11 多項式不等式

重點整理

1. 多項式不等式：

形如 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 為實係數 n 次多項式，

則 $f(x)>0$ 、 $f(x)\geq 0$ 、 $f(x)<0$ 、 $f(x)\leq 0$ 都稱為多項式不等式

(1) 當領導係數 $a_n>0$，則 $y=f(x)$ 的最右邊為正；

當領導係數 $a_n<0$，則 $y=f(x)$ 的最右邊為負。

(2) $f(x)=0$ 解的幾何意義為 $y=f(x)$ 圖形與 x 軸交點的 x 坐標。

$f(x)>0$ 解的幾何意義為 $y=f(x)$ 圖形在 x 軸上方部分的所有 x 的範圍。

2. 一次與二次不等式：

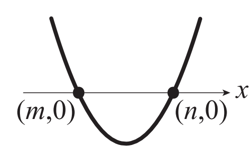
(1) 一次不等式：只要利用移項即可解出。

(2) 二次不等式：二次函數 $y=f(x)=ax^2+bx+c$，利用 $D=b^2-4ac$ 來檢視，

① $D=b^2-4ac>0$ 時，$f(x)=ax^2+bx+c=a(x-m)(x-n)$，其中 $a>0$ 且 $m<n$。

I. $f(x)=a(x-m)(x-n)\geq 0$ 的解為 $x\geq n$ 或 $x\leq m$。

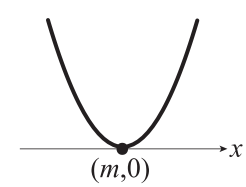
II. $f(x)=a(x-m)(x-n)<0$ 的解為 $m<x<n$。



② $D=b^2-4ac=0$ 時，$f(x)=ax^2+bx+c=a(x-m)^2$，其中 $a>0$。

I. $f(x)=a(x-m)^2>0$ 的解為 x 為任意實數解，但 $x\neq m$。

II. $f(x)=a(x-m)^2\leq 0$ 的解為 $x=m$。



③ $D=b^2-4ac<0$ 表 $y=f(x)$ 與 x 軸不相交。

I. 當 $a>0$，$f(x)=ax^2+bx+c>0$ 的解為任意實數解。

II. 當 $a<0$，$f(x)=ax^2+bx+c>0$ 的解為無實數解。

3. 高次不等式：

(1) 領導係數為正，最右邊的為正，奇數次方的左右變號，偶數次方的左右不變。

(2) 恆正對不等式不影響，可消去。

觀念是非題 試判斷下列敘述對或錯。(每題 2 分，共 10 分)

(○) **1.** 已知不等式 $3x-2>ax+3$ 的解為 $x>1$，則 $a=-2$。

解 $3x-2>ax+3 \Rightarrow (3-a)x>5 \Rightarrow x>\dfrac{5}{3-a}$（因為不能變號，$3-a>0 \Rightarrow a<3$），

故 $\dfrac{5}{3-a}=1 \Rightarrow a=-2$。

(×) **2.** 已知 $x^2-4x+4\le 0$，則 x 無實數解。

解 $x^2-4x+4=(x-2)^2\le 0 \Rightarrow x=2$。

(○) **3.** $y=f(x)=2x^2+3x+4$ 的圖形恆在 $y=g(x)=x^2+2x-1$ 圖形的上方。

解 $f(x)-g(x)=(2x^2+3x+4)-(x^2+2x-1)=x^2+x+5$ 恆大於 0，

故 $y=f(x)$ 在 $y=g(x)$ 的上方。

(×) **4.** 已知三次實係數函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，則 $f(x)>0$ 可能恆成立。

