8 平面向量

重點整理

1. 向量：

(1) 向量的定義：

①若 A 、 B 為同一點時， $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}$ 為零向量。

②若 A 、 B 為相異兩點時， $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$ ，即兩向量 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{BA}$ 等長，且方向相反。

(2) 向量的坐標表示法：若 A 、 B 的坐標分別為 (a_1,a_2) 、 (b_1,b_2) ，

$$\text{則 } \overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2)\text{ ， }\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}\text{ 。}$$

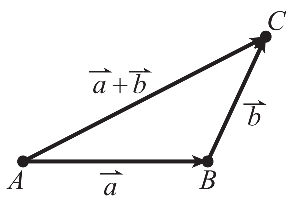
(3) 利用方向角表示向量：設 $\overrightarrow{OP}$ 與 x 軸正向所夾的有向角為 θ ，

$$\text{則 } \overrightarrow{OP}=\left(\left|\overrightarrow{OP}\right|\cos\theta,\left|\overrightarrow{OP}\right|\sin\theta\right)\text{ 。}$$

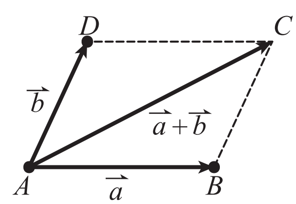
2. 向量的加減法：

(1) 向量加法的定義：

①三角形法：



②平行四邊形法：



(2) 向量加法的坐標表示法：若 $\vec{a}=(a_1,a_2)$ 、 $\vec{b}=(b_1,b_2)$ ，則

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2)\text{ 。}$$

(3) 向量減法的定義：「減去一個向量就等於加上這個向量的反向量」，

$$\text{即 } \vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)\text{ 。}$$

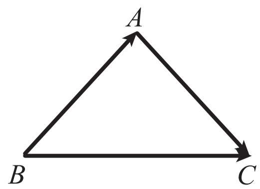
(4) 向量減法的坐標表示法： 若 $\vec{a}=(a_1,a_2)$ 、 $\vec{b}=(b_1,b_2)$ ，則

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2)\text{ 。}$$

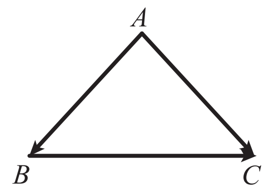
3. 向量的分解：

設 A、B、C 為任意三點，向量 $\overrightarrow{BC}$ 可分解為兩向量相加或相減。

(1) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$。



(2) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$。



4. 向量的係數積：

(1) 定義：給定實數 r 及向量 $\overrightarrow{a}$，實數 r 與向量 $\overrightarrow{a}$ 的係數積是一個向量，記作 $r\overrightarrow{a}$。

① 若 $\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$，則 $r\overrightarrow{a}$ 的方向與長度規定如下：

當 $r>0$ 時，$r\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{a}$ 方向相同，且長度為 $r\left|\overrightarrow{a}\right|$。

當 $r<0$ 時，$r\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{a}$ 方向相反，且長度為 $|r|\left|\overrightarrow{a}\right|$。

當 $r=0$ 時，$r\overrightarrow{a}$ 為零向量，即 $r\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$。

② 若 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$，則 $r\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$。

(2) 坐標表示法：若 r 為實數，且 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，則 $r\overrightarrow{a}=r(a_1,a_2)=(ra_1,ra_2)$。

5. 向量的平行：

(1) 定義：當兩個非零向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 滿足 $\overrightarrow{a}=r\overrightarrow{b}$（$r$ 為實數）時，稱 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 平行，記作 $\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}$。

(2) 設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$ 為兩個非零向量，當 $b_1b_2\neq0$ 時，常將上述條件改寫為比例式 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$。

6. 向量的線性組合：

若 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 為平面上兩個不平行的非零向量，則平面上的每一個向量 $\overrightarrow{OP}$ 都可以唯一表示成 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，這種形式的向量稱為 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 的線性組合。

7. 分點公式：

(1) 向量的分點公式：設 P 為線段 AB 的內分點，若 O 不在直線 AB 上，

且 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，則 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$。

(2) 坐標的分點公式：設 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 為坐標平面上的兩點，若點 $P(x,y)$ 在線段 AB 上，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，

則 P 點坐標為 $\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$。

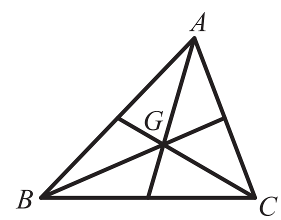
(3) 三點共線的條件：A、B、P 三點共線 $\Leftrightarrow$ 存在 α、β，且 $\alpha+\beta=1$，

使得 $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$。

8. 重心公式：

G 為 $\triangle ABC$ 之重心，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$

且 O 為平面上任一點，則



(1) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$。

(2) $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$。

(3) $G\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$。

觀念是非題　試判斷下列敘述對或錯。（每題 2 分，共 10 分）

(　　) **1.** 已知 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$，則 $\overrightarrow{AD}$ 會平分 $\angle BAC$。

解

(　　) **2.** 已知 $\overrightarrow{OA}=\frac{5}{3}\overrightarrow{OP}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$，則 P 點在線段 $\overline{AB}$ 上。

解

(　　) **3.** 有兩非零向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，若 $\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}$，則 $a_1b_1=a_2b_2$。

