

Computational Geometry

Praktikum 1

Titel: Bestimmung der Anzahl der sich schneidenden Strecken inklusive Zeitmessung.

Gruppe: Johannes Walter, Luca Biege

Datum: 05.04.2024

Einleitung

Im folgenden Praktikumsversuch geht es darum, einen Code zu entwickeln, welcher die Anzahl von Schnittstellen vieler Strecken berechnet und diese ausgibt. Die Strecken sind durch ein Punktpaar mit den Koordinaten $[x_1, y_1, x_2, y_2]$ definiert und in einer *.dat* Datei gespeichert. Hierbei entspricht jede Zeile einer Strecke mit dem Startpunkt $P1$ und dem Endpunkt $P2$. Die drei Dateien beinhalten 1000, 10.000 und 100.000 Strecken.

Dabei soll die Dauer für die Ausführung des Programms gemessen und verglichen werden.

Als Programmiersprache wird *Rust* verwendet.

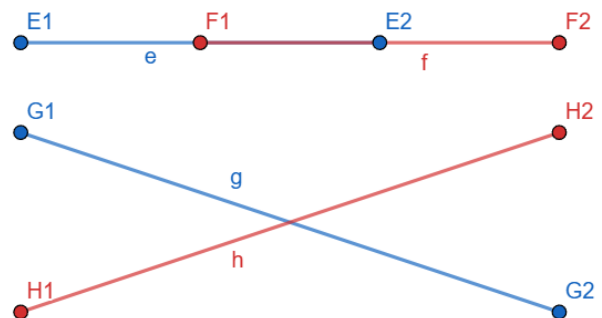
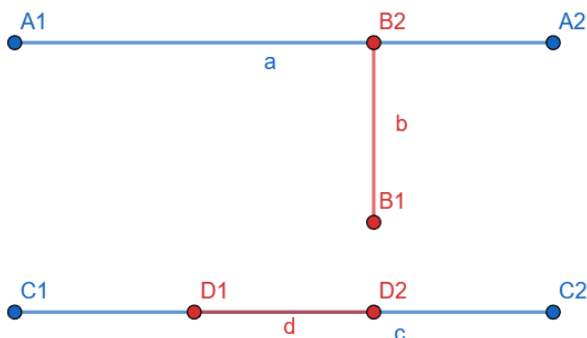
Grundlagen

Strecken unterscheiden sich von Geraden darin, dass sie einen klaren Start- und Endpunkt besitzen und damit eine endliche Länge haben. Eine Form zur Darstellung von Strecken mit dem Startpunkt $P1$ und dem Endpunkt $P2$ ist:

$$\vec{x} = \vec{P1} + t \cdot \vec{d} \quad | t \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 \leq t \leq 1 |$$

$$\text{mit } \vec{d} = \overrightarrow{P1P2} = \vec{P2} - \vec{P1}$$

Zwei Strecken haben einen gemeinsamen **Schnittpunkt**, wenn sie mindestens einen gemeinsamen Punkt beinhalten. Das gilt auch, wenn exakt der Endpunkt einer Strecke auf der anderen Strecke liegt (wie ein "T"), oder wenn die beiden Strecken auf derselben Geraden liegen und sich dabei berühren (teilweise oder komplett die eine Strecke innerhalb der anderen liegt). Die Abbildung zeigt exemplarisch Möglichkeiten für Streckenpaare mit (mindestens) einem Schnittpunkt:



Die **Determinante** einer 2x2 Matrix gibt eine Aussage über die Abhängigkeit der Vektoren einer Matrix. In diesem Fall wird sie verwendet um zu prüfen, wie zwei (Richtungs-) Vektoren zueinander stehen. Ist das Ergebnis der Berechnung $\det(A) = 0$, so bedeutet dies, dass die Vektoren in dieselbe Richtung zeigen.

$$\det(A) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot d - c \cdot b$$

Das **Kreuzprodukt** zweier Vektoren ist ein Normalenvektor, also ein Vektor, welcher senkrecht auf diesen beiden Vektoren steht. Die Länge des Vektors gibt eine Aussage über die durch die beiden Vektoren aufgespannte Fläche. Sind die Vektoren parallel zueinander, spannen sie keine Fläche auf, d.h. das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b} = 0$. Das Kreuzprodukt zweier 2-dimensionaler Vektoren lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b1 \\ b2 \end{bmatrix} = a1 \cdot b2 - a2 \cdot b1$$

Ausführung

Zur besseren Übersicht sind die Koordinaten zeilenweise aus der Datei ausgelesen und einem (n x 4)-Vektor `points` als float-Werte gespeichert. Fehlerhafte Zeilen werden dabei übersprungen und vermerkt. Anschließend wird in einer verschachtelten for-Schleife jede Zeile von `points` ausgelesen und die Koordinaten als `Point` P1 und P2, bzw. für die zweite Strecke als P3 und P4 gespeichert. Aus ihnen lassen sich die Richtungsvektoren D12 und D34 berechnen.

