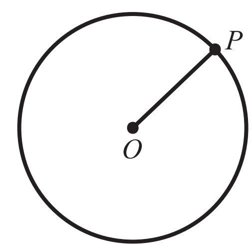
6 圓方程式

重點整理

1. 圓的定義：

在平面上與一定點 O 等距離的所有點 P 所成的圖形稱為圓，而此定點 O 稱為圓心，圓心與圓上任一點的距離 $\overline{OP}$ 稱為半徑。



(1) 圓的標準式：

坐標平面上一圓，圓心 $O(h,k)$，半徑 r，設 $P(x,y)$ 為圓上任意一點，則因 $\overline{OP}=r$，依距離公式可得 $\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$，然後兩邊平方得 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，稱為圓的標準式，且圓心為 (h,k)，且半徑為 r。

(2) 圓的一般式：

因為圓心為 $O(h,k)$，半徑為 r 的圓方程式為 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，

將上式展開得：$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$，

可將它化成二元二次方程式：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$，稱為圓的一般式。

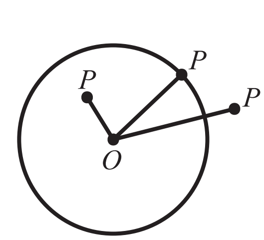
將 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 依 x、y 配方可得：

$$\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+\left(y+\frac{e}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(d^2+e^2-4f\right),$$

則圓心為 $\left(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2}\right)$，半徑為 $\frac{1}{2}\sqrt{d^2+e^2-4f}$。

2. 點與圓的關係：

在平面上有一圓 C，圓心為 O，半徑為 r，P 為平面上一點，則點 P 與圓 C 之關係有圓內、圓上、圓外。



(1) 幾何意義：

① 點在圓內⇒ $\underline{\overline{OP}<r}$ 。

② 點在圓上⇒ $\underline{\overline{OP}=r}$ 。

③ 點在圓外⇒ $\underline{\overline{OP}>r}$ 。

(2) 代數意義：設 P 點坐標 (x_0, y_0) 代入圓方程式所得的值為 $f(x_0, y_0)$，

① 點在圓內⇒ $f(x_0, y_0) < 0$ 。

② 點在圓上⇒ $f(x_0, y_0) = 0$ 。

③ 點在圓外⇒ $f(x_0, y_0) > 0$ 。

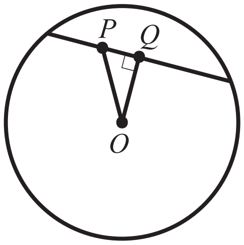
3. 軌跡方程式：

(1) 阿波羅尼斯圓（Apollonius Circles）：

平面上相異兩點 A 、 B ，且 k 為正數（ $k \neq 1$ ），則滿足 $\overline{AP} = k\overline{BP}$ 的點 P 之軌跡為一圓，稱此圓為阿波羅尼斯圓。

(2) 弦中點的軌跡：

已知圓心 O 和圓內一點 P ，過 P 的所有弦上的中點 Q ，其中 $\overline{OQ}$ 與 $\overline{PQ}$ 垂直，則弦中點 Q 在以 $\overline{OP}$ 為直徑的圓上任一點。



觀念是非題 試判斷下列敘述對或錯。（每題 2 分，共 10 分）

（ × ）1. 方程式 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ 的圖形為一圓，其圓心為 $(-2,3)$ 且半徑為 9 。

解 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$，

則圖形是圓心為 $(-2,3)$ 且半徑為 3 的圓。

（ ○ ）2. 若方程式 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + k = 0$ 的圖形為一點，則 $k = 13$ 。

解 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + k = 0 \Rightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = -k + 13$，其圖形為一點，

則 $-k + 13 = 0$ ，即 $k = 13$ 。

(○) **3.** 已知直線 $L_1: 2x-y=0$ 與直線 $L_2: x-y+1=0$ 為此圓的對稱軸，則此圓的圓心為 $(1,2)$。

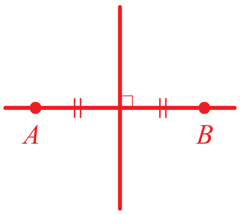
解 L_1、L_2 為圓之對稱軸，表 L_1、L_2 均通過圓心

$\Rightarrow$圓心為 L_1、L_2 之交點$\Rightarrow\begin{cases}L_1: 2x-y=0\\ L_2: x-y+1=0\end{cases}\Rightarrow$圓心$(x,y)=(1,2)$。

