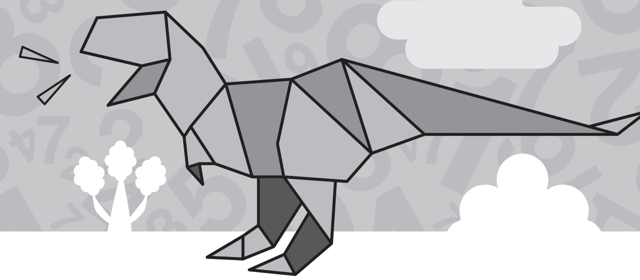
# 綜合習題 單元 8～11

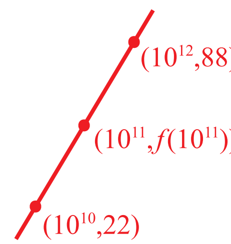


## 一、單選題（每題 7 分，共 14 分）

（ C ）**1.** 萱萱找出一次函數 $f(x)=ax+b$ 滿足 $f(10^{10})=22$，$f(10^{12})=88$，則 $f(10^{11})$ 之值為下列何者？

(A) 24 (B) 26 (C) 28 (D) 30 (E) 32。 〔搭配單元 9〕

解 $f(x)=ax+b$ 為一直線，令 $f(10^{11})=k$，




則 $m=\dfrac{k-22}{10^{11}-10^{10}}=\dfrac{88-k}{10^{12}-10^{11}}\Rightarrow\dfrac{k-22}{10^{10}(10-1)}=\dfrac{88-k}{10^{11}(10-1)}$

$\Rightarrow 10(k-22)=88-k\Rightarrow 11k=308\Rightarrow k=28$。

故選(C)。

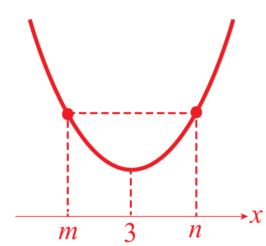
（ B ）**2.** 已知 $f(x)=x^2-6x+k$，其中 $k$ 為實數，若 $f(x)$ 在 $m\le x\le n$ 中有 2 個 $x$ 值都能使 $f(x)$ 得到最大值，則 $m+n$ 為下列何者？

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 12。 〔搭配單元 9〕

解 $f(x)=x^2-6x+k=(x-3)^2+k-9$ 為開口向上且對稱軸為 $x-3=0$，

在 $m\le x\le n$ 中有 2 個 $x$ 值都能使 $f(x)$ 得到最大值，

即 3 為 $m$ 、 $n$ 的中點，則 $m+n=6$。故選(B)。



## 二、多選題（每題 10 分，共 20 分）

（ABCDE）**3.** 已知多項式 $f(x)$，經兩次的除法運算，其結果分述如下：

① $f(x)$ 除以 $x-1$，得商式為 $Q_1(x)$，餘式為 $1$

② $Q_1(x)$ 除以 $x-1$，得商式為 $1$，餘式為 $3$

試選出正確的選項。

(A) $f(x)$ 是二次多項式　(B) $f(1)=1$

(C) $f(x)$ 除以 $Q_1(x)$ 的餘式為 $1$　(D) $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式為 $3x-2$

(E) $f(1+\sqrt{2})=3+3\sqrt{2}$。　〔搭配單元 8〕

解　$f(x)=(x-1)Q_1(x)+1$，又 $Q_1(x)=(x-1)\times 1+3$，

故 $f(x)=(x-1)[(x-1)\times 1+3]+1=(x-1)^2+3(x-1)+1=x^2+x-1$。

(A)○。　(B)○。　(C)○。　(D)○：餘式為 $3(x-1)+1=3x-2$。

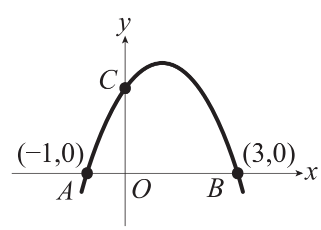
(E)○：$f(1+\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2+3(\sqrt{2})+1=3+3\sqrt{2}$。

