ e, portanto, $x \succsim^* y$. □

Afirmação 5 $\succsim^*$ *satisfaz* Nondegeneracy

Dem.: *Suponha que $\Delta(B) \sim^* b_*$. Isto implica, pela definição de $\succsim^*$, que $\lambda\Delta(B) + (1-\lambda)y \sim \lambda b_* + (1-\lambda)y$ para todo $y \in \mathbb{X}$ e $\lambda \in (0,1)$. Seja, então, $y = x_p$ e, por* Certainty Independence, *temos que $Delta(B) \sim b_*$, o que viola* Nondegeneracy *em $\succsim$.* □

Afirmação 6 $\succsim^*$ *satisfaz* Indifference to randomization.

Dem.: *Suponha que, para um menu x, não seja verdade que $x \sim^* co(x)$. Como $\succsim^*$ satisfaz* Monotonicity, *isto implica que $co(x) \succ^* x$ e, por conseguinte, que $\lambda co(x) + (1-\lambda)y \succ \lambda x + (1-\lambda)y$ para todo $y \in \mathbb{X}$ e $\lambda \in (0,1)$. Fazendo $y = x_p$,* Certainty Independence *nos permite afirmar que $co(x) \succ x$, o que viola* Indifference to Randomization *em $\succsim$.* □

Afirmação 7 (Finitiness*) *Para todo menu x, existe um subconjunto finito x^f tal que $x \sim^* x'$.*

Dem.: *Basta utilizar Finitiness de $\succsim$ e a definição de $\succsim^*$.* □

Afirmação 8 (Worst*) *Para a pior alternativa b_*, temos $x \cup \{b_*\} \sim^* x$.*

Dem.: *Implicação de Worst em $\succsim$ e da definição de $\succsim^*$.* □

Repare que a Afirmação 3 nos ensina que, se dois menus são $\subseteq$-comparáveis, então também serão $\succsim^*$-comparáveis. Além disso, a Afirmação 4 nos mostra que a continuidade de $\succsim$ é preservada em $\succsim^*$. Novamente, um raciocínio análogo ao feito para a relação $\succsim$ nos mostra que

$$B \sim^* \Delta(B) \succsim^* x \succsim^* b_* \text{ e } B \succ^* b_*$$

Vamos, por fim, demonstrar que $\succsim^*$ satisfaz o axioma da Independência.

Afirmação 9 (Independence) *$x \succsim^* x'$ se, e somente se, $\lambda x + (1-\lambda)y \succsim^* \lambda x' + (1-\lambda)y$ para quaisquer menus $x, x', y \in \mathbb{X}$ e para todo $\lambda \in [0,1]$.*

Dem.: *Considere menus* x *e* x' *tais que* $x \succsim^* x'$. *Então, para quaisquer* $\lambda,\theta \in (0,1)$ *e* $y, z \in \mathbb{X}$, *temos*

$$\begin{aligned}\theta(\lambda x + (1-\lambda)y) + (1-\theta)z &= \theta\lambda x + (1-\theta\lambda)\left(\frac{\theta(1-\lambda)}{1-\theta\lambda}y + \frac{1-\theta}{1-\theta\lambda}z\right) \\ &\succsim \theta\lambda x' + (1-\theta\lambda)\left(\frac{\theta(1-\lambda)}{1-\theta\lambda}y + \frac{1-\theta}{1-\theta\lambda}z\right) \\ &= \theta(\lambda x' + (1-\lambda)y) + (1-\theta)z\end{aligned}$$

