

Master 1
MAD4037 : Probabilités
Projet de Travail Pratique :
Responsable : NYOBE Samuel
Année académique 2022-2023; Semestre I

L'objectif de ce projet est d'évaluer les compétences de chaque étudiant à écrire des codes de simulation de variables aléatoires quelconque et leur intégration dans des modèles divers pour analyse. Il a été vu plusieurs méthodes de simulation de variables aléatoires parmi lesquelles le changement de variable et la méthode d'inverse de la fonction de répartition.

On fait l'étude sur la modélisation de la croissance en diamètre (en *cm*) d'un arbre au sein d'une forêt. X_k (k correspond à une année) est le diamètre (en *cm*) à l'instant k , la suite X_0, X_1, \dots, X_k (encore notée $(X_k)_{k \geq 0}$) est un processus (de Markov) qui modélise l'évolution annuelle du diamètre d'un arbre. Le diamètre à l'instant k dépend de celui des instants $k-1$ et $k-2$, ainsi, la loi de transition vers $X_k, \forall k \geq 2$ est inspirée d'un modèle de croissance, celui de *Gompertz* [Gom25] et peut s'écrire comme suit :

$$X_k = D^{1 - \exp^{-r} \left(\frac{X_{k-1} + X_{k-2}}{2} \right)} \epsilon_{k-1} \text{ pour } k \geq 2,$$

où r et D représentent respectivement le taux de croissance et le diamètre maximal d'un arbre. Dans la suite, prendre $r = 0.3$ et $D = 150$ *cm*. ϵ_k est le bruit du modèle et on suppose qu'il peut être modélisé par la loi exponentielle (de paramètre θ) de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \theta \exp^{-\theta x} & \text{si } 0 \leq x. \end{cases}$$

On suppose que X_0 et X_1 sont choisis de telle sorte que le vecteur (X_0, X_1) suit une loi multivariée normale $\mathcal{N}(\mu, Q)$ avec :

$$\begin{cases} \mu &= (10., 12.)^T \\ Q &= \begin{pmatrix} 1.1^2 & .5^2 \\ .5^2 & 1.1^2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

car les arbres sont généralement inventoriés à partir de 10 *cm*. Pour simuler une réalisation de cette loi, vous pourrez faire appel à la fonction *mvrnorm* du package *MASS* dans R ou à *random.multivariate_normal* du package *numpy* dans Python.

Consignes :

Vous devez produire des réalisations de ce modèle sur 50 années soit sur 50 pas de temps mis à part X_0 . L'année initiale est prise en **2023**.

1. En utilisant la méthode de l'inverse de la fonction de répartition, écrire un simulateur de la loi du bruit ϵ_k décrite plus haut. En plus de ce simulateur, fournir un code pour le calcul de la densité, de la probabilité et des quantiles de cette loi. Votre rapport doit inclure les étapes d'obtention de l'inverse de la fonction de répartition.
2. Testez vos fonctions et représenter des histogrammes d'un jeu tiré de vos simulations et comparez à la fonction de densité donnée plus haut pour vous assurer du bon fonctionnement de votre simulateur. Bien vouloir simuler un grand nombre de réalisations. Vous pourrez aussi comparer vos fonctions avec celles de la loi exponentielle fournies par votre langage choisi.
3. Utilisez ensuite le simulateur du bruit pour simuler des réalisations du modèle de croissance d'un arbre décrit plus haut.

Chaque étudiant doit impérativement re-initialiser le générateur (*seed*) avec son numéro sur la liste officielle des étudiants. Assurez-vous de trouver des valeurs du paramètre θ adéquats pour rester cohérent avec la description faites plus haut.

4. D'après votre simulation sur les 50 années, en quelle année, l'arbre atteindra la plus grande valeur? Quelle est cette valeur? Vous préciserez aussi la plus grande variation entre deux années selon vos simulations et l'année à laquelle on observe cette marge.
5. Simuler enfin 50 réalisations de ce modèle sur les 50 années et les représenter toutes sur le même graphique. Dans des conditions normales, un arbre doit grandir chaque année même si cette croissance est très ralentie, d'après vous, ce modèle reflète-t-il cette réalité attendue? Sinon, est-il acceptable néanmoins?

NB: Les langages de programmation acceptés sont R et Python et votre rapport doit être rédigé avec l'aide d'un des outils suivants: **R Markdown** ou **Jupyter Notebook**. Tous les devoirs doivent être remis au délégué dans un dossier portant le nom complet de l'étudiant. Bien vouloir commenter vos codes. Ensuite le délégué devra compiler l'ensemble des devoirs dans un fichier compressé et l'envoyer à l'adresse ci-après. Ceux qui n'auront pas remis leurs devoirs se verront attribuer la note de **00/30**, le plagiat vaut aussi la note de **00/30**.

Délai : 14 Février 2022 à 15h délai de rigueur et à envoyer (**uniquement le délégué**) à l'adresse **samuellenyobe@gmail.com**.

References

- [Gom25] Benjamin Gompertz. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, 115:513–583, 1825.