

Q6 : LEPL1110 Eléments finis

Projet : Simulation d'un moteur à reluctance variable par la méthode des éléments finis

Julie Weverbergh - 46271800

13 mai 2021

1 Vérification du code

Pour vérifier le code, nous allons regarder de plus près si le maillage est correct après une rotation, et voir ensuite si le couple appliqué dans diverses situations (en fonction des phases allumées) est cohérent avec l'intuition physique.

1.1 Remaillage après une rotation du rotor

Le remaillage fonctionne correctement. En effet, nous voyons aux figures 1 et 2 qu'après une rotation du rotor (en bleu), les triangles de la zone "air gap" (en vert) ont été modifiés de manière à reformer des triangles de la meilleure qualité possible. Ceci est d'ailleurs visible sur tous les maillages.

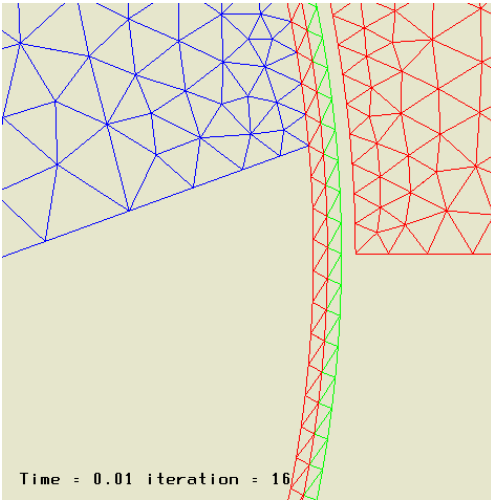


FIGURE 1 – Itération 16 sur le maillage 4424

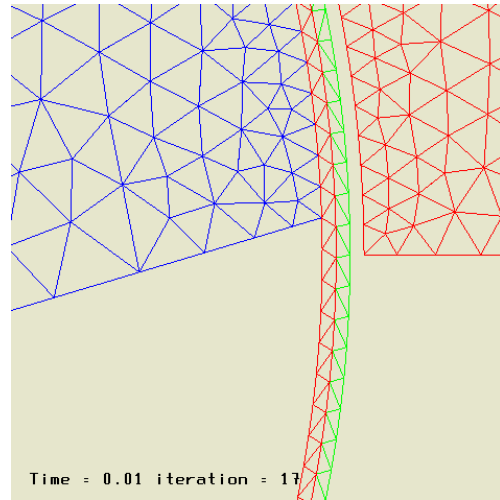


FIGURE 2 – Itération 17 sur le maillage 4424

1.2 Couple appliqué sur le rotor

La position initiale du rotor est montrée à la figure 3.

Soient

- θ l'angle en degrés de la position du rotor, tel que $\theta = 0^\circ$ à la position initiale, et tel que θ augmente dans le sens anti-horlogique ;
- C le couple appliqué tel que $C > 0$ correspond à une force qui veut faire tourner le rotor dans le sens anti-horlogique ;
- la phase A qui représente les bobines situées sur le coin supérieur droit et le coin inférieur gauche du stator (puis les phases B et C qui suivent dans le sens anti-horlogique).

