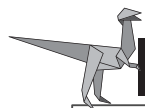
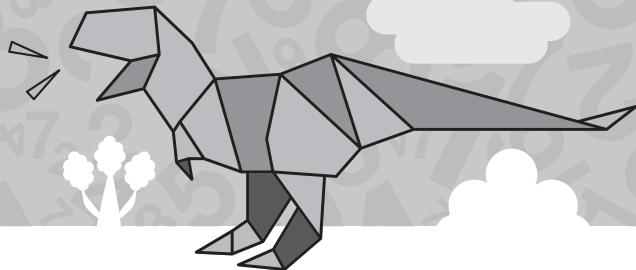


3 指數



重點整理

1. 指數定義：

設 n 為正整數， n 個 a 連乘表成 a^n ，其中 a 稱為**底數**， n 稱為**指數**，讀作 a 的 n 次方。一般而言， n 可由自然數、整數、有理數而擴充至實數。

(1) 零指數：定義 $a^0 = 1$ ，其中 $a \neq 0$ 。

(2) 負指數： $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ，其中 $a \neq 0$ 且 n 為正整數。

(3) 分數指數：① $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ，其中 $a > 0$ 且 n 為正整數。

② $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ，其中 $a > 0$ ， n 為正整數， m 為整數。

(4) 負分數指數： $a^{-\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ ，其中 $a > 0$ ， n 為正整數， m 為整數。

(5) 實數指數：

設 $a > 0$ ，利用無窮數列所靠近的數來定義無理數次方，例如： $2^{\sqrt{2}}$ 與 3^{π} 。

2. 指數運算性質：

$a > 0$ ， $b > 0$ ， m 、 n 為實數，

$$(1) a^m \times a^n = a^{m+n} \quad (2) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (3) (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(4) a^n \times b^n = (ab)^n \quad (5) \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

3. 常用公式：

$$(1) \text{因式分解：} a^{3x} + a^{-3x} = (a^x + a^{-x})(a^{2x} - a^x \times a^{-x} + a^{-2x}) = (a^x + a^{-x})(a^{2x} - 1 + a^{-2x})$$

$$(2) \text{求值公式：} a^{3x} + a^{-3x} = (a^x + a^{-x})^3 - 3 \times a^x a^{-x} \times (a^x + a^{-x}) = (a^x + a^{-x})^3 - 3 \times 1 \times (a^x + a^{-x})$$

$$(3) \text{因式分解：} a^{3x} - a^{-3x} = (a^x - a^{-x})(a^{2x} + a^x \times a^{-x} + a^{-2x}) = (a^x - a^{-x})(a^{2x} + 1 + a^{-2x})$$

$$(4) \text{求值公式：} a^{3x} - a^{-3x} = (a^x - a^{-x})^3 + 3 \times a^x a^{-x} \times (a^x - a^{-x}) = (a^x - a^{-x})^3 + 3 \times 1 \times (a^x - a^{-x})$$



觀念是非題 試判斷下列敘述對或錯。(每題 2 分，共 10 分)

() 1. $\sqrt[3]{-27} = (-27)^{\frac{1}{3}}$ 。

解

() 2. 設 $a > 0$ 且 m 、 n 為實數，則 $a^{\frac{n}{m}}$ 與 $a^{\frac{m}{n}}$ 互為倒數。

解

() 3. 已知 $10^{6.4} \approx 2.512 \times 10^6$ ，那可得知 $10^{-6.4} \approx 2.512 \times 10^{-6}$ 。

解

() 4. 半衰期為質量變成原本一半所需要的時間。設原先質量為 A ，且半衰期為 k 年，則 n 年後的質量為 $A \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{k}}$ 。

解

() 5. 3^{-1} 的值為 -3 。

解

一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 在下列各小題中，試填入適當的指數。

(1) 若 $\frac{1}{\sqrt[5]{2^6}} = \left(\frac{1}{2}\right)^a$ ，則 $a =$ _____。(2 分)

