綜合習題 單元 1～4

一、單選題（每題 7 分，共 14 分）

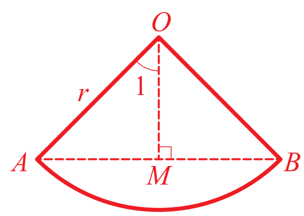
（ B ）**1.** 已知扇形的圓心角為 2 弳，且圓心角所對的弦長為 2，則此扇形的面積為何？

(A) $\dfrac{1}{\sin 1}$ (B) $\dfrac{1}{\sin^2 1}$ (C) $\dfrac{1}{1-\cos 2}$ (D) $\dfrac{2}{\sin 2}$ (E) $\tan 1$。〔搭配單元 1〕

解 ① $\overline{AB}=2$，自 O 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，
且垂足為 M，則 $\overline{AM}=1$。

② $\triangle OAM$ 中，$\angle AOM=1$（弳）$\Rightarrow \sin 1=\dfrac{\overline{AM}}{\overline{OA}}=\dfrac{1}{r}$，

所以 $r=\dfrac{1}{\sin 1}$。



③ 扇形 OAB 的面積 $=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{\sin 1}\right)^2\times 2=\dfrac{1}{\sin^2 1}$，故選(B)。

（ D ）**2.** 已知 $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{5}{18}\pi$，且設 $a=1-\cos^2\theta$、$b=\dfrac{1}{\cos\theta}-\cos\theta$、$c=\dfrac{\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$，

試問 a、b、c 的大小順序為何？〔搭配單元 3〕【109 指甲（修）】

(A) $a<b<c$ (B) $a<c<b$ (C) $b<c<a$ (D) $c<a<b$ (E) $c<b<a$。

解 ① $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{5\pi}{18}\Rightarrow 0<\cos\dfrac{5\pi}{18}<\cos\theta<\cos\dfrac{\pi}{4}<1\Rightarrow 0<\cos\theta<1$，

又 $\dfrac{\pi}{2}<2\theta<\dfrac{5\pi}{9}\Rightarrow \tan 2\theta<0$。

② $a=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$，

$b=\dfrac{1}{\cos\theta}-\cos\theta=\dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}>\dfrac{\sin^2\theta}{1}=a$，

$c=\dfrac{\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{1}{2}\times\tan 2\theta<0$，則 $c<a<b$，

故選(D)。

二、多選題（每題 10 分，共 20 分）

（ABCD）**3.** 下列各選項中哪些方程式恰有兩相異實根？〔搭配單元 2〕

(A) $\sin x=\dfrac{1999}{2000}$，其中 $0\leq x\leq \pi$

(B) $\cos x=-1$，其中 $-2\pi\leq x\leq 2\pi$

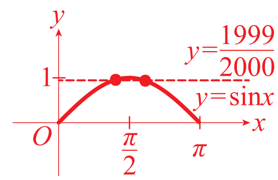
(C) $\tan x=1975$，其中 $0\leq x\leq 2\pi$

(D) $\sin x=\cos x$，其中 $0\leq x\leq 2\pi$

(E) $\pi\sin x=x$，其中 $-\pi\leq x\leq \pi$。

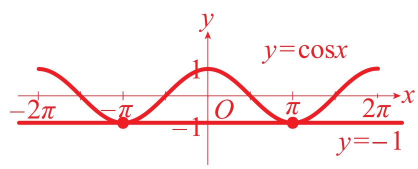
解 (A)○：$\sin x=\dfrac{1999}{2000}<1$，

在 $0\leq x\leq \pi$ 的範圍中共有兩個相異實根。



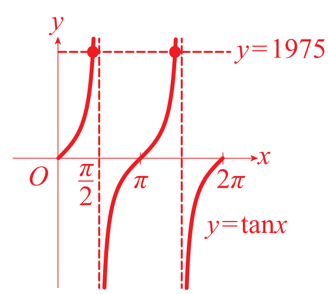
(B)○：所求為 $\begin{cases} y=\cos x \\ y=-1 \end{cases}$ 交點的 x 坐標，

共有兩相異交點（即兩相異實根）。



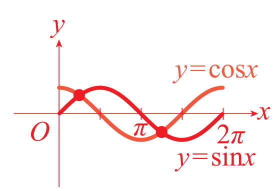
(C)○：所求為 $\begin{cases} y=\tan x \\ y=1975 \end{cases}$ 交點的 x 坐標，