Pela definição de $\succsim^*$, *concluímos que* $\lambda x + (1-\lambda)y \succsim^* \lambda x' + (1-\lambda)y$. *Agora, suponha que* $\lambda x + (1-\lambda)y \succsim^* \lambda x' + (1-\lambda)y$ *para* $\lambda \in (0,1)$ *e um menu* y *qualquer. Pela Afirmação 5, o conjunto* $\{\lambda \in [0,1] : \lambda x + (1-\lambda)y \succsim^* \lambda x' + (1-\lambda)y\}$ *é um conjunto fechado e, portanto,*

$$\hat{\lambda} := \max\left\{\lambda \in [0,1] : \lambda x + (1-\lambda)y \succsim^* \lambda x' + (1-\lambda)y\right\}$$

está bem definido. Defina ainda $\theta := \frac{1}{1+\hat{\lambda}}$. *Então,*

$$\begin{aligned}\theta(\hat{\lambda}x + (1-\hat{\lambda})y) + (1-\theta)x &\succsim^* \theta(\hat{\lambda}x' + (1-\hat{\lambda})y) + (1-\theta)x \\ &= \theta(\hat{\lambda}x + (1-\hat{\lambda})y) + (1-\theta)x' \\ &\succsim^* \theta(\hat{\lambda}x' + (1-\hat{\lambda})y) + (1-\theta)x'\end{aligned}$$

pela primeira parte desta demonstração. Usando a transitividade de $\succsim^*$ *e reescrevendo os coeficientes da expressão acima, temos*

$$\frac{2\hat{\lambda}}{1+\hat{\lambda}}x + \frac{1-\hat{\lambda}}{1+\hat{\lambda}}y \succsim^* \frac{2\hat{\lambda}}{1+\hat{\lambda}}x' + \frac{1-\hat{\lambda}}{1+\hat{\lambda}}y \qquad (\star)$$

Como $\hat{\lambda}$ *é máximo,* $\hat{\lambda} \geq \frac{2\hat{\lambda}}{1+\hat{\lambda}}$ *e, consequentemente,* $\hat{\lambda}(\hat{\lambda}) \geq 0$. *Isto implica que* $\hat{\lambda} = 1$ *e, por* $(\star)$, $x \succsim^* x'$. □

3.1 Representação de preferências incompletas sobre menus

Inserir uma discussão sobre o resultado do Kochov e enunciá-lo como está no paper. No lema, adaptaríamos para os menus fechados e finitude do espaço subjetivo.

Teorema 2 (Kochov (2007)) *A preordem* $\succsim^*$ *satisfaz* Continuity, Nondegeneracy, Independence *e* Monotonicity *se, e somente se, existe um conjunto* S, *uma função utilidade dependente de estado* $U : \Delta(B) \times S \to R$ *e um conjunto fechado e convexo* Δ *de medidas de probabilidade sobre* S *tais que* *(i)* $x \succsim^* y$ *se, e somente se,*

$$\int_S \sup_{\beta\in x} U(\beta,s)d\mu \geq \int_S \max_{\beta\in y} U(\beta,s)d\mu \quad \forall \mu \in \Delta;$$

(ii) cada $U(\cdot, s)$ *é uma função utilidade esperada, i.e.*

$$U(\beta,s) = \sum_{b\in B} \beta(b)U(b,s)$$

Colocar o comentário de que não é necessário indexar as utilidades no estado da natureza etc.

Lema 1 *A preordem* $\succsim^*$ *satisfaz* Continuity, Nondegeneracy, Independence, Monotonicity *e* Finitiness* *se, e somente se, existe um conjunto finito de funções* $N = \{u \in \mathbb{R}^B_+ : u(b_*) = 0$ *e* $\max_B u(b) = 1\}$ *e um conjunto fechado e convexo* Π *de medidas de probabilidade sobre* N *tal que:*

(i) $x \succsim^* y$ *se, e somente se,*

$$\sum_{u\in N} \pi(u) \max_{\beta\in x} u(\beta) \geq \sum_{u\in N} \pi(u) \max_{\beta\in y} u(\beta) \quad \forall \pi \in \Pi$$

