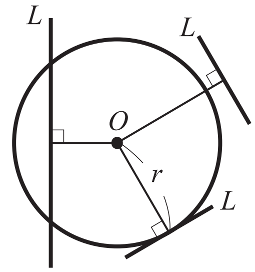
7 圓與直線的關係

重點整理

1. 圓與直線的關係：

在平面上有一圓C，圓心為O，半徑為r，L為平面一直線，則直線L與圓C之關係有相交於兩點、相切、不相交。



(1) 幾何意義：過圓心O到直線L之距離常以$d(O,L)$來表示

① L與圓C相交於兩點（相割）$\Rightarrow d(O,L)<r$。

② L與圓C相切（相切）$\Rightarrow d(O,L)=r$。

③ L與圓C不相交（相離）$\Rightarrow d(O,L)>r$。

(2) 代數意義：直線$L: y=mx+k$代入圓：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$整理成一元二次方程式$Ax^2+Bx+C=0$，其中$D=B^2-4AC$，

① L與圓C相交於兩點$\Rightarrow D>0$。

② L與圓C相切$\Rightarrow D=0$。

③ L與圓C不相交$\Rightarrow D<0$。

2. 切線：

已知h、k為實數，r為正實數，圓：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，其中圓心$O(h,k)$，半徑r。

(1) 已知切線的斜率求切線：

已知切線斜率m，設切線$L: y=mx+k$，利用$d(O,L)=r$，求出k（兩解）。

(2) 已知圓外一點求切線：

已知圓外一點$P(x_0,y_0)$，設切線$L: y-y_0=m(x-x_0)$，利用$d(O,L)=r$，求出m（兩解）。

(3) 已知切點求切線：

已知切點$Q(x_0,y_0)$，又切線斜率m與$m_{\overline{OQ}}$垂直，求出m。

觀念是非題 試判斷下列敘述對或錯。(每題 2 分，共 10 分)

(○) **1.** 直線 $L: 4x-3y+5=0$ 與圓 $C: x^2+y^2-6x-8y=0$ 的關係為相割。

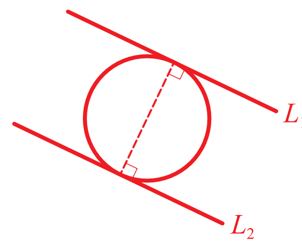
解 圓 $C: (x-3)^2+(y-4)^2=25$，其中圓心 $O(3,4)$，半徑 $r=5$，

又 $d(O,L)=\dfrac{|4(3)-3(4)+5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=1<r$，故直線 L 與圓 C 相交兩點。

(×) **2.** 設一圓同時與直線 $L_1: x+2y+3=0$，直線 $L_2: x+2y+8=0$ 相切，則此圓半徑為 $\sqrt{5}$。

解 因為直線 L_1 與直線 L_2 平行，故 $d(L_1,L_2)=$ 直徑，

故半徑 $=\dfrac{1}{2}\times d(L_1,L_2)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{|8-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$。



(○) **3.** 平面上一圓 C 和一點 P，P 對圓 C 作切線。若 P 在圓外，則切線有兩條；若 P 在圓上，則切線恰有一條；若 P 在圓內，則切線不存在。

解 因為 P 在圓外、圓上或圓內，可以對圓所作的切線數目不同。

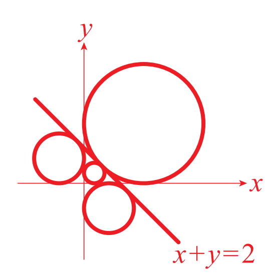
(○) **4.** 已知圓 $C: x^2+y^2=16$ 及一直線 $L: 4x+3y-10=0$，則圓上有三個點到直線 L 的距離為 2。

解 圓 $C: x^2+y^2=16$，其中圓心 $O(0,0)$，半徑 $r=4$，

又 $d(O,L)=\dfrac{|0+0-10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$，故圓上有三個點到直線 L 的距離為 2。

(×) **5.** 同時與 x 軸、y 軸與直線 $L: x+y=2$ 相切的圓恰有一個。

解 符合題意的圓有四個。



一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 已知圓 $C:x^2+y^2+3x-5y-4=0$，求圓 C 與 x 軸的交點坐標為 $\underline{(-4,0)\text{或}(1,0)}$。

解 與 x 軸交點，令 $y=0$ 代入圓 C 得 $x^2+3x-4=0$

$\Rightarrow(x+4)(x-1)=0\Rightarrow x=-4$ 或 1，

所以交點坐標為 $(-4,0)$ 或 $(1,0)$。

2. 已知圓 $C:x^2+y^2-2x-4y+k=0$ 與 x 軸相切，求 $k=\underline{\quad 1 \quad}$。

解 $x^2+y^2-2x-4y+k=0\Rightarrow(x-1)^2+(y-2)^2=5-k$，其圓心為 $(1,2)$，半徑為 $\sqrt{5-k}$。

