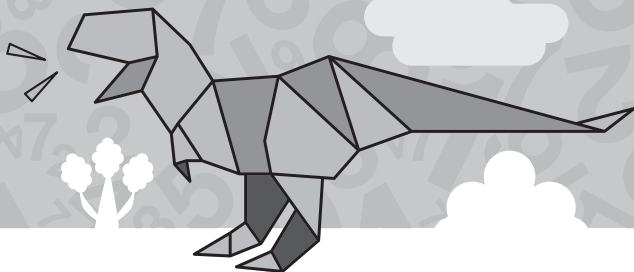


4 正餘弦的疊合



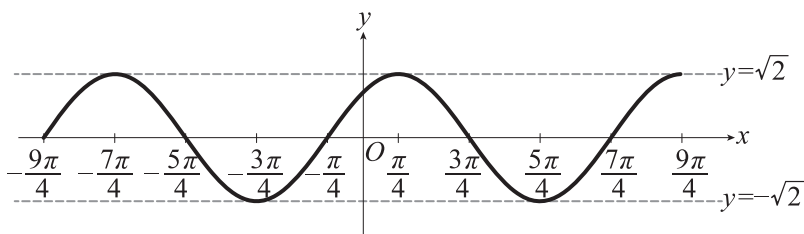
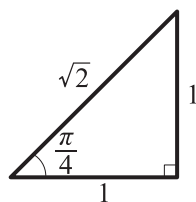
重點整理

1. 正餘弦函數的疊合：

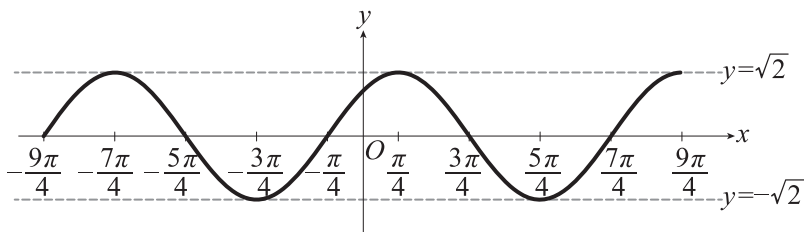
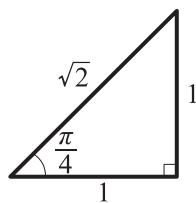
考慮兩週期相同的正弦函數 $y = \sin x$ 與餘弦函數 $y = \cos x$ ，將其加在一起的新函數 $f(x) = \sin x + \cos x$ 的圖形，可利用和差角公式及相位角改寫成新的正弦函數或餘弦函數，而求出其振幅及週期，並作出其圖形。

$$\begin{aligned}(1) \quad f(x) &= \sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\sin x \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x \times \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right),\end{aligned}$$

$f(x)$ 的振幅為 $\sqrt{2}$ ，相位角為 $\frac{\pi}{4}$ ，週期為 2π 。



$$\begin{aligned}(2) \quad f(x) &= \cos x + \sin x = \sqrt{2} \left(\cos x \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin x \times \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right),\end{aligned}$$



當 $x \in \mathbb{R}$ 時，兩者的圖形是一樣的。



觀念是非題 試判斷下列敘述對或錯。(每題 2 分，共 10 分)

() 1. $\sin 74^\circ + \sqrt{3} \cos 74^\circ = 2 \sin 134^\circ$ 。

解

() 2. 函數 $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ 的振幅為 2。

解

() 3. 設 $f(x) = 3 \sin x + 3\sqrt{3} \cos x = r \sin(x + \theta)$ ，且 $r > 0$ ， $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，則數對

$$(r, \theta) = \left(6, \frac{\pi}{3}\right)。$$

解

() 4. 已知 $a > 0$ ， $0 < \phi < 2\pi$ ，且 $-\cos \theta - \sin \theta = a \sin(\theta + \phi)$ 恆成立，則數對

$$(a, \phi) = \left(\sqrt{2}, \frac{5}{4}\pi\right)。$$

解

- () 5. 已知 $x = k$ 為 $y = \sqrt{3} \sin 2x - 3 \cos 2x$ 的一對稱軸，則 $x = k + \frac{\pi}{2}$ 亦為 $y = \sqrt{3} \sin 2x - 3 \cos 2x$ 的另一對稱軸。

