3 指數

重點整理

1. 指數定義：

設 n 為正整數，n 個 a 連乘表成 a^n，其中 a 稱為**底數**，n 稱為**指數**，讀作 a 的 n 次方。一般而言，n 可由自然數、整數、有理數而擴充至實數。

(1) 零指數：定義 $a^0=1$，其中 $a\neq 0$。

(2) 負指數：$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$，其中 $a\neq 0$ 且 n 為正整數。

(3) 分數指數：① $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$，其中 $a>0$ 且 n 為正整數。

② $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$，其中 $a>0$，n 為正整數，m 為整數。

(4) 負分數指數：$a^{-\frac{m}{n}}=\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{-1}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$，其中 $a>0$，n 為正整數，m 為整數。

(5) 實數指數：

設 $a>0$，利用無窮數列所靠近的數來定義無理數次方，例如：$2^{\sqrt{2}}$ 與 3^{π}。

2. 指數運算性質：

$a>0$，$b>0$，m、n 為實數，

(1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$。 (2) $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$。 (3) $\left(a^m\right)^n=a^{mn}$。

(4) $a^n\times b^n=(ab)^n$。 (5) $\dfrac{a^n}{b^n}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$。

3. 常用公式：

(1) 因式分解：$a^{3x}+a^{-3x}=\left(a^x+a^{-x}\right)\left(a^{2x}-a^x\times a^{-x}+a^{-2x}\right)=\left(a^x+a^{-x}\right)\left(a^{2x}-1+a^{-2x}\right)$。

(2) 求值公式：$a^{3x}+a^{-3x}=\left(a^x+a^{-x}\right)^3-3\times a^xa^{-x}\times\left(a^x+a^{-x}\right)=\left(a^x+a^{-x}\right)^3-3\times 1\times\left(a^x+a^{-x}\right)$。

(3) 因式分解：$a^{3x}-a^{-3x}=\left(a^x-a^{-x}\right)\left(a^{2x}+a^x\times a^{-x}+a^{-2x}\right)=\left(a^x-a^{-x}\right)\left(a^{2x}+1+a^{-2x}\right)$。

(4) 求值公式：$a^{3x}-a^{-3x}=\left(a^x-a^{-x}\right)^3+3\times a^xa^{-x}\times\left(a^x-a^{-x}\right)=\left(a^x-a^{-x}\right)^3+3\times 1\times\left(a^x-a^{-x}\right)$。

觀念是非題　試判斷下列敘述對或錯。（每題 2 分，共 10 分）

(　　) **1.** $\sqrt[3]{-27}=(-27)^{\frac{1}{3}}$。

解

(　　) **2.** 設 $a>0$ 且 m、n 為實數，則 $a^{\frac{n}{m}}$ 與 $a^{\frac{m}{n}}$ 互為倒數。

解

(　　) **3.** 已知 $10^{6.4}\approx 2.512\times 10^{6}$，那可得知 $10^{-6.4}\approx 2.512\times 10^{-6}$。

解

(　　) **4.** 半衰期為質量變成原本一半所需要的時間。設原先質量為 A，且半衰期為 k 年，則 n 年後的質量為 $A\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{k}}$。

解

(　　) **5.** 3^{-1} 的值為 -3。

解

一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 在下列各小題中，試填入適當的指數。

(1) 若 $\dfrac{1}{\sqrt[5]{2^6}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^a$，則 $a=$__________。（2 分）

(2) 若 $\sqrt[7]{9}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^b$，則 $b=$__________。（2 分）

(3) 若 $1=\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^c$，則 $c=$__________。（3 分）

解

2. 試求 $\left(\sqrt{8}\right)^{-\frac{2}{3}}\times(0.25)^{-2.5}\times\sqrt[4]{4}\times\sqrt[6]{\dfrac{1}{8}}$ 的值為__________。

解

3. 化簡 $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-6}\times\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-4}=$ ____________。

解

4. 若 $9^{x}=4$ ，則 $27^{x}+81^{-x}=$ ____________。

解

5. 設 $a^{2x}=3$ ，求 $\dfrac{a^{x}-a^{-x}}{a^{3x}-a^{-3x}}=$ ____________。

解

6. 設 $x>0$，若 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$，則

(1) $x+x^{-1}=$＿＿＿＿＿＿。（4 分）

(2) $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=$＿＿＿＿＿＿。（3 分）

解

7. 已知 x 、 y 、 z 為正實數，且 $x^{y}=1$， $y^{z}=\frac{1}{4}$， $z^{x}=\frac{2}{3}$ ，則 $xyz=$＿＿＿＿＿＿。

解

8. 設 x 、 y 為實數，若 $2^{x}=125$， $5^{y}=64$ ，則 $xy=$＿＿＿＿＿＿。

解

9. 在一個玻璃瓶中培養細菌，已知細菌的數量每隔一分鐘就會增加一倍，現在開始小明在玻璃瓶中放入一個細菌，60 分鐘後玻璃瓶中細菌的數量即可達到實驗所需的狀況。若某天由於時間較急迫，只有 55 分鐘的時間可以等待細菌的數量達到實驗所需的狀況，則小明一開始需要在玻璃瓶中放入____________個細菌。

解

10. 心理專家以數學模式 $F(t)=a\left(1-10^{-bt}\right)$ 來描述學生經過 t 星期的學習之後所得到的學習量（或成果），這裡的常數 a 與 b 跟學生及學習的科目相關。今力乘一星期可以熟背100個英文單字，兩星期可以熟背150個英文單字，試問：力乘三星期可以熟背____________個英文單字。

解

二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 12 題為題組

《碳14定年法》

自然界中碳有三種同位素：99%的碳為原子量12的碳12，1%為原子量13的碳13；原子量為14的碳14，非常微量，僅約為兆分之1.2（即1.2×10^{-12}）。又碳12與碳13為穩定同位素；碳14具有放射性，故又稱為放射性碳，它的半衰期約為5720年。

大氣中具放射性的碳14與正常的二氧化碳比率趨近於定值，因此經由呼吸作用動植物體內也含有相同比率的放射性碳。但動植物死亡後，體內碳14不再獲得補充，因此隨著放射衰變，碳14的比率逐漸降低。利用這個方法，我們可以檢測考古遺址中發現的獸骨、化石、貝殼、木炭的碳14含量，以斷定遺址存在的時間。

11. 近期，臺灣東部挖掘出石器，其碳14的含量約為正常含量的$\frac{1}{1024}$倍，試估計此石器約為距今__________年前的遺址。（填充題，10 分）

12. 雖然碳14可以提供人類推估諸多遺址存在的年代，但地球的壽命約為45億年，許多地質年代存在於上億年前無法僅用碳14去估計，幸好礦石中有其他放射性物質，例如雲母或長石中的鉀40會衰變為氬40，其半衰期約為13億年，此為鉀－氬年代定年法。

近期，考古學家發現一生物化石，且同地質層雲母中的鉀與氬的比例約為$1:3$，若以雲母的衰變情況來判斷此生物化石存在的年代，試估計此化石在下列哪一時代？（非選擇題，10 分）

距今時間	45-39 億年前	39-25 億年前	25-16 億年前	16-10 億年前	10-5.4 億年前
代（紀）	冥古宙	太古宙	古元古代	中元古代	新元古代

解