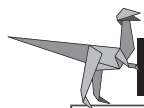
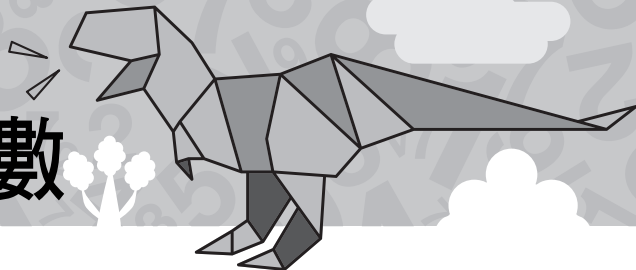


4 科學記號與常用對數



重點整理

1. 定義：

已知 b 為正實數， x 為任意實數，當 $10^x = b$ 時，我們用符號 $\log_{10} b$ 來表示 x ，寫成 $\log_{10} b = x$ ，我們稱 $\log_{10} b$ 為以 10 為底數 b 的對數。其中 b 稱為真數，10 稱為底數。

(1) 以 10 為底數的對數稱為常用對數，通常 10 可以省略，以 $\log b$ 表示。

(2) $b = 10^x \Leftrightarrow \log_{10} b = x$ 。

(3) $\log_{10}(10^x) = x$ 。

(4) $10^{\log_{10} b} = b$ 。

(5) 常用對數增加 1，表原本數據乘上 10 倍；常用對數減少 1，表原本數據乘上 $\frac{1}{10}$ 倍。

原始值 x	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	100
對數值 $\log x$	-2	-1	0	1	2

2. 科學記號：

任意正實數 a 都可用以下形式來表示： $a = b \times 10^n$ ，其中 $1 \leq b < 10$ ， n 是整數，稱為 a 的科學記號表示法，其中 b 稱為係數， n 稱為指數。

例如：

(1) $A = 5380000 = 5.38 \times 10^6$ 表 A 的整數部分為 7 位數，且最高位數字為 5。

(2) $B = 0.00538 = 5.38 \times 10^{-3}$ 表 B 在小數點後第 3 位開始不為 0，且此不為 0 的數字為 5。

3. 有效數字：

在科學測量中，一個測量值包含準確值與一位估計值，準確值取到最小刻度單位，估計值為最小刻度的下一位，準確值加上一位估計值所得的數字就合稱為有效數字。



觀念是非題 試判斷下列敘述對或錯。(每題 2 分，共 10 分)

(×) 1. 若 a 為正實數，則 $\log_{10} a$ 亦是正實數。

解 反例：若 $a = \frac{1}{10}$ ，則 $\log_{10} a = \log_{10} \frac{1}{10} = -1$ 。

(○) 2. 已知 $\log a = 1.4$ ， $\log b = 2.4$ ， $\log c = 3.4$ ， $\log d = 4.4$ ，則 $a + d > b + c$ 。

解 $a + d = 10^{1.4} + 10^{4.4}$ 的整數部分為 5 位數字（只要看 $10^{4.4}$ 就可以），
 $b + c = 10^{2.4} + 10^{3.4}$ 的整數部分為 4 位數字（只要看 $10^{3.4}$ 就可以），
 故 $a + d > b + c$ 。

(×) 3. 已知 $\log a = 3.2$ ， $\log b = 1.2$ ，則 a 是 b 的 2 倍。

解 $\log a = 3.2 \Rightarrow a = 10^{3.2}$ ， $\log b = 1.2 \Rightarrow b = 10^{1.2}$ ，故 a 是 b 的 100 倍。

(×) 4. 將數字 5201314202099 取 6 位有效數字並以科學記號表示為 5.201314×10^{12} 。

解 6 位有效數字為 5.20131×10^{12} 。

(○) 5. 已知 $\log a = 4.7$ ，則 a 的整數部分為 5 位數。

解 $\log a = 4.7 \Rightarrow a = 10^{4.7}$ ，又 $10^4 < 10^{4.7} < 10^5$ ，故 a 的整數部分為 5 位數。

一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 計算下列各小題的數值。

(1) $\log \frac{1}{100} = \underline{-2}$ 。(2 分)

(2) $\log 100\sqrt{10} = \underline{\frac{5}{2}}$ 。(2 分)

(3) $100^{\log \sqrt{7}} = \underline{7}$ 。(3 分)

解 (1) $\log \frac{1}{100} = \log 10^{-2} = -2$ 。

(2) $\log 100\sqrt{10} = \log \left(10^2 \times 10^{\frac{1}{2}} \right) = \log 10^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}$ 。

(3) $100^{\log \sqrt{7}} = (10^2)^{\log \sqrt{7}} = (10^{\log \sqrt{7}})^2 = (\sqrt{7})^2 = 7$ 。

2. 設 $a = \log 2$, $b = \log 3$, $c = \log 7$, 則 $10^{2a+c-b} = \underline{\frac{28}{3}}$ 。

