6 對數與對數律

重點整理

1. 對數的定義與性質：

設 $a>0$，$a\neq 1$，$b>0$，定義 $\log_a b$ 表示方程式 $a^x=b$ 的實數解 x，稱為以 a 為底數時 b 的對數，其中 b 稱為真數，即 $a^x=b \Leftrightarrow x=\log_a b$，由定義知 $\log_a a=1$，$\log_a 1=0$，$a^{\log_a b}=b$，$\log_a a^x=x$。

2. 常用對數的對數律：

設 $r>0$，$s>0$，則

(1) $\log rs=\log r+\log s$。

(2) $\log\dfrac{r}{s}=\log r-\log s$。

(3) $\log r^t=t\log r$（t 是實數）。

(4) $\log_a b=\dfrac{\log b}{\log a}$（換底公式）。（$a>0$，$b>0$，$a\neq 1$）

※3. 一般對數的對數律：

設 $a>0$，$a\neq 1$，$r>0$，$r\neq 1$，$s>0$，$s\neq 1$，則

(1) $\log_a rs=\log_a r+\log_a s$。

(2) $\log_a\dfrac{r}{s}=\log_a r-\log_a s$。

(3) $\log_a r^n=n\log_a r$，$\log_{a^m} r^n=\dfrac{n}{m}\log_a r$。（$m$、$n$ 是實數，$m\neq 0$）

(4) $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$，即 $\log_a b\times\log_b a=1$（倒數關係）。（$b>0$，$b\neq 1$）

(5) $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$（換底公式）。（$b>0$，$c>0$，$c\neq 1$）

註：符號※表示：非課綱的內容，教師可視情況延伸補充。

觀念是非題　試判斷下列敘述對或錯。（每題 2 分，共 10 分）

（ ✕ ）**1.** 因為 $16=(-2)^4$，所以可知 $\log_{-2}16=4$。

解 底數必須要大於 0，並且底數不等於 1。

（ ✕ ）**2.** $\log(5+8)=\log 5\times\log 8$。

解 $\log(5\times 8)=\log 5+\log 8$。

（ ○ ）**3.** $\log_3 5=\dfrac{1}{\log_5 3}$。

解 $\log_3 5=\dfrac{\log 5}{\log 3}$，$\dfrac{1}{\log_5 3}=\dfrac{1}{\dfrac{\log 3}{\log 5}}=\dfrac{\log 5}{\log 3}$，故 $\log_3 5=\dfrac{1}{\log_5 3}$。

（ ○ ）**4.** 半衰期是指放射性物質衰變至原來含量之一半所需的時間，已知一放射性物質的半衰期約為 10 年，若在西元 2000 年時測量其放射性物質含量為 a 單位，則在西元 2030 年時測量其放射性物質含量大約為 $\dfrac{1}{8}a$ 單位。

解 每經過 10 年，含量變為原來的 $\dfrac{1}{2}$ 倍，若經過 30 年，即經過 3 次半衰期，含量變為原來的 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$ 倍，則在西元 2030 年時含量大約為 $\dfrac{1}{8}a$ 單位。

（ ✕ ）**5.** 若小數 $a=10^{-140.5}$，則 a 從小數點後第 140 位開始出現不為 0 的數。

解 $a=10^{-140.5}=10^{0.5}\times 10^{-141}$，則 a 從小數點後第 141 位開始出現不為 0 的數。

一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 求下列各對數的值。

(1) $\log_4 \frac{1}{64} =$ ＿＿-3＿＿。（2 分）

(2) $\log_3 9\sqrt{3} =$ ＿＿$\frac{5}{2}$＿＿。（2 分）

(3) $5^{\log_5 7} =$ ＿＿7＿＿。（2 分）

(4) $\log_\pi 1 =$ ＿＿0＿＿。（1 分）

解 (1)因為 $\frac{1}{64} = 4^{-3}$，所以 $\log_4 \frac{1}{64} = -3$。

(2)因為 $9\sqrt{3} = 3^{\frac{5}{2}}$，所以 $\log_3 9\sqrt{3} = \frac{5}{2}$。

(3)因為 $\log_5 7$ 是方程式 $5^x = 7$ 的解，所以 $5^{\log_5 7} = 7$。

(4)因為 $1 = \pi^0$，所以 $\log_\pi 1 = 0$。

2. 計算 $\log \frac{4}{25} + \frac{1}{3}\log \frac{1}{64} - \frac{4}{3}\log \sqrt{8} =$ ＿＿-2＿＿。

解 原式 $= \log \frac{4}{25} + \log\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}} - \log\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} = \log \frac{4}{25} + \log \frac{1}{4} - \log 4$

$= \log\left(\frac{4}{25} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) = \log \frac{1}{100} = -2$。

3. 設 x 為實數，若對數 $\log_{x-1}\left(6x^2 - 5x - 4\right)$ 有意義，則 x 的範圍為 ＿＿$x > \frac{4}{3}$ 但 $x \neq 2$＿＿。