(ii) cada $u \in N$ *é uma função utilidade esperada, i.e.*

$$u(\beta) = \sum_{b\in B} \beta(b)u(b)$$

Dem.: *Prosseguiremos a demonstração do lema em dois passos.*
Passo 1 *Vamos mostrar que* Finitiness *é condição suficiente para que o conjunto* S *de estados da natureza seja finito*[1]*. Seja* x^* *o menu que é uma esfera contida em* $\Delta(B)$ *e* σ_{x^*} *sua função suporte definida por:*

$$\sigma_{x^*}(\beta) = \max_{\beta\in x^*} U(\beta)$$

Como x^* *é um menu fechado e* $U \in S$ *é contínua,* σ_{x^*} *está bem definida. Logo, existe um mapa biunívoco* $g(\beta)$ *da fronteira de* x^* *no conjunto* S *de maneira que*

$$g(\beta) = U \text{ tal que } \beta = \operatorname*{argmax}_{\alpha} U(\alpha)$$

com α *na fronteira de* x^**, ou seja* $g(\beta)$ *é o estado da natureza no qual* β *é a loteria que maximiza a utilidade esperada, nesse estado. Se, portanto,* S *é um conjunto com infinitos estados da natureza, o menu* x^* *não poderia*

[1] Baseado na demonstração do Teorema 6 em Dekel et al. (2009)

conter um subconjnto finito que o fosse $\succsim^*$*-indiferente, violando* Finitiness*. *Logo, podemos reescrever o resultado do Teorema 2 da seguinte maneira*

$$x \succsim^* y \text{ se, e somente se, } \sum_{U \in S} \mu(U) \max_{\beta \in x} U(\beta) \geq \sum_{U \in S} \mu(U) \max_{\beta \in y} U(\beta)$$

mantendo o formato de utilidade esperada para $U \in S$*. Novamente, como os menus em nosso modelo são subconjuntos fechados de* $\Delta(B)$ *e as utilidades vNM são contínuas,* $\max_{\beta \in x} U(\beta)$ *está bem definido para qualquer menu* x*.*

Passo 2 Mas agora note que podemos normalizar os estados da natureza de modo a obter o conjunto N *utilizado na representação do Teorema 1. Para isso, escreva:*

$$u(b) = \frac{U(b) - U(b_*)}{\max_b U(b) - U(b_*)}$$

e veja que, de fato, $u(b_*) = 0$ *e* $\max_B u(b) = 1$*. Todavia, isso não necessariamente preserva o ordenamento dos menus e, para corrigir esse problema, teremos de normalizar as medidas de probabilidade em* Δ *da seguinte maneira:*

$$\hat{\pi}(u) = \mu(U) \left[max_B U(b) - U(b_*) \right]$$

Finalmente, para que as medidas normalizadas somem a unidade, precisamos reescrevê-las como abaixo:

$$\pi(u) = \frac{\hat{\pi}(u)}{\sum_{u \in N} \hat{\pi}(u)}$$

□

3.2 Obtendo a forma funcional de $\succsim$

Seja $w : \mathbb{X} \times \Pi \to \mathbb{R}$ a função caracterizada por

$$w(x, \pi) = \sum_{u \in N} \pi(u) \max_{\beta \in x} u(\beta)$$

i.e. a função que representa a preferência $\succsim^*$ sobre menus, obtida na subseção anterior. Vamos examinar o valor que ela assume nos menus certos x_p:

$$\begin{aligned}
w(x_p, \pi) &= \sum_{u \in N} \pi(u) \max_{\beta \in x_p} u(\beta) \\
&= \sum_{u \in N} \pi(u) \max_{\beta \in x_p} u(p\beta' + (1-p)\delta_{b_*}), \quad \beta' \in \Delta(B) \\
&= \sum_{u \in N} \pi(u) \max_{\beta \in x_p} \left\{ p \sum_{b \in B} \beta'(b) u(b) + (1-p) \sum_{b \in B} \delta_{b_*}(b) u(b) \right\} \\
&= \sum_{u \in N} \pi(u) p \max_{\beta' \in \Delta(B)} \sum_{b \in B} \beta'(b) u(b), \quad \textit{pois } u(b_*) = 0 \text{ e } \delta_{b_*}(b) = 0 \ \forall b \neq b_* \\
&= \sum_{u \in N} \pi(u) p \max_{\beta' \in \Delta(B)} u(\beta') \\
&= p \sum_{u \in N} \pi(u) \cdot 1 \\
&= p
\end{aligned}$$

donde a penúltima igualdade é consequência do fato de que o elemento que maximiza $u(\beta')$ é a loteria degenerada $\delta_{\bar{b}}$ na qual $\bar{b} := \operatorname{argmax} u(b)$, ou seja, $u(\bar{b}) = 1$. É importante notar ainda que $w(x_p, \pi) = p$ para qualquer *prior* $\pi \in \Pi$. Portanto, podemos afirmar que para dois menus certos x_p e $x_{p'}$, temos que $x_p \succsim^* x_{p'}$ se, e somente se, $p \geq p'$.