解 三次函數的圖形可左下右上或左上右下，不可能恆在 x 軸上方。

(○) **5.** 不等式 $(x^2-1)(x-2)^4\ge 0$ 的解與不等式 $(x-1)(x+1)^2(x^3+1)\ge 0$ 的解相同。

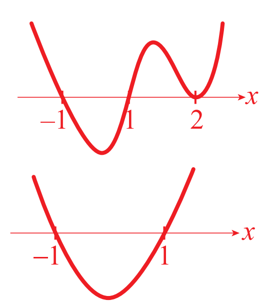
解 $(x^2-1)(x-2)^4\ge 0$

$\Rightarrow (x-1)(x+1)(x-2)^4\ge 0$ 的解為 $x\le -1$ 或 $x\ge 1$，

$(x-1)(x+1)^2(x^3+1)\ge 0$

$\Rightarrow (x-1)(x+1)^3(x^2-x+1)\ge 0$

$\Rightarrow (x-1)(x+1)^3\ge 0$ 的解為 $x\le -1$ 或 $x\ge 1$。



一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

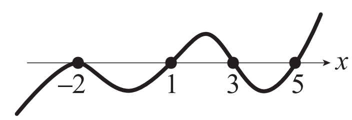
1. 已知 x 為實數，同時滿足一元二次不等式 $6x^2+x-2\le 0$ 與 $4x^2+4x+1\le 0$ 的 x 範圍為 $\underline{\quad x=-\frac{1}{2}\quad}$。

解 $6x^2+x-2\le 0\Rightarrow(3x+2)(2x-1)\le 0\Rightarrow -\frac{2}{3}\le x\le\frac{1}{2}$，

且 $4x^2+4x+1\le 0\Rightarrow(2x+1)^2\le 0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$，

故 $x=-\frac{1}{2}$。

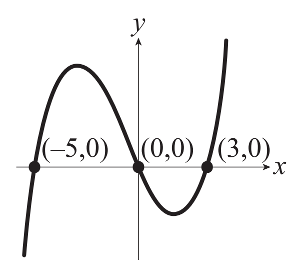
2. 若 $y=f(x)$ 的函數圖形如圖所示，已知 $\deg f(x)=5$，$f(x)\ge 0$ 的解為 $\underline{x\ge 5\text{ 或 }1\le x\le 3\text{ 或 }x=-2}$。



解 $f(x)\ge 0$ 表 $y=f(x)$ 的圖形在 x 軸上或 x 軸上方部分，

故解為 $x\ge 5$ 或 $1\le x\le 3$ 或 $x=-2$。

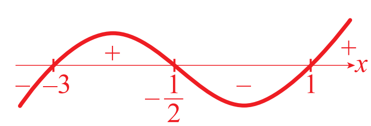
3. 已知三次函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 的圖形如圖所示，則滿足 $f(2x+1)>0$ 的最小整數解為 $\underline{\quad -2\quad}$。



解 由圖知 $f(x)$ 過 $(0,0)$、$(3,0)$、$(-5,0)$，所以 $f(x)=x(x-3)(x+5)$，

$f(2x+1)=(2x-2)(2x+1)(2x+6)>0\Rightarrow(x-1)(2x+1)(x+3)>0$

$\Rightarrow x>1$ 或 $-3<x<-\frac{1}{2}$，故滿足的最小整數解為 -2。



4. 對任意實數 x，二次函數 $f(x)=x^2+ax+a$ 的圖形恆在 $y=2x-13$ 的上方，則 a 的範圍為 $\underline{\quad -4<a<12\quad}$。

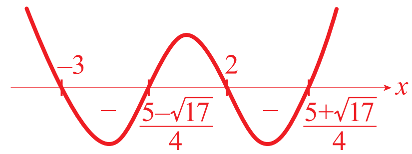
解 $f(x)=x^2+ax+a$ 恆在 $y=2x-13$ 的上方，

則 $x^2+ax+a>2x-13\Rightarrow x^2+(a-2)x+(a+13)>0$ 恆成立，

故判別式 $<0\Rightarrow(a-2)^2-4\times(a+13)<0\Rightarrow a^2-8a-48<0$

$\Rightarrow(a-12)(a+4)<0$，故 $-4<a<12$。

5. 解多項不等式 $(x-2)(x+3)(2x^2-5x+1)(3x^2+2x+1)<0$，則 x 的範圍為 $-3<x<\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$ 或 $2<x<\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}$。



