

Q5 : LINMA1170 Analyse numérique

Devoir 3 : CG préconditionné et intégration temporelle

Julie Weverbergh - 46271800

20 décembre 2020

1 Réponses aux 2 questions théoriques

1.1 Résidu de l'itération n de l'algorithme GMRES [1]

Le résidu à l'étape n est par définition $\|r_n\| = \|Ax_n - b\|$. Vu que $x_n \in \mathcal{K}_n$ et qu'on obtient une base orthonormée $\{q_1, q_2 \dots q_n\}$ (colonnes de Q_n) de \mathcal{K}_n par l'itération d'Arnoldi, on peut écrire $\|r_n\| = \|AQ_n y_n - b\|$ où y_n est le vecteur des coefficients de x_n dans la base orthonormée. Ensuite, étant donné que $AQ_n = Q_{n+1} \tilde{H}_n$ (par définition de l'itération d'Arnoldi), on réécrit encore $\|r_n\| = \|Q_{n+1} \tilde{H}_n y_n - b\|$.

Désormais, $z = Q_{n+1} \tilde{H}_n y_n - b \in \mathcal{C}(Q_{n+1})$. Et puisque Q_{n+1} est une matrice unitaire,

$$\|Q_{n+1}^* z\| = \sqrt{(Q_{n+1}^* z)^* (Q_{n+1}^* z)} = \sqrt{z^* z} = \|z\|$$

ce qui signifie que la norme n'a pas changé, donc on peut multiplier à gauche par Q_{n+1}^* . Cela mène à $\|r_n\| = \|\tilde{H}_n y_n - Q_{n+1}^* b\|$.

Enfin, pour l'algorithme GMRES, on prend comme vecteur initial $q_1 = \frac{b}{\|b\|}$, ce qui entraîne que $Q_{n+1}^* b = \|b\| e_1$ (puisque Q_{n+1} est unitaire), et ainsi $\|r_n\| = \|\tilde{H}_n y_n - \|b\| e_1\|$.

1.2 Gain d'opérations à l'itération n de la méthode des gradients conjugués, pour une matrice creuse

Pour une itération de la méthode des gradients conjugués, la seule opération qui implique A est un produit matrice \times vecteur. Prenons M comme grandeur caractéristique puisque A est de taille $m \times m$ où $m = (2M + 1)M$. Sans stockage creux, ce produit comporte $m(m + m) = 2m^2$ opérations, soit $\mathcal{O}(m^2)$, puisqu'il faut m multiplications et m additions (où $m - 1$ en fonction de l'implémentation mais cela ne change pas grand chose) pour chaque ligne. Tandis qu'avec stockage creux en utilisant COO, ce produit comporte $2nnz$ opérations, soit $\mathcal{O}(nnz)$, où nnz est le nombre d'éléments non nuls de A , étant donné qu'on boucle sur les éléments non nuls et qu'à chaque itération, on effectue une multiplication puis une addition.

Or, connaissant A dans notre problème, en comptant les éléments par diagonale,

$$nnz = (2M + 1)M + 2((2M + 1)M - 1) + 2((2M + 1)M - (2M + 1)) - 2(M - 1)$$

et donc le gain d'opérations à l'itération n de l'algo GC est

$$2m^2 - 2nnz = 8M^4 + 8M^3 + \dots$$

soit par exemple $1.344 \cdot 10^6$ opérations pour $M = 20$, ce qui montre tout l'avantage d'un stockage creux.

2 Critère d'arrêt

Afin de pouvoir comparer la convergence de la méthode des gradients conjugués (CG) quelle que soit la température initiale, nous ne calculerons pas la norme des résidus successifs, mais la vitesse de convergence des résidus successifs, définie par $\frac{\|r_n\|_2}{\|r_0\|_2}$, où r_n est le résidu $b - Ax_n$, où x_n est l'approximation de la solution à l'étape n (et $b = r_0$). Nous calculerons également $\frac{\|Ax_n - b\|_2}{\|b\|_2}$ pour vérifier que $r_n = Ax_n - b$. Avec $M = N = 20$, les résultats obtenus à la première

