3 三角的和差角公式

重點整理

1. 和角公式：

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 。

(2) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ 。

(3) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ 。

(4) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ 。

(5) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ 。

(6) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ 。

2. 兩直線的夾角公式：

設 L_1 、 L_2 非鉛直線，且直線 $L_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ 的斜率為 m_1 ，

直線 $L_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ 的斜率為 m_2 ，若 L_1 和 L_2 的夾角為 θ（ $\theta\neq 90^\circ$ ），

則 $\tan\theta=\pm\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1\times m_2}$ 。

3. 倍角公式：

(1) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ 。

(2) $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$ 。

(3) $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ 。（其中 $\tan\theta$ 有定義且 $\tan^2\theta\neq 1$ ）

4. 半角公式：

(1) $\sin\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$ （正負號由 $\dfrac{\theta}{2}$ 所在的象限來決定）。

(2) $\cos\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$ （正負號由 $\dfrac{\theta}{2}$ 所在的象限來決定）。

(3) $\tan\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ （正負號由 $\dfrac{\theta}{2}$ 所在的象限來決定）。

觀念是非題　試判斷下列敘述對或錯。（每題 2 分，共 10 分）

（ ╳ ）**1.** $\cos 40°\cos 20° + \sin 40°\sin 20° = \dfrac{1}{2}$。

解 $\cos 40°\cos 20° + \sin 40°\sin 20° = \cos(40° - 20°) = \cos 20° \neq \dfrac{1}{2}$。

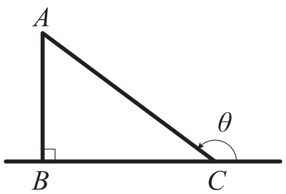
（ ╳ ）**2.** 已知 α、β 為銳角，且 $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$，$\tan\beta = \dfrac{1}{3}$，則 $\alpha + \beta = 45°$ 或 $135°$。

解 $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = 1$，又 $0° < \alpha < 90°$、$0° < \beta < 90°$，

故 $0° < \alpha + \beta < 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 45°$。

（ ╳ ）**3.** 已知 θ 為有向角，$\overline{AB} = 3$，$\overline{BC} = 4$，$\overline{AB} \perp \overline{BC}$，

如圖所示，則 $\sin 2\theta = \dfrac{24}{25}$。



解 如圖，

$\sin\theta = \sin(180° - \angle ACB) = \sin\angle ACB = \dfrac{3}{5}$，

$\cos\theta = \cos(180° - \angle ACB) = -\cos\angle ACB = -\dfrac{4}{5}$，

所以 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{24}{25}$。

（ ○ ）**4.** $\dfrac{\sin 75°}{\sin 25°} - \dfrac{\cos 75°}{\cos 25°} = 2$。

解 $\dfrac{\sin 75°}{\sin 25°} - \dfrac{\cos 75°}{\cos 25°} = \dfrac{\sin 75°\cos 25° - \cos 75°\sin 25°}{\sin 25°\cos 25°} = 2\times\dfrac{\sin(75° - 25°)}{\sin 50°} = 2$。

(×) **5.** 若 θ 為第二象限角時，則半角公式 $\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ 的正負號取正。

解 錯誤。正負號由角度 $\frac{\theta}{2}$ 所在象限決定，

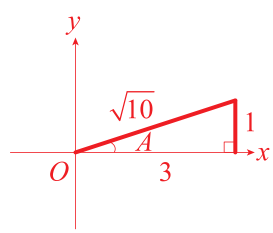
θ 為第二象限角時，$\frac{\theta}{2}$ 不一定為第一象限角。

例如：$\theta=510°$ 為第二象限角，但 $\frac{\theta}{2}=255°$ 為第三象限角，此時 $\sin\frac{\theta}{2}$ 取負。

一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. $\triangle ABC$ 中，設 $\tan A=\frac{1}{3}$，$\cos B=\frac{2}{\sqrt{5}}$，則 $\angle C=$ ＿＿135＿＿ 度。

解 $\tan A=\frac{1}{3}\Rightarrow\sin A=\frac{1}{\sqrt{10}}$，$\cos A=\frac{3}{\sqrt{10}}$，



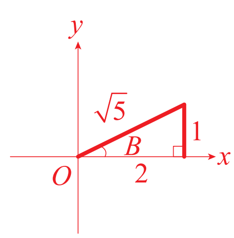
又 $\cos B=\frac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow\sin B=\frac{1}{\sqrt{5}}$，

所以 $\cos C=\cos\left(\pi-(A+B)\right)=-\cos(A+B)$

$=-\left(\cos A\cos B-\sin A\sin B\right)$

$=-\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\times\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{10}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$=-\frac{5}{5\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$，