Tendo estudado o valor que w assume sobre os menus certos x_p, precisamos ainda de uma propriedade da relação primitiva $\succsim$ referente a misturas convexas entre menus. Mais precisamente, mostramos abaixo que o Lema 1, *Preference Convexity* e *Certainty Independence* são suficientes para afirmar que se um menu é $\succsim$-preferido a um menu certo, misturá-los a um terceiro menu com pesos iguais mantém a relação invariante.

Lema 2 *A relação $\succsim$ satisfaz* Negative Certainty Independence (NCI), *i.e. se $x \succsim x_p$, então $\lambda x + (1-\lambda)y \succsim \lambda x_p + (1-\lambda)y$ para todo $\lambda \in (0,1)$ e $y \in \mathbb{X}$.*

Dem.: *Tome x e x_p em $\mathbb{X}$, com um p qualquer no intervalo $[0,1]$, tais que $x \succsim x_p$. Pela Afirmação 1, sabemos que existe $\bar{p} \in [0,1]$ tal que $x \sim x_{\bar{p}}$. Logo, $x \sim x_{\bar{p}} \succsim x_p$. Afirmamos que*

$$\lambda x_{\bar{p}} + (1-\lambda)y \succsim \lambda x_p + (1-\lambda)y$$

para qualquer menu y e todo $\lambda \in (0,1)$, pois, caso contrário, não seria verdade que $x_{\bar{p}} \succsim^* x_p$. Pelo Lema 1 e a discussão sobre o valor da utilidade nos menus certos, isto implica que $p > \bar{p}$ e, consequentemente, $x_p \succ^* x_{\bar{p}}$. Aplicando a definição de $\succsim^*$, isto significa que $\theta x_p + (1-\theta)z \succ \theta x_{\bar{p}} + (1-\theta)z$ para todo menu z e $\theta \in (0,1)$. Agora veja que para $z := x_p$, temos $x_p \succ \theta x_{\bar{p}} + (1-\theta)x_p$, o que viola Preference Convexity.

Se $y \sim x \sim x_{\bar{p}}$, então $x_{\bar{p}} = \lambda x_{\bar{p}} + (1-\lambda)x_{\bar{p}} \sim \lambda x_{\bar{p}} + (1-\lambda)y$, por Certainty Independence. Preference Convexity *nos permite afirmar que $\lambda x + (1-\lambda)y \succsim x \sim x_{\bar{p}} \sim \lambda x_{\bar{p}} + (1-\lambda)y$. Usando transitividade e a discussão no parágrafo anterior, chegamos em $\lambda x + (1-\lambda)y \succsim \lambda x_p + (1-\lambda)y$.*

Contudo, se não vale que $y \sim x$, então considere o ato simples $x_{p'} := \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) x_{\hat{p}} + \left(\frac{1-2\theta}{1-\theta}\right) x_{\bar{p}}$, com $\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $x_{\hat{p}}$ o menu simples tal que $y \sim x_{\hat{p}}$. Observe que

$$\begin{aligned}
\theta x_{\bar{p}} + (1-\theta)x_{p'} &= \theta x_{\bar{p}} + (1-\theta)\left[\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) x_{\hat{p}} + \left(\frac{1-2\theta}{1-\theta}\right) x_{\bar{p}}\right] \\
&= \theta x_{\bar{p}} + \theta x_{\hat{p}} + (1-2\theta)x_{\bar{p}} \\
&= \theta x_{\hat{p}} + (1-\theta)x_{\bar{p}} \\
&\sim \theta y + (1-\theta)x_{\bar{p}}, \text{ por Certainty Independence}
\end{aligned}$$