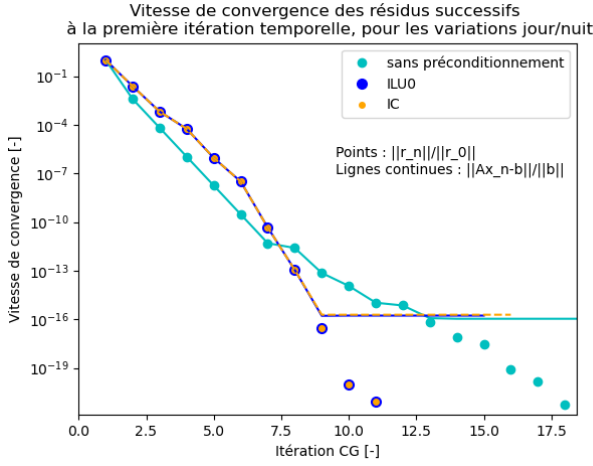


FIGURE 1 – Vitesse de convergence pour les variations jour/nuit

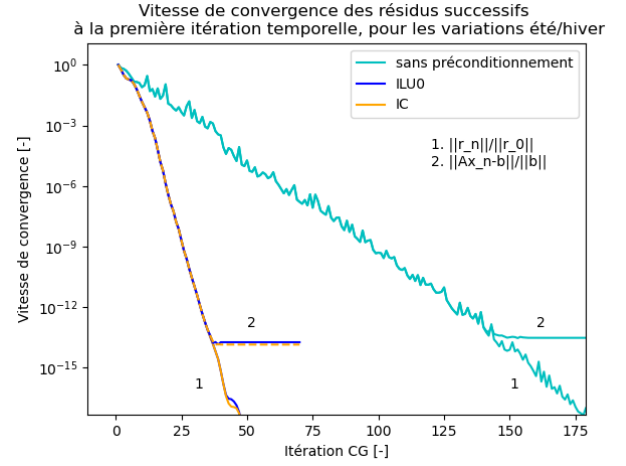


FIGURE 2 – Vitesse de convergence pour les variations été/hiver

itération temporelle et pour les 3 options de préconditionnement sont montrés aux figures 1 et 2 pour les variations jour/nuit et été/hiver respectivement.

Analysons d'abord le cas été/hiver :

- Quelle que soit la méthode utilisée, on observe déjà que $Ax_n - b = r_n$, ce qui confirme la théorie, jusqu'à un certain moment : lorsque $\frac{\|r_n\|_2}{\|r_0\|_2}$ dépasse 10^{-14} environ, ce ratio continue à diminuer alors que $\frac{\|Ax_n - b\|_2}{\|b\|_2}$ devient constant. En effet, l'algorithme ne modifie plus x_n puisqu'on est alors de l'ordre du epsilon machine.
- L'échelle étant logarithmique en y , on peut dire que la vitesse de convergence est exponentielle pour chaque méthode.
- L'algorithme GC avec ILU0 ou IC converge plus rapidement que sans préconditionnement, puisque nous avons par exemple besoin d'une vingtaine d'itérations pour atteindre une vitesse de convergence de 10^{-9} , comparé à plus d'une centaine sans préconditionnement. Le préconditionnement permet de réduire le nombre de conditionnement de la matrice, et donc de rassembler ses valeurs propres autour de 1, ce qui assure une convergence plus rapide de l'algorithme GC, comme vu en cours.
- Les méthodes de factorisation ILU0 et IC donnent les mêmes résidus dans l'algo GC. Comment l'expliquer ? A étant symétrique définie positive, il existe une matrice réelle triangulaire inférieure telle que $A = LL^T$ [1]. Or, on sait aussi que A admet une décomposition $L'U$ où L' est triangulaire inférieure, et U triangulaire supérieure. Ainsi, en posant $U = DU'$ où D est diagonale et U' triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, on obtient $A = L'DU'$. Et on peut montrer que $U' = L'^T$ lorsque A est symétrique et qu'il n'y a pas de permutation des lignes lors de la LU, ce qui est notre cas. Ainsi, en posant encore $D = RR^T$ où R est la matrice diagonale des racines carrées des pivots de D , on obtient finalement $A = L'RR^TL'^T = LL^T$, d'où $L'R = L$. De plus, ni la ILU0 ni la IC ne tiennent compte des emplacements de A où les entrées sont nulles, donc les algorithmes sont bien identiques¹.

