1 實數

重點整理

1. 有理數：

(1) 定義：能寫成分數形式$\frac{q}{p}$的數稱為有理數（其中 p 、 q 為整數，且 $p\neq 0$ ），有理數系以ℚ表示。

(2) 稠密性： a 、 b 為相異的有理數且 $a<b$ ，必存在 c 為有理數，使得 $a<c<b$ ，即任兩個有理數之間，必存在其他的有理數。

(3) 封閉性：有理數的四則運算具有封閉性。

(4) 循環小數化為分數：① $0.\overline{ab}=\frac{ab}{99}$ ② $0.a\overline{bc}=\frac{abc-a}{990}$ ③ $0.\overline{9}=1$ 。

(5) 有理數化為小數：（其中有理數的分子與分母互質）

① 有理數的分母除了 2 或 5 之外，沒有其他的質因數，則可化為有限小數。

② 有理數的分母除了 2 或 5 之外，還有其他的質因數，則可化為循環小數。

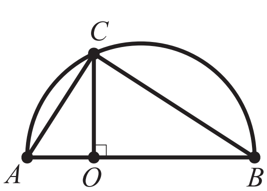
2. 無理數：

(1) 定義：不循環的無限小數稱為無理數。

(2) 無理數的四則運算不具有封閉性。

(3) a 、 b 、 c 、 d 為有理數， $\sqrt{k}$ 為無理數，若 $a+b\sqrt{k}=c+d\sqrt{k}$ ，則 $a=c$ 且 $b=d$ 。

(4) 母子相似性質：取 $\overline{OA}=a$ ， $\overline{OB}=b$ ，以 $\overline{AB}$ 為直徑作一個半圓，則 $\overline{OC}=\sqrt{ab}$ 。



(5) 雙重根號化簡：當 $a\geq b\geq 0$ ， $\sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ 。

3. 實數：

(1) 有理數與無理數統稱為實數，其所對應的點填滿了整條數線。

(2) 實數比大小： a 、 b 為實數，若 $a-b>0$ ，則 $a>b$ 。

(3) 算幾不等式：若 $a>0$ ， $b>0$ ，則 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ ，當「 $=$ 」成立時，則 $a=b$ 。

4. 乘法公式：

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；求值公式：$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$。

(2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$；求值公式：$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$。

(3) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$。

(4) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$。

(5) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$。

(6) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$。

(7) 求值公式：$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$；
因式分解：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$。

(8) 求值公式：$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$；
因式分解：$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$。

觀念是非題 試判斷下列敘述對或錯。(每題 2 分，共 10 分)

(○) **1.** 在兩個有理數$\frac{1}{5}$與$\frac{1}{3}$之間，由有理數的稠密性知必可找出「3141592653」個有理數。

解 任兩個有理數間有無限多個有理數，即有理數具稠密性，
故必可找到「3141592653」個有理數。

(○) **2.** 最簡分數$\frac{n}{m}$為有限小數，則m最多只能有 2 或 5 兩個質因數。

解 m只能有 2 或 5 的質因數。

(×) **3.** 若a為有理數，b為無理數，則ab必為無理數。

解 反例：取$a=0$，則$ab=0$為有理數。

（ × ）**4.** $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=2-\sqrt{5}$ 。

解　因為 $\sqrt{5}>2$，所以 $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}=\sqrt{5}-2$ 。

（ × ）**5.** 設 a 、 b 、 c 、 d 均為實數， $\sqrt{m}$ 為無理數，若 $a+b\sqrt{m}=c+d\sqrt{m}$ ，則 $a=c$ 且 $b=d$ 。

解　前提條件改為 a 、 b 、 c 、 d 為有理數才成立。

一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 計算 $\dfrac{\left(1+\frac{9}{3}\right)\times\left(1+\frac{9}{4}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{9}{7}\right)}{\left(1+\frac{8}{5}\right)\times\left(1+\frac{8}{6}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{8}{9}\right)}$ 之值，用最簡分數表示得 $\underline{\dfrac{72}{17}}$ 。

