綜合習題 單元 8～10

一、單選題（每題 7 分，共 14 分）

（ E ）**1.** 下列各行列式的值何者與$\begin{vmatrix}17 & 18\\19 & 20\end{vmatrix}$不相等？

(A)$\begin{vmatrix}17 & 19\\18 & 20\end{vmatrix}$ (B)$-\begin{vmatrix}19 & 20\\17 & 18\end{vmatrix}$ (C)$-\begin{vmatrix}18 & 17\\20 & 19\end{vmatrix}$ (D)$\begin{vmatrix}20 & 19\\18 & 17\end{vmatrix}$ (E)$\frac{1}{10}\begin{vmatrix}170 & 180\\190 & 200\end{vmatrix}$。

〔搭配單元 10〕

解 (A)行列互換，其值不變。
(B)任兩行（列）交換，其值變號。
(C)任兩行（列）交換，其值變號。
(D)$\begin{vmatrix}20 & 19\\18 & 17\end{vmatrix}=20\times17-19\times18=\begin{vmatrix}17 & 18\\19 & 20\end{vmatrix}$。
(E)$\frac{1}{10}\begin{vmatrix}170 & 180\\190 & 200\end{vmatrix}=\frac{1}{10}\times10\times10\times\begin{vmatrix}17 & 18\\19 & 20\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}17 & 18\\19 & 20\end{vmatrix}\neq\begin{vmatrix}17 & 18\\19 & 20\end{vmatrix}$。
故選(E)。

（ D ）**2.** 在坐標平面上，O 為原點，設 $\overrightarrow{OA}=(3,2)$，$\overrightarrow{OB}=(1,-1)$，若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，且 $0\le x\le 2$，$0\le y\le 2$，$x+y\le 2$，試求 P 點形成區域的面積為何？

(A)$\frac{5}{2}$ (B)5 (C)$\frac{15}{2}$ (D)10 (E)$\frac{25}{2}$。 〔搭配單元 9〕

解 區域的面積$=\frac{1}{2}\times2\times2\times$(由 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 決定的平行四邊形面積)$=2\times\left|\begin{vmatrix}3 & 2\\1 & -1\end{vmatrix}\right|=10$，
故選(D)。

二、多選題（每題 10 分，共 20 分）

（ AE ）**3.** 設 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 是坐標平面上三個非零向量，則下列選項哪些是正確的？

(A) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$ (B) $\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\left(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}\right)$

(C)若 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$，則 $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$ (D)若 $\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}$，則 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 $0°$

(E)若 $2\left|\overrightarrow{a}\right|=\left|\overrightarrow{b}\right|=\left|3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\right|$，則 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為鈍角。 〔搭配單元 9〕

解 (A)○：$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$。

(B)╳：$\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)\overrightarrow{c}=t\overrightarrow{c}$，$t$ 為常數，$\overrightarrow{a}\left(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}\right)=k\overrightarrow{a}$，$k$ 為常數，

題目並沒有 $\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{c}$ 的條件。

(C)╳：反例：$\overrightarrow{a}=(1,2)$，$\overrightarrow{b}=(-2,1)$，

則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$，$\overrightarrow{c}=(-4,2)$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=0$，但 $\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{c}$。

(D)╳：夾角可能是 $180°$。

(E)○：設 $\left|\overrightarrow{a}\right|=k$，則 $\left|\overrightarrow{b}\right|=2k$ 且 $\left|3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\right|=2k$，

設 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 夾角為 $\theta\Rightarrow\left|3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\right|^2=4k^2$

$\Rightarrow 9\left|\overrightarrow{a}\right|^2+12\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+4\left|\overrightarrow{b}\right|^2=4k^2$，所以 $12\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=4k^2-9k^2-16k^2=-21k^2$

$\Rightarrow 12\times k\times 2k\times\cos\theta=-21k^2\Rightarrow\cos\theta=-\dfrac{7}{8}$，即 θ 為鈍角。

故選(A)(E)。

（ BDE ）**4.** 已知聯立方程式$\begin{cases}(2-k)x+3y=2k-4\\3x+(2-k)y=-k-1\end{cases}$有無窮多組解，今將聯立方程式的解描繪在坐標平面上，可得直線 L 。選出正確的選項。