Aplicando Certainty Independence *mais uma vez, temos*

$$\theta x + (1-\theta)x_{p'} \sim \theta x_{\bar{p}} + (1-\theta)x_{p'} \sim \theta y + (1-\theta)x_{\bar{p}}$$

Ao aplicarmos Preference Convexity *na expressão acima, obtemos*

$$\begin{aligned}
\lambda(\theta x + (1-\theta)x_{p'}) + (1-\lambda)(\theta y + (1-\theta)x_{\bar{p}}) &\succsim \theta x_{\bar{p}} + (1-\theta)x_{p'} \\
&= \lambda(\theta x_{\bar{p}} + (1-\theta)x_{p'}) + (1-\lambda)(\theta x_{\bar{p}} + (1-\theta)x_{p'}) \\
&\sim \lambda(\theta x_{\bar{p}} + (1-\theta)x_{p'}) + (1-\lambda)(\theta y + (1-\theta)x_{\bar{p}})
\end{aligned}$$

cuja última linha é consequência de Certainty Independence. *Podemos reescrever a expressão acima da seguinte forma*

$$\theta(\lambda x + (1-\lambda)y) + (1-\theta)(\lambda x_{p'} + (1-\lambda)x_{\bar{p}}) \succsim \theta(\lambda x_{\bar{p}} + (1-\lambda)y) + (1-\theta)(\lambda x_{p'} + (1-\lambda)x_{\bar{p}})$$

donde Certainty Independence *nos permite afirmar que $\lambda x + (1-\lambda)y \succsim \lambda x_{\bar{p}} + (1-\lambda)y$. Rocorde-se que $\lambda x_{\bar{p}} + (1-\lambda)y \succsim \lambda x_p + (1-\lambda)y$, do início da demonstração. Como $\succsim$ é transitiva, concluímos que $\lambda x + (1-\lambda)y \succsim \lambda x_p + (1-\lambda)y$ para todo $\lambda \in (0,1)$ e $y \in \mathbb{X}$.* □

Munidos do Lema 1 e Lema 2, podemos, por fim, estabelecer a forma funcional descrita no Teorema 1 para a representação de $\succsim$.

Demonstração do Teorema 1: Vamos agora estabelecer a representação da relação $\succsim$ original a partir dos resultados do Lema 1 e Lema 2. Recorde que, de *NCI*, aprendemos que as relações $\succsim$ e $\succsim^*$ coincidem para os menus certos, ou seja

$$\begin{aligned}
x_p \sim x \succsim y \sim x_{\bar{p}} &\Leftrightarrow x_p \succsim^* x_{\bar{p}} \\
&\Leftrightarrow w(x_p, \pi) \geq w(x_{\bar{p}}, \pi) \; \forall \pi \in \Pi \\
&\Leftrightarrow p \geq \bar{p}
\end{aligned}$$

Ainda em consequência do Lema 2, sabemos que $x \succsim^* x_p$. Logo,

$$w(x, \pi) \geq w(x_p, \pi) = p \quad \forall \pi \in \Pi$$

e, consequentemente, $\min_{\pi \in \Pi} w(x, \pi) \geq p$. Mas, agora, suponha que

$$\min_{\pi \in \Pi} w(x, \pi) > p$$

Então, para qualquer $p' \in (p, \min_{\pi \in \Pi} w(x, \pi))$, temos que $x_{p'} \succ^* x_p \sim^* x$, uma contradição. Portanto,

$$\min_{\pi \in \Pi} \sum_{u \in N} \pi(u) \max_{\beta \in x} u(\beta) = p$$

Argumentos usuais da literatura de menus garantem que a forma funcional acima implica na axiomatização de $\succsim$.

■

4 Observações finais

Referências

Dekel, E., B. L. Lipman, and A. Rustichini (2009). Temptation-driven preferences. *Review of Economic Studies 76*, 937–971.

Epstein, L. G., M. Marinacci, and K. Seo (2007). Coarse contingencies and ambiguity. *Theoretical Economics 2*, 355–394.

Kochov, A. S. (2007). Subjective States without the Completeness Axiom.