10 三次函數的圖形特徵

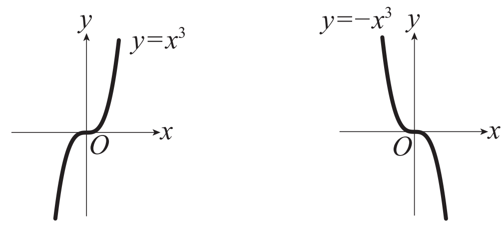
重點整理

1. 三次單項函數：

形如 $f(x)=ax^3$，其中 $a\neq 0$ 為三次函數的基本型，

(1) 當 $a>0$ 時，$f(x)=ax^3$，左下右上，圖形遞增；

當 $a<0$ 時，$f(x)=ax^3$，左上右下，圖形遞減。



(2) $f(x)=ax^3$ 本身對稱原點，故原點 $(0,0)$ 稱為對稱中心點。

(3) $|a|$ 愈大，則上升或下降的速度愈快，即圖形愈靠近 y 軸。

(4) 奇函數：滿足 $f(-x)=-f(x)$，且圖形本身對稱原點，則 $f(x)=ax^3$ 為奇函數。

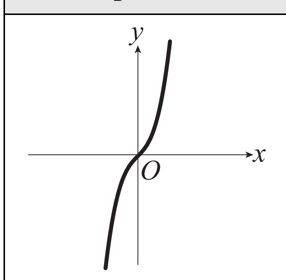
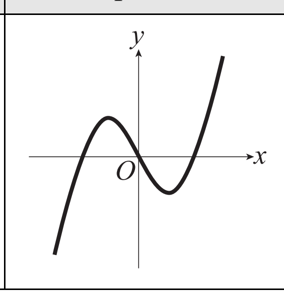
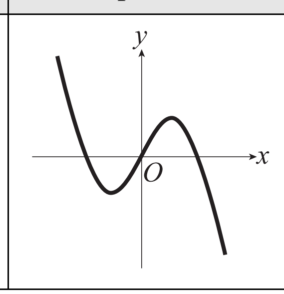
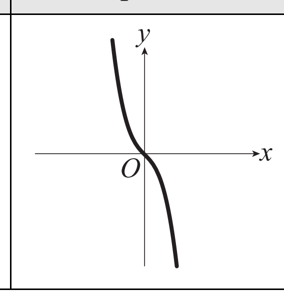
2. ax^3 與 px 的合成：

$f(x)=ax^3+px$ 的圖形性質，

(1) 滿足 $f(-x)=a(-x)^3+p(-x)=-(ax^3+px)=-f(x)$，故 $f(x)=ax^3+px$ 為奇函數，圖形本身對稱原點，以 $(0,0)$ 為對稱中心點。

(2) 當 $a>0$，$f(x)=ax^3+px$ 最右邊往上；當 $a<0$，$f(x)=ax^3+px$ 最右邊往下。

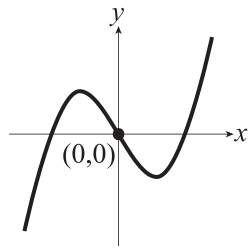
(3) 圖形在 $x=0$ 的附近，當 $p>0$ 時，先往右上走；當 $p<0$ 時，先往右下走。

$a>0$		$a<0$	
$p>0$	$p<0$	$p>0$	$p<0$
			

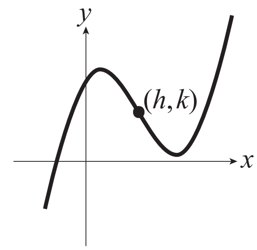
[註]有峰有谷 $\Rightarrow ap<0$；無峰無谷 $\Rightarrow ap>0$ 或 $p=0$。

3. 平移：

$$\boxed{y=ax^3+px} \xrightarrow[\text{上移 } k \text{ 單位}]{\text{右移 } h \text{ 單位}} \boxed{y=a(x-h)^3+p(x-h)+k}$$



對稱中心點(0,0)



對稱中心點(h,k)

4. 一般式與標準式：

形如 $f(x)=a(x-h)^3+p(x-h)+k$，稱為標準式，又 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 稱為一般式，將 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 化成標準式 $f(x)=a(x-h)^3+p(x-h)+k$。