解

(　　) **4.** 若 P 點在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}$：$\overline{BP}=2$：5，則 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$。

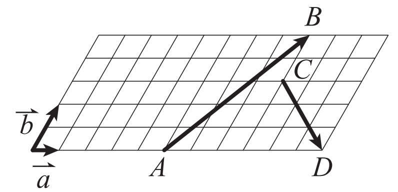
解

(　　) **5.** 若 $A(1,2)$、$B(4,8)$，且 $P(x,y)$ 在 $\overline{AB}$ 上滿足 $\overline{AP}$：$\overline{BP}=2$：3，則 P 點的坐標為 $\left(\frac{3\times1+2\times4}{5},\frac{3\times2+2\times8}{5}\right)$。

解

一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 如圖是由二組兩兩平行的直線所構成，且每一小格都是菱形，選出正確的選項＿＿＿＿＿＿。（單選題）



(A) $\overrightarrow{AB}=3\vec{a}+5\vec{b}$　(B) $\overrightarrow{CD}=3\vec{a}-3\vec{b}$

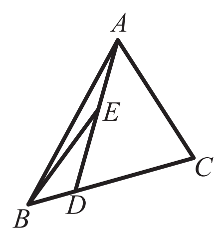
(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=8\vec{a}$　(D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=-4\vec{b}$

(E) $3\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{CD}=24\vec{a}$ 。

解

2. 如圖，已知 $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ 且 $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ ，

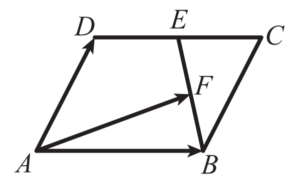
則 $\triangle ABE$ 面積 ：$\triangle ABC$ 面積＝＿＿＿＿＿＿。



解

3. 平行四邊形 $ABCD$ 中，E 、 F 分別為 $\overline{CD}$ 、 $\overline{BE}$ 的中點，

設 $\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$ ，則數對 $(x,y)=$____________。



解

4. 已知 $\overrightarrow{a}=(2,-4)$ ， $\overrightarrow{b}=(-3,1)$ ，若 $\overrightarrow{\mu}+2\overrightarrow{v}=-2\overrightarrow{a}$ ， $2\overrightarrow{\mu}-\overrightarrow{v}=\overrightarrow{b}$ ，

則 $\overrightarrow{\mu}+\overrightarrow{v}=$____________。

解

5. 已知平面上三點 $A(-5,1)$ 、 $B(1,1)$ 、 $C(7,3)$ ，若 D 點滿足 $\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$ ，

則 D 點的坐標為____________。

解

6. 設 $\overrightarrow{AB}=(1,3)$，$\overrightarrow{AC}=(-3x,x)$，$x>0$，若$\triangle ABC$的周長為$6\sqrt{10}$，則$x=$____________。

解

7. $\triangle ABC$中，若$A(3,-1)$、$B(9,8)$、$C(-3,3)$，$\angle A$之內角平分線與$\overline{BC}$交於D點，則D的坐標為____________。

解

8. 梯形$ABCD$中，$A(2,5)$、$B(-2,-3)$、$C(6,3)$，若$\overrightarrow{AD}//\overrightarrow{BC}$，且$\left|\overrightarrow{AD}\right|=15$，求$D$的坐標為____________。

解

9. 設 $A(6,0)$、$B(4,6)$、$O(0,0)$，則滿足 $\overrightarrow{OQ}=\alpha\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，$-1\le\alpha\le1$ 且 α 為實數的所有點 Q 所成線段長為____________。

解

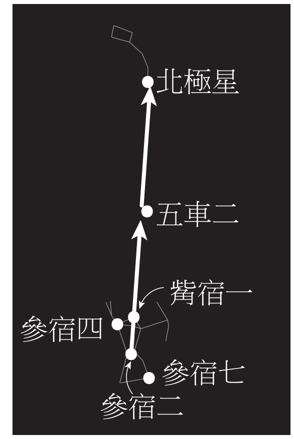
10. 已知 $O(0,0)$，$A(0,4)$，$B(2,-1)$，若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，$0\le x\le2$，$-2\le y\le1$，則 P 點所形成的圖形區域面積為____________。

解

二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 12 題為題組

小龍在天文網站上看到利用獵戶座尋找北極星的方法：「從獵戶座腰帶三星中的參宿二往頭部的觜宿一（觜發音同嘴）延伸，即可找到北極星的位置，其中參宿二與北極星的距離為參宿二與觜宿一距離的 7 倍，另外參宿二往北極星的延伸線上，會通過御夫座的五車二，其中北極星的位置在參宿二到五車二的 2 倍距離處。」今小龍將星空想成一坐標平面，其中參宿二坐標為 $(12,17)$ 、觜宿一坐標為 $(7,23)$ 。



（　　）**11.** 依上述資訊，北極星的坐標為何？（單選題，8 分）
(A) $(-25,60)$ (B) $(-28,65)$ (C) $(-23,65)$
(D) $(-28,59)$ (E) $(-23,59)$ 。

12. 已知在北半球觀測星空時，星空會以北極星為中心旋轉。若經過一段時間後，觜宿一的坐標為 $(13,89)$ ，求五車二的坐標。（非選擇題，12 分）

解