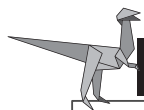
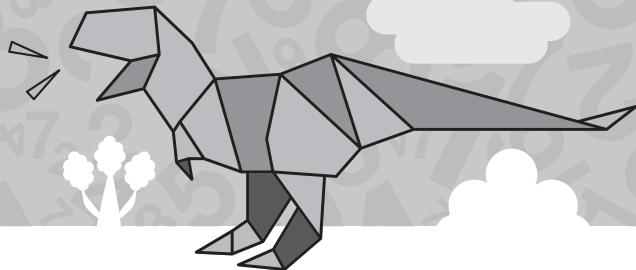


7 對數函數



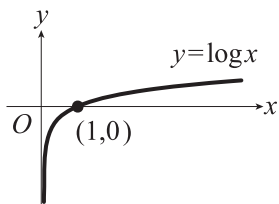
重點整理

1. 對數函數：

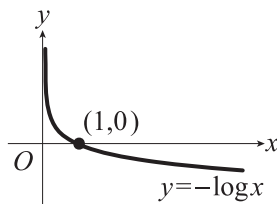
$y = f(x) = \log x$ 稱為以 10 為底數的對數函數，又簡稱常用對數函數，定義域（ x 的取值範圍）為所有正實數，值域（ y 的取值範圍）為所有實數。

2. 常用對數函數的圖形：

$$y = \log x$$



$$y = -\log x$$



3. 對數函數圖形的性質：

- (1) 圖形恆在 y 軸的右方，且恆通過點 $(1, 0)$ 。
- (2) $y = \log x$ 的圖形遞增； $y = -\log x$ 的圖形遞減。
- (3) 平行 x 軸的水平線與 $y = \log x$ 和 $y = -\log x$ 的圖形恰交於一點。
- (4) 圖形逐漸往 y 軸靠近（ $y = \log x$ 的圖形往 y 軸負向靠近； $y = -\log x$ 的圖形往 y 軸正向靠近），但恆不相交。
- (5) $y = \log x$ 的圖形凹口向下，即圖形上相異兩點的連線段必在函數圖形的下方。
 $y = -\log x$ 的圖形凹口向上，即圖形上相異兩點的連線段必在函數圖形的上方。



觀念是非題 試判斷下列敘述對或錯。(每題 2 分，共 10 分)

- () 1. 已知 $x > 0$ ，則 $y = \log x$ 之圖形的凹口向上。

解

- () 2. 已知 t 為實數，則 $y = t \times \log x$ 的圖形必為嚴格遞增函數。

解

- () 3. 已知 a 、 t 均為實數，則 $y = t \times \log x$ 與鉛直線 $x = a$ 必有交點。

解

- () 4. 指數函數 $y = 10^x$ 與常用對數函數 $y = \log x$ 的圖形對稱於直線 $y = x$ 。

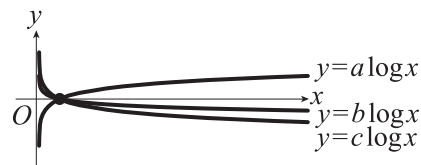
解

- () 5. 方程式 $x - 1 = |\log_2 x|$ 的相異實數解有 2 個。

解

一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 函數 $y = a \log x$ 、 $y = b \log x$ 、 $y = c \log x$ 的圖形如右圖所示，試比較 a 、 b 、 c 三數的大小關係為：
_____。(由大到小)



解

2. 解方程式 $\log_2(3x+1) - \log_2(x-2) = 2$ ，可得 $x =$ _____。

解

3. 解方程式 $\log_2 x - \log_x 4 + 1 = 0$ ，可得 $x =$ _____。

解

4. 設直線 $L: x = k$ 分別與 $y = \log x$ 、 $y = \log(x+9)$ 的圖形交於 A 、 B 兩點，已知 $\overline{AB} = \frac{1}{2}$ ，
則 $k =$ _____。

解

5. 試比較 $a = \log_2 5$ 、 $b = \log_{\frac{1}{2}} 7$ 、 $c = \log_4 \sqrt{6}$ 三數的大小關係為_____。
(由大到小)

解

6. 設 a 、 b 、 c 為正數，且 $2^a = -\log_2 a$ ， $\left(\frac{1}{2}\right)^b = \log_2 b$ ， $\left(\frac{1}{2}\right)^c = -\log_2 c$ ，試比較 a 、 b 、 c 三數的大小關係為_____。(由大到小)

解

7. 解不等式 $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} (x-3) > -2$ ，可得 x 的範圍為_____。

解

8. 解不等式 $\log x - 6\log_x 10 > 1$ ，可得 x 的範圍為_____。

解

9. 已知 $\frac{1}{10} \leq x \leq 10$ ，求 $y = \log x^4 - (\log x)^2$ 的最大值為_____。

解

10. 在坐標平面上， Γ 是邊長為 4 的正方形，其中心位在點 $(4,1)$ ，且各邊與坐標軸平行。
 已知函數 $y = t \times \log x$ 的圖形與 Γ 相交，其中 t 為實數，若 t 值的最大可能範圍為 $\alpha \leq t \leq \beta$ ，則 $\frac{\beta}{\alpha} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解

二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 12 題為題組

- () 11. 小龍將 10 萬元存在銀行，並以年利率 2%，每半年複利一次來計息，試求一年後的金額為？（單選題，10 分）
 (A) 101000 元 (B) 102000 元 (C) 102010 元 (D) 104040 元。
12. 小龍工作 3 年後，好不容易存到人生的第一桶金 100 萬元，打算拿出一半的錢 50 萬元來進行投資，完成早日買房子的夢想。若他的投資眼光不錯，每個月結算皆有 3% 的獲利，而買房子需要 200 萬元的頭期款，小龍想拿投資的 50 萬元以及獲利來付頭期款，則他至少要幾個月後才有足夠的頭期款買房子？（非選擇題，10 分）
 （已知 $\log 1.03 \approx 0.01284$ 、 $\log 4 \approx 0.60206$ ）

解