Passons au cas jour/nuit :

- Mêmes conclusions pour $Ax_n - b = r_n$, qui est vérifié jusqu'à ce qu'on dépasse epsilon machine².
- Comme on le voit sur le graphe, c'est l'algorithme sans préconditionnement qui converge plus rapidement au début, donc on peut supposer que A est assez bien conditionnée dans le problème de départ. Ce n'est qu'au bout d'environ 7 itérations, lorsque $\frac{\|r_n\|_2}{\|r_0\|_2} < 10^{-11}$, que la tendance s'inverse, ce qui confirme finalement la théorie.
- On voit à nouveau que la vitesse de convergence est plus ou moins exponentielle, et que la ILU0 et la IC entraînent les mêmes résidus.

1. Dans le code, nous avons implémenté la IC de deux manières différentes pour vérifier cette théorie : le premier algorithme est repris de Wikipedia [2] et est donc indépendant de l'algorithme ILU0, tandis que le second algorithme reprend la structure de la ILU0 [3] en modifiant les lignes adéquates pour prendre en compte R avec les racines carrées des pivots. Nous avons bien obtenu les mêmes résultats.

2. Notons qu'aucune courbe n'est continue en réalité, mais le graphe n'aurait pas été lisible si tout avait été affiché en discret. Donc les lignes continues sont associées à $\frac{\|Ax_n - b\|_2}{\|b\|_2}$, tandis que les gros points sont associés à $\frac{\|r_n\|_2}{\|r_0\|_2}$.

Le critère d'arrêt choisi est $\epsilon = 10^{-10}$ tel que $\frac{\|r_n\|_2}{\|r_0\|_2} < \epsilon$, car nous voyons que le nombre d'itérations (environ 6 pour jour/nuit et 30 pour été/hiver, avec préconditionnement) est largement acceptable pour ce epsilon et que, puisque $\|r_0\|_2 \approx 0.0928$ pour jour/nuit et $\|r_0\|_2 \approx 0.00045$ pour été/hiver, r_n aura finalement une norme suffisamment faible pour dire que l'algorithme a quasi convergé.

3 Régime établi

Analysons l'évolution de la température au centre de la conduite $T(5, 2, t)$ en utilisant l'algo GC, sur 200 jours pour jour/nuit et 6 ans pour été/hiver³.

Dans le cas jour/nuit, $T(5, 2, t)$ ne varie quasi pas, comme on le voit sur le graphe 3. Cela sera expliqué dans la section 5. Il n'y a donc rien à dire sur une quelconque périodisation.

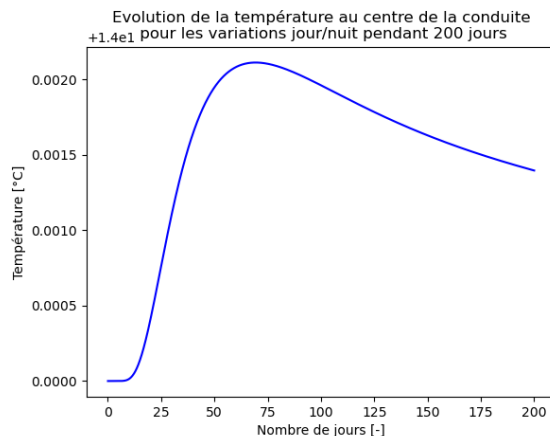


FIGURE 3 – $T(5, 2, t)$ pour les variations jour/nuit

Passons au cas bien plus intéressant des variations été/hiver. Par une première simulation simple affichée à la figure 4 en vert kaki (c'est-à-dire avec la température initiale de l'énoncé), on voit que $T(5, 2, t)$ varie à peu près comme une sinusoïde dont les maximums locaux semblent suivre une exponentielle décroissante. $T(5, 2, t)$ se reproduit donc périodiquement, à une tolérance près. En fixant celle-ci à 0.01 ⁴, on trouve qu'il faut 8 périodes, soit 8 ans, pour que la différence entre deux pics successifs soit plus petite que 0.01, ce qui suffit pour dire que le régime est alors établi.