解　原式 $=\dfrac{\frac{12}{3}\times\frac{13}{4}\times\cdots\times\frac{16}{7}}{\frac{13}{5}\times\frac{14}{6}\times\cdots\times\frac{17}{9}}=\dfrac{\frac{12}{3\times4}}{\frac{17}{8\times9}}=\dfrac{72}{17}$ 。

2. 試比較 $\dfrac{98}{99}$ 、 $\dfrac{99}{100}$ 、 $\dfrac{100}{99}$ 、 $\dfrac{99}{98}$ 的大小： $\underline{\dfrac{98}{99}<\dfrac{99}{100}<\dfrac{100}{99}<\dfrac{99}{98}}$ 。

解　（法一） $\dfrac{98}{99}-\dfrac{99}{100}=\dfrac{98\times100-99\times99}{99\times100}=\dfrac{-1}{9900}<0\Rightarrow\dfrac{98}{99}<\dfrac{99}{100}<1$ ，

$\dfrac{100}{99}-\dfrac{99}{98}=\dfrac{100\times98-99\times99}{99\times98}=\dfrac{-1}{9702}<0\Rightarrow1<\dfrac{100}{99}<\dfrac{99}{98}$ ，

故 $\dfrac{98}{99}<\dfrac{99}{100}<\dfrac{100}{99}<\dfrac{99}{98}$ 。

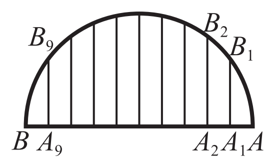
（法二） $\dfrac{98}{99}=1-\dfrac{1}{99}$ ， $\dfrac{99}{100}=1-\dfrac{1}{100}\Rightarrow\dfrac{98}{99}<\dfrac{99}{100}<1$ ，

$\dfrac{100}{99}=1+\dfrac{1}{99}$ ， $\dfrac{99}{98}=1+\dfrac{1}{98}\Rightarrow1<\dfrac{100}{99}<\dfrac{99}{98}$ ，故 $\dfrac{98}{99}<\dfrac{99}{100}<\dfrac{100}{99}<\dfrac{99}{98}$ 。

3. 設 $a=0.\overline{28}+\dfrac{9}{11}$，若將 a 以循環小數的形式表示，則 $a=$ ___$1.\overline{10}$___ 。

解 原式 $=\dfrac{28}{99}+\dfrac{9}{11}=\dfrac{28}{99}+\dfrac{81}{99}=\dfrac{109}{99}=1+\dfrac{10}{99}=1.\overline{10}$ 。

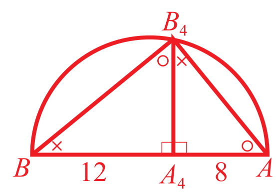
4. 如圖，有一圓形拱橋，橋面位置恰為直徑 $\overline{AB}$ ，為了慶祝活動的裝飾，計劃將橋面 $\overline{AB}$ 十等分後（也就是 $\overline{AA_1}=\overline{A_1A_2}=\cdots=\overline{A_8A_9}=\overline{A_9B}$ ），在每個等分點豎立一個鋼柱， $\overline{A_1B_1}$ 、 $\overline{A_2B_2}$ 、⋯、 $\overline{A_9B_9}$ 。已知 $\overline{AB}=20$ 公尺，試求 $\overline{A_4B_4}=$ ___$4\sqrt{6}$___ 公尺。



解 $\overline{BA_4}:\overline{A_4A}=6:4$ ，又 $\overline{AB}=20$ ，故 $\overline{BA_4}=12$ ， $\overline{A_4A}=8$ 。