故選(A)(B)(C)(D)(E)。

（BCDE）**4.** 右圖為 $f(x)=ax^2+bx+c$ 之函數圖形，其中 $a$、$b$、$c$ 為已知實數，請問下列各選項的敘述哪些為真？

(A) $a>0$　(B) $b>0$　(C) $c>0$　(D) $a+b+c>0$

(E) $4a+2b+c>0$。　〔搭配單元 9〕




解　(A)×：開口向下⇒$a<0$。

(B)○：頂點在 $y$ 軸右側⇒$-\dfrac{b}{2a}>0\Rightarrow b>0$。

(C)○：$y$ 截距在原點上方⇒$c>0$。

(D)○：$f(1)=a+b+c$，由圖知 $f(1)>0$。

(E)○：$f(2)=4a+2b+c$，由圖知 $f(2)>0$。

故選(B)(C)(D)(E)。

## 三、填充題（每題 8 分，共 48 分）

**5.** 設多項式 $f(x)$ 滿足 $f(-1)=5$，$f(0)=7$，$f(1)=-3$，$f(2)=4$，求 $f(x)$ 的奇次項係數和為 ____-4____。〔搭配單元 8〕

解 令 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$，

$$\begin{cases} f(1)=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n \cdots\cdots ① \\ f(-1)=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_n(-1)^n \cdots\cdots ② \end{cases}$$

$\dfrac{①-②}{2} \Rightarrow$ 奇次項係數和 $a_1+a_3+a_5+\cdots=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}=\dfrac{(-3)-(5)}{2}=-4$。

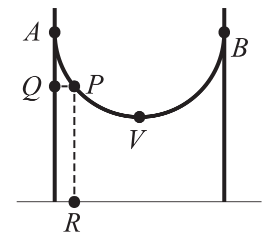
**6.** 已知 $2\times17^5-35\times17^4+16\times17^3+7\times17^2+171\times17+k=40$，則 $k=$ ____23____。〔搭配單元 8〕

解 令 $f(x)=2x^5-35x^4+16x^3+7x^2+171x+k$，且 $f(17)=40$，

$$\begin{array}{cccccc|c} 2 & -35 & +16 & +7 & +171 & +k & 17 \\ & 34 & -17 & -17 & -170 & 17 & \\ \hline 2 & -1 & -1 & -10 & 1 & 40 & \end{array}$$

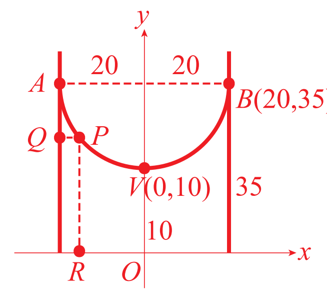
故 $k+17=40$，則 $k=23$。

**7.** 如右圖，在兩面平行且相距 40 公尺的筆直聳立山壁間懸掛著一座呈現拋物線形狀的吊橋，已知吊橋的兩端點 $A$ 、 $B$ 離地均為 35 公尺，且最低點 $V$ 離地為 10 公尺。若璿承想在吊橋上的某點 $P$ 作一緊急逃生繩索，向其中一面的山壁掛上一條水平繩索 $\overline{PQ}$ 及垂降一條鉛直繩索 $\overline{PR}$ 固定於地面，以便緊急逃生的進行，則 $\overline{PQ}+\overline{PR}$ 最短為____26____公尺。〔搭配單元 9〕




解 坐標化頂點 $V(0,10)$，令二次函數 $y=ax^2+10$，

過 $(20,35)\Rightarrow 35=a\times 20^2+10\Rightarrow a=\dfrac{25}{400}=\dfrac{1}{16}$，所以 $y=\dfrac{1}{16}x^2+10$。




設 $P\left(b,\dfrac{1}{16}b^2+10\right)$，其中 $b<0$，

$$\overline{PQ}+\overline{PR}=(b+20)+\frac{1}{16}b^2+10$$

$$=\frac{1}{16}\left(b^2+16b+64\right)+30-4=\frac{1}{16}(b+8)^2+26，$$

$\overline{PQ}+\overline{PR}$ 最短為 26 公尺。

**8.** 若 $f(x)=x^3+ax^2+bx-7$ 的圖形對稱於 $(2,1)$，則 $a+b=$____6____。〔搭配單元 10〕

解 $f(x)$ 為三次函數且對稱於 $(2,1)$，令 $f(x)=(x-2)^3+p(x-2)+1$，

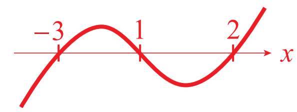
展開 $f(x)=\left(x^3-6x^2+12x-8\right)+px-2p+1$

$\Rightarrow f(x)=x^3-6x^2+(12+p)x+(-2p-7)=x^3+ax^2+bx-7$，

則 $p=0$， $a=-6$， $b=12$，故 $a+b=6$。

**9.** 已知 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 為實數，滿足 $ax^3+bx^2+cx-6\le 0$ 的解為 $-3\le x\le 1$ 或 $x\ge 2$ 時，則 $a+b+c=$ ____6____ 。〔搭配單元 11〕