〔法一〕利用三次方公式配成標準式 $f(x)=a(x-h)^3+p(x-h)+k$。

〔法二〕利用 $h=\dfrac{-b}{3a}$，再利用連續綜合除法，化成 $f(x)=a(x-h)^3+p(x-h)+k$。

5. 廣域特徵與局部特徵：

(1) 在一個頗大的範圍內觀察函數 $y=f(x)$ 圖形的特徵，稱為廣域特徵，
三次函數 $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 圖形的廣域特徵近似曲線 $y=ax^3$。

(2) 在一個頗小的範圍內觀察函數 $y=f(x)$ 圖形的特徵，稱為局部特徵，
若三次函數 $y=f(x)=a(x-h)^3+b(x-h)^2+c(x-h)+d$，
則 $y=f(x)$ 在 $x=h$ 附近的局部特徵近似直線 $y=c(x-h)+d$。

觀念是非題　試判斷下列敘述對或錯。(每題 2 分，共 10 分)

(×) **1.** 已知三次函數 $y=f(x)=x^3-3x^2-9x+2$，則 $f(x)$ 圖形的對稱中心為點 $(1,9)$。

解 $h=\dfrac{-b}{3a}=\dfrac{-(-3)}{3\times1}=1$，

利用 $(x-1)$ 的連續綜合除法

$f(x)=x^3-3x^2-9x+2=(x-1)^3-12(x-1)-9$，

則 $f(x)$ 圖形的對稱中心為點 $(1,-9)$。

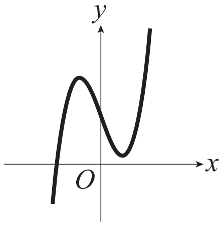
$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -3 & -9 & +2 & \\ & +1 & -2 & -11 & 1 \\ \hline 1 & -2 & -11 & -9 & \\ & +1 & -1 & & \\ \hline 1 & -1 & -12 & & \\ & +1 & & & \\ \hline 1 & +0 & & & \end{array}$$

(○) **2.** 三次函數 $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$ 之圖形在對稱中心附近的局部特徵近似直線 $y=-12x+3$。

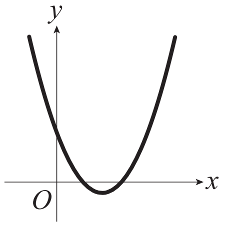
解 由第 1 題可知 $f(x)=x^3-3x^2-9x+2=(x-1)^3-12(x-1)-9$，

在 $x=1$ 附近的局部特徵近似直線 $y=-12(x-1)-9=-12x+3$。

(○) **3.** 已知三次函數 $y=ax^3+bx+c$ 的圖形如圖(一)所示，二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形可為圖(二)。



圖(一)



圖(二)

解 在圖(一)中，

最右邊往上⇒$a>0$，有峰有谷⇒$b<0$，

與 y 軸的交點在原點上方⇒$c>0$。

在圖(二)中，$a>0$⇒開口向上，$b<0$⇒頂點在 y 軸右側，

$c>0$⇒與 y 軸的交點在原點上方，故正確。

(○) **4.** 已知 $f(x)=-4x^3+1000x^2-x+10$，$g(x)=-5x^3+10x^2-x+1000$，則 $f(10^{100})>g(10^{100})$。

解 因為 10^{100} 很大，所以只看 x^3 項即可，故 $f(10^{100})>g(10^{100})$。

(○) **5.** 已知三次函數 $f(x)=a(x-1)^3+p(x-1)+4$，其中 a、p 為實數，若 $P(m,n)$ 在 $y=f(x)$ 的圖形上，則 $Q(2-m,8-n)$ 必在 $y=f(x)$ 的圖形上。

解 $f(x)=a(x-1)^3+p(x-1)+4$ 的對稱中心點為 $(1,4)$，

又 $P(m,n)$ 關於中心點 $(1,4)$ 的對稱點為 $(2-m,8-n)$，

故 $Q(2-m,8-n)$ 必在 $y=f(x)$ 上。

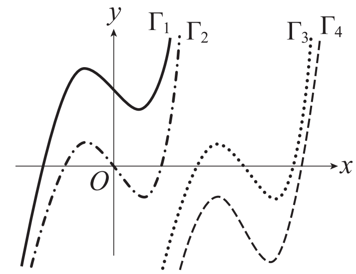
一、填充題（第 7 題每小格 7 分，其餘每題 7 分，共 70 分）

1. 已知 $f(x)=x^3-4x$，試將下列函數圖形 Γ_1、Γ_2、Γ_3、Γ_4 判別出分別表示的函數為何？

$y=f_1(x)$為Γ_2，$y=f_2(x)$為Γ_1，$y=f_3(x)$為Γ_3，$y=f_4(x)$為Γ_4。

其中 $f_1(x)=f(x)$，$f_2(x)=f(x)+2$，

$f_3(x)=f(x-3)$，$f_4(x)=f(x-3)-2$。



解 $f(x)=x^3-4x$，$y=f_1(x)$的圖形為Γ_2，$y=f_2(x)$的圖形為Γ_1，
$y=f_3(x)$的圖形為Γ_3，$y=f_4(x)$的圖形為Γ_4。