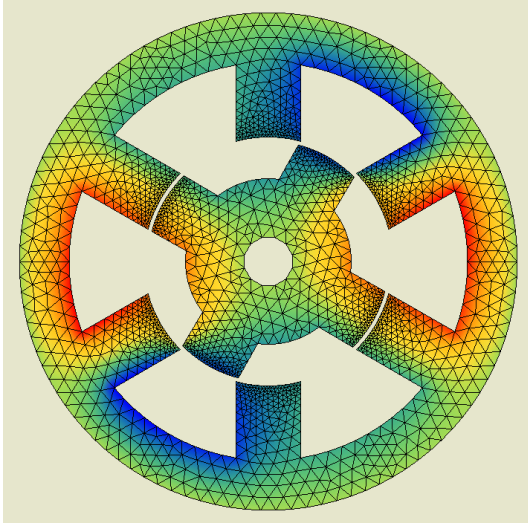


FIGURE 3 – Position initiale du rotor

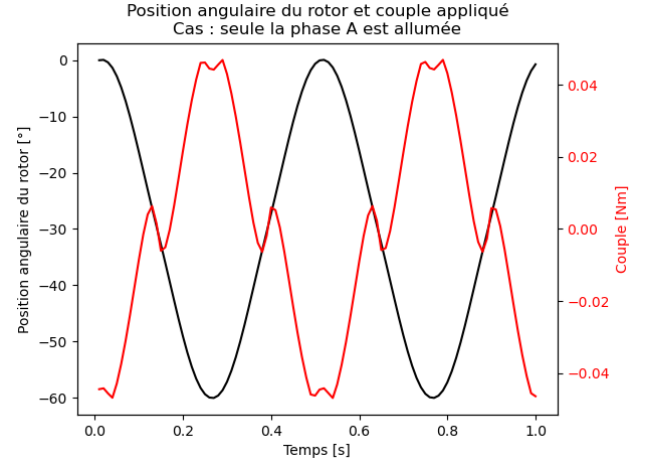


FIGURE 4 – Evolution de la vitesse angulaire du rotor et du couple appliqué sur le rotor - seule la phase A est allumée

Le rotor a une vitesse initiale de $\omega = 1$ rad/s.

Analysons le couple C dans les trois cas suivants :

- seules les bobines de la phase A sont activées ;
- couple maximum : les phases sont activées de manière successive pour obtenir un couple maximum ;
- couple nul : les phases sont activées de manière successive pour obtenir un couple nul ;

1.2.1 Phase A allumée uniquement

Les résultats à la figure 4 nous montrent bien que, globalement, la position angulaire et le couple oscillent, donc le rotor oscille. Cela est pertinent car le système physique tend à diminuer l'énergie magnétique [2], et donc diminuer l'air gap qui contient les lignes de champ entre le rotor et le stator. Plus en détails,

- à $\theta = 0^\circ$, pour minimiser cet air gap, le rotor subit un couple négatif. Il va donc ralentir puis commencer à tourner dans le sens horlogique et augmenter sa vitesse ;
- lorsque θ est aux alentours de -30° (en négligeant les petites oscillations du couple autour de 0), le couple devient nul puisque la surface parcourue par les lignes de champ n'est plus de l'air, mais bien de l'acier ;
- par sa vitesse, le rotor continue cependant à tourner dans le sens horlogique, mais il subit cette fois un couple positif qui le ralentit jusqu'à $\theta = -60^\circ$, pour s'arrêter et repartir dans le sens horlogique, etc.

En conclusion, comme attendu, le rotor oscille autour de la diagonale formée par les bobines de la phase allumée.

1.2.2 Couple maximum

Faisons désormais alterner les phases. Pour obtenir le couple maximal possible, nous devons d'abord tracer le graphe $C(\theta)$ (cf. figure 5) qui donne le couple appliqué à chaque position du rotor, et ce pour chaque phase allumée séparément.

Etant donné que la phase A est allumée au temps initial par défaut dans la simulation, nous allons faire tourner le rotor dans le sens horlogique. Ainsi, il doit subir un couple maximal négatif. Pour cela, il suffit de suivre la courbe en gras de droite à gauche¹, ce qui donne une alternance de phases A-B-C-A-B-C... tous les 30° , avec un décalage de 12.25° (barre verticale rouge sur le graphe).

En appliquant ces paramètres dans la simulation, nous obtenons le graphe 6 qui montre :

- que la vitesse angulaire augmente négativement. Cela est logique puisque le couple est négatif ;

1. Pour rappel, l'angle diminue lorsque le rotor tourne dans le sens horlogique. De plus, de droite à gauche signifie qu'on le parcourt à partir de 360° jusque 0° .

