

Laboratorium 10 - Eksperyment Obliczeniowy

Jędrzej Warczyński 14.05.2023

Abstract

Niniejsza praca skupia się na badaniu efektywności solvera firmy IBM umożliwiającego rozwiązywanie problemów programowania liniowego. Eksperyment polega na badaniu czasu potrzebnego do rozwiązania poniżej sformułowanego zadania programowania liniowego w zależności od konfiguracji parametrów tegoż zadania, które kontrolują wielkość instancji, jak i jej stopień skomplikowania.

Sformułowanie problemu

1. zmienne decyzyjne

- x_{ij} - zmienna określająca czy i-ty statek wykonuje j-ty manewr

2. Stałe

- c_{ijkl} - występowanie konfliktu statku i-tego wykonującego manewr j-ty ze stakiem k-tym wykonującym manewr l-ty

3. Zminimalizować 1

- funkcja celu jest stała, poszukujemy tylko rozwiązania dopuszczalnego

4. Ograniczenia

- $\forall_i \sum_{j=1}^7 x_{ij} = 1$
 - samolot może wykonać tylko jeden manewr
- $\forall_i \forall_j \forall_k \forall_l (x_{ij}c_{ijkl} + x_{kl}c_{ijkl}) \leq 1$
 - brak konfliktów
- $x_{ij} \in \{0, 1\}$
 - zmienn decyzyjne są binarne

1. zmienne decyzyjne

- x_{ij} - zmienna określająca czy i-ty statek wykonuje j-ty manewr

2. Stałe

- c_{ijkl} - występowanie konfliktu statku i-tego wykonującego manewr j-ty ze stakiem k-tym wykonującym manewr l-ty

3. Zminimalizować

- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (j \cdot x_{ij})$
- im wyższy numer manewru tym większy koszt

4. Ograniczenia

- $\forall_i \sum_{j=1}^7 x_{ij} = 1$
• samolot może wykonać tylko jeden manewr
- $\forall_i \forall_j \forall_k (x_{ij}c_{ijkl} + x_{kl}c_{ijkl}) \leq 1$
• brak konfliktów
- $x_{ij} \in \{0, 1\}$
• zmienn decyzyjne są binarne

Generacja instancji

Do generowania instancji wykorzystano poniższą funkcję, przyjmującą trzy parametry. Parametr planes określa ilość statków powietrznych uwzględnionych w problemie dekonfliktacji, parametr m określa liczbę dozwolonych manewrów dla każdego statku powietrznego, natomiast parametr fill określa procentowy stopień ilości kolizji w problemie.

Funkcja generuje losową macierz symetryczną o zadanych parametrach.

```
In [ ]: import numpy as np

def generate_conflict_matrix(planes, maneuvers, fill):
    num_entries = planes * maneuvers
    num_ones = int(num_entries * (num_entries - 1) / 2 * fill / 100)
    indices = np.random.choice(num_entries * (num_entries - 1) // 2,
                               size=num_ones, replace=False)
    matrix = np.zeros((num_entries, num_entries))
    matrix[np.triu_indices(num_entries, 1)[0][indices],
          np.triu_indices(num_entries, 1)[1][indices]] = 1
    matrix = matrix + matrix.T
    return matrix
```

Badanie czasu rozwiązania w funkcji ilości statków powietrznych

Na potrzeby testu wygenerowano po pięć instancji problemu dla każdej konfiguracji danych wejściowych problemu i obliczono średnie czasy obliczeń, a także ilość znalezionych rozwiązań. Wartość pięć oznacza, że każde z 5 instancji posiadało rozwiązanie dopuszczalne, zero oznacza, że żadna instancja nie posiadała rozwiązania dopuszczalnego.