(×) **4.** 平面上相異兩點 A、B，且 k 為正數，滿足 $\overline{AP}=k\overline{BP}$ 的所有 P 的軌跡為一圓。

解 當 $k=1$ 時，$\overline{AP}=\overline{BP}$，如圖，

故 P 為 $\overline{AB}$ 中垂線上的一點。



(○) **5.** 已知方程式 $x^2+y^2+2x-4y+k=0$ 的圖形是一個圓，且點 $(3,1)$ 在圓外，則實數 k 滿足 $-12<k<5$。

解 因為 $x^2+y^2+2x-4y+k=0$ 是一個圓

$\Rightarrow$判別式為 $(2)^2+(-4)^2-4k>0\Rightarrow 20-4k>0\Rightarrow k<5$。

又 $(3,1)$ 在圓外$\Rightarrow 9+1+6-4+k>0\Rightarrow k>-12$，

故 $-12<k<5$。

一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 平面上與一定點 $P(-1,3)$ 之距離均為 4 的所有點形成的圖形為__圓__，其圖形方程式為__$(x+1)^2+(y-3)^2=16$__。（第 1 格 3 分，第 2 格 4 分）

解 由題目可知圖形為圓心 $(-1,3)$，半徑 4 的圓，

故圓方程式為 $(x+1)^2+(y-3)^2=4^2=16$。

2. 已知 $A(3,1)$，$B(5,-7)$，求以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓方程式為__$(x-4)^2+(y+3)^2=17$__。

解 圓心 M 為 $\overline{AB}$ 的中點 $\left(\dfrac{3+5}{2},\dfrac{1+(-7)}{2}\right)=(4,-3)$，半徑為 $\overline{AM}=\sqrt{(4-3)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{17}$，

故圓方程式為 $(x-4)^2+(y+3)^2=17$。

3. 已知圓 C 的半徑為 $\sqrt{10}$，其圓心的 x、y 坐標相等，且點 $(2,4)$ 在圓 C 上，試求圓心的坐標為＿$(5,5)$ 或 $(1,1)$＿。

解　設圓心 $O(t,t)$，且半徑 $=\sqrt{10}$，即圓 $C:(x-t)^2+(y-t)^2=10$。

又點 $(2,4)$ 在圓 C 上 $\Rightarrow(2-t)^2+(4-t)^2=10\Rightarrow t^2-4t+4+t^2-8t+16=10\Rightarrow 2t^2-12t+10=0$

$\Rightarrow t^2-6t+5=0\Rightarrow(t-1)(t-5)=0$，可得 $t=5$ 或 1，則圓心的坐標為 $(5,5)$ 或 $(1,1)$。

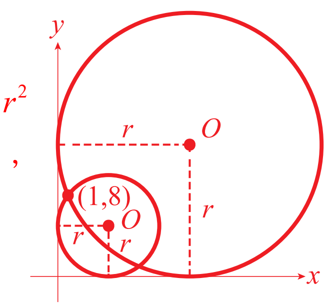
4. 過點 $(1,8)$ 且與 x 軸、y 軸都相切的圓方程式中，其中半徑最大為＿13＿。

解　與 x、y 軸相切，設圓心 $O(r,r)$，則 $C:(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$，

將 $(1,8)$ 代入圓 $C\Rightarrow(1-r)^2+(8-r)^2=r^2\Rightarrow r^2-2r+1+r^2-16r+64=r^2$

