Macierz odwrotna

Macierz odwrotna A^{-1} do macierzy $n \times n$ A to macierz taka, że $A^{-1}A = AA^{-1} = I$, gdzie I to macierz jednostkowa wymiaru n.

Macierz odwrotna: wzór

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & \dots & D_{n1} \\ D_{12} & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ D_{1n} & & & D_{nn} \end{pmatrix}$$

gdzie tzw. dopełnienia algebraiczne $D_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, a tzw. minor$M_{ij}$ to wyznacznik macierzy powstałej z macierzy A poprzez wykreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Zadanie 8.5 Znaleźć macierze odwrotne metodą dopełnień algebraicznych

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \det A &= 3 \cdot 2 - (-5) \cdot 6 = 36 \\ A_{11} &= (-1)^{1+1} |2| = 2 \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} |6| = -6 \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} |-5| = 5 \\ A_{22} &= (-1)^{2+2} |3| = 3 \end{aligned}$$

Stąd

$$A^{-1} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Sprawdzenie

$$\frac{1}{36} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \det A &= 2 \cdot 9 \cdot 3 + 7 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 3 - 3 \cdot 9 \cdot 1 - 7 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \\ &= -3 \\ A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \\ A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \\ & \dots \end{aligned}$$

W końcu

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Macierz odwrotna: metoda bezwyznacznikowa

Zaczynamy od stworzenia macierzy postaci $(A|I)$. Stosując operacje elementarne na wierszach doprowadzamy do postaci z macierzą jednostkową po lewej stronie. Po prawej stronie otrzymujemy szukaną macierz odwrotną: $\left(I|A^{-1}\right)$.

Zadanie 8.6

a)

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underbrace{\rightarrow}_{2\times 1.,\text{ odejmujemy od 2. i 3.}} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\rightarrow}_{2.\text{wiersz dzielimy przez } -3,\text{ pomnozony dodajemy do 1.i3.}} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -2 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\rightarrow}_{3.\text{wiersz dzielimy przez 9,dodajemy wyżej}} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right)$$

Odczytujemy macierz odwrotną $\frac{1}{9}\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$. W tym akurat przykładzie "przypadkowo" macierz odwrotna jest proporcjonalna do macierzy wyjściowej.

Wykorzystanie: równania macierzowe

Zadanie 8.7

a)

$$X \cdot \left(\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$X = \left(\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{array}\right)^{-1} = ...$$

c)

$$\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{array}\right) + X\right)^{-1} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{array}\right) + X = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}\right)^{-1}$$

$$X = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}\right)^{-1} - \left(\begin{array}{cc} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{array}\right) = ...$$