(A) $k=-1$ (B) $k=5$ (C)點 $(2,0)$ 在直線 L 上 (D)點 $(5,7)$ 在直線 L 上

(E) $(1,-1)$ 為直線 L 上的一個法向量。〔搭配單元 10〕

解 (A)╳(B)○：因為聯立方程式有無窮多組解，所以 $\Delta=\begin{vmatrix}2-k & 3\\3 & 2-k\end{vmatrix}=0$，

展開得 $k^2-4k-5=0$，即 $(k-5)(k+1)=0$，解得 $k=5$ 或 -1。

當 $k=5$ 時，聯立方程式$\begin{cases}-3x+3y=6\\3x-3y=-6\end{cases}$有無窮多組解；

當 $k=-1$ 時，聯立方程式$\begin{cases}3x+3y=-6\\3x+3y=0\end{cases}$無解。

(C)╳(D)○(E)○：

承(A)將聯立方程式的解描繪在坐標平面上，可得直線 L ： $x-y=-2$，

點 $(2,0)$ 不在直線 L 上；點 $(5,7)$ 在直線 L 上；

且 $(1,-1)$ 為直線 L 上的一個法向量。

故選(B)(D)(E)。

三、填充題（每題 8 分，共 48 分）

5. 設 $\overrightarrow{AB}=(3,-4)$， $\overrightarrow{AC}=(-4,-3)$，若 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+t\,\overrightarrow{AC}$，且 $\overrightarrow{AD}$ 平分 $\angle BAC$，

則 $t=$ ___1___ 。〔搭配單元 8〕

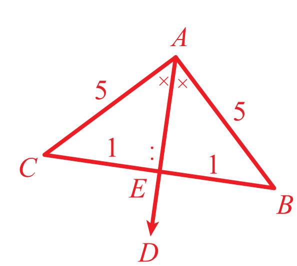
解 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$， $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$，

設直線 AD 與 $\overline{BC}$ 交於 E 點，因為 A ， E ， D 三點共線，

所以 $\overrightarrow{AE}=k\,\overrightarrow{AD}=k\,\overrightarrow{AB}+t\times k\,\overrightarrow{AC}$……①

又 $\overline{AE}$ 平分 $\angle BAC$，所以 $\overline{BE}$ ： $\overline{EC}=\overline{AB}$ ： $\overline{AC}=1$ ： 1，

即 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$……②



比較①②得 $k=\frac{1}{2}$， $t=1$。

6. 在坐標平面上，$\triangle ABC$ 內有一點 P 滿足 $\overrightarrow{AP}=(3,4)$，且 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$。若 A 、 P 連線交 $\overline{BC}$ 於 M 點，則 $\overrightarrow{AM}=$ $\underline{\left(\frac{36}{7},\frac{48}{7}\right)}$ 。（化為最簡分數）　〔搭配單元 8〕

解　因為 A 、 P 、 M 三點共線，所以 $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AP}=t\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{t}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{t}{4}\overrightarrow{AC}$，

又因為 B 、 M 、 C 三點共線，所以 $\frac{t}{3}+\frac{t}{4}=1$，解得 $t=\frac{12}{7}$。

故 $\overrightarrow{AM}=\frac{12}{7}\overrightarrow{AP}=\frac{12}{7}(3,4)=\left(\frac{36}{7},\frac{48}{7}\right)$。

7. 設二直線 L ： $3x+2ay-2=0$ ， M ： $ax+y+4=0$ 的交角 θ，滿足 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$，求 a 的值為 $\underline{\pm 2\text{或}\pm\frac{3}{4}}$ 。　〔搭配單元 9〕

解　$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow\cos\theta=\frac{\pm 2}{\sqrt{5}}$ ， $\cos\theta=\frac{3a+2a}{\sqrt{9+4a^2}\times\sqrt{a^2+1}}=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ ，

平方得 $16a^4-73a^2+36=0\Rightarrow(a^2-4)(16a^2-9)=0\Rightarrow a=\pm 2$ 或 $\pm\frac{3}{4}$ 。

8. 已知坐標平面上四點 $A(k,1)$ 、 $B(2,k+1)$ 、 $C(3,1)$ 、 $D(-1,2)$。若 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 上的正射影為 $(2,m)$，求數對 (k,m) 的值為 $\underline{\left(-\frac{1}{10},-\frac{1}{2}\right)}$ 。　〔搭配單元 9〕