所以 $\angle C=135°$。

2. 設 A，B 均為第二象限角，且 $\sin A=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos B=-\frac{3}{\sqrt{10}}$，求 $A+B$ 的值 $=$ ＿$\frac{7\pi}{4}$＿。

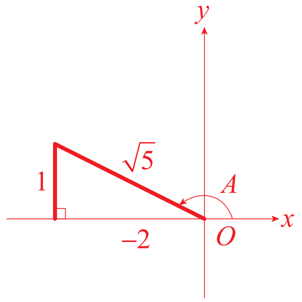
解 因為 $\frac{\pi}{2}<A<\pi$，$\frac{\pi}{2}<B<\pi$，所以 $\pi<A+B<2\pi$，

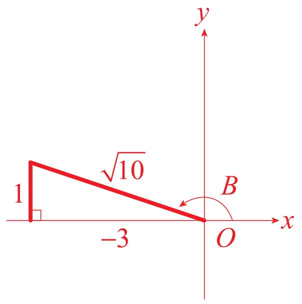
因為 $\sin A=\frac{1}{\sqrt{5}}$，所以 $\cos A=-\frac{2}{\sqrt{5}}$，

因為 $\cos B=-\frac{3}{\sqrt{10}}$，所以 $\sin B=\frac{1}{\sqrt{10}}$，

$$\begin{aligned}\cos(A+B)&=\cos A\cos B-\sin A\sin B\\&=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\times\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\times\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\\&=\frac{5}{\sqrt{50}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{，}\end{aligned}$$

所以 $A+B=\frac{7\pi}{4}$。





3. 設 α，β 均為銳角，$\cos\alpha=\frac{1}{7}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$，則 $\cos\beta=$ ＿$\frac{1}{2}$＿。

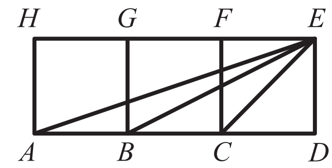
解 因為 α 為銳角且 $\cos\alpha=\frac{1}{7}$，所以 $\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

因為 α，β 均為銳角 $\Rightarrow 0<\alpha+\beta<\pi\Rightarrow\sin(\alpha+\beta)>0$，

又 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}\Rightarrow\sin(\alpha+\beta)=\frac{5\sqrt{3}}{14}$

$\Rightarrow\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=\frac{1}{2}$。

4. 右圖為三個大小相同的連續正方形。若 $\angle EAD=\alpha$，$\angle EBD=\beta$，$\angle AEB=\gamma$，則 $\tan\gamma=$ $\underline{\quad\frac{1}{7}\quad}$。



解 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\tan\beta=\frac{1}{2}$，

$\triangle ABE$ 中，$\beta=\gamma+\alpha\Rightarrow\tan\beta=\tan(\gamma+\alpha)\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{\tan\gamma+\tan\alpha}{1-\tan\gamma\tan\alpha}=\frac{\tan\gamma+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}\tan\gamma}\Rightarrow\tan\gamma=\frac{1}{7}$。

5. 試求 $\tan37^\circ+\tan23^\circ+\sqrt{3}\tan37^\circ\tan23^\circ=$ $\underline{\quad\sqrt{3}\quad}$。

解 $\tan60^\circ=\tan(37^\circ+23^\circ)\Rightarrow\sqrt{3}=\frac{\tan37^\circ+\tan23^\circ}{1-\tan37^\circ\tan23^\circ}$

$\Rightarrow\tan37^\circ+\tan23^\circ=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan37^\circ\tan23^\circ$

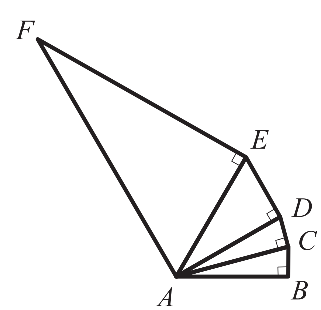
$\Rightarrow\tan37^\circ+\tan23^\circ+\sqrt{3}\tan37^\circ\tan23^\circ=\sqrt{3}$。

6. 已知 $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{5}{3}$，$\tan\alpha\tan\beta=-\frac{1}{3}$，則 $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=$ $\underline{\quad\frac{2}{5}\quad}$。

解 $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}=\frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$

$=\frac{1+\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=\frac{1+\left(-\frac{1}{3}\right)}{\frac{5}{3}}=\frac{2}{5}$。

7. 小龍設計了一艘帆船，帆船的帆型如圖，是由四個直角三角形堆疊而成的圖形，假設 $\overline{AF}=8$，$\angle BAC=\angle CAD=15^\circ$，$\angle DAE=30^\circ$，$\angle EAF=60^\circ$，則 $\overline{BC}$ 的值為 $\underline{\quad\frac{\sqrt{3}}{2}\quad}$。



