3 指數

重點整理

1. 指數定義：

設 n 為正整數，n 個 a 連乘表成 a^n，其中 a 稱為**底數**，n 稱為**指數**，讀作 a 的 n 次方。一般而言，n 可由自然數、整數、有理數而擴充至實數。

(1) 零指數：定義 $a^0=1$，其中 $a\neq 0$。

(2) 負指數：$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$，其中 $a\neq 0$ 且 n 為正整數。

(3) 分數指數：① $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$，其中 $a>0$ 且 n 為正整數。

② $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$，其中 $a>0$，n 為正整數，m 為整數。

(4) 負分數指數：$a^{-\frac{m}{n}}=\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{-1}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$，其中 $a>0$，n 為正整數，m 為整數。

(5) 實數指數：

設 $a>0$，利用無窮數列所靠近的數來定義無理數次方，例如：$2^{\sqrt{2}}$ 與 3^{π}。

2. 指數運算性質：

$a>0$，$b>0$，m、n 為實數，

(1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$。　(2) $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$。　(3) $\left(a^m\right)^n=a^{mn}$。

(4) $a^n\times b^n=\left(ab\right)^n$。　(5) $\dfrac{a^n}{b^n}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$。

3. 常用公式：

(1) 因式分解：$a^{3x}+a^{-3x}=\left(a^x+a^{-x}\right)\left(a^{2x}-a^x\times a^{-x}+a^{-2x}\right)=\left(a^x+a^{-x}\right)\left(a^{2x}-1+a^{-2x}\right)$。

(2) 求值公式：$a^{3x}+a^{-3x}=\left(a^x+a^{-x}\right)^3-3\times a^xa^{-x}\times\left(a^x+a^{-x}\right)=\left(a^x+a^{-x}\right)^3-3\times 1\times\left(a^x+a^{-x}\right)$。

(3) 因式分解：$a^{3x}-a^{-3x}=\left(a^x-a^{-x}\right)\left(a^{2x}+a^x\times a^{-x}+a^{-2x}\right)=\left(a^x-a^{-x}\right)\left(a^{2x}+1+a^{-2x}\right)$。

(4) 求值公式：$a^{3x}-a^{-3x}=\left(a^x-a^{-x}\right)^3+3\times a^xa^{-x}\times\left(a^x-a^{-x}\right)=\left(a^x-a^{-x}\right)^3+3\times 1\times\left(a^x-a^{-x}\right)$。

觀念是非題

試判斷下列敘述對或錯。（每題 2 分，共 10 分）

（ × ）**1.** $\sqrt[3]{-27}=(-27)^{\frac{1}{3}}$。

解 $\sqrt[3]{-27}\neq(-27)^{\frac{1}{3}}$，底數需大於 0。

（ × ）**2.** 設 $a>0$ 且 m、n 為實數，則 $a^{\frac{n}{m}}$ 與 $a^{\frac{m}{n}}$ 互為倒數。

解 $a^{\frac{n}{m}}$ 與 $a^{\frac{m}{n}}$ 不是互為倒數，是 $a^{\frac{n}{m}}$ 與 $a^{-\frac{n}{m}}$ 互為倒數。

（ × ）**3.** 已知 $10^{6.4}\approx 2.512\times10^{6}$，那可得知 $10^{-6.4}\approx 2.512\times10^{-6}$。

解 $10^{-6.4}\approx\dfrac{1}{2.512\times10^{6}}\neq 2.512\times10^{-6}$。

（ ○ ）**4.** 半衰期為質量變成原本一半所需要的時間。設原先質量為 A，且半衰期為 k 年，則 n 年後的質量為 $A\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{k}}$。

解 半衰期為 k 年，則 n 年後，表示經過 $\dfrac{n}{k}$ 次半衰，質量變為 $A\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{k}}$。

（ × ）**5.** 3^{-1} 的值為 -3。

解 $3^{-1}=\dfrac{1}{3}$。

一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 在下列各小題中，試填入適當的指數。

(1) 若 $\dfrac{1}{\sqrt[5]{2^6}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^a$，則 $a=$ $\underline{\quad \dfrac{6}{5} \quad}$。（2 分）

(2) 若 $\sqrt[7]{9}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^b$，則 $b=$ $\underline{\quad -\dfrac{2}{7} \quad}$。（2 分）