共有兩相異交點（即兩相異實根）。



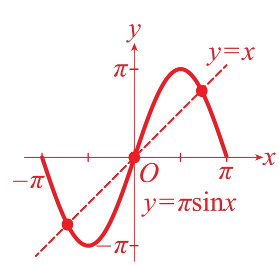
(D)○：所求為 $\begin{cases} y=\sin x \\ y=\cos x \end{cases}$ 交點的 x 坐標，

共有兩相異交點（即兩相異實根）。



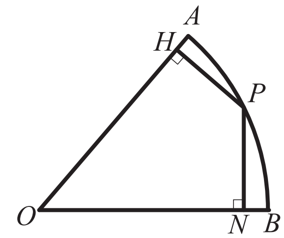
(E)×：所求為 $\begin{cases} y=\pi\sin x \\ y=x \end{cases}$ 交點的 x 坐標，

共有三相異交點（即三相異實根）。



故選(A)(B)(C)(D)。

（ACDE）**4.** 如圖，已知扇形 OAB 的半徑 $\overline{OA}=1$ 且 $\angle AOB=60^\circ$，而 P 為 $\overset{\frown}{AB}$ 上的動點，使得 $\angle OHP=\angle ONP=90^\circ$，設 $\angle PON=\theta$，試選出正確的選項。



(A) $\overline{PN}=\sin\theta$

(B) $\overline{OH}=\sin(60^\circ-\theta)$

(C)四邊形 $OHPN$ 的周長為 $\sin\theta+\cos\theta+\cos(60^\circ-\theta)+\sin(60^\circ-\theta)$

(D)四邊形 $OHPN$ 的周長有最大值時，此時 $\theta=30^\circ$

(E)四邊形 $OHPN$ 的周長的最大值為 $1+\sqrt{3}$。　〔搭配單元 4〕

解 (A)○：$\triangle OPN$ 中，$\overline{PN}=\sin\theta$，$\overline{ON}=\cos\theta$。

(B)╳：$\triangle OPH$ 中，$\overline{PH}=\sin(60^\circ-\theta)$，$\overline{OH}=\cos(60^\circ-\theta)$。

(C)○：四邊形 $OHPN$ 的周長為 $\sin\theta+\cos\theta+\cos(60^\circ-\theta)+\sin(60^\circ-\theta)$。

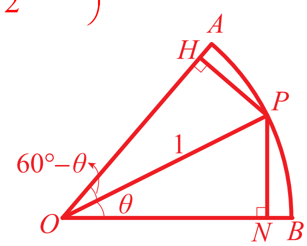
(D)○(E)○：$\sin\theta+\cos\theta+\cos(60^\circ-\theta)+\sin(60^\circ-\theta)$

$$=\sin\theta+\cos\theta+\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\times\sin\theta+\frac{\sqrt{3}+3}{2}\times\cos\theta$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\times\left(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta\right)$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\times 2\sin(\theta+60^\circ)=\left(1+\sqrt{3}\right)\times\sin(\theta+60^\circ)，$$



當 $\theta=30^\circ$ 時，四邊形 $OHPN$ 的周長有最大值 $\left(1+\sqrt{3}\right)$。

故選(A)(C)(D)(E)。

三、填充題（每格 8 分，共 48 分）

5. 試求 $\sin\frac{11\pi}{6}+\tan\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{3}+\cos2\pi=$ ___2___。　〔搭配單元 1〕

解 $\sin\frac{11\pi}{6}+\tan\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{3}+\cos2\pi=-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+1=2$。

6. 已知函數 $f(x)$ 的圖形是由 $g(x)=\sin x$ 的圖形經過以下步驟變換後得到。

(I) 將 $g(x)$ 圖形上所有點的縱坐標伸長為原來的 4 倍，橫坐標不變，得到 $k(x)$ 的圖形。

(II) 將 $k(x)$ 圖形上所有點的橫坐標伸長為原來的 2 倍，縱坐標不變，得到 $q(x)$ 的圖形。

(III) 將 $q(x)$ 圖形上所有點向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 單位，得到 $f(x)$ 的圖形。〔搭配單元 2〕

