9 平面向量的運算

重點整理

1. 向量的內積：

當兩個非零向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$ 與 $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$ 的夾角為 θ（$0°\le\theta\le180°$）時，

定義 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的內積為 $|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$，以 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 表示。

(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2$。

(2) $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$。

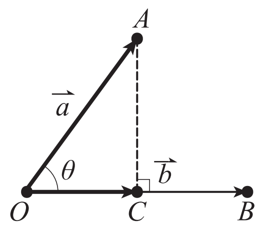
註：$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 並不是向量，而是實數。

2. 向量的平行與垂直：

設兩非零向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，且 $b_1b_2\ne0$。

(1)若 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$，則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2=0$。

(2)若 $\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}$，則 $\overrightarrow{a}=r\overrightarrow{b}\Rightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$（各分量成比例）。



3. 正射影：

若 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 為兩個非零向量，則 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影為 $\left(\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2}\right)\overrightarrow{b}$。

4. 柯西不等式：

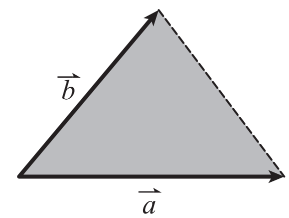
設 a_1、a_2、b_1、b_2 為實數，則 $(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2)^2$，當等號成立時，

$a_1b_2=a_2b_1$，又若 $b_1b_2\ne0$，則 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$。

5. 面積與二階行列式：

(1) 二階行列式：$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$。

(2) 設 $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$、$\overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$，則以 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 所決定的



①三角形面積為 $\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|$。

②平行四邊形面積為 $\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2} = \left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|$。

6. 兩直線的夾角：

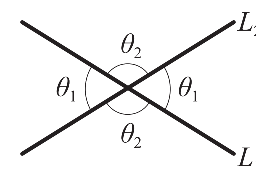
(1) 直線的法向量：向量 $\overrightarrow{n} = (a, b)$ 為直線 $L: ax + by + c = 0$ 的一個法向量。

(2) 二直線的夾角：

只要求得兩法向量的夾角，就可求得兩直線的其中一個夾角。

因為 $\theta_1 + \theta_2 = 180°$，所以只需求出其中任一個夾角，

另一個夾角就可求出。



7. 三角不等式：

(1) 代數觀點：①$|a| + |b| \geq |a + b|$，當等號成立時，$ab \geq 0$。

②$||a| - |b|| \leq |a + b|$，當等號成立時，$ab \leq 0$。

(2) 幾何觀點：①已知平面上兩非零向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$，則 $|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}| \geq |\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|$，

當等號成立時，$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 同向。

②已知平面上兩非零向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$，則 $||\overrightarrow{a}| - |\overrightarrow{b}|| \leq |\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|$，

當等號成立時，$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 反向。

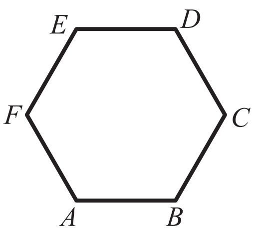
觀念是非題 試判斷下列敘述對或錯。（每題 2 分，共 10 分）

（ × ）**1.** 正△ABC 中，$\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 的夾角為 $60°$。

解 向量的夾角必須滿足始點相接，故 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 的夾角為 $120°$。

（ ○ ）**2.** 正六邊形 $ABCDEF$ 中，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}>\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}>\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$。



解 由 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AE}$、$\overrightarrow{AF}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影量

得知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 最大，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}>0$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=0$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}<0$。

（ × ）**3.** 若 $\overrightarrow{a}\neq 0$，且 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$，則 $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$。

解 反例：令 $\overrightarrow{a}=(1,0)$、$\overrightarrow{b}=(2,3)$、$\overrightarrow{c}=(2,4)$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=2$，但 $\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{c}$。

（ ○ ）**4.** 若非零向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 滿足 $\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$，則 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$。

解 由 $\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|^2=\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|^2\Rightarrow\left|\overrightarrow{a}\right|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\left|\overrightarrow{b}\right|^2=\left|\overrightarrow{a}\right|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\left|\overrightarrow{b}\right|^2$，

得 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$，因此，$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$。

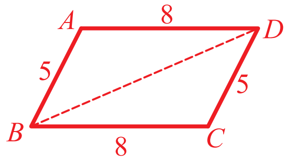
（ × ）**5.** 由向量 $\overrightarrow{a}=(2,3)$ 與 $\overrightarrow{b}=(5,1)$ 所決定的平行四邊形面積為 $\begin{vmatrix}2&3\\5&1\end{vmatrix}$。

解 由向量 $\overrightarrow{a}=(2,3)$ 與 $\overrightarrow{b}=(5,1)$ 所決定的平行四邊形面積為 $\left|\begin{vmatrix}2&3\\5&1\end{vmatrix}\right|$。

一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 平行四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=8$，則 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$ ___39___ 。

解 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=\left|\overrightarrow{AD}\right|^2-\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=8^2-5^2=39$ 。