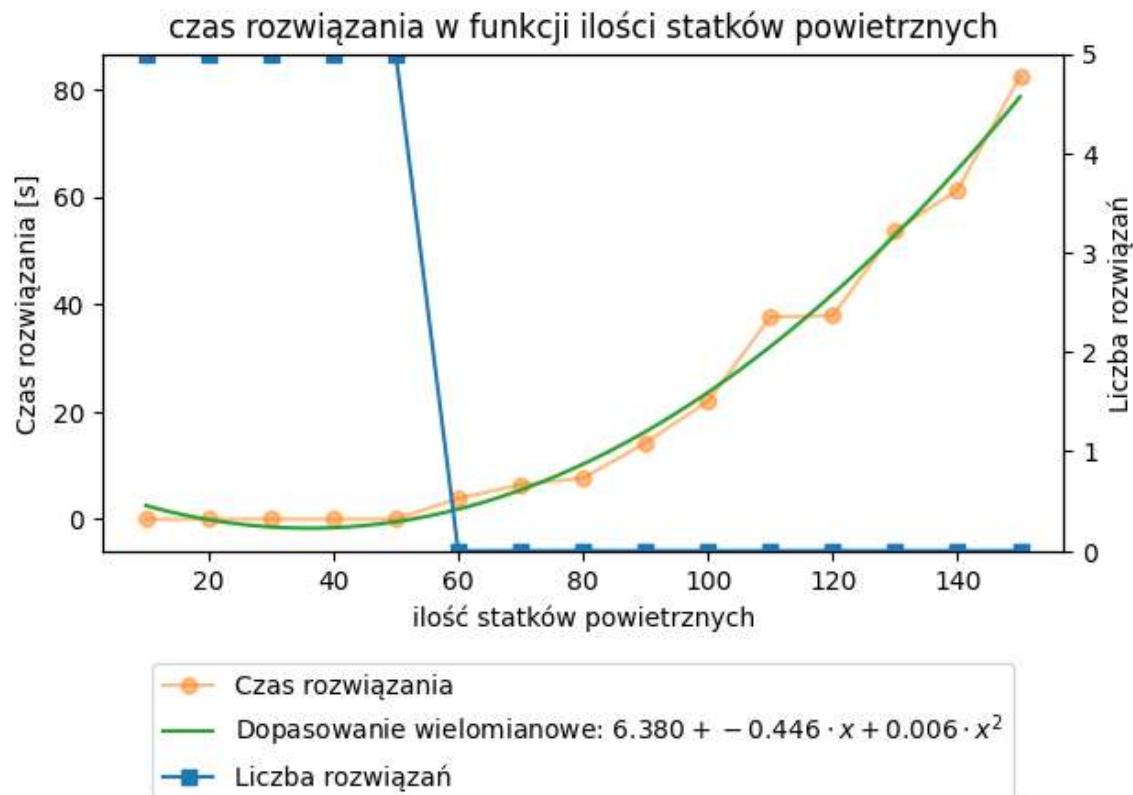
W celu zbadania czasu rozwiązania w funkcji ilości statków powietrznych w problemie przyjęto stałą ilość manewrów równą 10 oraz stałą gęstość kolizji równą 5%. Otrzymano 15 punktów pomiarowych. Pierwszy punkt pomiarowy odpowiada 10 statkom powietrznym, z każdym kolejnym pomiarem liczba statków powietrznych zwiększała się o 10.

Kolorem niebieskim oznaczono liczbę rozwiązań dla danej konfiguracji 5 instancji testowych. Oś znajduje się z prawej strony wykresu.

Kolorom pomarańczowym przedstawiono wykres czasu obliczeń solvera (oś z lewej strony).

Kolorom zielonym przedstawiono dopasowany do czasu obliczeń wielomian stopnia 2.

```
In [ ]: from visualization import show_planes_plot
show_planes_plot()
```



Wnioski i obserwacje

- Pierwsza z obserwacji dotyczy generacji instancji. Wraz ze wzrostem wielkości instancji, mimo tej samej gęstości kolizji, co raz mniej wygenerowanych instancji posiada rozwiązanie. Dodatkowo można zauważać, że zmiana jest skokowa. Do wielkości instancji 50 statków powietrznych wszystkie 5 z wylosowanych instancji o określonych parametrach posiada rozwiązanie, natomiast po przekroczeniu tej wielkości żadna z 5 instancji nie posiada rozwiązania. Uzasadnienie tego zjawiska jest dosyć oczywiste. Wyobraźmy sobie, że mamy tylko dwa statki powietrzne i dwa możliwe manewry dla każdego z nich. Wtedy w naszej macierzy kolizji mogą wystąpić maksymalnie 4 konflikty, i aby taki problem nie miał rozwiązania, gęstość kolizji musiałaby wynosić 100% ! Jednak jeśli zwiększymy liczbę statków powietrznych do 3 nie zmieniając liczby dostępnych manewrów to minimalna liczba kolizji potrzebna do tego aby problem nie posiadał rozwiązania nadal wynosi 4. Ta wartość nie zależy od liczby statków powietrznych, a jedynie od liczby dostępnych manewrów. Jednak zwiększając liczbę statków powietrznych do 3, liczba możliwych konfliktów w macierzy kolizji wynosi 12, zatem minimalna gęstość konfliktów, dla której jest niezerowe prawdopodobieństwo otrzymania instancji bez rozwiązania spadła do $\frac{1}{3}$. (Wystarczą 4 kolizje z 12 możliwych). Widać zatem wyraźnie, że zwiększając liczbę statków powietrznych w problemie, a nie modyfikując pozostałych