解 由解 $-3\le x\le 1$ 或 $x\ge 2$ 反推



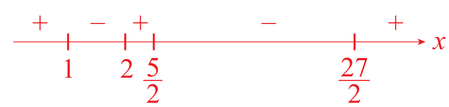

得 $(x+3)(x-1)(x-2)\ge 0$

$\Rightarrow x^3-7x+6\ge 0\Rightarrow -x^3+7x-6\le 0$ ，

與 $ax^3+bx^2+cx-6\le 0$ 同義，故 $a=-1$ ， $b=0$ ， $c=7$ ，得 $a+b+c=6$ 。

**10.** 試問不等式 $(x^2-3x+2)(2x-5)(2x-27)\le 0$ 有 ____13____ 個整數解。〔搭配單元 11〕

解 $(x^2-3x+2)(2x-5)(2x-27)=(x-1)(x-2)(2x-5)(2x-27)\le 0$




$\Rightarrow 1\le x\le 2$ 或 $\frac{5}{2}\le x\le \frac{27}{2}$ ，

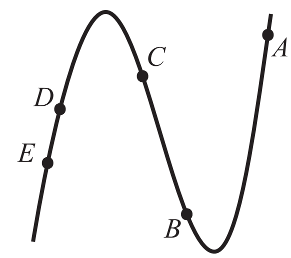
整數 $x$ 有1、2、3、…、13，共有13個。

## 四、素養混合題（共 18 分）

<u>第 11 至 13 題為題組</u>

小乘一家人到花蓮旅遊，第一天安排了五個位在圖(一)GOOGLE MAP 上的景點，分別是松園別館、台開心農場、吉安慶修院、楓林步道以及蓮城蓮花園，回飯店後，他發現今日旅遊行駛的路線近似一個三次函數 $f(x)$，於是將五個景點與路線用繪圖軟體呈現，如圖(二)。

圖(一)



圖(二)

(　D　) **11.** 已知 $B\left(\frac{5}{2},m\right)$、$C\left(n,\frac{5}{4}\right)$、$D(1,1)$，$f(x)$ 的對稱中心為 $(2,0)$ 且 $B$、$C$ 對稱於對稱中心，試問數對 $(m,n)=$？（單選題，5 分）

(A) $\left(\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right)$　(B) $\left(\frac{3}{4},-\frac{5}{2}\right)$　(C) $\left(-\frac{5}{4},-\frac{3}{2}\right)$　(D) $\left(-\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right)$。　〔搭配單元 10〕

(　B　) **12.** 承上題，試問上述三次函數 $f(x)$ 與下列哪個三次函數的大域特徵相同？（單選題，5 分）　〔搭配單元 10〕

(A) $x^3-2x+3$　(B) $2x^3+3$　(C) $-5x^3+2x^2+6x+3$　(D) $-(x-2)^3-5(x-2)+3$。

**13.** 根據以上資訊，試求 $f(x)\le 0$ 的解為何？（非選擇題，8 分）　〔搭配單元 11〕

解　11. 因為 $B$、$C$ 對稱於 $(2,0)$，所以 $\begin{cases}\dfrac{\frac{5}{2}+n}{2}=2\\ \dfrac{m+\frac{5}{4}}{2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=\frac{3}{2}\\ m=-\frac{5}{4}\end{cases}$，得 $(m,n)=\left(-\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right)$，故選(D)。

12. 因為 $f(x)$ 的對稱中心為 $(2,0)$，且過 $B\left(\frac{5}{2},-\frac{5}{4}\right)$、$C\left(\frac{3}{2},\frac{5}{4}\right)$、$D(1,1)$，

所以設 $f(x)=a(x-2)^3+p(x-2)$，$\begin{cases}f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{8}a+\frac{1}{2}p=-\frac{5}{4}\\ f(1)=-a-p=1\end{cases}\Rightarrow(a,p)=(2,-3)$，

故 $f(x)$ 的大域特徵近似於 $y=2x^3$ 與(B)相同。故選(B)。

13. $f(x)=2(x-2)^3-3(x-2)\le 0\Rightarrow(x-2)\left[2(x-2)^2-3\right]\le 0$

$\Rightarrow(x-2)\left(2x^2-8x+5\right)\le 0\Rightarrow x\le\frac{4-\sqrt{6}}{2}$ 或 $2\le x\le\frac{4+\sqrt{6}}{2}$。