因為圓 C 與 x 軸相切，可知 $\sqrt{5-k}=2$，所以 $k=1$。

3. 設直線 $L:x-2y=0$，圓 $C:x^2+y^2+6x-2y+5=0$，求垂直於 L 且與圓 C 相切的切線方程式為 $\underline{2x+y+10=0\text{或}2x+y=0}$。

解 設垂直於 L 的切線 $M:2x+y+k=0$，

又圓 $C:x^2+y^2+6x-2y+5=0\Rightarrow(x+3)^2+(y-1)^2=5$，

其中圓心 $O(-3,1)$，半徑 $=\sqrt{5}$。

相切 $\Rightarrow d(O,M)=r\Rightarrow\dfrac{|2(-3)+(1)+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}\Rightarrow|k-5|=5\Rightarrow k=10$ 或 0，

故切線 $M:2x+y+10=0$ 或 $2x+y=0$。

4. 設圓 $C: x^2+y^2+4x+k=0$ 與直線 $L: x-y=0$ 不相交，試求實數 k 的範圍為 $\underline{\quad 2<k<4 \quad}$ 。

解 $C:(x+2)^2+y^2=-k+4$ 的圖形為一圓，可知 $-k+4>0 \Rightarrow k<4$ 。

解聯立方程式 $\begin{cases} x^2+y^2+4x+k=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ ，

將 $y=x$ 代入 $x^2+y^2+4x+k=0 \Rightarrow x^2+x^2+4x+k=0$ ，

化簡後可得 $2x^2+4x+k=0$ ，因為圓 C 與直線 L 不相交，所以判別式 $D<0$ ，

即 $D=4^2-4\times2\times k<0 \Rightarrow k>2$ ，因此實數 k 的範圍為 $2<k<4$ 。

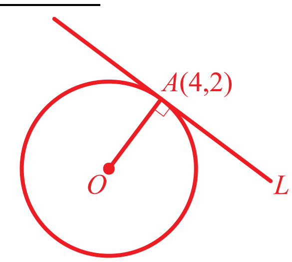
5. 過圓 $C: x^2+y^2-2x+4y+k=0$ 上一點 $A(4,2)$ 的切線方程式為 $\underline{\quad 3x+4y=20 \quad}$ 。

解 圓 $O(1,-2)$ ，且 $m_{\overline{OA}}=\dfrac{2-(-2)}{4-1}=\dfrac{4}{3}$ ，

又切線 L 與 $\overline{OA}$ 垂直，得 $m_L=\dfrac{-3}{4}$ 。

$m_L=\dfrac{-3}{4}$ 反推切線 $L: 3x+4y=\ell$ ，過 $A(4,2)$ 得 $\ell=20$ ，

故 $L: 3x+4y=20$ 。

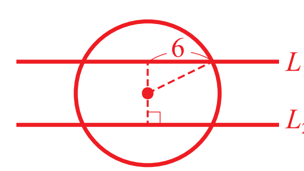


6. 在坐標平面上，一圓與直線 $L_1: x-y=1$ 以及直線 $L_2: x-y=5$ 所截的弦長皆為12 ，則此圓的面積為 $\underline{\quad 38\pi \quad}$ 。

解 因為弦長相等，所以此圓的圓心在 L_1 、 L_2 的中間，

又 $d(L_1,L_2)=\dfrac{|5-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$ ，故弦心距 $=\sqrt{2}$ 。

半徑 $=\sqrt{6^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{38}$ ，故圓面積為 38π 。

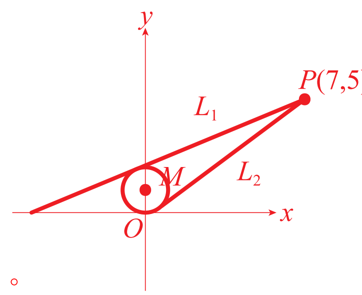


7. 已知圓 $C: x^2+(y-1)^2=1$，求過圓外一點 $P(7,5)$ 的切線方程式為 $\underline{\;5x-12y=-25 \text{ 與 } 3x-4y=1\;}$。

解 令切線 $L: y-5=m(x-7) \Rightarrow mx-y-7m+5=0$，且 C 的圓心為 $M(0,1)$，

因為 L 與圓 C 相切，可知 $d(M,L)=$ 半徑 $r=1$

$\Rightarrow \dfrac{|0-1-7m+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1 \Rightarrow |-7m+4|=\sqrt{m^2+1}$，



兩邊平方，得 $49m^2-56m+16=m^2+1$

$\Rightarrow 48m^2-56m+15=0 \Rightarrow (12m-5)(4m-3)=0$，可得 $m=\dfrac{5}{12}$ 或 $\dfrac{3}{4}$。