解　$\overrightarrow{AB}=(2-k,k)$ 、 $\overrightarrow{CD}=(-4,1)$ ，

$\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 上的正射影為 $\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{CD}\right|^2}\right)\overrightarrow{CD}=\frac{-8+4k+k}{17}(-4,1)=(2,m)$ ，

故 $\frac{5k-8}{17}\times(-4)=2\Rightarrow k=-\frac{1}{10}$ ，代入得 $m=\frac{-\frac{1}{2}-8}{17}\times 1=-\frac{1}{2}$ 。

因此數對 $(k,m)=\left(-\frac{1}{10},-\frac{1}{2}\right)$ 。

9. 設 O 為坐標平面上的原點，P 點的坐標為 $(2,1)$。若 A、B 分別為 x 軸正向及 y 軸正向上的點，使得 $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$，則 $\overline{OA}^2+\overline{OB}^2$ 的最小值為____5____。〔搭配單元 9〕

解 設 $A(x,0)$、$B(0,y)$，則 $\overrightarrow{PA}=(x-2,-1)$、$\overrightarrow{PB}=(-2,y-1)$。

由 $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$，得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，即 $(x-2)(-2)+(-1)(y-1)=0$，整理得 $2x+y=5$。

又 $\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=x^2+y^2$，利用柯西不等式 $(x^2+y^2)(2^2+1^2)\geq(2x+y)^2\Rightarrow x^2+y^2\geq 5$。

故 $\overline{OA}^2+\overline{OB}^2$ 的最小值為 5。

10. 已知由向量 $2\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}$ 所決定的平行四邊形面積為 28，求由 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 所決定的平行四邊形面積為____4____。〔搭配單元 10〕

解 設 $\overrightarrow{u}=(a,b)$、$\overrightarrow{v}=(c,d)$，則 $2\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=(2a-c,2b-d)$，$\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}=(a+3c,b+3d)$。

由 $2\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}$ 所決定的平行四邊形面積為 $\left|\begin{vmatrix}2a-c & 2b-d\\ a+3c & b+3d\end{vmatrix}\right|=28$，

計算 $\left|\begin{vmatrix}2a-c & 2b-d\\ a+3c & b+3d\end{vmatrix}\right|$ $\times 3$

$=\left|\begin{vmatrix}2a-c & 2b-d\\ 7a & 7b\end{vmatrix}\right|=7\left|\begin{vmatrix}2a-c & 2b-d\\ a & b\end{vmatrix}\right|$ $\times(-2)$

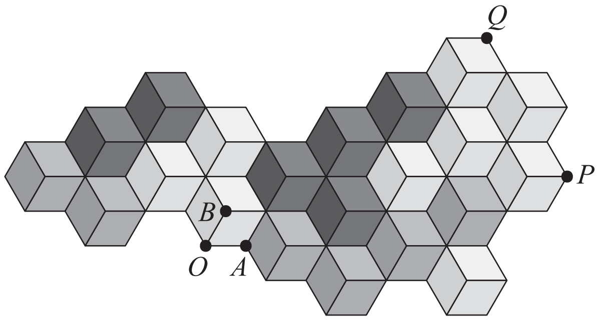
$=7\left|\begin{vmatrix}-c & -d\\ a & b\end{vmatrix}\right|=7\left|\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\right|=28$，

得 $\left|\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\right|=4$。故 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 所決定的平行四邊形面積為 4。

四、素養混合題（共 18 分）

第 11 至 14 題為題組

某品牌推出以「音樂蜂巢」為設計理念的無線揚聲器系統，具有改善室內空間聲音折射和殘響的功能，其喇叭以模組化系統運作、六邊形方塊為基礎。若某人的家中欲以該品牌的無線揚聲器系統組合於客廳的牆面，如圖所示，令每個小正六邊形的邊長為 $\frac{1}{2}$ 公尺，且 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，試回答下列問題：



（ D ）**11.** 若將 $\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$ 表示成 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的線性組合，則下列選項何者正確？（單選題，4 分）

(A) $\begin{cases}\overrightarrow{OP}=\vec{a}+\vec{b}\\ \overrightarrow{OQ}=3\vec{a}+\vec{b}\end{cases}$　(B) $\begin{cases}\overrightarrow{OP}=\vec{a}+3\vec{b}\\ \overrightarrow{OQ}=-2\vec{a}+4\vec{b}\end{cases}$　(C) $\begin{cases}\overrightarrow{OP}=8\vec{a}+2\vec{b}\\ \overrightarrow{OQ}=4\vec{a}-6\vec{b}\end{cases}$