試求 $f(x)=$ $\underline{4\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{12}\right)}$ 。

解 (I) 將 $g(x)=\sin x$ 圖形上所有點的縱坐標伸長為原來的 4 倍，則 $k(x)=4\sin x$ 。

(II) 將 $k(x)=4\sin x$ 圖形上所有點的橫坐標伸長為原來的 2 倍，則 $q(x)=4\sin\frac{x}{2}$ 。

(III) 將 $q(x)=4\sin\frac{x}{2}$ 圖形上所有點向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 單位，

則 $f(x)=4\sin\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]=4\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{12}\right)$ 。

7. 設 $\pi<x<3\pi$ ，試求方程式 $\sin x+\cos 2x=0$ 的所有實根為 $\underline{x=\frac{7\pi}{6}\text{或}\frac{11\pi}{6}\text{或}\frac{5\pi}{2}}$ 。

〔搭配單元 2〕

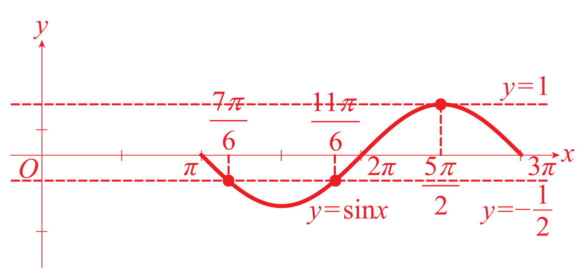
解 ① $\sin x+\cos 2x=0$

$\Rightarrow \sin x+1-2\sin^2 x=0$

$\Rightarrow 2\sin^2 x-\sin x-1=0$

$\Rightarrow (2\sin x+1)(\sin x-1)=0$ ，

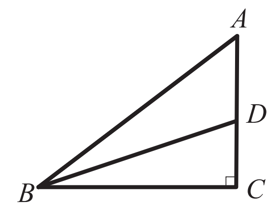
所以 $\sin x=-\frac{1}{2}$ 或 1 。



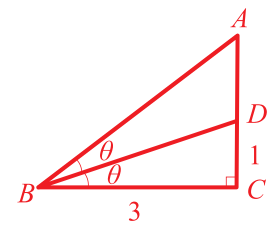
② $\sin x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{7\pi}{6}$ 或 $\frac{11\pi}{6}$ 。

$\sin x=1\Rightarrow x=\frac{5\pi}{2}$ 。

8. 如圖，直角三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$\overline{BD}$ 為 $\angle ABC$ 的角平分線，$\overline{BC}=3$，$\overline{CD}=1$，則 $\overline{AC}$ 長為 $\underline{\quad \dfrac{9}{4} \quad}$。



〔搭配單元 3〕



解　令 $\angle DBC=\theta$，$\tan\theta=\dfrac{1}{3}$，

又 $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\times\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}}=\dfrac{3}{4}$，

$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=2\theta$，則 $\overline{AC}=\overline{BC}\tan 2\theta=3\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{4}$。

9. 設函數 $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$，其中 x 的範圍為 $\alpha\le x\le\beta$，且 α、β 均為介於 $\dfrac{\pi}{3}$ 和 $\dfrac{4\pi}{3}$ 之間的正數，已知 $f(x)$ 的最小值為 $-\sqrt{2}$，最大值為 $\sqrt{3}$，試求數對 $(\alpha,\beta)=\underline{\quad\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{13\pi}{12}\right)\quad}$。

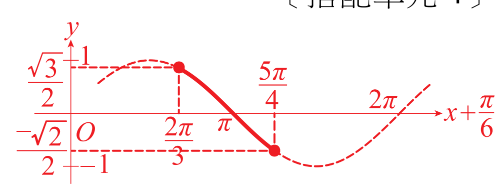
〔搭配單元 4〕

解　$f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，

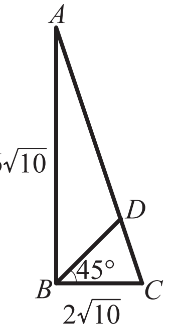
又 $-\sqrt{2}\le f(x)\le\sqrt{3}\Rightarrow-\sqrt{2}\le 2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\le\sqrt{3}$