解 $a = \log 2 \Rightarrow 10^a = 2$, 同理 $10^b = 3$, $10^c = 7$,

$$\text{所以 } 10^{2a+c-b} = \frac{10^{2a} \times 10^c}{10^b} = \frac{2^2 \times 7}{3} = \frac{28}{3} \text{ 。}$$

3. 設 a 、 b 皆大於 0 , $\log a = 10$, $\log b = 8$, 則 $\log(a+b)$ 最接近的整數為 10 。

解 $\log a = 10 \Rightarrow a = 10^{10}$, $\log b = 8 \Rightarrow b = 10^8$,

$$\text{又 } a+b = 10^{10} + 10^8 = 1 \times 10^{10} + 0.01 \times 10^{10} = 1.01 \times 10^{10} \text{ ,}$$

$$\text{所以 } \log(a+b) = \log(1.01 \times 10^{10}) \text{ 最接近 } \log(1 \times 10^{10}) = 10 \text{ 。}$$

4. 如附表：求 $\log \frac{s-r}{q-p} = \underline{0.4}$ 。

原始值 x	100	p	q	r	s	1000
對數值 $\log x$	2	2.1	2.3	2.5	2.7	3

解 $s = 10^{2.7}$, $r = 10^{2.5}$, $p = 10^{2.1}$, $q = 10^{2.3}$,

$$s-r = 10^{2.7} - 10^{2.5} = 10^{2.5}(10^{0.2} - 1) \text{ , } q-p = 10^{2.3} - 10^{2.1} = 10^{2.1}(10^{0.2} - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{s-r}{q-p} = \frac{10^{2.5}(10^{0.2} - 1)}{10^{2.1}(10^{0.2} - 1)} = 10^{0.4} \text{ , 故 } \log \frac{s-r}{q-p} = \log(10^{0.4}) = 0.4 \text{ 。}$$

5. 已知 SARS 病毒的直徑為 85 奈米，其中 1 奈米為 10^{-9} 公尺，而近期造成全球疫情嚴重的新型冠狀病毒，其病毒直徑為 0.12 微米，其中 1 微米為 10^{-6} 公尺，請問新型冠狀病毒的病毒直徑約為 SARS 病毒的 1.4 倍。(取二位有效數字)

解 SARS 病毒的直徑 = 85 奈米 = $85 \times 10^{-9} = 8.5 \times 10^{-8}$ 公尺，

$$\text{新型冠狀病毒的直徑} = 0.12 \text{ 微米} = 0.12 \times 10^{-6} = 1.2 \times 10^{-7} \text{ 公尺，}$$

$$\text{所以 } \frac{\text{新冠}}{\text{SARS}} = \frac{1.2 \times 10^{-7}}{8.5 \times 10^{-8}} = \frac{12 \times 10^{-8}}{8.5 \times 10^{-8}} \approx 1.4 \text{ 。}$$

6. 酸鹼 pH 值表示一溶液中氫離子的濃度，其定義為 $\text{pH 值} = -\log M$ ，其中 M 為溶液中氫離子的濃度。若檸檬汁的 pH 值為 3，小蘇打水的 pH 值為 8，則檸檬汁氫離子濃度為小蘇打水氫離子濃度的 10^5 倍。

解 檸檬汁的 $\text{pH} = -\log M_1 = 3 \Rightarrow \log M_1 = -3 \Rightarrow M_1 = 10^{-3}$ ，
 小蘇打水的 $\text{pH} = -\log M_2 = 8 \Rightarrow \log M_2 = -8 \Rightarrow M_2 = 10^{-8}$ ，
 所以 $\frac{M_1}{M_2} = \frac{10^{-3}}{10^{-8}} = 10^5$ 倍。

7. 承上題，今小明有一瓶 $\text{pH} = 3$ 的檸檬水 10ml，加入 $\text{pH} = 7$ 的純水 990ml 稀釋，而稀釋後的檸檬水 1000ml，此時的 pH 值最接近的整數為 5。

解 檸檬水的 $\text{pH} = 3 \Rightarrow M_1 = 10^{-3}$ ，純水 $\text{pH} = 7 \Rightarrow M_0 = 10^{-7}$ ，
 稀釋後的濃度 $M = \frac{10^{-3} \times 10 + 10^{-7} \times 990}{1000} = \frac{1 \times 10^{-2} + 0.0099 \times 10^{-2}}{1000} = \frac{1.0099 \times 10^{-2}}{1000}$
 $= 1.0099 \times 10^{-5}$ ，最接近 10^{-5} ，
 故最接近的整數 $\text{pH} = -\log(10^{-5}) = 5$ 。

8. 若 $\log A = -3.5$ ，則 A 從小數點後第 m 位開始出現不為 0 的數字，試求 $m =$ 4。

解 $\log A = -3.5 \Rightarrow A = 10^{-3.5} = 10^{-4+0.5} = 10^{0.5} \times 10^{-4}$ ，
 故 A 在小數點後第 4 位開始不為 0， $m = 4$ 。