Et que se passe-t-il si on modifie les conditions initiales ? Nous avons modifié la température initiale T_0 du domaine en la fixant respectivement à -5, 5 et 15°C , les graphes respectifs de $T(5, 2, t)$ étant montrés à la même figure 4. Voici nos quatre observations :

- Au bout d'un certain temps, la température converge toujours vers la même solution, selon un sinus de période P et déphasé de 4.3767 radians⁵ environ, affiché en traits vert clair à la même figure. Les valeurs de ce sinus oscillent d'ailleurs entre 7.9 et 12.05 environ, ce qui donne une amplitude plus faible que pour $f(t)$ (qui est de 30°C) et ce pattern semble centré en 10°C comme $f(t)$, ce qui est logique physiquement.
- Le nombre de périodes pour atteindre un régime établi varie en fonction de T_0 . On voit bien que, plus T_0 est éloigné de plus ou moins 10°C , plus il faut du temps pour que le régime s'établisse, ce qui a également du sens d'un point de vue physique. On trouve par exemple que, pour $T_0 = -5$, après 8 ans, la tolérance de 0.01 n'est plus respectée, parce que la différence entre deux pics successifs vaut alors environ 0.05.
- Peut-on trouver T_0 telle que $T(5, 2, t)$ fitte quasi parfaitement le pattern du sinus qui se produit en régime établi ? La réponse est oui. En effet, en lançant la simulation avec $T_0 = 8$ (en noir), qui est la température par laquelle passe le pattern en $t = 0$, nous voyons que la courbe atteint bien le premier sommet de ce pattern (à quelques imprécisions près). Dans ce cas, tout se passe comme si le régime était déjà en place en $t = 0$.

3. Nous choisissons $M = 40$, ainsi que $N = 24$ de manière à avoir un pas de temps d'une heure pour les variations jour/nuit, et $N = 365$ de manière à avoir un pas de temps d'un jour pour les variations été/hiver.

4. Notons que cette précision varie certainement en fonction de l'application (à première vue, nous ne devrions pas avoir besoin d'une précision au centième près mais on ne sait jamais).

5. Ce nombre a été simplement obtenu en résolvant $\sin(\frac{2\pi 2757}{P} + x) = 1$ où $P = 365$ et où on prend le pic après 2757 jours, en travaillant en jours exceptionnellement.

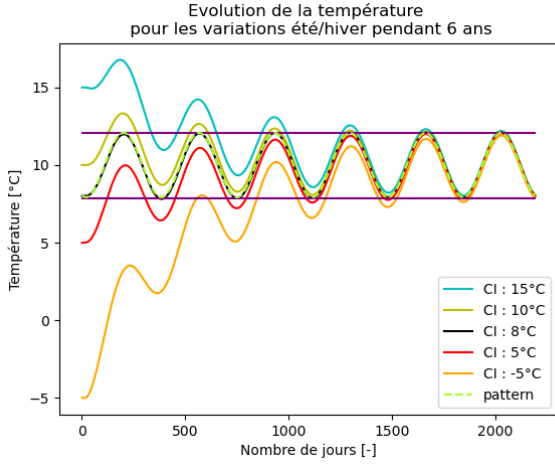


FIGURE 4 – $T(5, 2, t)$ pour différentes conditions initiales, pour les variations été/hiver

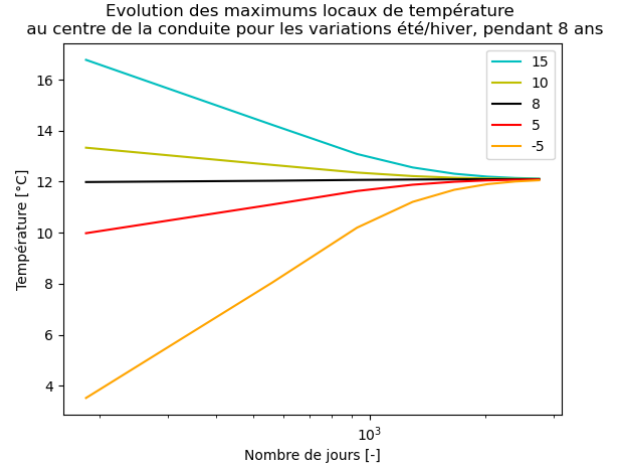


FIGURE 5 – Maximums de $T(5, 2, t)$ pour différentes conditions initiales, pour les variations été/hiver

- Comment évoluent les pics successifs ? A la figure 5, grâce au choix d'échelle, on voit que les pics évoluent de manière logarithmique, puis diminuent/augmentent moins vite pour converger vers 12.05 environ. On y voit d'ailleurs mieux que le nombre de périodes pour atteindre un régime établi dépend de la condition initiale.

