$$
= \left|\begin{array}{c|cc} -2 & -3 & -5 \\ \hline -8 & \mathbf{-4} & \mathbf{-1} \\ -15 & \mathbf{-19} & \mathbf{-7} \end{array}\right| = \frac{1}{(-2)^{3-2}} \left| \begin{array}{cc} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -8 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -15 & -19 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -15 & -7 \end{vmatrix} \end{array} \right|
$$

$$
= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{vmatrix} -16 & -38 \\ -7 & -61 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8 & 19 \\ 7 & 61 \end{vmatrix} = -355.
$$

- **Przykład 8.5**

Korzystając z twierdzenia o postaci macierzy odwrotnej znaleźć macierze odwrotne do podanych:

$$
\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}; \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}.
$$

Rozwiązanie

Wzór określający macierz odwrotną do nieosobliwej macierzy kwadratowej A stopnia n ma postać

$$
A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}^T,
$$

gdzie D_{ij} oznacza dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij} tej macierzy.

a) Dla macierzy z ćwiczenia a) mamy $\det A = (1+i)(1-i) - 1^2 = 1$ oraz

$$
D_{11} = (-1)^{1+1} \det [1-i] = 1-i, \quad D_{12} = (-1)^{1+2} \det [1] = -1,
$$
$$
D_{21} = (-1)^{2+1} \det [1] = -1, \quad D_{22} = (-1)^{2+2} \det [1+i] = 1+i.
$$

Zatem

$$
A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ -1 & 1+i \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ -1 & 1+i \end{bmatrix}.
$$

b) Dla macierzy z ćwiczenia b) mamy

$$
\det A = [2 \cdot 3 \cdot (-3) + 5 \cdot 4 \cdot 5 + 7 \cdot 6 \cdot (-2)] - [7 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot (-2) + 6 \cdot 5 \cdot (-3)] = -1
$$

oraz

$$
D_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1, \quad D_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 38,
$$

$$
D_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -27, \quad D_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 1,
$$

$$
D_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -41, \quad D_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 29,
$$

$$D_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1, \quad D_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 34,$$

$$D_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -24.$$

Zatem

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}^T = - \begin{bmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}.$$

• Przykład 8.6

Korzystając z metody bezwyznacznikowej wyznaczyć macierze odwrotne do podanych:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie

Bezwyznacznikowa metoda znajdowania macierzy odwrotnej polega na wykonywaniu tych samych operacji elementarnych na **wierszach** macierzy wyjściowej oraz macierzy jednostkowej. Celem tych operacji jest sprowadzenie macierzy wyjściowej do macierzy jednostkowej. Macierz jednostkowa przechodzi wtedy na macierz odwrotną do wyjściowej.

$$\left[\mathrm{A}|\mathrm{I}\right] \xrightarrow[\text{na wierszach}]{\text{operacje elementarne}} \left[\mathrm{I}|\mathrm{A}^{-1}\right].$$

a) Wykonując te same operacje na wierszach rozważanej macierzy oraz macierzy jednostkowej otrzymamy kolejno

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - w_1]{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 - 3w_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-w_2]{w_1 + 2w_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

Zatem

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Wykonując te same operacje na wierszach rozważanej macierzy oraz macierzy jednostkowej otrzymamy kolejno

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 + w_1]{\substack{w_1 : 2 \\ w_3 : 2}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 - 2w_2]{w_1 - 2w_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 \longleftrightarrow w_4]{w_2 \longleftrightarrow w_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Zatem

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

• Przykład 8.7

Rozwiązać podane równania macierzowe:

a) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = 4X + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; b) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie

a) Mamy

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} X = 4X + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} X - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \iff X = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Mnożąc obie strony rozważanego równania prawostronnie przez macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$$

otrzymamy

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Ponieważ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

więc

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

• Przykład 8.8

Jakie są możliwe wartości wyznacznika macierzy A, jeżeli:
a) $A^2 = A^T$; b) $A^T - A^{-1} = \mathbf{O}$; c) $A^2 + A^{-1} = \mathbf{O}$.