(3) 若 $1=\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^c$，則 $c=$ $\underline{\quad 0 \quad}$。（3 分）

解 (1) $2^a=\sqrt[5]{2^6}\Rightarrow a=\dfrac{6}{5}$。

(2) $\sqrt[7]{9}=\sqrt[7]{3^2}=3^{\frac{2}{7}}\Rightarrow 3^{\frac{2}{7}}=3^{-b}\Rightarrow b=-\dfrac{2}{7}$。

(3) $1=\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^0\Rightarrow c=0$。

2. 試求 $\left(\sqrt{8}\right)^{-\frac{2}{3}}\times(0.25)^{-2.5}\times\sqrt[4]{4}\times\sqrt[6]{\dfrac{1}{8}}$ 的值為 $\underline{\quad 16 \quad}$。

解 原式 $=\left[\left(2^3\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{2}{3}}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{5}{2}}\times\left(2^2\right)^{\frac{1}{4}}\times\left(2^{-3}\right)^{\frac{1}{6}}$

$=\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}}\times\left(2^{-2}\right)^{-\frac{5}{2}}\times2^{\frac{1}{2}}\times2^{-\frac{1}{2}}$

$=2^{-1}\times2^5\times2^0=2^4=16$。

3. 化簡 $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-6}\times\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-4}=$ ____$5-2\sqrt{6}$____ 。

解 $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-6}\times\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-4}=\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\times\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right]^{-6}\times\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2}$

$=(3-2)^{-6}\times\left(5-2\sqrt{6}\right)=5-2\sqrt{6}$ 。

4. 若 $9^{x}=4$ ，則 $27^{x}+81^{-x}=$ ____$\dfrac{129}{16}$____ 。

解 $9^{x}=4\Rightarrow\left(3^{2}\right)^{x}=4\Rightarrow\left(3^{x}\right)^{2}=4\Rightarrow 3^{x}=\pm 2$ （取正），可知 $3^{-x}=\dfrac{1}{3^{x}}=\dfrac{1}{2}$ ，

$27^{x}+81^{-x}=\left(3^{3}\right)^{x}+\left(3^{4}\right)^{-x}=\left(3^{x}\right)^{3}+\left(3^{-x}\right)^{4}=2^{3}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4}=8+\dfrac{1}{16}=\dfrac{129}{16}$ 。

5. 設 $a^{2x}=3$ ，求 $\dfrac{a^{x}-a^{-x}}{a^{3x}-a^{-3x}}=$ ____$\dfrac{3}{13}$____ 。

解 $\dfrac{a^{x}-a^{-x}}{a^{3x}-a^{-3x}}=\dfrac{a^{x}-a^{-x}}{\left(a^{x}-a^{-x}\right)\left(a^{2x}+a^{x}\times a^{-x}+a^{-2x}\right)}=\dfrac{1}{a^{2x}+1+a^{-2x}}=\dfrac{1}{3+1+\dfrac{1}{3}}=\dfrac{3}{13}$ 。

6. 設 $x>0$，若 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$，則

(1) $x+x^{-1}=$ ___7___。（4 分）

(2) $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=$ ___18___。（3 分）

解 (1) $x+x^{-1}=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2=\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^2-2\times x^{\frac{1}{2}}\times x^{-\frac{1}{2}}=3^2-2=7$。

(2) $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3+\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^3=\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^3-3\times x^{\frac{1}{2}}\times x^{-\frac{1}{2}}\times\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)=3^3-3\times1\times3=18$。

7. 已知 x、y、z 為正實數，且 $x^y=1$，$y^z=\frac{1}{4}$，$z^x=\frac{2}{3}$，則 $xyz=$ ___$\frac{1}{12}$___。

解 $x^y=1$的唯一情況為 $x=1$，

代入 $z^x=\frac{2}{3}\Rightarrow z^1=\frac{2}{3}$，代入 $y^z=\frac{1}{4}\Rightarrow y^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{4}\Rightarrow y=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(2^{-2}\right)^{\frac{3}{2}}=2^{-3}=\frac{1}{8}$，