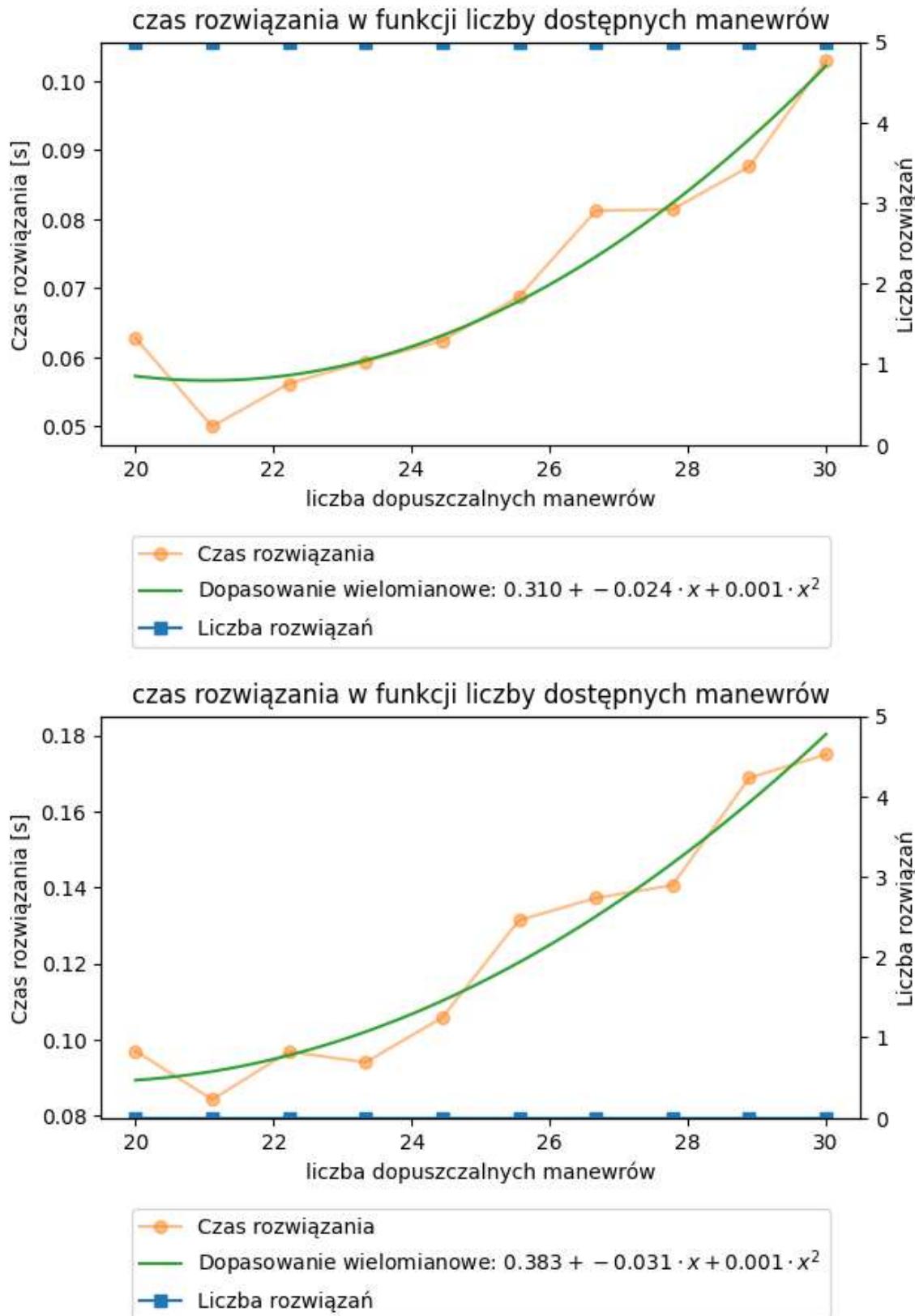
parametrów, prawdopodobieństwo wystąpienia instancji bez rozwiązań dopuszczalnego rośnie. Zwiększając liczbę statków powietrznych o 1 liczba potencjalnych konfliktów wzrasta o $\frac{n+1}{n-1}$, gdzie n jest liczbą statków powietrznych przed inkrementacją, podczas, gdy minimalna liczba konfliktów potrzebna, aby uzyskać instancję bez rozwiązań dopuszczalnego pozostaje stała i wynosi m^2 , gdzie m to liczba dopuszczalnych manewrów. Zatem, aby utrzymywać w przybliżeniu stała wartość instancji posiadających rozwiązanie należałooby zmniejszać gęstość konfliktów $\frac{n+1}{n-1}$ razy.