解 $2x^2-5x+1=0$，利用公式解 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{4}$；

$3x^2+2x+1=0$，$D=2^2-4\times3\times1<0$ 恆正可消去，

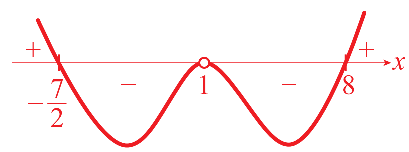
解由小到大：-3，$\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$，2，$\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}$。

因為小於 0 表在 x 軸下方即為所求，所以 $-3<x<\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$ 或 $2<x<\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}$。

6. 不等式 $x^2(2x+7)(x-8)<(2x-1)(2x+7)(x-8)$ 共有 10 個整數解。

解 $x^2(2x+7)(x-8)-(2x-1)(2x+7)(x-8)<0\Rightarrow(2x+7)(x-8)(x^2-2x+1)<0$

$\Rightarrow(2x+7)(x-8)(x-1)^2<0\Rightarrow-\dfrac{7}{2}<x<8$ 且 $x\neq1$



$\Rightarrow$ 整數解 $x=-3,-2,-1,0,2,3,4,5,6,7$，

所以共有 10 個整數解。

7. 設不等式 $ax^2+bx+c>0$ 之解為 $-3<x<2$，則不等式 $ax^2+4bx+2c\geq0$ 的解為 $n\leq x\leq m$，求 $m+n=$ -4。

解 由解反推 $\Rightarrow-3<x<2\Rightarrow(x-2)(x+3)<0\Rightarrow x^2+x-6<0\Rightarrow-x^2-x+6>0$

與 $ax^2+bx+c>0$ 同義，取 $a=-k$，$b=-k$，$c=6k$，其中 $k>0$。

$ax^2+4bx+2c\geq0\Rightarrow-kx^2-4kx+12k\geq0$，

同除以 $(-k)$ 得 $x^2+4x-12\leq0\Rightarrow(x+6)(x-2)\leq0\Rightarrow-6\leq x\leq2$，

故 $n=-6$，$m=2$，則 $m+n=-4$。

8. 已知不等式$(x^2+x+2)(x^2+ax+b)\le 0$的解為$-3\le x\le 1$，求不等式$(x^2-x-6)(x^2-ax+b)<0$的解為 $\underline{-2<x<-1}$ 。

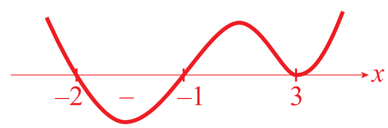
解 $(x^2+x+2)(x^2+ax+b)\le 0$之解為$-3\le x\le 1$，

又x^2+x+2恆正（因為$D=1^2-4\times1\times2<0$），所以$-3\le x\le 1$為$x^2+ax+b\le 0$之解，

由解反推得$(x+3)(x-1)\le 0\Rightarrow x^2+2x-3\le 0$，故$a=2$，$b=-3$。

$a=2$，$b=-3$代入得$(x^2-x-6)(x^2-2x-3)<0\Rightarrow(x-3)(x+2)(x-3)(x+1)<0$

$\Rightarrow(x+2)(x+1)(x-3)^2<0$，



由圖可知$-2<x<-1$。

9. 明星中學一年級共有1000位學生投票選舉，今有10位候選人欲選出5位學生代表，試求候選人至少要獲得 $\underline{167}$ 票才能篤定當選。

解 令當選票數x張，剩下全部票給第6人，要小於當選票數，

$1000-5x<x\Rightarrow 1000<6x\Rightarrow x>\dfrac{1000}{6}=166.\times\times$，

所以至少有167張才穩定當選。

10. 設$A(-2)$、$B(3)$為數線上兩點（括號內代表坐標）。已知P點是數線上的動點，其坐標為整數，且滿足$\overline{PA}\times\overline{PB}<6$，試求動點$P$的個數有 $\underline{4}$ 個。

