Linear Transformation&SVD&EVD

행렬은 선형 변환이다.

임의의 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$와 스칼라 c 에 대하여 변환 T 가 다음의 두 조건을 만족한다면 이 변환 T 는 선형변환이다.

$$T(\vec{a}+\vec{b}) = T(\vec{a}) + T(\vec{b}) \tag{1}$$

$$T(c\vec{a}) = cT(\vec{a}) \tag{2}$$

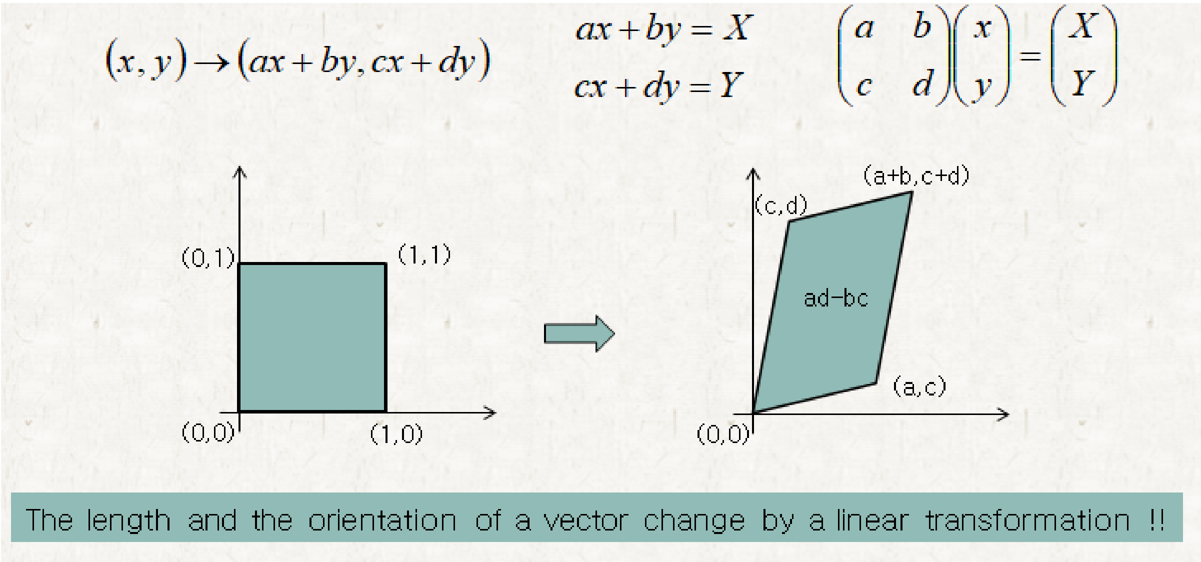
따라서, 위의 선형 변환의 성질에 따라, 임의의 벡터

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{3}$$

에 대해 다음이 성립한다.

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = T\left(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = xT\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + yT\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \tag{4}$$