9. 形如 $2^n - 1$ 的質數稱作梅森質數，鮑爾斯在 1914 年發現 $2^{107} - 1$ 是一個質數，試求 $2^{107} - 1$ 為 33 位數。($\log 2 \approx 0.3010$)

解 $2^{107} - 1$ 的位數與 2^{107} 的位數相同，

$$2^{107} = (10^{\log 2})^{107} = 10^{107 \times \log 2} \approx 10^{107 \times 0.3010} = 10^{32.207} = 10^{0.207} \times 10^{32}, \text{ 故 } 2^{107} - 1 \text{ 為 } 33 \text{ 位數。}$$

10. 已知 $\log 3 \approx 0.4771$ ， n 是正整數且 3^n 是 100 位數，則 $n =$ 208 或 209。(有兩解)

解 $3^n = (10^{\log 3})^n = 10^{n \times \log 3} \approx 10^{n \times 0.4771}$ ，

$$\text{又 } 3^n \text{ 為 } 100 \text{ 位數} \Rightarrow 99 \leq n \times 0.4771 < 100 \Rightarrow \frac{99}{0.4771} \leq n < \frac{100}{0.4771} \Rightarrow 207.5 \leq n < 209.6,$$

故 $n = 208$ 或 209 。

二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 12 題為題組

駟洧老師觀察現代人對於耳機的品質越來越要求，奉心公司近期推出幾款抗噪耳機，可以根據消費者較常使用耳機的空間需求，去選擇隔絕外在聲音程度所適用的耳機。奉心公司推出的耳機共有 4 款，以下為耳機的抗噪程度模型：



令 $N(E)$ 為抗噪的程度分貝數， $N(E) = 10^{a+bE}$ ，其中 E 為耳機中抗噪的褶皺數，其中 a 、 b 為常數。

(ACE) 11. 下表為 4 款耳機的商品資訊，請選出正確的選項：（多選題，10 分）

$N(E)$ （分貝）	20	40	M	P
E （褶皺數）	2	4	6	7

- (A) 依上述所給資訊，可以求出 $a = 1$ 。
 (B) 依上述所給資訊，可以求出 $b \approx 0.3010$ 。
 (C) 依上述所給資訊，可推論 P 為 M 的 $\sqrt{2}$ 倍。
 (D) 依上述所給資訊，可推論 P 為 M 的 1 倍。
 (E) 依上述所給資訊，可推論 P 約為 113 分貝（四捨五入至整數位）。
 12. 今天的數學課，全班同學一起討論完上列問題後，實習老師彥霆老師想測試同學們有沒有認真上課，延伸一道題目在黑板上「承上題， $N(E) = 10^{a+bE}$ ，求當耳機中的褶皺數為 8 時，耳機的抗噪程度分貝數為多少？」請同學們作為回家功課，現在大家一起來完成作業。（不能用對數的運算性質）（非選擇題，10 分）

解 11.
$$\begin{cases} 20 = 10^{a+2b} \dots\dots ① \\ 40 = 10^{a+4b} \dots\dots ② \end{cases}$$

$$\frac{②}{①} \Rightarrow \frac{10^{a+4b}}{10^{a+2b}} = \frac{40}{20} \Rightarrow 10^{2b} = 2 \Rightarrow 2b = \log 2 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \log 2 \approx \frac{1}{2} \times 0.301, \quad$$

又 $10^{2b} = 2$ 代入 ① 得 $10^{a+2b} = 10^a \times 10^{2b} = 20 \Rightarrow 10^a \times 2 = 20 \Rightarrow 10^a = 10$ ，所以 $a = 1$ 。

所以 $N(E) = 10^{1+bE}$ ， $M = 10^{1+6b} = 10^1 \times 10^{6b} = 10^1 \times (10^{2b})^3 = 10 \times 2^3 = 80$ ，

$P = 10^{1+7b} = 10^1 \times 10^{7b} = 10^1 \times (10^{2b})^{\frac{7}{2}} = 10 \times 2^{\frac{7}{2}} = 80\sqrt{2} \approx 113$ ，故選 (A)(C)(E)。

12. 因為 $a = 1$ ， $b = \frac{1}{2} \log 2$ ，故 $N(E) = 10^{1+E \times \frac{1}{2} \log 2}$ ，

當耳機中的褶皺數為 8 時，即 $E = 8$ 時，

得 $N(8) = 10^{1+8 \times \frac{1}{2} \log 2} = 10^1 \times 10^{8 \times \frac{1}{2} \log 2} = 10 \times 10^{4 \times \log 2} = 10 \times (10^{\log 2})^4 = 10 \times 2^4 = 160$ ，

故耳機的抗噪程度為 160 分貝。