因為 $\triangle BB_4A_4\sim\triangle B_4AA_4$ ，

所以 $\dfrac{\overline{BA_4}}{\overline{B_4A_4}}=\dfrac{\overline{B_4A_4}}{\overline{A_4A}}\Rightarrow\dfrac{12}{\overline{B_4A_4}}=\dfrac{\overline{B_4A_4}}{8}\Rightarrow\overline{B_4A_4}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$ 。



5. 比較 $a=2\sqrt{3}+\sqrt{5}$ ， $b=2+\sqrt{15}$ ， $c=\sqrt{10}+\sqrt{6}$ 之大小： ___$b>a>c$___ 。

解 $a^2=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2=17+4\sqrt{15}$ ，

$b^2=\left(2+\sqrt{15}\right)^2=19+4\sqrt{15}$ ，

$c^2=\left(\sqrt{10}+\sqrt{6}\right)^2=16+2\sqrt{60}=16+4\sqrt{15}$ ，

故 $b^2>a^2>c^2$ ，又因為 a 、 b 、 $c>0$ ，所以 $b>a>c$ 。

6. 設 a 、 b 為有理數，若 $a\sqrt{80}+b\left(\sqrt{9+4\sqrt{5}}\right)=\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ ，則數對 $(a,b)=$ $\underline{\left(\frac{1}{8},\frac{1}{2}\right)}$ 。

解 $a\left(4\sqrt{5}\right)+b\left(\sqrt{9+2\sqrt{20}}\right)=\sqrt{6+2\sqrt{5}}\Rightarrow 4a\sqrt{5}+b\left(2+\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}+1$

$\Rightarrow(2b)+(4a+b)\sqrt{5}=1+\sqrt{5}$ ，

因為 a 、 b 為有理數，所以 $\begin{cases}2b=1\\4a+b=1\end{cases}\Rightarrow(a,b)=\left(\frac{1}{8},\frac{1}{2}\right)$ 。

7. 已知 $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b （ $0\le b<1$ ），求 $\frac{1}{b}$ 的值為 $\underline{2+\sqrt{3}}$ 。

解 $\sqrt{12-6\sqrt{3}}=\sqrt{12-2\sqrt{27}}=\sqrt{9}-\sqrt{3}=3-\sqrt{3}=1+\left(2-\sqrt{3}\right)$ ，故 $a=1$ ， $b=2-\sqrt{3}$ ，

所以 $\frac{1}{b}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=2+\sqrt{3}$ 。

8. 設 $x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ，試求：

(1) $x+\frac{1}{x}=$ $\underline{10}$ 。（4 分）

(2) $x^3+\frac{1}{x^3}=$ $\underline{970}$ 。（3 分）

解 (1) $x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}{1}=5-2\sqrt{6}$

$\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{5-2\sqrt{6}}\times\frac{5+2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}=\frac{5+2\sqrt{6}}{1}=5+2\sqrt{6}$ ，

所以 $x+\frac{1}{x}=\left(5-2\sqrt{6}\right)+\left(5+2\sqrt{6}\right)=10$ 。

(2) $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\times x\times\frac{1}{x}\times\left(x+\frac{1}{x}\right)=1000-30=970$ 。

9. 已知 a 、 b 為正實數，且 $a+b=16$ ，求 $(a+1)(b+1)$ 的最大值為 81 。

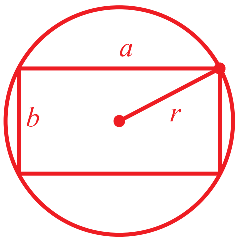
解 $(a+1)(b+1)=ab+a+b+1=ab+17$ ，

因為 $a>0$ ， $b>0$ ，所以 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\Rightarrow 8\geq\sqrt{ab}$ ，兩邊平方得 $ab\leq 64$ ，