2. Druga obserwacja dotyczy czasu rozwiązań problemu wraz ze wzrostem wielkości instancji. Z wykresu wynika, że wraz z liniowym wzrostem ilości statków powietrznych w problemie, czas rozwiązania rośnie kwadratowo. Dopasowana funkcja kwadratowa dobrze odwzorowuje trend danych.

Badanie czasu rozwiązań w funkcji liczby manewrów

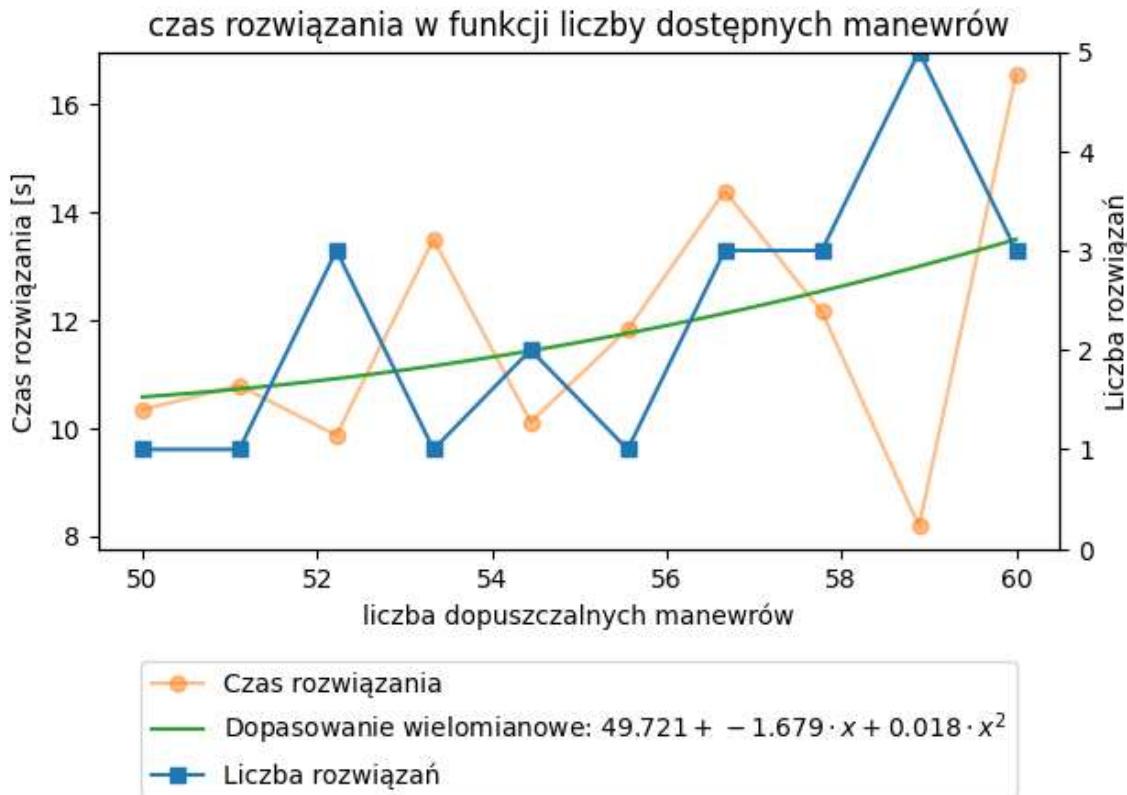
W celu zbadania wpływu liczby manewrów na czas rozwiązania przyjęto stałą liczbę statków powietrznych równą 10 oraz stałą gęstość konfliktów. Dla pierwszego eksperymentu przyjęto gęstość konfliktów równą 45% (pierwszy wykres), a dla drugiego 65% (drugi wykres). Liczbę dostępnych manewrów zwiększano liniowo od 20 do 30. Dla każdej konfiguracji wylosowano po 5 instancji. Można dostrzec, że gdy liczba rozwiązań jest stała, to czas rozwiązania rośnie kwadratowo. Reprezentuje to zielona krzywa, która jest dopasowaniem wielomianowym 2 stopnia.

```
In [ ]: from visualization import show_maneuvers_plot  
show_maneuvers_plot("10_20-30_45")  
show_maneuvers_plot("10_20-30_65")
```



