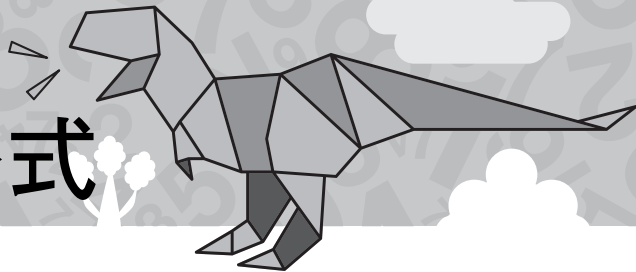


3 三角的和差角公式



重點整理

1. 和角公式：

$$(1) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta。$$

$$(2) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta。$$

$$(3) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta。$$

$$(4) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta。$$

$$(5) \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}。$$

$$(6) \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}。$$

2. 兩直線的夾角公式：

設 L_1 、 L_2 非鉛直線，且直線 $L_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ 的斜率為 m_1 ，

直線 $L_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ 的斜率為 m_2 ，若 L_1 和 L_2 的夾角為 θ ($\theta \neq 90^\circ$)，

$$\text{則 } \tan \theta = \pm \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \times m_2}。$$

3. 倍角公式：

$$(1) \sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta。$$

$$(2) \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 1 - 2\sin^2 \theta。$$

$$(3) \tan 2\theta = \frac{2\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}。（其中 $\tan \theta$ 有定義且 $\tan^2 \theta \neq 1$ ）$$

4. 半角公式：

$$(1) \sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \quad (\text{正負號由 } \frac{\theta}{2} \text{ 所在的象限來決定})。$$

$$(2) \cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \quad (\text{正負號由 } \frac{\theta}{2} \text{ 所在的象限來決定})。$$

$$(3) \tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \quad (\text{正負號由 } \frac{\theta}{2} \text{ 所在的象限來決定})。$$



觀念是非題 試判斷下列敘述對或錯。(每題 2 分，共 10 分)

() 1. $\cos 40^\circ \cos 20^\circ + \sin 40^\circ \sin 20^\circ = \frac{1}{2}$ 。

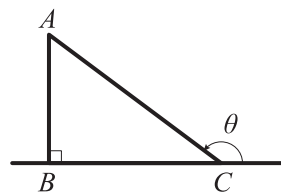
解

() 2. 已知 α 、 β 為銳角，且 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ， $\tan \beta = \frac{1}{3}$ ，則 $\alpha + \beta = 45^\circ$ 或 135° 。

解

() 3. 已知 θ 為有向角， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{BC} = 4$ ， $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ ，
如圖所示，則 $\sin 2\theta = \frac{24}{25}$ 。

解



() 4. $\frac{\sin 75^\circ}{\sin 25^\circ} - \frac{\cos 75^\circ}{\cos 25^\circ} = 2$ 。

解

16

單元 3 三角的和差角公式

() 5. 若 θ 為第二象限角時，則半角公式 $\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$ 的正負號取正。

解

一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. $\triangle ABC$ 中，設 $\tan A = \frac{1}{3}$ ， $\cos B = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ，則 $\angle C =$ _____ 度。

解

2. 設 A ， B 均為第二象限角，且 $\sin A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ， $\cos B = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ ，求 $A+B$ 的值
= _____。

解

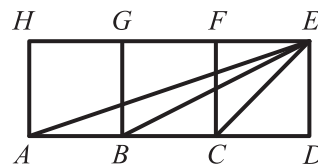
3. 設 α ， β 均為銳角， $\cos \alpha = \frac{1}{7}$ ， $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{11}{14}$ ，則 $\cos \beta =$ _____。

解

18 單元 3 三角的和差角公式

4. 右圖為三個大小相同的連續正方形。若 $\angle EAD = \alpha$ ， $\angle EBD = \beta$ ， $\angle AEB = \gamma$ ，則 $\tan \gamma =$ _____。

解



5. 試求 $\tan 37^\circ + \tan 23^\circ + \sqrt{3} \tan 37^\circ \tan 23^\circ =$ _____。

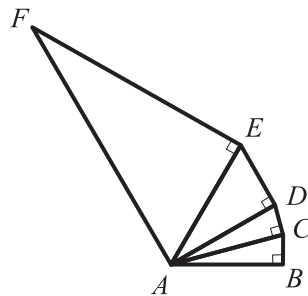
解

6. 已知 $\tan \alpha + \tan \beta = \frac{5}{3}$ ， $\tan \alpha \tan \beta = -\frac{1}{3}$ ，則 $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} =$ _____。

解

7. 小龍設計了一艘帆船，帆船的帆型如圖，是由四個直角三角形堆疊而成的圖形，假設 $\overline{AF} = 8$ ， $\angle BAC = \angle CAD = 15^\circ$ ， $\angle DAE = 30^\circ$ ， $\angle EAF = 60^\circ$ ，則 \overline{BC} 的值為_____。

解



8. 設 $\sin \theta = \frac{8}{5} \sin \frac{\theta}{2}$ ，求 $\cos \theta =$ _____。

解

9. 設 θ 為銳角，且 $\sqrt{1 + \sin \theta} - \sqrt{1 - \sin \theta} = \frac{4}{5}$ ，求 $\cos \theta =$ _____。

(提示： $1 = \sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}$)

解

20 單元 3 三角的和差角公式

10. 設 $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{3}$ ，求 $\frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta}$ 的值為_____。

解

二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 12 題為題組

某空拍機的「跟拍模式」會對著拍攝物維持固定的水平距離與俯角來跟隨拍攝，某天小龍操作該空拍機的「跟拍模式」並設定空拍機與小龍維持 5 公尺的水平距離且俯角為 θ ，但拍攝的過程中遇到上方遮蔽物的關係，所以須將空拍機更改設定為空拍機與小龍維持 5 公尺的水平距離且俯角為 $\frac{\theta}{2}$ 。若已知更改設定後，空拍機與小龍的直線距離恰為 6 公尺，試回答下列問題。



() 11. $\cos \frac{\theta}{2}$ 的值應為何？（單選題，8 分）

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{5}$ (E) $\frac{5}{6}$ 。

12. 更改設定之前，空拍機與小龍的直線距離為何？（非選擇題，12 分）

解