2. 設 $\left|\overrightarrow{a}\right|=2$，$\left|\overrightarrow{b}\right|=3$，$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角 $60°$，若 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$，

則 $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=$ ___$\sqrt{7}$___ 。

解 由題意知 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=2\times3\times\cos60°=3$，

又 $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\left|\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}\right|=\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$，

所以 $\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|^2=\left|\overrightarrow{a}\right|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\left|\overrightarrow{b}\right|^2=4-6+9=7$，

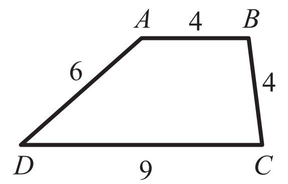
故 $\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{7}$，即 $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{7}$ 。

3. 若 $\overrightarrow{a}=(1,-3)$ 與 $\overrightarrow{b}=(k,2)$ 的夾角為 $135°$，則實數 k 的值為 ___-4或1___ 。

解 $\cos135°=\dfrac{k-6}{\sqrt{10}\times\sqrt{k^2+4}}\Rightarrow-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{k-6}{\sqrt{10}\times\sqrt{k^2+4}}$，

平方後，整理得 $k^2+3k-4=0$，解得 $k=-4$ 或 1（均成立，因為代入 $k-6<0$）。

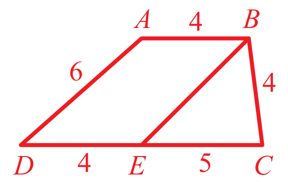
4. 如圖，在梯形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$，$\overline{AB}=\overline{BC}=4$、$\overline{CD}=9$、$\overline{AD}=6$，則 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$ $\underline{\quad\dfrac{27}{2}\quad}$。



解 過 B 點作 $\overline{AD}$ 的平行線交 $\overline{CD}$ 於 E 點，

如圖所示，得 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BE}$，

所求 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BC}=6\times4\times\dfrac{6^2+4^2-5^2}{2\times6\times4}=\dfrac{27}{2}$。



5. 若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 為兩非零向量，已知 $2\vec{a}+\vec{b}$ 與 $2\vec{a}-\vec{b}$ 垂直，且 $\vec{a}$ 與 $\vec{a}-\vec{b}$ 垂直，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 $\underline{\quad 60^\circ \quad}$。

解 令 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的夾角為 θ，

$$\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\Rightarrow\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)=0\Rightarrow4\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2=0$$

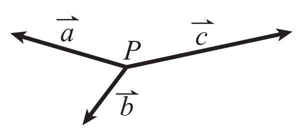
$$\Rightarrow4\left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2\Rightarrow2\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|。$$

$$\vec{a}\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\Rightarrow\vec{a}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0\Rightarrow\left|\vec{a}\right|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Rightarrow\left|\vec{a}\right|^2=\vec{a}\cdot\vec{b}。$$

因為 $\left|\vec{a}\right|^2=\vec{a}\cdot\vec{b}\Rightarrow\left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta=\left|\vec{a}\right|\times2\left|\vec{a}\right|\cos\theta\Rightarrow\left|\vec{a}\right|^2=2\left|\vec{a}\right|^2\cos\theta$

$$\Rightarrow\cos\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=60^\circ。$$

6. 如圖，三個拉力 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 同時施力於 P 點，並達到三力平衡。已知 $\left|\vec{a}\right|=5$，$\left|\vec{b}\right|=3$，且 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 60°，則 $\left|\vec{c}\right|=$ $\underline{\quad 7 \quad}$。



解 三力平衡表示 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，

則 $\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}\Rightarrow\left|\vec{c}\right|^2=\left|-\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$

$$=5^2+2\times5\times3\times\cos60^\circ+3^2=49，故\left|\vec{c}\right|=7。$$

7. 設 $\overrightarrow{a}=(x,y)$，$\overrightarrow{b}=(-2,1)$，$\overrightarrow{c}=(1,1)$，若$\left(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{c}\right)\perp\overrightarrow{b}$，且$\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}\right)//\overrightarrow{b}$，

則數對$(x,y)=$ $\underline{\left(-\dfrac{1}{5},\dfrac{8}{5}\right)}$。

解 $\left(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{c}\right)\perp\overrightarrow{b}\Rightarrow\left(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{c}\right)\cdot\overrightarrow{b}=0\Rightarrow(x+2\times1,y+2\times1)\cdot(-2,1)=0$

$\Rightarrow(x+2,y+2)\cdot(-2,1)=0\Rightarrow-2x-4+y+2=0\Rightarrow2x-y=-2\cdots\cdots①$。

$\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}\right)//\overrightarrow{b}\Rightarrow(x-1,y-1)//(-2,1)$

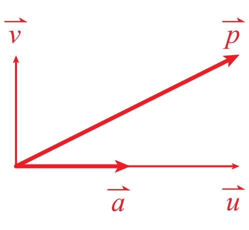
$\Rightarrow\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-1}{1}\Rightarrow x-1=-2y+2\Rightarrow x+2y=3\cdots\cdots②$。