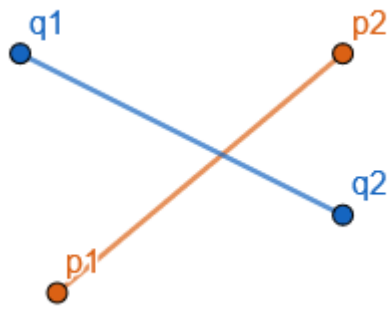
```
struct Point {
    x: f64,
    y: f64,
}
```

Im folgenden Abschnitt werden zwei gefundene Lösungsansätze für die weitere Berechnung erläutert und analysiert.

Ansatz geometrisch über Dreisatz

Ein elementarer Test, um herauszufinden, ob sich zwei Strecken schneiden, ist das Gleichsetzen der Parametergleichungen. Punkte entlang der Strecke werden dabei durch die Verwendung eines Parameters beschrieben. Beide Strecken werden durch eine Parametergleichung dargestellt. Gegeben sind zwei Strecken:

$$\overline{P} := [p_1 p_2] \text{ und } \overline{Q} := [q_1 q_2] \text{ im } \mathbb{R}^2$$



(Nach Prof. M. Fischer, HS München)

Berechnen des Schnittpunkts durch Gleichsetzen:

$$p_1 + \lambda(p_2 - p_1) = q_1 + \mu(q_2 - q_1)$$

Die Parameter λ und μ repräsentieren Punkte entlang der Strecke. Sie nehmen immer Werte zwischen 0 und 1 an. So erhält man den Ausgangspunkt der Strecke für den Wert 0 und den Endpunkt der Strecke für den Wert 1. Löst man das obige Gleichungssystem und erhält für λ oder μ einen Wert außerhalb des Bereichs von 0 bis 1, bedeutet das, dass ein Punkt außerhalb der Strecken liegt und somit kein Schnittpunkt ist.

Dieser Ansatz lässt sich mit Stift und Papier leicht umsetzen. Für die Berechnung mit Code bietet sich jedoch eine Lösung mithilfe von Determinanten an, da dies in Code sehr viel lesbarer und anwendbarer umsetzen lässt.

Quelle: Vorlesungsunterlagen, 02Grundlagen, Prof. M. Fischer, HS München

Ansatz über Determinante

Um verschiedene Fälle möglichst Effizient abzuarbeiten ist es empfehlenswert, den common-case zuerst zu betrachten. So muss nicht bei jeder Berechnung zuerst alle Sonderfälle betrachtet werden, was unnötig Zeit kosten würde. Im Fall von zwei Strecken ist der common-case, dass die Ausrichtung dieser Strecken nicht parallel ist, sondern verschiedene Richtungen aufweisen.

Durch die Determinante lässt sich dies ermitteln, da im 2-dimensionalen die Determinante zweier Strecken \overrightarrow{P} , \overrightarrow{Q} genau dann Null ergibt, wenn die Richtungsvektoren parallel sind.

Anschließend lässt sich über das Kreuzprodukt eines Richtungsvektors $\overrightarrow{u_P} = \overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}$ zusammen mit dem Vektor zwischen den Ortsvektoren $\overrightarrow{p_1}$ und $\overrightarrow{q_1}$ beider Strecken ermitteln, ob die Linien zusätzlich kollinear sind. Der Quotient aus dem Kreuzprodukt und der Determinante ergibt ein Skalar t , über welches man den Schnittpunkt S durch einsetzen in die Geradengleichung der ersten Strecke erhält. Berechnet man nun mit diesem Schnittpunkt S das Skalar s der zweiten Strecke, so ergibt sich ein Schnittpunkt der Strecken, wenn:

$$0 \leq s, t \leq 1$$

Andernfalls kann überprüft werden, ob im Falle von Kollinearität eine partielle oder sogar vollständige Übereinstimmung der Geraden vorliegt. Hierzu wird lediglich die Reihenfolge der Start- und Endpunkte betrachtet und auf mindestens eine Überschneidung überprüft.

Test mit GeoGebra

[FEHLT NOCH]

Auswertung

Im vorliegenden Praktikum wurden drei Files mit einer unterschiedlichen Anzahl an Strecken ausgewertet.

Datei	Anzahl Schnittpunkte	Berechnungsdauer
s_1000_1.dat	11	18 ms
s_10000_1.dat	733	1.294 ms
s_100000_1.dat	77.171	124.300 ms