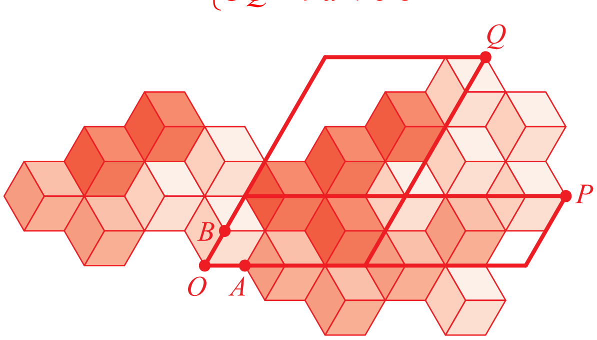
(D) $\begin{cases}\overrightarrow{OP}=8\vec{a}+2\vec{b}\\ \overrightarrow{OQ}=4\vec{a}+6\vec{b}\end{cases}$　(E) $\begin{cases}\overrightarrow{OP}=-8\vec{a}-2\vec{b}\\ \overrightarrow{OQ}=-4\vec{a}-6\vec{b}\end{cases}$。

12. 已知 $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\frac{1}{2}$（公尺），則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ $\underline{\quad\frac{1}{8}\quad}$（平方公尺）。（填充題，4 分）

13. 求 $\overline{OP}$ 與 $\overline{OQ}$ 的長度。（非選擇題，4 分）

14. 求此人客廳的牆面高度最少要幾公尺？（非選擇題，6 分）

解　11. 如圖所示，得 $\begin{cases}\overrightarrow{OP}=8\vec{a}+2\vec{b}\\ \overrightarrow{OQ}=4\vec{a}+6\vec{b}\end{cases}$，故選(D)。



12. 因為 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 的夾角為 $60°$，

由內積的定義 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos 60°=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$（平方公尺）。

13. 因為 $\overline{OP}^2=\left|\overrightarrow{OP}\right|^2=\left|8\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\right|^2=\left(8\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(8\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\right)$

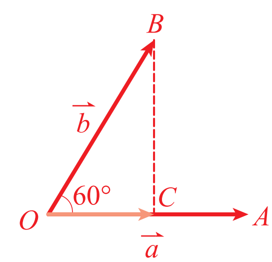
$=64\left|\overrightarrow{a}\right|^2+32\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+4\left|\overrightarrow{b}\right|^2=64\times\dfrac{1}{4}+32\times\dfrac{1}{8}+4\times\dfrac{1}{4}=21$，

$\overline{OQ}^2=\left|\overrightarrow{OQ}\right|^2=\left|4\overrightarrow{a}+6\overrightarrow{b}\right|^2=\left(4\overrightarrow{a}+6\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(4\overrightarrow{a}+6\overrightarrow{b}\right)$

$=16\left|\overrightarrow{a}\right|^2+48\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+36\left|\overrightarrow{b}\right|^2=16\times\dfrac{1}{4}+48\times\dfrac{1}{8}+36\times\dfrac{1}{4}=19$，

所以 $\overline{OP}=\sqrt{21}$ 公尺，$\overline{OQ}=\sqrt{19}$ 公尺。

14. 如圖所示，令 $\overrightarrow{OC}$ 為 $\overrightarrow{b}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 上的正射影，



則 $\overrightarrow{OC}=\left(\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right|^2}\right)\overrightarrow{a}=\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}\overrightarrow{a}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{a}$，

由向量加法的性質得 $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{b}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{a}$，

則 $\overline{CB}^2=\left|\overrightarrow{CB}\right|^2=\left|\overrightarrow{b}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{a}\right|^2=\left(\overrightarrow{b}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{a}\right)\cdot\left(\overrightarrow{b}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{a}\right)$

$=\left|\overrightarrow{b}\right|^2-\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\dfrac{1}{4}\left|\overrightarrow{a}\right|^2=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{16}$，

即 $\overline{CB}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，故客廳的牆面高度最少要 $8\overline{CB}=8\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}=2\sqrt{3}$（公尺）。