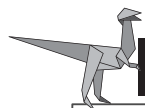
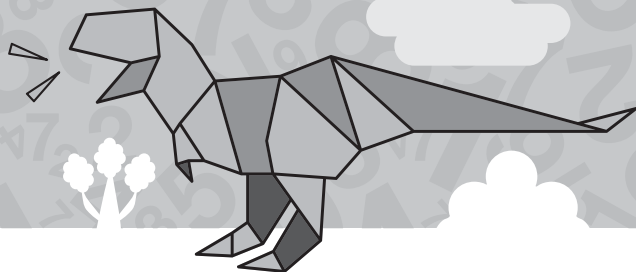


# 5 指數函數



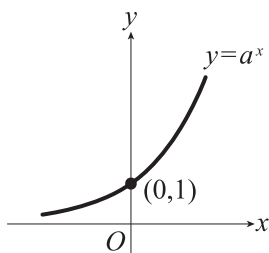
## 重點整理

### 1. 指數函數：

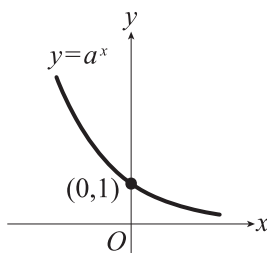
設  $a > 0$ ， $a \neq 1$ ， $x \in \mathbb{R}$ ，則  $y = f(x) = a^x$  稱為以  $a$  為底數的指數函數，定義域（ $x$  的取值範圍）為所有實數，值域（ $y$  的取值範圍）為所有正實數。

### 2. 指數函數的圖形：

(1)  $y = a^x$ ， $a > 1$ 。



(2)  $y = a^x$ ， $0 < a < 1$ 。



### 3. 指數函數圖形的性質：

(1) 圖形恆在  $x$  軸的上方。

(2) 圖形恆通過點  $(0, 1)$ 。

(3)  $a > 1$  時， $y = a^x$  為嚴格遞增函數，即  $\alpha < \beta \Rightarrow a^\alpha < a^\beta$ 。

(4)  $0 < a < 1$  時， $y = a^x$  為嚴格遞減函數，即  $\alpha < \beta \Rightarrow a^\alpha > a^\beta$ 。

(5) 在  $x$  軸上方的水平線和  $y = a^x$  的圖形恰交於一點，即  $a^\alpha = a^\beta \Rightarrow \alpha = \beta$ 。

(6) 圖形逐漸往  $x$  軸靠近（當  $a > 1$  時，往  $x$  軸負向靠近；當  $0 < a < 1$  時，往  $x$  軸正向靠近），但恆不相交。

(7)  $y = a^x$  和  $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$  的圖形對稱  $y$  軸。

(8) 圖形的凹口向上，即圖形上相異兩點的連線段必在指數函數圖形上方。

**觀念是非題** 試判斷下列敘述對或錯。(每題 2 分，共 10 分)

- ( ) 1. 已知  $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，指數函數  $f(x) = a^x$  的圖形為由左向右上升。

解

- ( ) 2. 已知  $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，指數函數  $f(x) = a^x$  之圖形的凹口向上。

解

- ( ) 3. 解不等式  $2^x > 2^3$ ，可得  $x > 3$ 。

解

- ( ) 4. 解不等式  $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^2$ ，可得  $x > 2$ 。

解

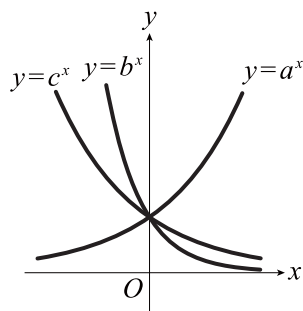
- ( ) 5. 已知常數  $e \approx 2.718281828$ ，因此可知常數  $e$  為循環小數。

解

## 一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 右圖為  $y = a^x$ 、 $y = b^x$ 、 $y = c^x$  的圖形，試比較四數  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、1 的大小關係為：\_\_\_\_\_。（由大到小）

