Programowanie i metody numeryczne

zestaw zadań 13

Równania różniczkowe

Opracowanie *Jędrzej Wardyn*

3 czerwca 2024

1 Metoda Bogackiego-Shampine'a ze zmiennym krokiem

Dla równania:

$$dy/dx = y - x^2 + 1,$$

gdzie $y(x = 0) = 0.5$, a rozwiązanie analityczne to

$$y(x) = (x + 1)^2 - 0.5e^x$$

Zaimplementuj metodę ze zmiennym krokiem Bogackiego-Shampine'a.

Porównaj wynik analityczny z wynikiem numerycznym gdzie zastosujesz inne kroki początkowe $h = 0.1, 0.01, 0.001$.

1.1 Układ równań różniczkowych: Model Lotki-Volterry populacji

(zadanie autorstwa Z.B.)

Mając układ równań różniczkowych:

$$\frac{dx}{dt} = (a - by(t))x(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = (cx(t) - d)y(t)$$

gdzie: $x(t)$–liczebność roślinożerców, $y(t)$–liczebność zwierząt mięsożerców, drapieżników, a parametry: a–przyrost x, b–spadek populacji z powodu drapieżników, c–wzrost populacji drapieżników, d–natrualne zmniejszanie się populacji drapieżników. Zakładamy że liczba roślinożerców nie będzie się zmniejszać bez drapieżników.

Napisz program lv rozwiązujący numerycznie równania Lotki-Volterry. Program powinien wyznaczać liczebność populacji ofiar x i liczebność populacji drapieżników y w przedziale czasowym $t \in [0, t_{\max}]$ z krokiem δt dla zadanych warunków początkowych $x(0) = x_0$ i $y(0) = y_0$ oraz zadanych wartości parametrów a, b, c i d. Jako argumenty wywołania program powinien przyjmować osiem liczb zmiennoprzecinkowych reprezentujących kolejno: parametry a, b, c i d, wartości początkowe x_0 i y_0, czas trwania symulacji $t_{\max}$ oraz krok czasowy δt, a także przełącznik określający metodę numerycznego rozwiązywania równań:

1. midpoint-metoda punktu środkowego,
2. RK4-metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu.

Wynikiem działania programu powinno być wypisanie na standardowe wyjście listy czasów oraz odpowiadajacych im liczebności populacji ofiar i drapieżników. Napisz skrypt pythona do narysowania na jednym wykresie zaleznoności $x = x(t)$ oraz $y = y(t)$.

2 Metoda różnic skończonych (Finite difference method) do równań różniczowych cząstkowych

(zadanie autorstwa M.M)

Rozwiąż równanie 1D przewodnictwa cieplnego:

$$\partial_t u(x,t) = \alpha \partial_x^2 u(x,t), \tag{1}$$

gdzie warunki brzegowe:

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u(x_0,t) = f(x_0)$$

$$u(x_k,t) = f(x_k)$$

.

Wykorzystaj metodę różnic skończonych: Pierwsza pochodna:

$$\partial_t u(x,t) = \frac{u(x,t+k) - u(x,t)}{k}$$

Druga pochodna:

$$\partial_x^2 u(x,t) = \frac{u(x-h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$$

, przy czym w ogólności $k \neq h$, dla stabilności jednak:

$$r = \frac{k}{h^2} \leq 0.5$$

.

Ostateczny wzór daje nam:

$$u(x,t+k) = u(x,t) + k\alpha \frac{u(x-h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} = (1-2r\alpha)u(x,t) + \alpha r u(x+h,t) + \alpha r u(x-h,t)$$

3 Drobne przypomnienie algebry liniowej: wyznacznik

(zadanie autorstwa M.M)

Napisz program, który obliczy wyznacznik macierzy $n \times n$ metodą rekurencyjną, korzystając z rozwinięcia Lapalace'a. Wartości elementów macierzy przypisz przy deklaracji:

```
vector<vector<double>> matrix={{2,0,3},{1,2,0},{2,-1,1}}
```