解 底數：$x - 1 > 0$ 但 $x - 1 \neq 1$，故 $x > 1$ 但 $x \neq 2$。

真數：$6x^2 - 5x - 4 > 0 \Rightarrow (3x-4)(2x+1) > 0 \Rightarrow x > \frac{4}{3}$ 或 $x < -\frac{1}{2}$。

綜合上述條件，可得 $x > \frac{4}{3}$ 但 $x \neq 2$。

4. 試求下列各式的值。

(1) $\log_3 7\times\log_7 9=$ ___2___。（3 分）

(2) $\dfrac{1}{\log_4\frac{1}{6}}+\dfrac{1}{\log_9\frac{1}{6}}=$ ___-2___。（4 分）

解 (1)原式 $=\dfrac{\log 7}{\log 3}\times\dfrac{\log 9}{\log 7}=\dfrac{\log 9}{\log 3}=\dfrac{2\log 3}{\log 3}=2$。

(2)原式 $=\dfrac{1}{\dfrac{\log\frac{1}{6}}{\log 4}}+\dfrac{1}{\dfrac{\log\frac{1}{6}}{\log 9}}=\dfrac{\log 4}{\log\frac{1}{6}}+\dfrac{\log 9}{\log\frac{1}{6}}=\dfrac{\log 36}{\log\frac{1}{6}}=\dfrac{2\log 6}{-\log 6}=-2$。

5. 將 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{100}$ 表示成小數時，從小數點後第___18___位開始出現不為 0 的數字。

（已知 $\log 2\approx 0.3010$ ， $\log 3\approx 0.4771$ ）

解 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{100}=\left(10^{\log\frac{2}{3}}\right)^{100}=10^{100\log\frac{2}{3}}=10^{100(\log 2-\log 3)}\approx 10^{-17.61}=10^{0.39}\times 10^{-18}$ ，

因此從小數點後第 18 位開始不為 0 。

6. $2^{100}\times 3^{1000}$ 是___508___位數，其最高位數字為___1___。

（第 1 格 3 分，第 2 格 4 分）（已知 $\log 2\approx 0.3010$ ， $\log 3\approx 0.4771$ ）

解 $2^{100}\times 3^{1000}=\left(10^{\log 2}\right)^{100}\times\left(10^{\log 3}\right)^{1000}=10^{100\log 2+1000\log 3}\approx 10^{507.2}$

$=10^{0.2}\times 10^{507}\approx 1.\sim\times 10^{507}$ 。

因此可知 $2^{100}\times 3^{1000}$ 為 508 位數，其最高位數字為 1 。

7. 設 $\log_2 3 = a$ ，$\log_3 7 = b$ ，則 $\log_{14} 6 =$ $\underline{\dfrac{1+a}{1+ab}}$ 。（以 a 、b 表示）

解 $a = \log_2 3 = \dfrac{\log 3}{\log 2} \Rightarrow \log 3 = a\log 2$ ，$b = \log_3 7 = \dfrac{\log 7}{\log 3}$ ，所以 $ab = \dfrac{\log 7}{\log 2} \Rightarrow \log 7 = ab\log 2$ 。

則 $\log_{14} 6 = \dfrac{\log 6}{\log 14} = \dfrac{\log 2 + \log 3}{\log 2 + \log 7} = \dfrac{\log 2 + a\log 2}{\log 2 + ab\log 2} = \dfrac{(1+a)\log 2}{(1+ab)\log 2} = \dfrac{1+a}{1+ab}$ 。

8. 設 a 、b 、c 為異於1的正實數，$abc = 1$ ，求 $\log_a b + \log_b a + \log_b c + \log_c b + \log_c a + \log_a c$ 的值為 $\underline{\quad -3 \quad}$ 。

解 $abc = 1 \Rightarrow bc = \dfrac{1}{a}$ ，$ac = \dfrac{1}{b}$ ，$ab = \dfrac{1}{c}$ ，

原式 $= (\log_a b + \log_a c) + (\log_b a + \log_b c) + (\log_c a + \log_c b)$

$= \left(\dfrac{\log b}{\log a} + \dfrac{\log c}{\log a}\right) + \left(\dfrac{\log a}{\log b} + \dfrac{\log c}{\log b}\right) + \left(\dfrac{\log a}{\log c} + \dfrac{\log b}{\log c}\right)$

$= \dfrac{\log bc}{\log a} + \dfrac{\log ac}{\log b} + \dfrac{\log ab}{\log c} = \dfrac{\log\frac{1}{a}}{\log a} + \dfrac{\log\frac{1}{b}}{\log b} + \dfrac{\log\frac{1}{c}}{\log c} = \left(\dfrac{-\log a}{\log a}\right) + \left(\dfrac{-\log b}{\log b}\right) + \left(\dfrac{-\log c}{\log c}\right)$