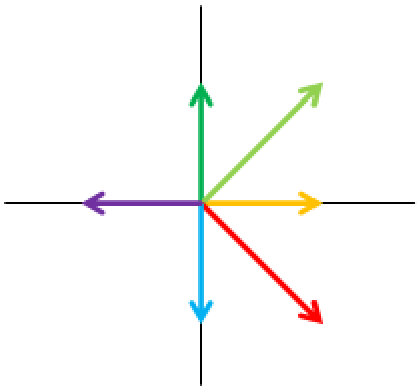
Mapping

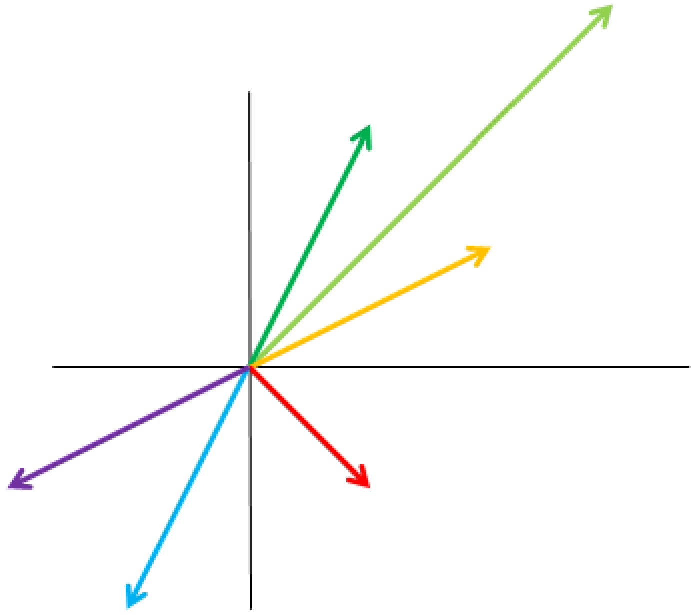


벡터의 방향과 길이가 선형변환에 의해서 바뀌었다.

For any transformation, there are some vectors of which orientation does not change

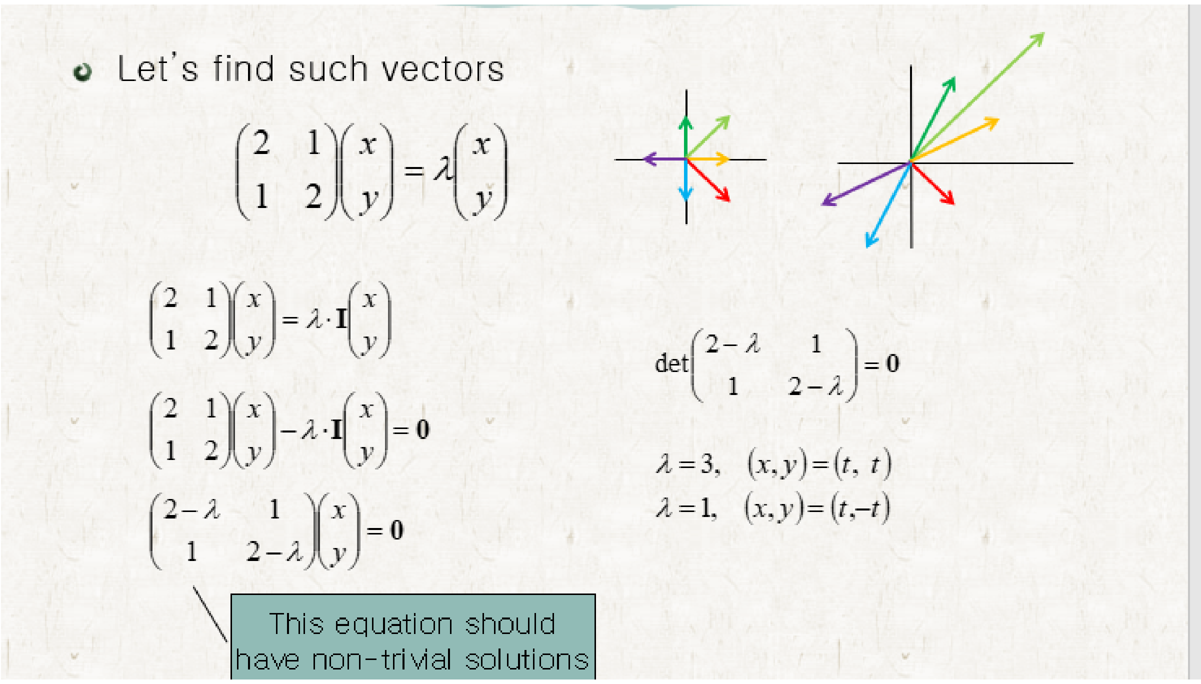
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$





두 그림을 보면 방향이 같고 길이(크기)만 변한 벡터가 있다.

Let's find such vectors!