$\Rightarrow r^2-18r+65=0\Rightarrow(r-5)(r-13)=0\Rightarrow r=5$ 或 13，

其中最大半徑為 13。



5. 設圓 C 通過 $(3,0)$、$(-1,0)$、$(0,1)$ 三點，求圓 C 的方程式為＿$x^2+y^2-2x+2y-3=0$＿。

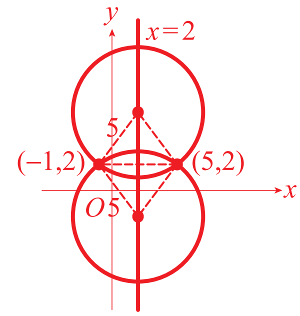
解　設圓 $C:x^2+y^2+dx+ey+f=0$，

因為 $(3,0)$、$(-1,0)$、$(0,1)$ 三點在圓上 $\Rightarrow\begin{cases}9+3d+f=0\cdots\cdots①\\1-d+f=0\cdots\cdots②\\1+e+f=0\cdots\cdots③\end{cases}$，

①－②$\Rightarrow 8+4d=0\Rightarrow d=-2$，代回②可得 $f=-3$，再代入③可得 $e=2$，

得 $C:x^2+y^2-2x+2y-3=0$。

6. 設圓 C 通過 $(5,2)$、$(-1,2)$ 兩點且半徑為 5，求圓 C 的圓心坐標為 $\underline{(2,6)\text{或}(2,-2)}$。



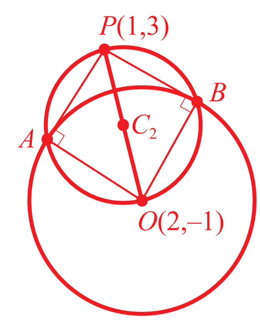
解 因為圓 C 通過 $(5,2)$、$(-1,2)$ 兩點，

由圖可知圓心在直線 $x=2$ 上。設圓心坐標為 $(2,t)$，

由題目可知 $\sqrt{(2-(-1))^2+(t-2)^2}=5 \Rightarrow t^2-4t-12=0$，

得 $t=6$ 或 -2，故圓心坐標為 $(2,6)$ 或 $(2,-2)$。

7. 過 $P(1,3)$ 對圓 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 作二切線，若切點為 A、B，則 $\triangle PAB$ 之外接圓方程式為 $\underline{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{17}{4}}$。



解 圓 $C: x^2+y^2-4x+2y-4=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=9$，

圓心 $O(2,-1)$，半徑 $r=3$，

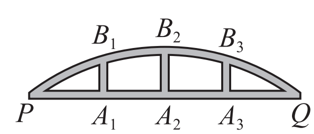
$\angle PAO+\angle PBO=180°$ 可知四邊形為圓內接四邊形，

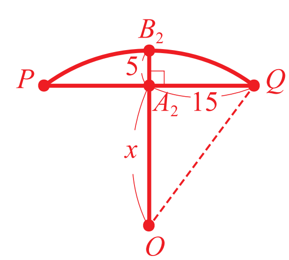
且 $\triangle PAB$ 之外接圓恰為此圓，又 $\overline{PO}$ 為此圓之直徑，

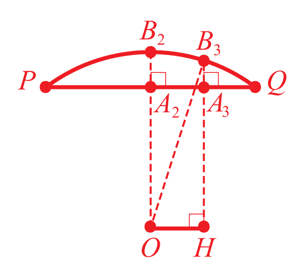
$\overline{PO}=\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{17}$，$r=\frac{\overline{PC}}{2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$，

且圓心 C_2 為 P、O 中點得 $C_2\left(\frac{3}{2},1\right)$，故所求圓方程式為 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{17}{4}$。

8. 如圖，橋面上有一圓拱型建築，圓拱的寬度 $\overline{PQ}=30$ 公尺，拱高 $\overline{A_2B_2}=5$ 公尺，在距中心左右 7 公尺處各有一纜繩連接橋面，求圖中纜繩 $\overline{A_3B_3}$ 長為 $\underline{\quad 4 \quad}$ 公尺。







解 設 $\overline{OA_2}=x$，則半徑 $\overline{OB_2}=x+5=\overline{OQ}$，

在 $\triangle OA_2Q$ 中，$\overline{OQ}^2=\overline{OA_2}^2+\overline{QA_2}^2$

$\Rightarrow (x+5)^2=x^2+15^2 \Rightarrow x=20$。

在 $\triangle OHB_3$ 中，$\overline{OH}=7$，

$\overline{OB_3}=25 \Rightarrow \overline{B_3H}=24$，

故 $\overline{A_3B_3}=24-20=4$。

9. 已知坐標平面上兩定點 $A(1,4)$ 、 $B(0,2)$ ，若動點 P 滿足 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$ ，則 P 的軌跡方程式為 $\underline{\quad 3x^2+3y^2+2x-8y-1=0 \quad}$ 。