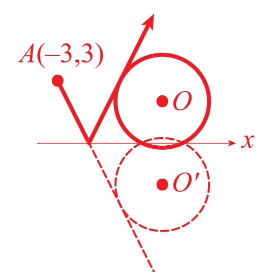
① $m=\dfrac{5}{12} \Rightarrow L_1: 5x-12y=k$，又 L_1 通過 $P(7,5)$，得 $k=-25$，所以 $L_1: 5x-12y=-25$。

② $m=\dfrac{3}{4} \Rightarrow L_2: 3x-4y=\ell$，又 L_2 通過 $P(7,5)$，得 $\ell=1$，所以 $L_2: 3x-4y=1$。

8. 自點 $A(-3,3)$ 發出的光線 L 射到 x 軸上，被 x 軸反射的光線 M 與圓 $C: x^2+y^2-4x-4y+3=0$ 相切，則 L 的方程式為 $\underline{\;2x+y=-3\;}$。

解 圓 $C: x^2+y^2-4x-4y+3=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=5$，

自 A 點發出的光線 L 射到 x 軸上後反射與圓 C 相切，



表直線 L 為通過 A 對圓 $C': (x-2)^2+(y+2)^2=5$ 相切。

過 $A(-3,3)$ 的直線 $L: y-3=m(x+3) \Rightarrow mx-y+3m+3=0$，

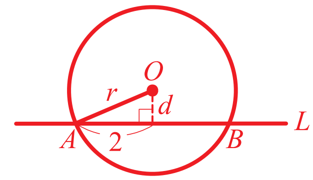
與圓 C' 相切 $\Rightarrow d(O',L)=r \Rightarrow \dfrac{|2m+2+3m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5} \Rightarrow |5m+5|=\sqrt{5(m^2+1)}$，

兩邊平方得 $(5m+5)^2=5(m^2+1) \Rightarrow 20m^2+50m+20=0 \Rightarrow (2m+1)(m+2)=0$，

所以 $m=-2$ 或 $-\dfrac{1}{2}$（不合，因為 $m=-\dfrac{1}{2}$ 的直線會被圓 C 擋住）。

$m=-2$ 反推 $L: 2x+y=k$，過 $A(-3,3)$，代入得 $k=-3$，故 $L: 2x+y=-3$。

9. 已知圓 $C: x^2+y^2-x-3y-2=0$，若直線 $L: y=mx$ 和圓 C 相交於相異兩點 A 、 B ，且弦長 $\overline{AB}=4$ ，則斜率 $m=$ ___-7 或 1___ 。



解 圓 $C: x^2+y^2-x-3y-2=0 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}$ ，

其中圓心 $O\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ ，半徑 $r=\frac{3}{\sqrt{2}}$ 。

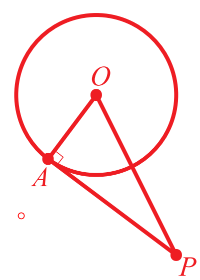
弦心距 $d=\sqrt{r^2-2^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ，且 $L: mx-y=0$ ，

$$d(O,L)=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\left|m\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |m-3|=\frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{m^2+1}$$

兩邊平方得 $m^2-6m+9=2m^2+2 \Rightarrow m^2+6m-7=0 \Rightarrow (m+7)(m-1)=0$ ，

所以 $m=-7$ 或 1 。

10. 已知 $P(1,-5)$ ，圓 $C: x^2+y^2+4x-2y-4=0$ ，且 O 點為圓 C 的圓心，則在 $\overline{OP}$ 上有 ___6___ 個點對此圓作出的切線段長為正整數。



解 圓 $C: x^2+y^2+4x-2y-4=0 \Rightarrow (x+2)^2+(y-1)^2=9$ ，

其中圓心 $O(-2,1)$ ，半徑 $r=3$ ，

在 $\triangle OAP$ 中， $\overline{OP}=\sqrt{(1+2)^2+(-5-1)^2}=\sqrt{45} \Rightarrow \overline{AP}=\sqrt{\overline{OP}^2-r^2}=\sqrt{45-9}=6$ 。

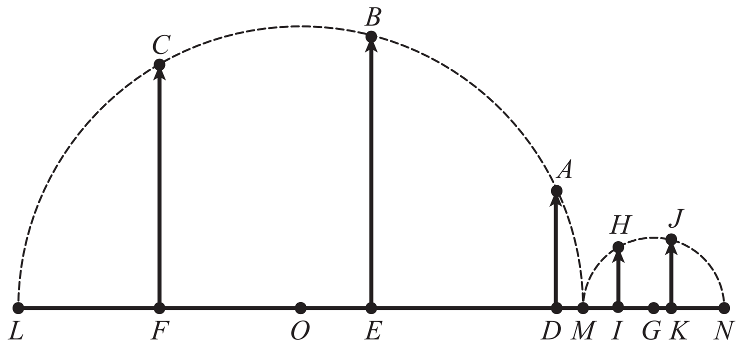
在 $\overline{OP}$ 上的點作圓 C 的切線段長 ℓ ， $\ell \le 6$ ，