解



2. 解方程式  $(\sqrt{2})^{2x+3} = 32$ ，可得  $x =$ \_\_\_\_\_。

解

3. 設兩直線  $y = 2$  和  $y = 6$  分別與  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  的圖形交於  $A$ 、 $B$  兩點，求  $\overline{AB} =$ \_\_\_\_\_。

（化成最簡根式）

解

4. 解方程式  $9^x - 7 \times 3^x - 18 = 0$ ，可得  $x =$ \_\_\_\_\_。

解

5. 比較  $a = \sqrt{0.7}$ 、 $b = (0.49)^{-0.75}$ 、 $c = \left(\frac{10}{7}\right)^{\frac{3}{5}}$  三數的大小關係：\_\_\_\_\_。  
(由大到小)

解

6. 解不等式  $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2x^2+x+1} \geq \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2x-1}$ ，可得  $x$  的範圍為\_\_\_\_\_。

解

7. 解不等式  $2^{1-2x} - 33 \times 2^{-x-2} + 1 < 0$ ，可得  $x$  的範圍為\_\_\_\_\_。

解

8. 設  $-1 \leq x \leq 2$ ，則  $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$  的最大值為\_\_\_\_\_。

解

9. 已知函數  $f(x) = 2(2^{2x} + 2^{-2x}) - 6(2^x + 2^{-x}) + 12$ ，試求下列各小題。
- (1) 令  $t = 2^x + 2^{-x}$ ，則  $t$  的範圍為\_\_\_\_\_。(2 分)
- (2) 若將函數  $f(x)$  以  $t$  表示，則新函數  $g(t) =$ \_\_\_\_\_。(3 分)
- (3) 試求函數  $g(t)$  的最小值為\_\_\_\_\_。(2 分)

解

10. 心理專家以數學模式  $F(t) = a(1 - 10^{-bt})$  來描述學生經過時間  $t$  (星期) 的學習之後所得到的學習量 (或成果)，這裡的常數  $a$  與  $b$  跟學生及學習的科目相關。若小明一星期可以熟背 100 個英文單字，兩星期可以熟背 150 個英文單字，則小明三星期可以熟背\_\_\_\_\_個英文單字。

解

## 二、素養混合題（共 20 分）

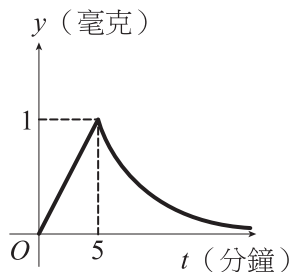
第 11 至 12 題為題組

- ( ) 11. 某國在 2021 年 5 月面臨新型冠狀病毒肆虐，根據 WHO 的統計數據顯示染疫人數每經過 5 日變為原來的 2 倍，函數  $f(t)$  表示經過  $t$  日後的染疫人數，已知  $f(0) = 50$ ，則下列哪個函數符合此國的染疫情況？（單選題，10 分）

(A)  $f(t) = 50 + \frac{1}{5}t$  (B)  $f(t) = 50 + \frac{1}{5}t^2$  (C)  $f(t) = 50 \times 3^{\frac{t}{5}}$

(D)  $f(t) = 50 \times 2^{\frac{t}{5}}$  (E)  $f(t) = \frac{50 \times 2^t}{5}$ 。

12. 經過幾個月後，此國家終於控制疫情，學生紛紛回到校園，為了預防新型冠狀病毒，學校固定每周使用漂白水進行消毒。漂白水剛開始噴灑時，教室內空氣中每立方公尺的漂白水量  $y$ （毫克）與時間  $t$ （分鐘）成正比，5 分鐘噴灑完後， $y$  與  $t$  的函數關係為  $y = \left(\frac{1}{8}\right)^{t+k}$ ，其中  $k$  為常數， $t \geq 5$ ，如圖所示。為了避免學



生吸入漂白水而影響呼吸道健康，當空氣中每立方公尺的漂白水量不大於 0.0625 毫克時，學生方可進入教室，那麼從開始噴灑後，至少需經過幾分鐘（取到整數位）學生才能進入教室？（非選擇題，10 分）

解