Jednak, gdy liczba rozwiązań nie jest stała, kwadratowa zależność już nie występuje, co można zauważyć na poniższym wykresie. Wykres został stworzony w oparciu o wyniki dla instancji o stałej liczbie statków powietrznych równej 10, przy stałej gęstości konfliktów równej 59% i liniowo zmieniającej się liczbie dostępnych manewrów od 50 do 60. Jednak można dostrzec inną zależność. Gdy liczba rozwiązań rośnie to czas rozwiązań maleje. To spostrzeżenie poprowadziło autora do kolejnego eksperymentu.

```
In [ ]: show_maneuvers_plot("10_50-60_59")
```



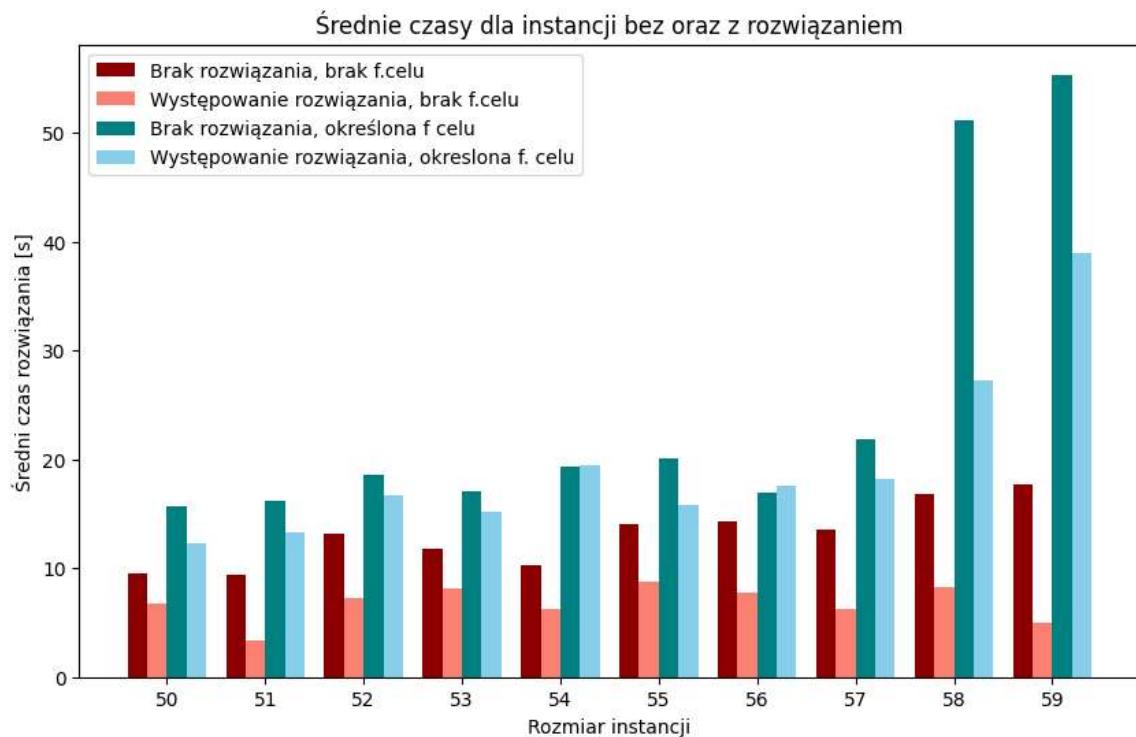
Wpływ istnienia rozwiązania i funkcji celu na czas obliczeń