Eigen values,Eigen Vectors

- For a square matrix, A
  - Eigen values and Eigenvectors satisfy

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

  - An eigen vector is the one of which orientation does not change by tranform A, and has the unit length
  - An eigen value is the amount of extension by transform A

- Property
  - Eigen vectors are orthogonal to one another
  - There are n eigen values including 0(A is nXn)
  - If A is symmetric(대칭행렬), all eigen values are non-negative

For a square matrix, A

- n eigen values

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$$

- n eigen vectors

$$\lambda_1 \to \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \vdots \\ v_{1n} \end{pmatrix} \quad \lambda_2 \to \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{2n} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \lambda_n \to \mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{pmatrix}$$

- Let

$$S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n) = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}$$

S is orthonomal square matrix(왜냐하면 eigen vector은 unit length,eigen vector들은 서로 orthgonal)

$$S^T = S^{-1}$$

Orthogonal matrix란?

행백터와 열벡터가 유클리드 공간의 정규 직교 기저를 이루는 실수 행렬이다.

$$Q^{\mathrm{T}} Q = Q Q^{\mathrm{T}} = I,$$

#여기서 벡터의 norm이 1인경우가 orthonomal인것이다.

다시 ,Eigenvalues,Eigenvectors로 돌아오자

$$S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n) = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} AS &= A(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n) \\ &= (A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \cdots, A\mathbf{v}_n) \\ &= (\lambda_1 \mathbf{v}_1, \lambda_2 \mathbf{v}_2, \cdots, \lambda_n \mathbf{v}_n) \\ &= (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= S\Lambda \end{aligned}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- For a square matrix, A

$$AS = S\Lambda \qquad S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n), \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

  - There are n eigenvalue-vector pairs -> S is invertible

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

Square matrix can be decomposed
by eigenvalues and eigenvectors
if there n eigenvalues.

  - If A is symmetric, there are n non-zero eigenvalue

$$A = S\Lambda S^T$$

Symmetric matrix can always
be decomposed
by eigenvalues and eigenvectors

Singular Value Decomposition

- For a matrix, A (mxn, m>n)
- Let's consider followings related with $A^T A$ and AA^T
  - $A^T A$ and AA^T have non-negative eigenvalues
  - $A^T A$ and AA^T are decomposed with their eigenvalues and eignevectors

$$A^T A = V\Lambda_1 V^T \qquad AA^T = U\Lambda_2 U^T$$

  - Let $C = U\Sigma V^T$ where $\Sigma = \sqrt{\Lambda_1}$
  - What is C?

C는 A

특이값분해(SVD)는 고유값 분해 처럼 행렬을 대각화하는 한 방법이다.

그런데, 특이값 분해가 유용한 이유는 행렬이 정방행렬이든 아니든 관계없이 모든 mxn 행렬에 대해 적용 가능 하기 때문이다.

$$A = U\Sigma V^T$$

$$U:\ m\times m \text{ 직교행렬 } (AA^T = U(\Sigma\Sigma^T)U^T)$$

$$V:\ n\times n \text{ 직교행렬 } (A^T A = V(\Sigma^T\Sigma)V^T)$$

$$\Sigma:\ m\times n \text{ 직사각 대각행렬}$$

U는 AA(transpose)를 고유값 분해해서 얻어진 직교행렬로 U의 열벡터들을 A의 left singular vector라 부른다. 또한 V는 A(tranpose)A를 고유값 분해해서 얻어진 직교행렬로서 V의 열벡터들을 A의 right singular vector라 부른다.

left,right 가 상당히 헷갈리는데 그냥 시그마의 왼쪽에 있는 U가 left singular 벡터,오른쪽에 있는 v가 right singular 벡터들이라고 생각하면 된다.

마지막으로. 시그마는 AAT, ATA를 고유값분해해서 나오는 고유값(eigenvalue)들의 square root를 대각원소로 하는 m x n 직사각 대각행렬로 그 대각원소들을 A의 특이값(singular value)이라 부른다.

열벡터:nx1형태

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/5642d00d-f3eb-4cd5-87f3-091dc65bdfdc/SVD.pdf

발표자료 진행방식

우선 선형변환 설명하면서 고유값,고유벡터 설명

그다음 EVD 설명 →그후에 SVD 설명, SVD 기하학적 의미등 설명