由①、②得$\begin{cases}2x-y=-2\\x+2y=3\end{cases}\Rightarrow$數對$(x,y)=\left(-\dfrac{1}{5},\dfrac{8}{5}\right)$。

8. 設 $\overrightarrow{p}=(-11,2)$、$\overrightarrow{a}=(-4,3)$。若 $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$，其中$\overrightarrow{u}//\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{v}\perp\overrightarrow{a}$，

則$\overrightarrow{v}=$ $\underline{(-3,-4)}$。

解 依 $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$，其中 $\overrightarrow{u}//\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{v}\perp\overrightarrow{a}$，繪出如圖所示。



由圖知 $\overrightarrow{u}$ 為 $\overrightarrow{p}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 上的正射影，

即 $\overrightarrow{u}=\left(\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}}{\left|\overrightarrow{a}\right|^2}\right)\overrightarrow{a}=\dfrac{50}{25}(-4,3)=(-8,6)$。

又 $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{p}-\overrightarrow{u}=(-11,2)-(-8,6)=(-3,-4)$。

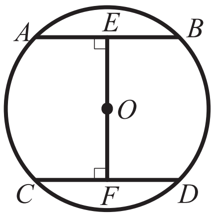
9. 設 $\overrightarrow{a}=(x,-2)$、$\overrightarrow{b}=(1,y)$，其中 x,y 為實數。若 $x^2+y^2=5$，則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的最大值為 ___5___。

解　因為 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=(x,-2)\cdot(1,y)=x-2y$，又 $x^2+y^2=5$，

所以利用柯西不等式，得 $(x^2+y^2)(1^2+(-2)^2)\geq(x-2y)^2\Rightarrow 5\times5\geq(x-2y)^2$，

即 $-5\leq x-2y\leq 5$。故 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的最大值為 5。

10. 如圖，一圓形花圃的半徑為 2 公尺，內建步道 $\overline{AB}$、$\overline{EF}$、$\overline{CD}$，其中 $\overline{AB}=\overline{CD}$，試求：$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}$ 總長的最大值為 ___$4\sqrt{5}$___ 公尺。
（請化為最簡根式）



解　設 $\overline{AE}=x$，$\overline{OE}=y$，則 $x^2+y^2=2^2$，

$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}=2x+2x+2y=4x+2y=2(2x+y)$，

利用柯西不等式：

$(x^2+y^2)(2^2+1^2)\geq(2x+y)^2$

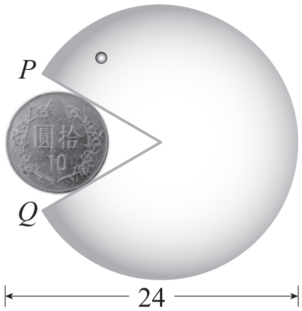
$\Rightarrow -2\sqrt{5}\leq 2x+y\leq 2\sqrt{5}\Rightarrow 4x+2y\leq 4\sqrt{5}$。

故最大值為 $4\sqrt{5}$（公尺）。

二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 13 題為題組

為了提醒同學某臺自動販賣機會「吃錢」，班聯會想在機上漆一個小圓與一個缺六分之一圓的大圓相切的圖案，如圖所示。基於空間考量，圖形的寬度要恰好 24 單位長，而且小圓必須與直線 PQ 有兩相異交點。漆大圓的油漆，每平方單位需要 6 元；漆小圓的油漆，每平方單位需要 45 元。設小圓的半徑為 x，大圓的半徑為 y。

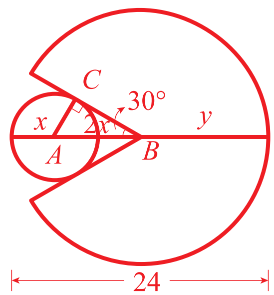


11. 已知 x、y 滿足 $ax+by=24$，求數對 $(a,b)=$ ___$(3,1)$___。（填充題，8 分）

12. 求油漆總費用（以 x、y 表示）。（非選擇題，4 分）

13. 當 x、y 為何時，油漆費用最少？（非選擇題，8 分）

解 11. 設小圓圓心 A，大圓圓心 B，C 是切點，如圖所示。



由 $\overline{AC}=x$，$\angle ABC=30°$，得 $\overline{AB}=2x$。

所以 $x+2x+y=24 \Rightarrow 3x+y=24$。

故 $(a,b)=(3,1)$。

12. 油漆總費用為 $45\times x^2\pi+6\times\frac{5}{6}y^2\pi=5\pi\left(9x^2+y^2\right)$。

13. 利用柯西不等式，得 $\left((3x)^2+y^2\right)\left(1^2+1^2\right)\geq(3x+y)^2$。

代入 $3x+y=24$，得 $\left(9x^2+y^2\right)\times 2\geq 24^2 \Rightarrow 9x^2+y^2\geq 288$。

且等號成立的條件為 $\frac{3x}{1}=\frac{y}{1}\Rightarrow 3x=y$。

將 $3x=y$ 代入 $3x+y=24$，解得 $x=4$，$y=12$。

故當小圓半徑 4，大圓半徑 12 時，油漆費用最少。