En conclusion, la durée de la période transitoire augmente au fur et à mesure que T_0 s'éloigne de 8°C , température pour laquelle le régime est établi dès le début. Pour notre problème, il faut attendre environ 8 ans.

4 Discrétisation

Pour le cas jour/nuit, l'efficacité est nulle puisqu'il n'y a pas de variation de température (celle-ci est négligeable).

Pour le cas été/hiver, nous avons calculé l'efficacité en prenant les valeurs maximale et minimale de $T(5, 2, t)$, pendant le régime établi, en prenant donc la dernière période d'une simulation de 8 ans. On observe bien une variation de η lorsqu'on modifie la discrétisation. Si $N = 20$ et si M varie de 20 à 140 (cf. figure 6), l'efficacité augmente fort au début par rapport à ce qu'il se passe pour des grandes valeurs de M , où η commence à converger vers une certaine valeur. Cependant, cette variation est fort négligeable puisqu'au total, η a augmenté de seulement 0.0005, ce qui est très peu puisque c'est un paramètre qui varie entre 0 et 1 (inutile donc de faire davantage de simulations au-delà de $M = 140$). Et si $M = 20$ avec N qui varie de 10 à 500 (cf. figure 7), η augmente suivant la même allure, mais cette fois avec une variation de quelques centièmes, donc moins négligeable. On observe aussi une convergence vers une certaine valeur.

Voici nos interprétations de ces graphes :

- Une si grande variation de η due à une variation de N s'explique aisément : en prenant un pas de temps très grand, la simulation ne "passe" pas sur les temps auxquels correspondent les maximums et minimums réels, ceux-ci étant situés entre deux moments successifs où on évalue la température. Ainsi, les valeurs max et min prises pour le calcul de η seront respectivement plus petite et plus grande que le max et le min réels, ce qui entraînera un écart $T_{\max} - T_{\min}$ plus faible, et donc une valeur de l'efficacité plus faible. De manière opposée, il est alors logique que l'efficacité ne change pas beaucoup lorsque M varie.
- Lorsqu'on affine les discrétisations N et M , on se rapproche du cas continu dans les domaines temporel et spatial respectivement. Ainsi, en combinant les deux graphes, on peut retrouver la valeur réelle de η . Vu que η ne change pas beaucoup avec M et que cette valeur converge vers 0.14 lorsque N augmente, on peut en conclure que $\eta = 0.14$ en continu.

Au final, on pourrait prendre $N = 500$ et $M = 140$, et cela nous donnerait quasi l'efficacité réelle. Toutefois, le nombre d'itérations serait fort élevé, et on voit bien qu'il est possible d'avoir une bonne valeur avec une discrétisation moins forte. Par conséquent, nous prendrons $M = 40$ et $N = 365$ afin de pouvoir faire une simulation par jour, pour les variations été/hiver. Nous fixons $M = 40$ et $N = 24 \cdot 60$ pour jour/nuit pour faire une simulation par heure.

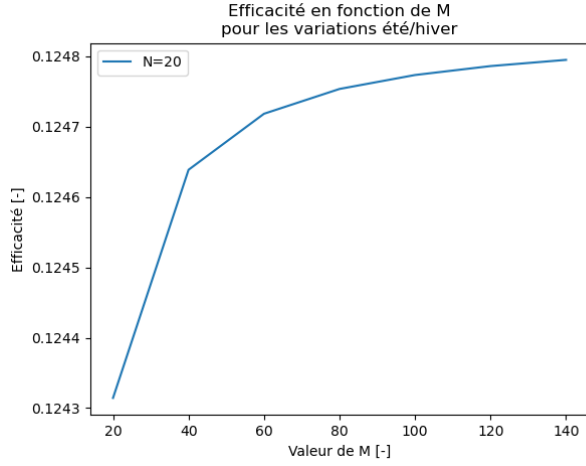


FIGURE 6 – Efficacité en fonction de M , pour les variations été/hiver, avec $N = 20$