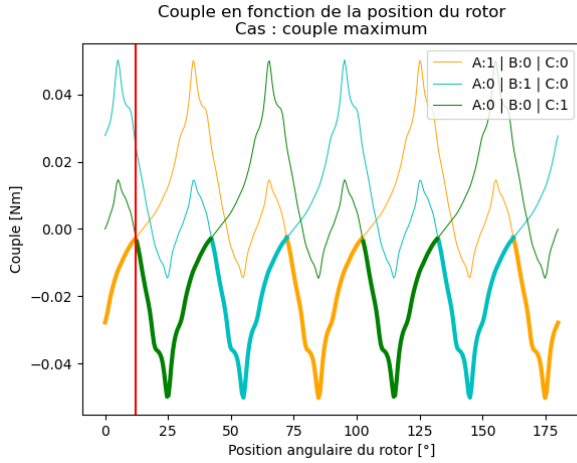


FIGURE 5 – Couple en fonction de la position angulaire du rotor - couple maximum

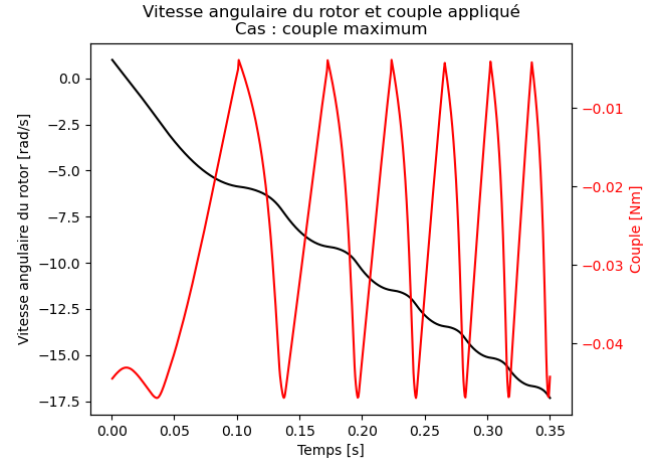


FIGURE 6 – Evolution de la vitesse angulaire du rotor et du couple appliqué - couple maximum

— que le couple suit la courbe en gras de la figure 7, en rapprochant successivement les pics étant donné que la vitesse angulaire augmente. Ces oscillations engendrent d’ailleurs des petites oscillations dans la vitesse.

En résumé, appliquer un décalage de 12.25° dans l’alternance des phases permet bien d’obtenir le couple négatif maximum.

1.2.3 Couple nul

De manière similaire, la courbe en gras à la figure 7 nous montre les phases à activer pour obtenir un couple moyen nul. On y voit que le décalage des phases est nul. En appliquant ces paramètres, la simulation renvoie le graphe 8.

Le moteur suit la courbe en gras de 7 de la manière suivante :

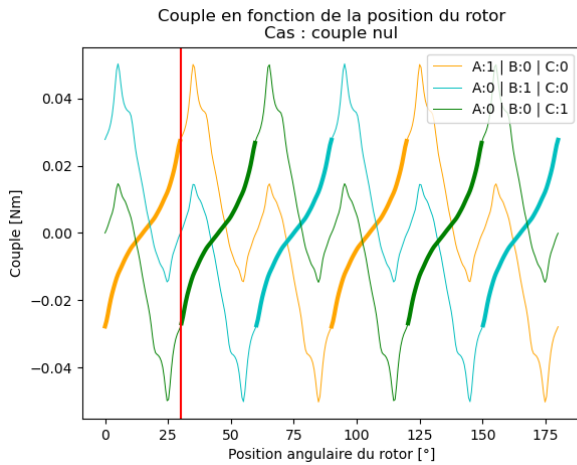


FIGURE 7 – Couple en fonction de la position angulaire du rotor - couple nul

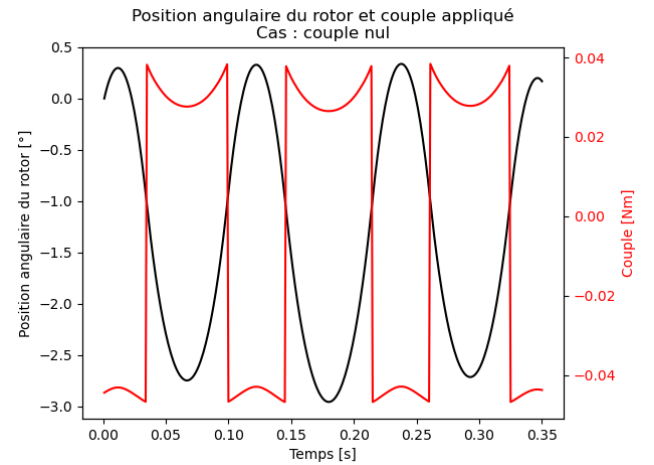


FIGURE 8 – Evolution de la position angulaire du rotor et du couple appliqué - couple nul