故 $ab+17\leq 81$ ，最大值為 81 。

10. 在半徑為 r 的圓形土地上，圍出一個矩形花圃來美化環境，試求可圍出的最大花圃面積為 $2r^2$ 。（以 r 表示）

解 設花圃的長、寬分別為 a 、 b ，由畢氏定理可知 $a^2+b^2=(2r)^2$ ，



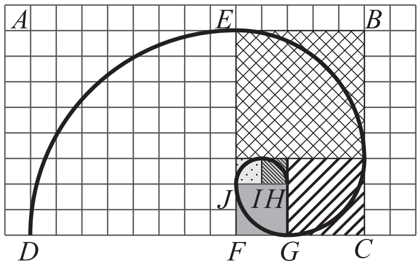
再由算幾不等式 $\frac{a^2+b^2}{2}\geq\sqrt{a^2b^2}=|ab|=ab$ ，可得 $\frac{4r^2}{2}\geq ab$ ，

因此面積 ab 的最大值為 $2r^2$ 。

二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 13 題為題組

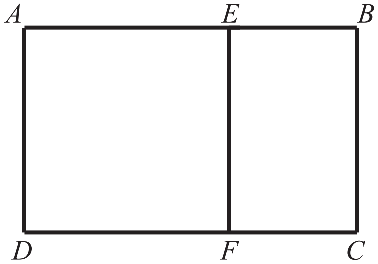
小明在 YouTube 上看到影片介紹如何繪製黃金矩形，只要在畫有等距直線的方格紙（單位方格為 1×1 的正方形），選擇兩個相鄰的單位方格並塗上不同顏色形成一個矩形，之後在矩形的一側，以矩形較長的邊為邊長，畫一個正方形並塗上顏色，一直重複即可繪製出一個類似黃金矩形的圖形；若在每個有塗上顏色的正方形內畫上 $\frac{1}{4}$ 個圓周即可得到一條螺線，此線近似於黃金螺線，如圖一所示。試回答下列問題。



圖一

（ C ）**11.** 圖一的矩形 $ABCD$ 中，請問螺線的總長度應該為多少？（單選題，7 分）
(A) 8π　(B) 9π　(C) 10π　(D) 11π　(E) 12π。

12. 另一種黃金螺線的畫法為從一個黃金矩形開始，以其寬（較短邊）作為一正方形的邊長，如此可將黃金矩形分為一個正方形及一個較小的黃金矩形（如圖二），並滿足 $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$。將這個較小的黃金矩形以同樣的方式再劃分為一個正方形和一個更小的黃金矩形，如此循環，可以得到無窮多個黃金矩形；若從最內圈的正方形開始，以正方形的邊長畫四分之一的圓弧，逐步往外延伸，則這些圓弧會形成一條螺線，此螺線稱為「黃金螺線」。接著我們來探討關於黃金矩形的性質：



圖二

假設 $\overline{AB}=a$，$\overline{AD}=b$，則 $\overline{BE}=a-b$，滿足 $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$，即 $\frac{a}{b}=\frac{b}{a-b}$，請計算 $\frac{a}{b}$ 的值。

（$\frac{a}{b}$ 即為黃金比例）（非選擇題，7 分）

13. 以 ϕ（讀作 phi）表示黃金比例，試求 $\phi-\frac{1}{\phi}$ 的數值。（非選擇題，6 分）

解　11. 總長度 $=2\pi\left(\overline{AE}+\overline{BE}+\overline{CG}+\overline{GH}+\overline{HI}+\overline{IJ}\right)\times\frac{1}{4}=2\pi(8+5+3+2+1+1)\times\frac{1}{4}=10\pi$。

12. $\frac{a}{b}=\frac{b}{a-b}\Rightarrow b^2=a^2-ab\Rightarrow a^2-ab-b^2=0$，同除以 b^2 得 $\left(\frac{a}{b}\right)^2-\left(\frac{a}{b}\right)-1=0$，

公式解 $\frac{a}{b}=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$（長度比沒有負的，故負不合），所以 $\frac{a}{b}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。

13. 承上，$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，

所以 $\phi-\frac{1}{\phi}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{-4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1$。