$= (-1) + (-1) + (-1) = -3$ 。

9. 設 a 、 b 為正實數，且 $\log a=\log_{100} b=\log_{1000}(a+b)$ ，求 a 的值為 $\underline{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ 。

解 $\log a=\dfrac{\log b}{\log 100}=\dfrac{\log(a+b)}{\log 1000}\Rightarrow \log a=\dfrac{\log b}{2}=\dfrac{\log(a+b)}{3}\Rightarrow \begin{cases}2\log a=\log b\\ 3\log a=\log(a+b)\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}a^2=b\\ a^3=(a+b)\end{cases}\Rightarrow a^3=a+a^2\Rightarrow a^3-a^2-a=0$

$\Rightarrow a(a^2-a-1)=0\Rightarrow a=0$ 或 $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ ，

又 $a>0$ ，故 $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 。

10. 聲音的強度是用每平方公尺多少瓦特（ $\mathrm{W/m^2}$ ）來衡量，一般人能感覺出聲音的最小強度為 $I_0=10^{-12}$ （ $\mathrm{W/m^2}$ ），當測得的聲音強度為 I （ $\mathrm{W/m^2}$ ）時，產生的噪音分貝數 $dB(I)=10\log\dfrac{I}{I_0}$ 。依照集會遊行法規定集會遊行的噪音不能超過 90 分貝，某廠商製造一款低噪音的氣笛，此氣笛每支只會產生 60 分貝的噪音，在不考慮其他噪音的情況下，試問集會遊行時最多能有___1000___支氣笛同時響起。

解 $dB(I)=10\log\dfrac{I}{I_0}$ ， $I_0=10^{-12}$ ，

最大噪音為 90（分貝）$=10\log\dfrac{I_{噪}}{I_0}\Rightarrow I_{噪}=10^9\times I_0=10^{-3}$ ，

一支氣笛為 60（分貝）$=10\log\dfrac{I_{笛}}{I_0}\Rightarrow I_{笛}=10^6\times I_0=10^{-6}$ ，

最多能 $\dfrac{I_{噪}}{I_{笛}}=\dfrac{10^{-3}}{10^{-6}}=10^3=1000$ 支氣笛同時響起。

二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 12 題為題組

芮氏地震規模（M）最早是在 1935 年由兩位來自美國加州理工學院的地震學家芮克特（Charles Francis Richter）和古騰堡（Beno Gutenberg）共同制定，而古騰堡進一步提出芮氏規模（M）與震源釋放的能量（E）（單位：爾格）之間的關係為 $\log E(M)=11.8+1.5M$。臺灣位於板塊交界地帶，地震活動頻繁，近幾年來災情較嚴重的地震分別是 2018 年花蓮縣近海發生芮氏規模 6.2 的地震，造成 17 人罹難，以及 2016 年高雄市美濃區發生芮氏規模 6.6 的強震，造成 117 人罹難、551 人受傷，此為 921 地震後最嚴重的地震，也是臺灣有史以來單一建築物倒塌罹難人數最多的災害。

（已知 $\log 3\approx 0.4771$、$\log 4\approx 0.6021$、$\log 5\approx 0.6990$、$\log 6\approx 0.7782$）

（ C ）**11.** 試問 2016 年高雄市美濃區發生之地震釋放的能量約為 2018 年花蓮縣近海發生之地震的幾倍？（單選題，10 分）

(A) 2 倍　(B) 3 倍　(C) 4 倍　(D) 5 倍　(E) 6 倍。

12. 美軍在 1945 年對日本廣島市投下史上第一枚原子彈，而此枚原子彈釋放 5.5×10^{21} 爾格的能量。921 地震發生於 1999 年 9 月 21 日凌晨 1 時 47 分，南投縣集集鎮發生芮氏規模 7.3 的強震，試問 921 地震釋放的能量是否多於這一枚原子彈所釋放的能量？請說明原因。（非選擇題，10 分）（已知 $10^{0.7404}\approx 5.5$）

解 11. $\log E(6.6)=11.8+1.5\times6.6\cdots\cdots①$，$\log E(6.2)=11.8+1.5\times6.2\cdots\cdots②$，

$$①-②\Rightarrow \log E(6.6)-\log E(6.2)=1.5\times0.4=0.6\Rightarrow \log\frac{E(6.6)}{E(6.2)}=0.6\approx\log 4，$$

所以 $\dfrac{E(6.6)}{E(6.2)}\approx 4$，故選(C)。

12. 設 921 地震釋放的能量為 $E(7.3)$，$\log E(7.3)=11.8+1.5\times7.3$

$$\Rightarrow E(7.3)=10^{22.75}=10^{22}\times10^{0.75}>10^{21}\times10^{0.7404}\approx10^{21}\times5.5，$$

故 921 地震釋放的能量大於這一枚原子彈所釋放的能量。