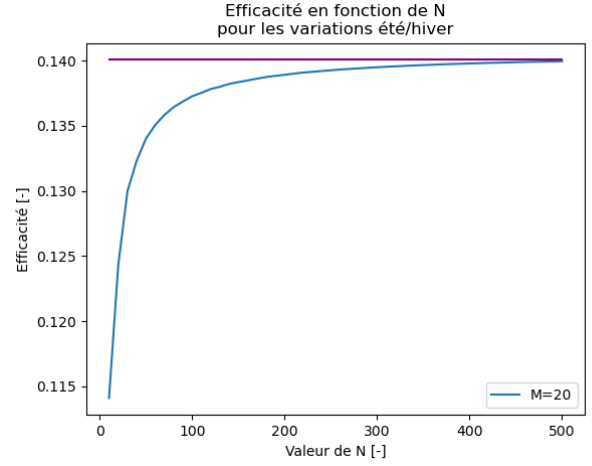


FIGURE 7 – Efficacité en fonction de N , pour les variations été/hiver, avec $M = 20$

5 Simulations finales

Nous ne simulerons pas l'alternance jour/nuit car la température ne varie jamais dans la conduite. Pour l'alternance été/hiver, analysons les simulations (cf. figures 8 et 9) avec ces paramètres : $\epsilon = 10^{-10}$, $nb = 8$, $M = 40$ et $N = 365$.

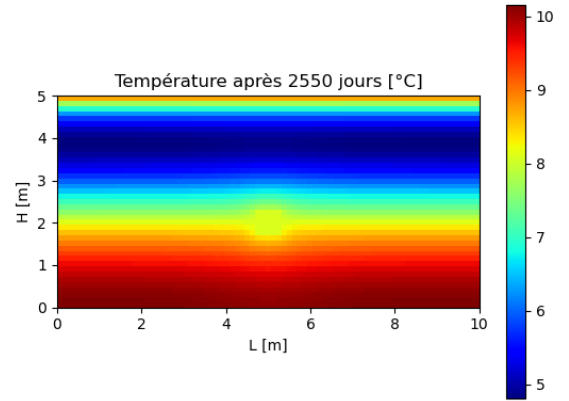


FIGURE 8 – Température dans le domaine tous les 25 jours pendant un an, après 7 ans

FIGURE 9 – Température dans le domaine après 7 ans

- Toutes les conditions aux limites sont vérifiées : le flux de chaleur est nul sur les bords hors surface puisque $T(x, y, t)$ ne varie pas selon un axe horizontal aux frontières, et $T(x, H, t) = f(t)$ vu qu'on voit bien la sinusoïde décrite dans l'animation⁶ en $y = H$.
- Ceci saute aux yeux lors de l'animation : lors de l'arrivée d'une "vague" de froid/chaud qui commence à la surface (expliquée par la condition de Dirichlet), celle-ci descend en profondeur mais s'amortit très vite avant d'arriver à hauteur de la conduite. Ce résultat est cohérent étant donné que $7.9 < T(5, 2, t) < 12.05$ seulement.
- A la figure 9, $T(x_{\text{dans conduite}}, 1.9, t) < T(x_{\text{hors conduite}}, 1.9, t)$ et une vague de froid arrive, ce qui signifie que l'air a diffusé la chaleur plus rapidement que le sol. Cela est normal puisque $D_{\text{air}} > D_{\text{sol}}$.

6. Cette animation fonctionne sur Adobe Acrobat Reader ou Foxit Reader[4]. Par ailleurs, le range des couleurs ne varie pas d'un moment à un autre pour pouvoir comparer T correctement, tandis que ce range a été adapté pour la figure 9 afin de voir les variations de T du sol par rapport à l'air.

Au final, nos simulations sont correctes car elles vérifient nos résultats antérieurs, les paramètres et toutes les conditions.

Analysons désormais $T(5, 2, t)$ par rapport à $T(5, 5, t)$, au moyen des figures 10 (jour/nuit) et 11 (été/hiver) :

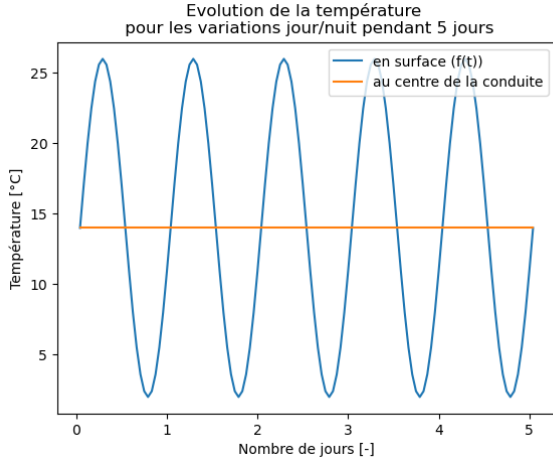


FIGURE 10 – Comparaison entre la température dans la conduite et celle en surface, jour/nuit