2. 設 $f(x)$為三次函數，其圖形的對稱中心點為$(1,-4)$，且 $f(x)$除以 x 的餘式為-9，
$f(3)=18$，試求 $f(x)=$ $2(x-1)^3+3(x-1)-4$ 。（用標準式來表示）

解 中心點$(1,-4)$，設 $f(x)=a(x-1)^3+p(x-1)-4$除以 x 的餘式為-9
$\Rightarrow f(0)=-a-p-4=-9$，又 $f(3)=8a+2p-4=18$，得 $a=2$，$p=3$，
故 $f(x)=2(x-1)^3+3(x-1)-4$。

3. 將 $y=(x-1)^3+2(x-1)+2$ 的圖形向右平移 h 單位，再向上平移 k 單位，可以得到 $y=x^3+6x^2+14x+16$，求 $h+k=$ -1 。

解 $y=g(x)=x^3+6x^2+14x+16$，

又對稱中心的 x 坐標：$\dfrac{-b}{3a}=\dfrac{-6}{3}=-2$，

利用$(x+2)$的連續綜合除法

$\Rightarrow g(x)=1(x+2)^3+2(x+2)+4$的中心點$(-2,4)$。

$y=f(x)$的中心點$(1,2)$，移至 $y=g(x)$的中心點$(-2,4)$，

故 $h=-3$，$k=2\Rightarrow h+k=-1$。

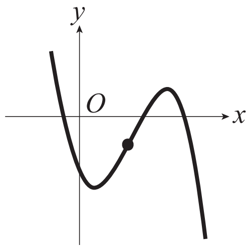
$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & +6 & +14 & +16 & \\
 & -2 & -8 & -12 & -2 \\
\hline
1 & +4 & +6 & +4 & \\
 & -2 & -4 & & \\
\hline
1 & +2 & +2 & & \\
 & -2 & & & \\
\hline
1 & +0 & & &
\end{array}
$$

4. 若 $f(x)=ax^3-3ax^2+4x-5$ 的對稱中心坐標為 $(p,5)$，求 $a=$ ＿-3＿。

解 $f(x)=ax^3-3ax^2+4x-5$，又 $h=\dfrac{-(-3a)}{3a}=1=p$，故中心點 $(1,5)$，

過中心點 $(1,5)$，得 $f(1)=a-3a+4-5=5\Rightarrow a=-3$。

5. 三次函數 $y=f(x)=a(x-h)^3+p(x-h)+k$，如圖所示，試問下列選項哪些是正確的？＿(A)(B)(C)(D)(E)＿。



(A) $a<0$　(B) $p>0$　(C) $h>0$　(D) $k<0$　(E) $-ah^3-ph+k<0$

解 (A)○；最右邊往下$\Rightarrow a<0$。

(B)○；有峰有谷$\Rightarrow ap<0$，得 $p>0$。

(C)(D)○；中心點 (h,k) 在第四象限$\Rightarrow h>0$，$k<0$。

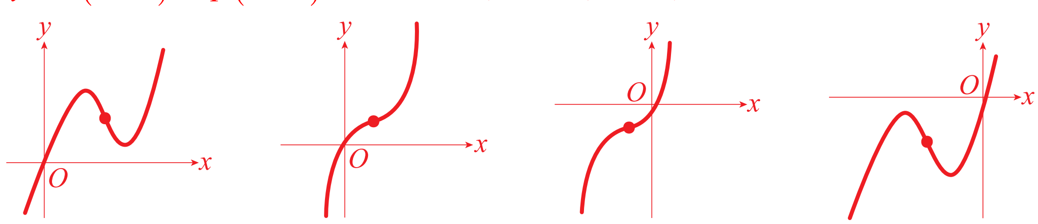
(E)○；與 y 軸的交點 $f(0)=-ah^3-ph+k<0$。

故選(A)(B)(C)(D)(E)。

6. 設 a、p、h、k 均為非零實數，若 $y=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 的圖形只通過第一及第三象限，請問下列哪些選項的推論為真？＿(A)(E)＿。