解 $\overline{BC}=\overline{AC}\sin15^\circ=\overline{AD}\cos15^\circ\sin15^\circ=\overline{AE}\cos30^\circ\cos15^\circ\sin15^\circ$

$=\overline{AF}\cos60^\circ\cos30^\circ\cos15^\circ\sin15^\circ=8\cos60^\circ\cos30^\circ\cos15^\circ\sin15^\circ$

$=4\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times(2\sin15^\circ\cos15^\circ)=\sqrt{3}\sin30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$。

8. 設 $\sin\theta=\frac{8}{5}\sin\frac{\theta}{2}$，求 $\cos\theta=$ ＿1 或 $\frac{7}{25}$＿。

解 $\sin\theta=\frac{8}{5}\sin\frac{\theta}{2}\Rightarrow 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{8}{5}\sin\frac{\theta}{2}\Rightarrow\sin\frac{\theta}{2}\times\left(2\cos\frac{\theta}{2}-\frac{8}{5}\right)=0\Rightarrow\sin\frac{\theta}{2}=0$ 或 $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{4}{5}$。

① 當 $\sin\frac{\theta}{2}=0$ 時，$\cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}=1$。

② 當 $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{4}{5}$ 時，$\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=\frac{7}{25}$。

9. 設 θ 為銳角，且 $\sqrt{1+\sin\theta}-\sqrt{1-\sin\theta}=\frac{4}{5}$，求 $\cos\theta=$ ＿$\frac{17}{25}$＿。

（提示：$1=\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}$）

解 因為 θ 為銳角 $\Rightarrow 0°<\theta<90°$，

所以 $0°<\frac{\theta}{2}<45°\Rightarrow\sin\frac{\theta}{2}<\cos\frac{\theta}{2}$，

$\sqrt{1+\sin\theta}-\sqrt{1-\sin\theta}=\frac{4}{5}$

$\Rightarrow\sqrt{\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}=\frac{4}{5}$

$\Rightarrow\left|\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right|-\left|\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right|=\frac{4}{5}$

$\Rightarrow\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)+\left(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)=\frac{4}{5}$

$\Rightarrow 2\sin\frac{\theta}{2}=\frac{4}{5}\Rightarrow\sin\frac{\theta}{2}=\frac{2}{5}$，

所以 $\cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}=1-2\times\frac{4}{25}=\frac{17}{25}$。

10. 設 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{3}$，求 $\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta}$ 的值為 $\underline{\quad\frac{1}{7}\quad}$ 。

解 $\tan\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{2\times\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{3}{4}$，

所以 $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\dfrac{\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$

$=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{7}{25}$，

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\dfrac{\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{2\times\frac{3}{4}}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{24}{25}$

$\Rightarrow\dfrac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta}=\dfrac{\frac{7}{25}}{1+\frac{24}{25}}=\dfrac{7}{49}=\dfrac{1}{7}$ 。

二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 12 題為題組

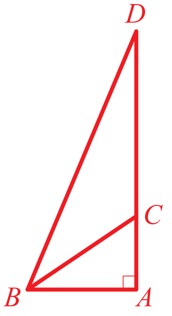
某空拍機的「跟拍模式」會對著拍攝物維持固定的水平距離與俯角來跟隨拍攝，某天小龍操作該空拍機的「跟拍模式」並設定空拍機與小龍維持 5 公尺的水平距離且俯角為 θ，但拍攝的過程中遇到上方遮蔽物的關係，所以須將空拍機更改設定為空拍機與小龍維持 5 公尺的水平距離且俯角為 $\frac{\theta}{2}$。若已知更改設定後，空拍機與小龍的直線距離恰為 6 公尺，試回答下列問題。

（ E ）**11.** $\cos\frac{\theta}{2}$ 的值應為何？（單選題，8 分）

(A)$\frac{1}{2}$　(B)$\frac{2}{3}$　(C)$\frac{3}{4}$　(D)$\frac{4}{5}$　(E)$\frac{5}{6}$。

12. 更改設定之前，空拍機與小龍的直線距離為何？（非選擇題，12 分）

解　11. 如圖，



B 為小龍的位置，

D 為空拍機一開始設定的位置，

C 為空拍機更改設定後的位置，

且 $\overline{AB}=5$ 公尺，$\overline{BC}=6$ 公尺，$\angle CBA=\frac{\theta}{2}$，$\angle ABD=\theta$，

可得 $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{5}{6}$。

12. $\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=2\times\left(\frac{5}{6}\right)^2-1=\frac{7}{18}$，

$\triangle ABD$ 中，$\cos\theta=\frac{5}{\overline{BD}}\Rightarrow\overline{BD}=\frac{5}{\cos\theta}=\frac{5}{\frac{7}{18}}=\frac{90}{7}$（公尺）。