且 ℓ 為正整數，得 $\ell=1,2,3,4,5,6$ ，故 $\overline{OP}$ 上的點有 6 個。

二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 12 題為題組

星空橋上有一個雙半圓的藝術裝飾建築，為了要支撐裝飾品的重量，在上頭加裝了許多條纜繩垂直橋面，設 O 點為坐標平面上的原點，且 E 點距離原點 4 公尺，纜繩 $\overline{BE}=4\sqrt{15}$ 公尺，小半圓的半徑為大半圓半徑的 $\frac{1}{4}$，其中 O 為大半圓的圓心，G 為小半圓的圓心。



11. 為加強藝術建築的穩固性，計劃在雙半圓上各加裝一條纜繩，且兩條纜繩需垂直橋面，其中一條經評估要加裝在 O 點左方 8 公尺處（$\overline{CF}$），另一條加裝在 G 點左方 2 公尺處（$\overline{HI}$），則需要準備＿＿18＿＿公尺的纜繩。（無條件進位，取至整數位）（填充題，10 分）

12. 聖誕節即將來臨，星空橋上有燈光秀，光源都從點 $L(-16,0)$ 與點 $N(24,0)$ 發射。在聖誕節當日有特別秀，驚喜安排的位置位在直線 L_1：「通過 L 點且與小半圓相切的直線」與直線 L_2：「通過 N 點且與大半圓相切的直線」的交點位置上，請問驚喜出現的坐標位置為何？（非選擇題，10 分）

解　11. $\overline{OB}=\sqrt{\overline{OE}^2+\overline{BE}^2}=\sqrt{4^2+\left(4\sqrt{15}\right)^2}=16$，故大半徑為 16 公尺，小半徑為 4 公尺。

大半圓方程式：$(x-0)^2+(y-0)^2=16^2$，$y>0$，

小半圓方程式：$(x-20)^2+(y-0)^2=4^2$，$y>0$。

O 點左方 8 公尺，令 $x=-8$ 代入 $(x-0)^2+(y-0)^2=16^2$，$y>0$，

得 $64+y^2=256$，$y>0$，故 $y=8\sqrt{3}$。

G 點左方 2 公尺，令 $x=18$ 代入 $(x-20)^2+(y-0)^2=4^2$，$y>0$，

得 $4+y^2=16$，$y>0$，故 $y=2\sqrt{3}$。

故共需要 $8\sqrt{3}+2\sqrt{3}=10\sqrt{3}\approx 17.32$，無條件進位取到整數位 18 公尺。

12. L_1：過 $L(-16,0)$ 且與小半圓相切，斜率為正，

令 $L_1: y-0=m(x+16)\Rightarrow mx-y+16m=0$，

$$d(G,L_1)=\frac{|20m-0+16m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=4\Rightarrow|36m|=4\sqrt{m^2+1}\Rightarrow|9m|=\sqrt{m^2+1}\Rightarrow 80m^2=1，$$

所以 $m=\dfrac{\sqrt{5}}{20}$（取正）。

L_2：過 $N(24,0)$ 且與大半圓相切，斜率為負，

令 $L_2: y-0=m(x-24)\Rightarrow mx-y-24m=0$，

$$d(O,L_2)=\dfrac{|0-0-24m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=16\Rightarrow|-24m|=16\sqrt{m^2+1}\Rightarrow|-3m|=2\sqrt{m^2+1}$$

$\Rightarrow 9m^2=4(m^2+1)\Rightarrow m^2=\dfrac{4}{5}$，所以 $m=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$（取負）。

$$\begin{cases} L_1: y=\dfrac{\sqrt{5}}{20}(x+16) \\ L_2: y=\dfrac{-2\sqrt{5}}{5}(x-24) \end{cases}$$

交點：$\dfrac{\sqrt{5}}{20}x+\dfrac{4\sqrt{5}}{5}=\dfrac{-2\sqrt{5}}{5}x+\dfrac{48\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\dfrac{9\sqrt{5}}{20}x=\dfrac{44\sqrt{5}}{5}\Rightarrow x=\dfrac{176}{9}$，

$x=\dfrac{176}{9}$ 代入 L_2 得 $y=\dfrac{16\sqrt{5}}{9}$，故驚喜出現的坐標為 $\left(\dfrac{176}{9},\dfrac{16\sqrt{5}}{9}\right)$。