(2) 若 $\sqrt[3]{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^b$ ，則 $b =$ _____。(2 分)

(3) 若 $1 = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^c$ ，則 $c =$ _____。(3 分)

解

2. 試求 $(\sqrt{8})^{-\frac{2}{3}} \times (0.25)^{-2.5} \times \sqrt[4]{4} \times \sqrt[6]{\frac{1}{8}}$ 的值為 _____。

解

3. 化簡 $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-6} \times (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{-4} =$ _____。

解

4. 若 $9^x = 4$ ，則 $27^x + 81^{-x} =$ _____。

解

5. 設 $a^{2x} = 3$ ，求 $\frac{a^x - a^{-x}}{a^{3x} - a^{-3x}} =$ _____。

解

20 單元 3 指數

6. 設 $x > 0$ ，若 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$ ，則

(1) $x + x^{-1} =$ _____。(4 分)

(2) $x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} =$ _____。(3 分)

解

7. 已知 x 、 y 、 z 為正實數，且 $x^y = 1$ ， $y^z = \frac{1}{4}$ ， $z^x = \frac{2}{3}$ ，則 $xyz =$ _____。

解

8. 設 x 、 y 為實數，若 $2^x = 125$ ， $5^y = 64$ ，則 $xy =$ _____。

解

9. 在一個玻璃瓶中培養細菌，已知細菌的數量每隔一分鐘就會增加一倍，現在開始小明在玻璃瓶中放入一個細菌，60分鐘後玻璃瓶中細菌的數量即可達到實驗所需的狀況。若某天由於時間較急迫，只有55分鐘的時間可以等待細菌的數量達到實驗所需的狀況，則小明一開始需要在玻璃瓶中放入_____個細菌。

解

10. 心理專家以數學模式 $F(t) = a(1 - 10^{-bt})$ 來描述學生經過 t 星期的學習之後所得到的學習量（或成果），這裡的常數 a 與 b 跟學生及學習的科目相關。今力乘一星期可以熟背100個英文單字，兩星期可以熟背150個英文單字，試問：力乘三星期可以熟背_____個英文單字。

解

二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 12 題為題組

《碳 14 定年法》

自然界中碳有三種同位素：99%的碳為原子量12的碳12，1%為原子量13的碳13；原子量為14的碳14，非常微量，僅約為兆分之1.2（即 1.2×10^{-12} ）。又碳12與碳13為穩定同位素；碳14具有放射性，故又稱為放射性碳，它的半衰期約為5720年。

大氣中具放射性的碳14與正常的二氧化碳比率趨近於定值，因此經由呼吸作用動植物體內也含有相同比率的放射性碳。但動植物死亡後，體內碳14不再獲得補充，因此隨著放射衰變，碳14的比率逐漸降低。利用這個方法，我們可以檢測考古遺址中發現的獸骨、化石、貝殼、木炭的碳14含量，以斷定遺址存在的時間。

11. 近期，臺灣東部挖掘出石器，其碳14的含量約為正常含量的 $\frac{1}{1024}$ 倍，試估計此石器約

為距今_____年前的遺址。（填充題，10分）

12. 雖然碳14可以提供人類推估諸多遺址存在的年代，但地球的壽命約為45億年，許多地質年代存在於上億年前無法僅用碳14去估計，幸好礦石中有其他放射性物質，例如雲母或長石中的鉀40會衰變為氬40，其半衰期約為13億年，此為鉀—氬年代定年法。

近期，考古學家發現一生物化石，且同地質層雲母中的鉀與氬的比例約為1:3，若以雲母的衰變情況來判斷此生物化石存在的年代，試估計此化石在下列哪一時代？（非選擇題，10分）

距今時間	45-39 億年前	39-25 億年前	25-16 億年前	16-10 億年前	10-5.4 億年前
代（紀）	冥古宙	太古宙	古元古代	中元古代	新元古代