(A) $a>0$　(B) $p>0$　(C) $h>0$　(D) $k<0$　(E) $hk>0$

解 $y=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 只通過第一及第三象限的圖形可能為



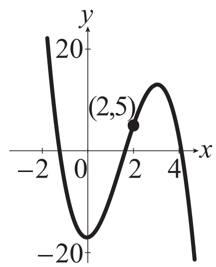
(A)最右邊往上$\Rightarrow a>0$

(B) p 正負號都有可能

(C)(D)(E)中心點 (h,k) 可能在第一或第三象限$\Rightarrow hk>0$。

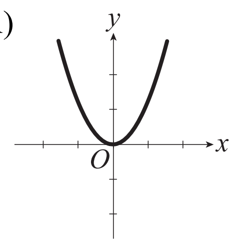
故選(A)(E)。

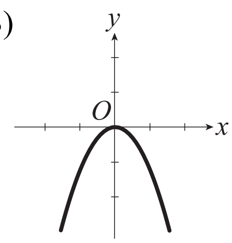
7. 關於 $y=f(x)=-2x^3+9x^2+x-17$ 的圖形，請問：

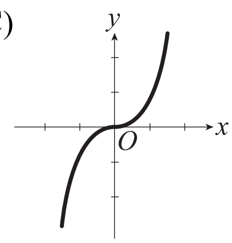


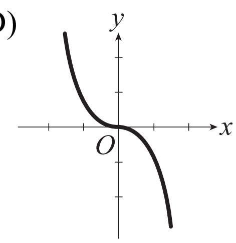
(1) 廣域看 $f(x)$ 的圖形最接近下列哪一個選項？___(D)___。（7 分）

（刻度： x 軸為 10^{10} ， y 軸為 10^{10} ）

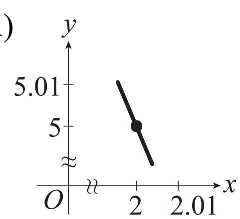
(A)


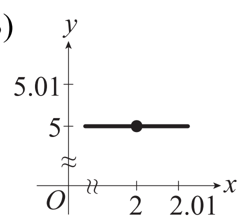
(B)


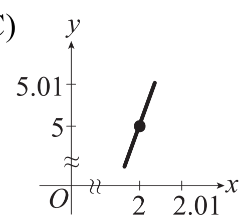
(C)


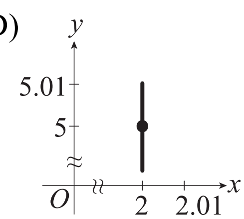
(D)


(2) 局部看 $f(x)$ 的圖形在 $(2,5)$ 的附近最接近下列哪一個選項？___(C)___。（7 分）

(A)


(B)


(C)


(D)


解 (1) 表在廣域特徵下，

$y=f(x)=-2x^3+9x^2+x-17$ 近似於 $y=-2x^3$ ，故選(D)。

(2) 表在 $x=2$ 的局部近似特徵，

$f(x)=-2(x-2)^3-3(x-2)^2+13(x-2)+5$

近似 $y=13(x-2)+5=13x-21$ ，故選(C)。

$$
\begin{array}{rrrr|l}
-2 & +9 & +1 & -17 & \\
 & -4 & +10 & +22 & 2 \\
\hline
-2 & +5 & +11 & \multicolumn{1}{|r}{+5} & \\
 & -4 & +2 & & \\
\hline
-2 & +1 & \multicolumn{1}{|r}{+13} & & \\
 & -4 & & & \\
\hline
-2 & \multicolumn{1}{|r}{-3} & & & \\
\end{array}
$$

8. 設 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 的廣域特徵近似於 $y=x^3$，對稱中心為 $(-3,4)$，且在對稱中心附近的局部特徵近似於 $y=2x+10$，試求 $a+b+c+d=$ __76__。