故 $xyz=1\times\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$。

8. 設 x、y 為實數，若 $2^x=125$，$5^y=64$，則 $xy=$ ___18___。

解 $2^x=125\Rightarrow 2^x=5^3\Rightarrow 2=5^{\frac{3}{x}}$……①

$5^y=64\Rightarrow 5^y=2^6$……②

①代入②得 $5^y=\left(5^{\frac{3}{x}}\right)^6=5^{\frac{18}{x}}\Rightarrow y=\frac{18}{x}\Rightarrow xy=18$。

9. 在一個玻璃瓶中培養細菌，已知細菌的數量每隔一分鐘就會增加一倍，現在開始小明在玻璃瓶中放入一個細菌，60 分鐘後玻璃瓶中細菌的數量即可達到實驗所需的狀況。若某天由於時間較急迫，只有 55 分鐘的時間可以等待細菌的數量達到實驗所需的狀況，則小明一開始需要在玻璃瓶中放入____32____個細菌。

解　每隔一分鐘增加 1 倍，即變為原來的 2 倍，又 60 分鐘後細菌的數量為 1×2^{60} 個，
設一開始放入 n 個細菌，55 分鐘後細菌的數量為 $n\times 2^{55}=2^{60}$（個），則 $n=2^{5}=32$。

10. 心理專家以數學模式 $F(t)=a\left(1-10^{-bt}\right)$ 來描述學生經過 t 星期的學習之後所得到的學習量（或成果），這裡的常數 a 與 b 跟學生及學習的科目相關。今力乘一星期可以熟背 100 個英文單字，兩星期可以熟背 150 個英文單字，試問：力乘三星期可以熟背____175____個英文單字。

解　$F(1)=a\left(1-10^{-b}\right)=100\cdots\cdots①$

$F(2)=a\left(1-10^{-2b}\right)=150\cdots\cdots②$

$\dfrac{②}{①}\Rightarrow\dfrac{1-10^{-2b}}{1-10^{-b}}=\dfrac{150}{100}\Rightarrow 1+10^{-b}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow 10^{-b}=\dfrac{1}{2}$ 代入①得 $a=200$，

$F(t)=200\left(1-10^{-bt}\right)$，則 $F(3)=200\left(1-10^{-3b}\right)=200\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3}\right)=175$。

二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 12 題為題組

《碳14定年法》

自然界中碳有三種同位素：99%的碳為原子量12的碳12，1%為原子量13的碳13；原子量為14的碳14，非常微量，僅約為兆分之1.2（即1.2×10^{-12}）。又碳12與碳13為穩定同位素；碳14具有放射性，故又稱為放射性碳，它的半衰期約為5720年。

大氣中具放射性的碳14與正常的二氧化碳比率趨近於定值，因此經由呼吸作用動植物體內也含有相同比率的放射性碳。但動植物死亡後，體內碳14不再獲得補充，因此隨著放射衰變，碳14的比率逐漸降低。利用這個方法，我們可以檢測考古遺址中發現的獸骨、化石、貝殼、木炭的碳14含量，以斷定遺址存在的時間。

11. 近期，臺灣東部挖掘出石器，其碳14的含量約為正常含量的$\dfrac{1}{1024}$倍，試估計此石器約為距今__57200__年前的遺址。（填充題，10 分）

12. 雖然碳14可以提供人類推估諸多遺址存在的年代，但地球的壽命約為45億年，許多地質年代存在於上億年前無法僅用碳14去估計，幸好礦石中有其他放射性物質，例如雲母或長石中的鉀40會衰變為氬40，其半衰期約為13億年，此為鉀—氬年代定年法。
近期，考古學家發現一生物化石，且同地質層雲母中的鉀與氬的比例約為1:3，若以雲母的衰變情況來判斷此生物化石存在的年代，試估計此化石在下列哪一時代？（非選擇題，10 分）

距今時間	45-39 億年前	39-25 億年前	25-16 億年前	16-10 億年前	10-5.4 億年前
代（紀）	冥古宙	太古宙	古元古代	中元古代	新元古代

解 11. 設距今t年，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5720}}=\dfrac{1}{1024}\Rightarrow\dfrac{t}{5720}=10\Rightarrow t=57200$。

12. 設化石距今t億年前，因為雲母中鉀與氬的比例約為1:3，

表示鉀的比例衰變為原來的$\dfrac{1}{4}$，

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{13}}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\dfrac{t}{13}=2\Rightarrow t=26$億年，

若以雲母的衰變情況來判斷此生物化石存在的年代，最有可能屬太古宙時代。