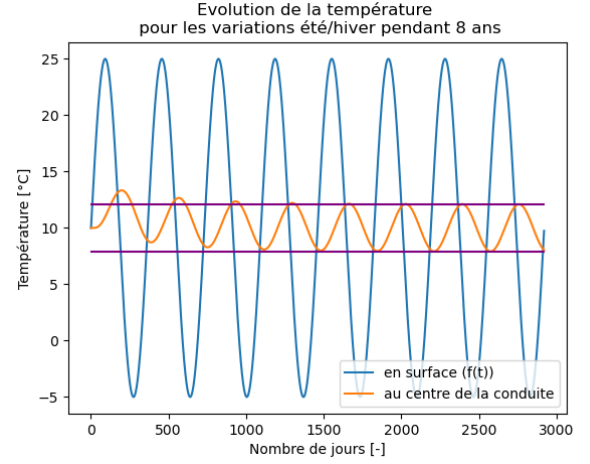


FIGURE 11 – Comparaison entre la température dans la conduite et celle en surface, été/hiver

- Comment expliquer que la température ne varie pas pour l'alternance jour/nuit ? Calculons le temps caractéristique de diffusion, défini comme $\tau = \frac{H^2}{D_{\text{sol}}}$. Pour $H = 5$ et $D_{\text{sol}} = 0.25 \cdot 10^{-6}$, $\tau = 10^8$ secondes, soit 3.17 ans ! Comme ce temps est bien plus grand que la période de la température en surface, cela justifie qu'on ne voie pas de changement significatif de température. Physiquement, cela s'explique par le fait que, de par ses propriétés thermiques, le sol ne diffuse la chaleur que très difficilement, même si la variation de température en surface est quand même fort élevée comme on le voit (avec une amplitude $T_{\text{max}} - T_{\text{min}} = 12$).
- Pour l'alternance été/hiver, la période de $T(5, 2, t)$ est la même que celle de $f(t)$, c'est-à-dire P . De plus, il y a un certain décalage entre cette courbe et $f(t)$, ce qui s'explique aisément par le fait qu'il faut un certain temps avant que la chaleur n'atteigne 3 mètres de profondeur (comme vu à la simulation). Ainsi, la température "suit" les variations de température en surface, mais pas avec la même amplitude, comme expliqué ci-après.
- Pour l'alternance été/hiver toujours, on voit graphiquement que l'amplitude de la température en conduite a été divisée à peu près par un facteur 7 par rapport à l'amplitude en surface. Cela nous amène d'ailleurs à la définition de η qui vaut, d'après nos précédents résultats, 0.14, ce qui équivaut bien à environ $\frac{1}{7}$.

Physiquement, au plus η est faible, au plus le système est efficace au sens où une forte variation de température en surface n'impactera que très peu la température dans la conduite, ce qui est recherché afin de ne pas avoir un fluide dans la conduite qui serait trop froid ou trop chaud. Par conséquent, on voit clairement que le puits canadien est un très bon système : de par η faible et de par ce décalage pour que la chaleur arrive, on aura une température plus chaude que la température en surface en hiver/nuit, et plus froide en été/jour. Par ailleurs, l'efficacité quotidienne étant nulle, le fluide gardera la même température autant en journée que pendant la nuit.

Enfin, si on augmente la diffusivité thermique du sol, la chaleur se diffusera plus facilement, ce qui entraînera de plus grandes variations de $T(5, 2, t)$ puisque les vagues de chaud/froid seront moins amorties, et donc on aura une efficacité plus élevée, soit encore un puits canadien moins efficace.

Références

- [1] Lloyd N. Trefethen, David Bau, *Numerical Linear Algebra*, Siam, 1997.
- [2] Wikipedia, *Incomplete Cholesky factorization*, https://en.wikipedia.org/wiki/Incomplete_Cholesky_factorization, consulté le 13 décembre 2020.
- [3] Inconnu, *Zero fill-in ILU*, <https://moodleucl.uclouvain.be/mod/resource/view.php?id=724915>
- [4] Blog, *Les animations sous latex*, <https://blog.dorian-deprieuster.fr/latex/les-animations-sous-latex>, consulté le 19 décembre 2020.