Poniżej zestawiono wyniki porównujące czasy obliczeń, dla danej wielkości instancji w przypadku istnienia rozwiązanie i jego braku. Dla każdej z 10 instancji o zadanych parametrach wyznaczono czas rozwiązania oraz zanotowano czy instancja posiadała rozwiązanie. Następnie podzielono te 10 instancji na dwie grupy. W jednej grupie znajdowały się instancje, dla których znaleziono rozwiązanie, a w drugiej te, dla których rozwiązanie nie istnieje. Następnie policzono średnie czasy dla każdej grupy. Wyniki zestawiono jednym odcieniem koloru.

Na poniższym wykresie przedstawiono wyniki jeszcze jednej analizy. Mianowicie, jak funkcja celu wpływa na czas rozwiązania. W poprzednich eksperymentach funkcja celu nie była zdefiniowana, zatem solver szukał jedynie rozwiązania dopuszczalnego. Poniżej zestawiono wyniki porównujące czasy obliczeń dla tych samych instancji problemu, ale ze zdefiniowaną funkcją celu minimalizującą indeks wykonywanego manewru oraz bez funkcji celu.

Widać wyraźnie, że uzyskanie wyniku dla instancji bez rozwiązania dopuszczalnego jest bardziej wymagające obliczeniowo od uzyskania wyniku dla instancji posiadającej rozwiązanie. Także zdefiniowanie funkcji celu znacząco wydłuża czas obliczeń, co nie jest zaskakujące.

```
In [ ]: from barplot import comparison_bar_chart
comparison_bar_chart("maneuvers_10_50-60_59.csv")
```



Analiza ilości rozwiązań wraz ze wzrostem liczbą manewrów

Wraz ze wzrostem liczby manewrów o 1 macierz kolizji rośnie $\frac{(m+1)^2}{m^2}$ razy, gdzie m to liczba dostępnych manewrów. Jednak minimalna liczba kolizji potrzebna aby uzyskać instancję nie posiadającą rozwiązania dopuszczalnego rośnie o taki sam współczynnik. Zatem nie zmieniając pozostałych parametrów, liczba rozwiązań powinna pozostawać w przybliżeniu stała, co jest zgodne z zaobserwowanymi wynikami.

Badanie czasu rozwiązania w funkcji gęstości konfliktów

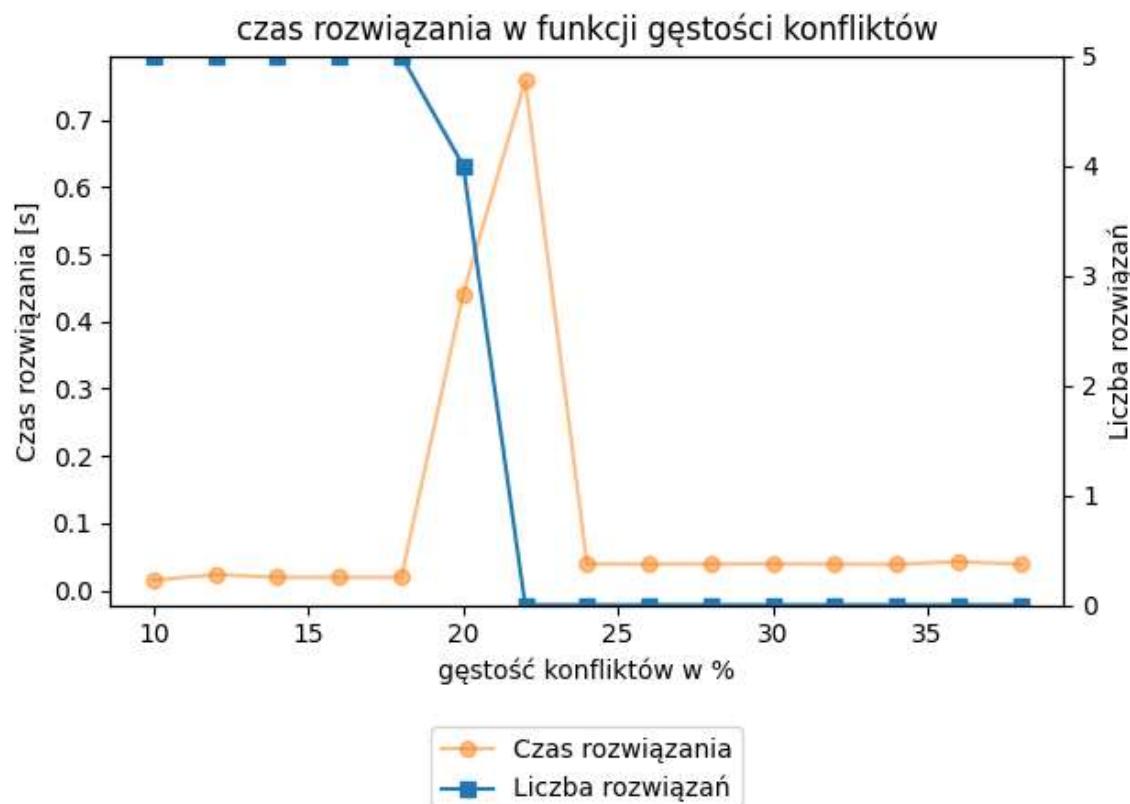
W tej części eksperymentu pomiarowego wykonano kilka prób pomiarowych z różnymi konfiguracjami parametrów ze względu na zaobserwowane wyniki. Na poniższych wykresach zamieszczono wyniki dwóch takich prób. W pierwszej próbie ustalono liczbę statków powietrznych jako stałą wartość równą 20, liczba manewrów również była stała i wynosiła 10. Pierwszy punkt pomiarowy odnosił się do gęstości konfliktów równej 15%, każdy kolejny punkt posiadał gęstość konfliktów o 2% większą.