$\Rightarrow-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

則 $\dfrac{2}{3}\pi\le x+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{5}{4}\pi\Rightarrow\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{13}{12}\pi$，故數對 $(\alpha,\beta)=\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{13\pi}{12}\right)$。



10. $\triangle ABC$ 中，D 為 $\overline{AC}$ 上一點，$\overline{BC}=2\sqrt{10}$，$\angle DBC=45^\circ$，若 $\angle C$ 為銳角，$\overline{AB}=6\sqrt{10}$，$\sin A=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，試求 $\overline{CD}=$ ____5____ 。



〔搭配單元 3〕

解 ① $\triangle ABC$ 中，由正弦定理可知 $\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}\Rightarrow\dfrac{6\sqrt{10}}{\sin C}=\dfrac{2\sqrt{10}}{\frac{1}{\sqrt{10}}}$，

所以 $\sin C=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，且 $\cos C=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$（因為 $\angle C$ 為銳角）。

② $\angle BDC=180^\circ-(45^\circ+\angle C)=135^\circ-\angle C$，

故 $\sin\angle BDC=\sin(135^\circ-\angle C)=\sin 135^\circ\cos C-\cos 135^\circ\sin C$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{10}}-\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ 。

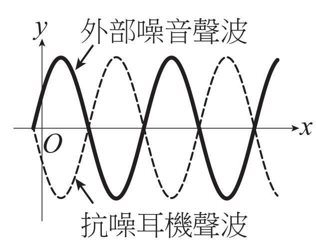
③ $\triangle BDC$ 中，由正弦定理可知 $\dfrac{\overline{CD}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin\angle BDC}\Rightarrow\dfrac{\overline{CD}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{\frac{2}{\sqrt{5}}}\Rightarrow\overline{CD}=5$ 。

四、素養混合題（共 18 分）

第 11 至 12 題為題組

當聲波與聲波相遇時，會產生疊加或抵銷的效果，生活中有許多例子與聲波的抵銷有關，例如抗噪耳機或隔音牆。抗噪耳機是利用主動式降噪破壞干擾原理，透過內嵌於耳機的麥克風收集外部音源，再利用內部迴路分析聲音、複製並產生與噪音相仿但相位相反的聲波，阻隔噪音影響使用耳機的效果。

（ABDE）**11.** 設有一外部噪音的聲波函數為 $f(x)=4\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+4\cos x$，其中 x 為時間，請判斷關於此外部噪音聲波函數的性質何者正確？（多選題，9 分）



〔搭配單元 4〕

(A)振幅為 4

(B)週期為 2π

(C)圖形經過平移後可與 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+2$ 的圖形重合

(D)圖形對稱於直線 $x=\dfrac{4}{3}\pi$

(E)圖形與直線 $y=-4$ 有無限多個交點。

12. 承上題，為了抵銷外部音源，抗噪耳機的內部會產生另一聲波函數 $g(x)=r\sin(x+\varphi)$（$r>0$，$0\le\varphi\le2\pi$），而在完美的狀態下 $f(x)+g(x)=0$。設能達到完美狀態，試求此時數對 $(r,\varphi)=$？（非選擇題，9 分）〔搭配單元 4〕

解 11. $f(x)=4\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+4\cos x=4\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos x\sin\dfrac{\pi}{6}\right)+4\cos x=2\sqrt{3}\sin x+2\cos x$

$=4\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$。

(A) ○。

(B) ○。

(C) ╳：兩函數的振幅不同，圖形無法經過平移後重合。

(D) ○：將 $x=\dfrac{4}{3}\pi$ 代入，得 $f\left(\dfrac{4}{3}\pi\right)=4\sin\left(\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=4\sin\dfrac{3}{2}\pi=-4$ 為最小值，

表示直線 $x=\dfrac{4}{3}\pi$ 通過 $f(x)$ 的最低點，即為圖形的對稱軸。

(E) ○：$-4\le f(x)\le4$，則圖形與直線 $y=-4$ 有無限多個交點。

故選(A)(B)(D)(E)。

12. 設能達到完美狀態，

則 $g(x)=-f(x)=-\left(2\sqrt{3}\sin x+2\cos x\right)$

$=4\left[\sin x\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\cos x\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right]=4\sin\left(x+\dfrac{7}{6}\pi\right)$，

故數對 $(r,\varphi)=\left(4,\dfrac{7}{6}\pi\right)$。