Rozwiązanie

W rozwiązaniu wykorzystamy następujące własności wyznaczników:

$$\det\left(A^T\right) = \det A, \ \det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1};$$
$$\det\left(A^k\right) = (\det A)^k, \text{ gdzie } k \in \boldsymbol{N};$$
$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A, \text{ gdzie } n \text{ oznacza stopień macierzy } A.$$

a) Korzystając z tych własności kolejno otrzymamy

$$\det\left(A^2\right) = \det\left(A^T\right) \Longrightarrow (\det A)^2 = \det A \Longleftrightarrow \det A = 1 \text{ lub } \det A = 0.$$

Zatem jedynymi możliwymi wartościami wyznacznika macierzy A są 0 i 1. Przyjmując $A = [0]$ i $A = [1]$ widzimy, że obie te wartości są realizowane.

b) Korzystając z własności podanych na początku rozwiązania otrzymamy

$$A^T - A^{-1} = \mathbf{O} \Longleftrightarrow A^T = A^{-1} \Longrightarrow \det\left(A^T\right) = \det\left(A^{-1}\right)$$
$$\Longleftrightarrow \det A = (\det A)^{-1} \Longleftrightarrow \det A = 1 \text{ lub } \det A = -1.$$

Zatem jedynymi możliwymi wartościami wyznacznika macierzy A są liczby -1 i 1. Przyjmując $A = [1]$ i $A = [-1]$ widzimy, że obie te wartości są realizowane.

c) Korzystając, jak poprzednio, z przytoczonych na wstępie rozwiązania własności wyznaczników kolejno otrzymamy

$$A^2 + A^{-1} = \mathbf{O} \Longleftrightarrow A^2 = -A^{-1} \Longrightarrow \det\left(A^2\right) = \det\left(-A^{-1}\right)$$
$$\Longleftrightarrow (\det A)^2 = (-1)^n (\det A)^{-1} \Longleftrightarrow (\det A)^3 = (-1)^n,$$

gdzie n oznacza stopień macierzy A. Zatem jedyną możliwą wartością wyznacznika macierzy rzeczywistej stopnia nieparzystego jest liczba -1, a macierzy stopnia parzystego jest 1. Przyjmując

$$A = [-1] \text{ oraz } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

widzimy, że obie wartości wyznacznika są realizowane.

• Przykład 8.9

Elementy macierzy A oraz macierzy A^{-1} są liczbami całkowitymi. Jaka jest wartość wyznacznika macierzy A?

Rozwiązanie
Ponieważ elementy macierzy A oraz A^{-1} są liczbami całkowitymi, więc ich wyznaczniki także są liczbami całkowitymi. Z równości $A \cdot A^{-1} = I$ oraz z twierdzenia Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy wynika, że

$$\det I = \det\left(A \cdot A^{-1}\right) = \det A \cdot \det\left(A^{-1}\right) = \det A \cdot (\det A)^{-1} = 1.$$

Z otrzymanej równości wynika, że jedynymi możliwymi wartościami wyznacznika macierzy A są 1 i -1. Przyjmując $A = [1]$ oraz $A = [-1]$ widzimy, że obie te wartości są realizowane.

Zadania

o Zadanie 8.1
Obliczyć podane wyznaczniki wykorzystując występujące w nich regularności:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

o Zadanie 8.2
Obliczyć podane wyznaczniki stopnia $n \geqslant 2$ wykorzystując występujące w nich regularności:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 4 & 4 & \dots & 4 & 4 \\ 1 & 4 & \dots & 4 & 4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 4 & 4 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}; \quad \text{c*)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

o Zadanie 8.3
Stosując operacje elementarne na wierszach lub kolumnach podanych wyznaczników (powodujące obniżenie ich stopni) obliczyć:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix};$$

$$\text{d)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{e)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{f)} \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 7 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

o Zadanie* 8.4
Korzystając z algorytmu Chió obliczyć podane wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

○ Zadanie 8.5

Korzystając z twierdzenia o postaci macierzy odwrotnej znaleźć macierze odwrotne do podanych:

a) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, gdzie $\alpha \in \boldsymbol{R}$; c) $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

○ Zadanie 8.6

Korzystając z metody bezwyznacznikowej wyznaczyć macierze odwrotne do podanych:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$.