W drugiej próbie zmieniono parametry problemu. Zwiększyliśmy liczbę manewrów do 20, a gęstość konfliktów zmieniała się od 15% do 25% z krokiem 1. Zwiększyliśmy również liczbę instancji dla pojedynczej konfiguracji parametrów zadania na podstawie, której była liczona ilość rozwiązań oraz średni czas rozwiązania z 5 do 10.

Wykonano również kilka podobnych eksperymentów badających czasy rozwiązania w funkcji gęstości konfliktów z innymi przyjętymi parametrami ilości statków powietrznych i liczby manewrów, modyfikując również początkową gęstość konfliktów jak i tempo

wzrostu tego parametru. Wyniki dla każdej z tych prób były bardzo podobne. Tak jak można zauważyć na poniższych dwóch wykresach, do pewnej wielkości konfliktów solver rozwiązuje problem w liniowym czasie, a liczba rozwiązań jest maksymalna tzn. wszystkie instancje posiadają rozwiązanie. Po przekroczeniu pewnej wartości gęstości konfliktów liczba rozwiązań delikatnie spada, a czas rozwiązania tych instancji gwałtownie rośnie. Przy kolejnej instancji, liczba rozwiązań spada do 0 a czas rozwiązania jest maksymalny z pośród wszystkich instancji. Kolejne instancje również nie posiadają rozwiązania, jednak solver jest w stanie bardzo szybko to stwierdzić, w związku z czym czas rozwiązywania kolejnych instancji jest znów liniowy i zbliżony do czasu obliczeń dla instancji, z mniejszą gęstością konfliktów.

```
In [ ]: from visualization import show_density_plot  
show_density_plot()
```



```
In [ ]: from visualization import show_density_plot2  
show_density_plot2()
```



Wnioski Końcowe

1. Liniowy wzrost wielkości instancji powoduje kwadratowy wzrost czasu obliczeń
2. Zdefiniowanie funkcji celu wydłuża czas poszukiwania rozwiązania
3. Czas potrzebny na uzyskanie wyniku dla instancji nie posiadającej rozwiązania jest dłuższy niż dla instancji posiadającej rozwiązanie dopuszczalne .
4. Wzrost liczby statków powietrznych występujących w problemie, przy pozostałych parametrach nie modyfikowanych powoduje spadek prawdopodobieństwa wystąpienia rozwiązania dopuszczalnego
5. Wzrost liczby dostępnych manewrów występujących w problemie, przy pozostałych parametrach nie modyfikowanych nie powoduje zmian w prawdopodobieństwie wystąpienia rozwiązania dopuszczalnego