解

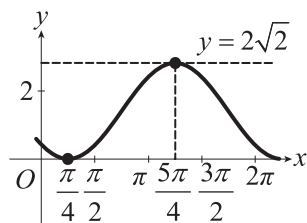
一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 下列哪一個數值最接近 $\sqrt{2}$? _____。(單選題)
- (A) $\sqrt{3} \cos 44^\circ + \sin 44^\circ$ (B) $\sqrt{3} \cos 54^\circ + \sin 54^\circ$
 (C) $\sqrt{3} \cos 64^\circ + \sin 64^\circ$ (D) $\sqrt{3} \cos 74^\circ + \sin 74^\circ$
 (E) $\sqrt{3} \cos 84^\circ + \sin 84^\circ$ 。

解

2. 已知右圖為函數 $y = a \sin x + b \cos x + c$ 圖形的一部分，
則 $(a, b, c) =$ _____。

解



3. 設 $270^\circ < \theta < 360^\circ$ ，且 $\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = 2 \sin 2024^\circ$ ，則 $\theta =$ _____。

解

4. 若 $y = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ ，且 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ，若 y 的最大值為 a ，此時的 x 為 b ，則數對
 $(a, b) =$ _____。

解

26 單元 4 正餘弦的疊合

5. 當 $x = \alpha$ 時， $y = 3\sin x - 4\cos x$ 有最大值，求數對 $(\cos \alpha, \sin \alpha) =$ _____。

解

6. 設 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ，且 $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$ ，則 $x =$ _____。

解

7. 設 a 、 b 是常數且 $a > b$ ，若 $f(x) = a\sin x + b\cos x$ 的最大值為 $\sqrt{13}$ ，且 $a + b = 5$ ，試求數對 $(a, b) =$ _____。

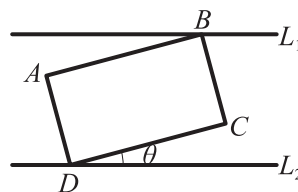
解

8. 若 $0 \leq \theta \leq \pi$ ，求 $f(\theta) = 3\cos^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta$ 的最大值為_____。

解

9. 如圖， $L_1 \parallel L_2$ 且 L_1 和 L_2 距離為 $\sqrt{2}$ ，將一矩形 $ABCD$ 斜擺在此兩平行線之間，且 $\overline{AB} = \sqrt{3}$ ， $\overline{BC} = 1$ ，使得頂點 B 在 L_1 上，頂點 D 在 L_2 上，求 \overline{CD} 和 L_2 的銳夾角 $\theta =$ _____。

(已知 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)



解

10. 設 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ，函數 $f(x) = 12\cos x - 5\sin x + 1$ ，若 $f(x)$ 在 $x = \theta$ 時有最小值 m ，

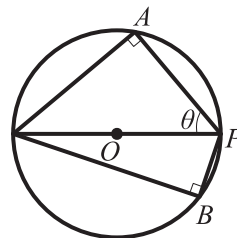
則 $m =$ _____。

解

二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 12 題為題組

如圖， P 為單位圓（圓心為 O ）上一定點，且圓上兩動點 A 、 B 分別在 P 點兩側移動，已知 $\angle APB = \frac{2}{3}\pi$ ，若 $\angle OPA = \theta$ ，試回答下列問題。



11. 試以 θ 表示 $2\overline{PA} + \overline{PB} =$ _____。（填充題，8 分）

12. 求 $2\overline{PA} + \overline{PB}$ 的最大值為多少？又此時 θ 的值為何？
（非選擇題，12 分）

解