解 設$P(x)$，則$\overline{PA}=|x+2|$，$\overline{PB}=|x-3|$，

又$\overline{PA}\times\overline{PB}=|x+2|\times|x-3|<6\Rightarrow|(x+2)(x-3)|<6\Rightarrow-6<(x+2)(x-3)<6$。

先處理$(x+2)(x-3)<6\Rightarrow x^2-x-6<6\Rightarrow x^2-x-12<0\Rightarrow(x-4)(x+3)<0$，

所以$-3<x<4$……①

再處理$-6<(x+2)(x-3)\Rightarrow x^2-x-6>-6\Rightarrow x^2-x>0\Rightarrow x(x-1)>0$，

所以$x>1$或$x<0$……②

由①②知$-3<x<0$或$1<x<4$，又x為整數，故有4個。

二、素養混合題（共 20 分）

<u>第 11 至 13 題為題組</u>

有一塊鐵片，長 6 公尺，寬 4 公尺，今在四角各截去一個相同的「小正方形」，然後摺成一個無蓋的長方體容器。

（ C ）**11.** 設邊長為 x 公尺，滿足一個無蓋的長方體容器，則邊長 x 有何範圍限制？（單選題，4 分）

(A) $0\le x\le 2$　(B) $0<x<1$　(C) $0<x<2$　(D) $0<x<3$　(E) $2<x<3$。

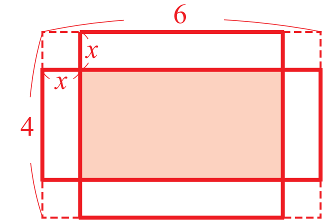
12. 已知此無蓋的長方體容器的體積不小於 8 立方公尺（鐵片厚度不計），則邊長 x 的範圍為 <u>$2-\sqrt{2}\le x\le 1$</u>。（已知邊長 $x=1$ 可以滿足條件）（填充題，8 分）

13. 已知長方體的體積不小於 8 立方公尺，則截去四個小正方形後剩餘鐵片面積最小為多少平方公尺？（非選擇題，8 分）

解 11. 底面長方形的長 $=6-2x>0\Rightarrow x<3$，

寬 $=4-2x>0\Rightarrow x<2$，且 $x>0$，

故 $0<x<2$。故選(C)。



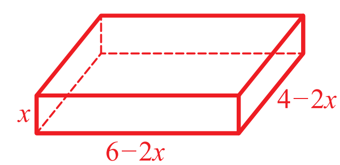
12. 體積 $(6-2x)(4-2x)(x)\ge 8$ 兩邊同除以 4 得 $(3-x)(2-x)(x)\ge 2$

$\Rightarrow x^3-5x^2+6x-2\ge 0$，又有 $(x-1)$ 的因式

$\Rightarrow (x-1)(x^2-4x+2)\ge 0$

$\Rightarrow (x-1)\left(x-\left(2+\sqrt{2}\right)\right)\left(x-\left(2-\sqrt{2}\right)\right)\ge 0$

$\Rightarrow x\ge 2+\sqrt{2}$ 或 $2-\sqrt{2}\le x\le 1$，由上題可知 $0<x<2$，得 $2-\sqrt{2}\le x\le 1$。



13. 剩餘的面積 $=(6-2x)(4-2x)+2\times x\times(6-2x)+2\times x\times(4-2x)$

$=4x^2-20x+24-4x^2+12x-4x^2+8x=-4x^2+24$，

在 $2-\sqrt{2}\le x\le 1$ 的限制範圍下，當 $x=1$ 時，有最小值 $=-4+24=20$（平方公尺）。