— à $\theta = 0^\circ$, il subit un couple négatif qui le force à freiner, s’arrêter et tourner dans le sens horlogique ;
— ainsi, $\theta < 0^\circ$ (on se retrouve à la droite du graphe 7) et la phase B s’allume, ce qui engendre un brusque changement de signe du couple (à $t = 0.04s$) ;

- de manière similaire à la première étape, le moteur est donc freiné et repart dans le sens anti-horlogique ;
- dès que $\theta > 0^\circ$, la phase A se rallume et induit un brusque changement de signe du couple, etc.

Finalement, le rotor oscille très légèrement. Notons que, si la vitesse angulaire initiale était plus élevée, le couple appliqué à la première étape pourrait ne pas être suffisant, de sorte que θ dépasse 15° , et ainsi le couple deviendrait positif. Dans ce cas, le moteur continuerait à tourner dans le sens horlogique et on ne verrait pas de telles oscillations.

En conclusion, comme le couple appliqué est tout à fait cohérent quelle que soit la situation, nous pouvons affirmer que le code fournit la bonne solution. Mais quel est son ordre de précision ?

2 Ordre de précision

Pour résoudre le système discret $Ax = b$ à chaque itération temporelle (où A et b sont donnés par la discrétisation du problème continu, et x est le potentiel magnétique), étant donné que la matrice est symétrique définie positive, nous avons utilisé la méthode des gradients conjugués (GC) avec un préconditionnement ILU0[1].

Analysons la vitesse de convergence² de cette méthode, avec et sans préconditionnement, ainsi que sur plusieurs maillages différents. Cette vitesse de convergence est définie par $\frac{\|r_n\|_2}{\|r_0\|_2}$, où r_n est le résidu $b - Ax_n$, où x_n est l'approximation de la solution à l'étape n . Les résultats obtenus à la première itération temporelle sont montrés à la figure 9.

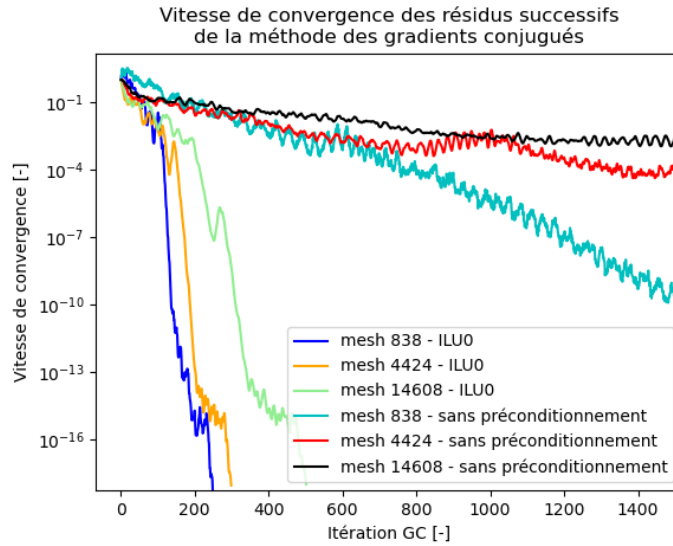


FIGURE 9 – Vitesse de convergence des gradients conjugués à la première itération temporelle

Voici nos observations :

- L'échelle étant logarithmique en y , on peut dire que la vitesse de convergence est plus ou moins exponentielle avec et sans préconditionnement.
- L'algorithme GC avec ILU0 converge beaucoup plus rapidement que sans préconditionnement, puisque nous avons par exemple besoin de quelques centaines d'itérations pour atteindre une vitesse de convergence de 10^{-9} , comparé à plus de 1000 sans préconditionnement. Le préconditionnement permet de réduire le nombre de conditionnement de la matrice, et donc de rassembler ses valeurs propres autour de 1, ce qui assure une convergence plus rapide de l'algorithme GC, comme vu en cours.
- Concernant les maillages, la convergence est plus rapide lorsque le maillage est moins raffiné, étant donné que le système est moins grand.