解　令 $P(x,y)$ ，得 $\overline{PA}=\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}$ ， $\overline{PB}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$ ，

又 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$

$\Rightarrow 2\overline{PB}=\overline{PA}\Rightarrow 4\overline{PB}^2=\overline{PA}^2$

$\Rightarrow 4\left[x^2+(y-2)^2\right]=(x-1)^2+(y-4)^2$

$\Rightarrow 4(x^2+y^2-4y+4)=x^2+y^2-2x-8y+17$ ，

因此 P 的軌跡方程式為 $3x^2+3y^2+2x-8y-1=0$ 。

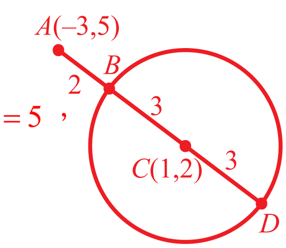
10. 已知 $P(a,b)$ 在圓 $C:x^2+y^2-2x-4y-4=0$ 上，若 $(a+3)^2+(b-5)^2$ 之最大值為 M ，最小值為 m ，試求 $(M,m)=\underline{\quad (64,4) \quad}$ 。

解　$(a+3)^2+(b-5)^2$ 表 (a,b) 到 $(-3,5)$ 之距離平方，

圓 $C:x^2+y^2-2x-4y-4=0\Rightarrow(x-1)^2+(y-2)^2=9$ ， $\overline{CA}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$ ，

所以最大值： $\overline{AD}^2=8^2=64$ ，最小值： $\overline{AB}^2=2^2=4$ 。

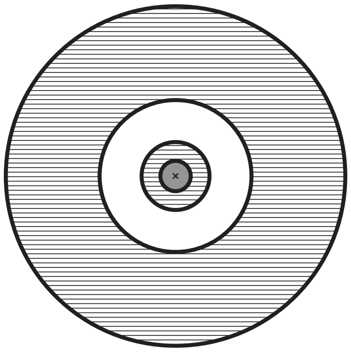
故 $(M,m)=(64,4)$ 。



二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 13 題為題組

下圖為射飛鏢的標靶，由許多個同心圓所組成，若將標靶放在坐標平面上，已知最內部灰色的圓方程式為 $25x^2+25y^2-150x+100y+69=0$，且由內而外的每個圓，其圓面積為前一個的 5 倍，試回答以下問題：



11. 圖中╳的位置為靶心，問靶心的坐標位置為 $(3,-2)$。（填充題，6 分）

12. 試問最大的圓方程式為 $(x-3)^2+(y+2)^2=1280$。（填充題，7 分）

13. 試以不等式表示白色的環狀區域（含邊界）。（非選擇題，7 分）

解 11. 靶心的坐標即為圓心坐標，

$25x^2+25y^2-150x+100y+69=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-6x+4y+\dfrac{69}{25}=0$，

$\Rightarrow (x^2-6x+9)+(y^2+4y+4)-13+\dfrac{69}{25}=0 \Rightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=\dfrac{256}{25}$，

得圓心為 $(3,-2)$。

12. 因為由內而外圓面積為前一個的 5 倍，表示由內而外圓半徑為前一個的 $\sqrt{5}$ 倍，

又承上題得最小圓半徑是 $\dfrac{16}{5}$，故最大的圓其半徑為 $\dfrac{16}{5}\times(\sqrt{5})^3=\dfrac{16}{5}\times 5\sqrt{5}=16\sqrt{5}$，

所以最大的圓方程式為 $(x-3)^2+(y+2)^2=(16\sqrt{5})^2 \Rightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=1280$。

13. 由內而外，第 2 個圓為 $(x-3)^2+(y+2)^2=\dfrac{256}{5}$；第 3 個圓為 $(x-3)^2+(y+2)^2=256$，

又白色環狀區介於第 2 個圓與第 3 個圓之間，

故可用 $\dfrac{256}{5}\le(x-3)^2+(y+2)^2\le 256$ 表示。