解 廣域特徵近似於 $y=x^3$，且中心點 $(-3,4)$，設 $f(x)=(x+3)^3+p(x+3)+4$。

在中心點的局部特徵近似於 $y=2x+10=p(x+3)+4\Rightarrow p=2$，

故 $f(x)=(x+3)^3+2(x+3)+4=(x^3+9x^2+27x+27)+2x+10$

$=x^3+9x^2+29x+37$，則 $a+b+c+d=1+9+29+37=76$。

9. 設 $f(x)$ 為三次多項式函數，$f(x)$ 在 $x=0$ 處之局部近似直線為 $y=5x-1$，對稱中心為 $(1,2)$，則 $f(x)=$ __$(x-1)^3+2(x-1)+2$__。（用標準式來表示）

解 中心點 $(1,2)$，設
$$\begin{aligned}f(x)&=a(x-1)^3+p(x-1)+2\\&=a(x^3-3x^2+3x-1)+p(x-1)+2\\&=ax^3-3ax^2+(3a+p)x+(-a-p+2)\end{aligned}$$
。

$f(x)$ 在 $x=0$ 之局部近似直線為 $y=5x-1=(3a+p)x+(-a-p+2)$，

比較知 $\begin{cases}3a+p=5\\-a-p+2=-1\end{cases}\Rightarrow a=1$，$p=2$，故 $f(x)=(x-1)^3+2(x-1)+2$。

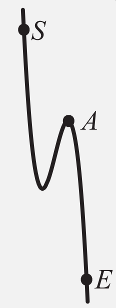
二、素養混合題（共 20 分）

<u>第 10 至 13 題為題組</u>

附圖自行車競賽的賽道，以下信件內容是每位選手參賽前都會事先收到關於賽道的相關資訊，請大家幫助參賽選手龍龍在比賽前完全掌握資訊，拿出最佳表現。

親愛的參賽者你好：

本次的賽道在坐標平面上為一個三次函數 $f(x)$，已知起點與終點分別為 $S(-3,15)$ 和 $E(1,-1)$，且起點與終點恰對稱於賽道的對稱中心，主辦單位在事先場勘時從空中用空拍機拍攝時發現此三次函數的廣域特徵近似曲線 $y=-2x^3$，其中賽道上 $A(0,k)$ 為補給站，最後請各位選手到達終點時回答出通關密語 (a,b)，優先抵達終點線且答對通關密語者即為本次的優勝者。



通關密語問題：

此三次函數賽道在 $x=-2$ 附近的局部特徵近似於直線 $y=ax+b$，通關密語為 (a,b)。

祝各位參賽者有個美好的經驗，期待當天與各位相見。

主辦單位　騰騰出版社

10. 此賽道的對稱中心為 <u>$(-1,7)$</u>。（填充題，4 分）

11. 請幫龍龍算出此三次函數為 <u>$f(x)=-2x^3-6x^2-2x+9$</u>。（填充題，6 分）

12. 補給站的坐標位置 A 為 <u>$(0,9)$</u>。（填充題，5 分）

13. 通關密語 (a,b) 為何？（非選擇題，5 分）

解　10. 對稱中心為 S 與 E 的中點，

所以對稱中心 O 為 $(-1,7)$。

11. 因為對稱中心 O 為 $(-1,7)$，

所以設三次函數為 $f(x)=a(x+1)^3+p(x+1)+7$，

由題目得三次函數的廣域特徵近似曲線 $y=-2x^3$，可得 $a=-2$，

則 $f(x)=-2(x+1)^3+p(x+1)+7$，又 $f(1)=-2(2)^3+p(2)+7=-1\Rightarrow p=4$，

故 $f(x)=-2(x+1)^3+4(x+1)+7=-2x^3-6x^2-2x+9$。

12. 承上題得 $f(x)=-2(x+1)^3+4(x+1)+7$，又 $A(0,k)$ 在 $f(x)$ 上，

得 $f(0)=-2\times1+4\times1+7=9$，故補給站的坐標位置 A 為 $(0,9)$。

13. $f(x)=-2x^3-6x^2-2x+9=-2(x+2)^3+6(x+2)^2-2(x+2)+5$，

故 $f(x)$ 在 $x=-2$ 附近的局部特徵近似於直線

$y=-2(x+2)+5=-2x+1$，

故 $(a,b)=(-2,1)$。

$$
\begin{array}{rrrr|l}
-2 & -6 & -2 & +9 & \\
 & +4 & +4 & -4 & -2 \\
\hline
-2 & -2 & +2 & +5 & \\
 & +4 & -4 & & \\
\hline
-2 & +2 & -2 & & \\
 & +4 & & & \\
\hline
-2 & +6 & & &
\end{array}
$$