○ Zadanie 8.7

Rozwiązać podane równania macierzowe:

a) $X \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$;

c) $\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} + 4 \cdot X \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; d) $3 \cdot X + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot X$.

○ Zadanie 8.8

Jakie są możliwe wartości wyznacznika macierzy rzeczywistej A stopnia n, jeżeli:

a) $A^2 = 8A^{-1}$; b) $A^3 - A = \mathbf{0}$; c) $A^T = 4A^{-1}$?

○ Zadanie 8.9

Macierze kwadratowe tego samego stopnia mają wyznaczniki równe 0. Jaką największą wartość może mieć wyznacznik sumy tych macierzy?

○ Zadanie* 8.10

Wyprowadzić wzory na podane wyznaczniki stopnia n:

a) $\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} b & a & a & \dots & a \\ -a & b & a & \dots & a \\ -a & -a & b & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a & -a & -a & \dots & b \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \ldots & 3 & 2 \\ 2 & 1 & n & \ldots & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & \ldots & 5 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & \ldots & 2 & 1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_2-b & \ldots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n-b \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ 1 & a_2+b_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ 1 & a_2 & a_3+b_3 & \ldots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n+b_n \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-1} & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_n & \ldots & a_n & a_n \end{vmatrix}$.

Odpowiedzi i wskazówki

8.1 a) 0; b) 1; c) -512.

8.2 a) Wskazówka. Od pierwszego wiersza odjąć drugi, od drugiego trzeci, ..., od przedostatniego ostatni. Wynik $4 \cdot 3^{n-1}$; b) Wskazówka. Od pierwszego wiersza odjąć drugi, od drugiego trzeci, ..., od przedostatniego ostatni. Wynik $(-1)^{n-1}n$; c) Wskazówka. Od kolejnych kolumn począwszy od ostatniej, a na drugiej kończąc odejmować kolumny poprzedzające pomnożone przez n. Rozwinąć otrzymany wyznacznik względem ostatniego wiersza obniżając o 1 jego stopień. Z kolejnych wierszy obniżonego wyznacznika wyłączyć wspólne czynniki. Kontynuować postępowanie aż do otrzymania wyznacznika stopnia 2. Wynik $2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot (n-1)!$.

8.3 a) 50; b) -15; c) -13; d) 44; e) 12; f) -178.

8.4* a) -45; b) -11; c) -1060.

8.5 a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{18} & \frac{5}{36} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

8.6 a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$.

8.7 a) $X = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ -24 & -7 \end{bmatrix}$; b) $X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; c) $X = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$;
d) $X = \frac{1}{32}\begin{bmatrix} -17 & -9 \\ 11 & 19 \end{bmatrix}$.

8.8 a) $\det A = 2^n$, np. dla $A = 2I_n$; b) $\det A = 0$ lub $\det A = 1$ lub $\det A = -1$, np. dla $A = O_n$, $A = I_n$ lub $A = -I_n$ dla n nieparzystych; c) $\det A = 2^n$ lub $\det A = -2^n$, np. dla $A = 2I_n$ lub $A = [a_{ij}]$, gdzie $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$ oraz $a_{11} = -2$, $a_{ii} = 2$ dla $i = 2, 3, \ldots, n$, przy czym $n \in \mathbb{N}$ jest liczbą parzystą.

8.9 Wyznacznik sumy macierzy może przyjmować wartości dowolnie duże.

Np. dla $A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mamy $\det(A+B) = x$, analogicznie dla wyższych stopni macierzy.

8.10* **a)** $(a+nb-b)(a-b)^{n-1}$; **b)** $\dfrac{(a+b)^n + (b-a)^n}{2}$; **c)** $(-1)^{n-1} n^{n-1} \dfrac{n+1}{2}$; **d)** $(-1)^n b^{n-1} \left(b - \sum_{k=1}^{n} a_k \right)$; **e)** $b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$; **f)** $(a_1 - a_2)(a_2 - a_3) \cdot \ldots \cdot (a_{n-1} - a_n) a_n$.