Le critère d'arrêt choisi est $\epsilon = 10^{-10}$ tel que $\frac{\|r_n\|_2}{\|r_0\|_2} < \epsilon$, car nous voyons que le nombre d'itérations (aux alentours de 200-300) est acceptable. Ainsi, la précision relative est de l'ordre de 10^{-10} .

2. Contrairement à la norme des résidus, la vitesse de convergence ne dépend pas de la norme du résidu initial.

3 Optimisation du code

Pour augmenter la rapidité du code, voici quelques astuces que nous avons utilisées :

- **méthode des gradients conjugués avec préconditionnement** : comme vu précédemment, la convergence est bien plus rapide lorsqu'il y a un préconditionnement de A , et les gradients conjugués préconditionnés sont bien plus efficaces qu'une simple résolution par élimination gaussienne (avec ou sans renumérotation des noeuds) lorsque le système est grand, ce qui est notre cas ici (d'autant plus que le maillage est grand). Par ailleurs, cette méthode nous impose de stocker toute la matrice pour pouvoir calculer son équivalent préconditionné. Ainsi, nous ne devons pas recalculer A à chaque itération des GC, contrairement à un algorithme sans préconditionnement où on recalculerait les matrices locales à chaque itération (et ce pour gagner de l'espace mémoire) ;
- **stockage de la matrice sous forme COO** : avec le maillage 4424 par exemple, la matrice en entier doit stocker 4424×4424 éléments, alors qu'elle possède énormément d'éléments nuls. Ainsi, nous ne stockons que les éléments non nuls sous un format COO, c'est-à-dire une liste de structures où chacune d'elles contient (i, j, A_{ij}) . La matrice préconditionnée M est également stockée sous forme COO. Dès lors, nous gagnons de la place en mémoire, mais aussi en temps de calcul (notamment pour la résolution du système intermédiaire dans l'algorithme préconditionné, qui implique M), puisqu'il suffit de boucler sur la liste au lieu de faire une double boucle sur chaque indice i et j ;
- **itéré initial de l'algorithme des gradients conjugués** : l'itéré initial est mis à la solution sur le maillage du pas de temps précédent, pour commencer proche de la solution, en supposant un pas de temps suffisamment petit pour que le rotor ne tourne pas trop vite d'un coup. Après quelques tests, nous remarquons que cette méthode n'impacte pas beaucoup la rapidité du code ;
- **créer la liste des noeuds du air gap une seule fois** : pour reformer le maillage à chaque itération temporelle, nous avons besoin de la liste des noeuds du air gap qui sont sur le rotor, et de la liste des noeuds du air gap se trouvant sur le stator. Comme ils restent identiques quelle que soit l'itération, nous stockons ces deux listes dans deux vecteurs globaux que nous créons seulement à la première itération. Cette opération requiert quelques calculs rapides, ainsi que deux allocations en début de simulation et deux libérations de mémoire en fin de simulation. Cela permet donc de gagner un peu de temps de calcul, mais pas beaucoup par rapport aux GC préconditionnés.

4 Améliorations possibles

Malgré l'optimisation concernant le temps de calcul, nous devons toutefois rappeler les limites de notre résolution :

- **système linéaire** : il s'agit de la résolution du système linéaire, qui ne prend donc pas en compte la variation de μ en fonction du potentiel magnétique ;
- **règle d'intégration** : la règle d'intégration numérique utilisée est celle à trois points. Augmenter le nombre de points permettrait d'avoir une précision plus élevée, mais nécessiterait plus de calculs ;
- **discrétisation du système réel** : les fonctions de forme utilisées sont des fonctions linéaires par morceaux. Il serait sans doute intéressant d'étudier la résolution du système avec des fonctions de forme quadratiques ou d'un ordre de précision plus élevé.

Références

- [1] Inconnu, *Zero fill-in ILU*, <https://moodleucl.uclouvain.be/mod/resource/view.php?id=724915>
- [2] M. F. S. Pereira, A. Mamede, R. E. Araújo, *Switched Reluctance Motor Drives : Fundamental Control Methods*, <https://www.intechopen.com/books/modelling-and-control-of-switched-reluctance-machines/switched-reluctance-motor-drives-fundamental-control-methods>, consulté le 24 avril 2021.