8 平面向量

重點整理

1. 向量：

(1) 向量的定義：

①若 A 、 B 為同一點時，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}$ 為零向量。

②若 A 、 B 為相異兩點時，$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$，即兩向量 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{BA}$ 等長，且方向相反。

(2) 向量的坐標表示法：若 A 、 B 的坐標分別為 (a_1,a_2) 、 (b_1,b_2)，

$$\text{則 } \overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2)\text{，}\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}\text{ 。}$$

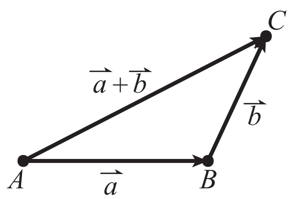
(3) 利用方向角表示向量：設 $\overrightarrow{OP}$ 與 x 軸正向所夾的有向角為 θ，

$$\text{則 } \overrightarrow{OP}=\left(\left|\overrightarrow{OP}\right|\cos\theta,\left|\overrightarrow{OP}\right|\sin\theta\right)\text{ 。}$$

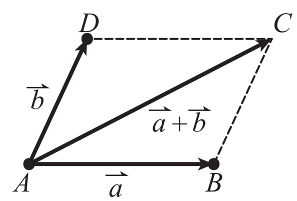
2. 向量的加減法：

(1) 向量加法的定義：

①三角形法：



②平行四邊形法：



(2) 向量加法的坐標表示法：若 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$ 、 $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，則

$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2)\text{ 。}$$

(3) 向量減法的定義：「減去一個向量就等於加上這個向量的反向量」，

$$\text{即 } \overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}+\left(-\overrightarrow{b}\right)\text{ 。}$$

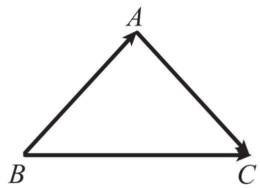
(4) 向量減法的坐標表示法： 若 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$ 、 $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，則

$$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2)\text{ 。}$$

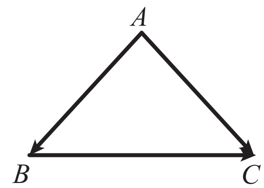
3. 向量的分解：

設 A 、 B 、 C 為任意三點，向量 $\overrightarrow{BC}$ 可分解為兩向量相加或相減。

(1) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ 。



(2) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ 。



4. 向量的係數積：

(1) 定義：給定實數 r 及向量 $\overrightarrow{a}$ ，實數 r 與向量 $\overrightarrow{a}$ 的係數積是一個向量，記作 $r\overrightarrow{a}$ 。

① 若 $\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$ ，則 $r\overrightarrow{a}$ 的方向與長度規定如下：

當 $r>0$ 時， $r\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{a}$ 方向相同，且長度為 $r\left|\overrightarrow{a}\right|$ 。

當 $r<0$ 時， $r\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{a}$ 方向相反，且長度為 $|r|\left|\overrightarrow{a}\right|$ 。

當 $r=0$ 時， $r\overrightarrow{a}$ 為零向量，即 $r\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$ 。

② 若 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$ ，則 $r\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$ 。

(2) 坐標表示法：若 r 為實數，且 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$ ，則 $r\overrightarrow{a}=r(a_1,a_2)=(ra_1,ra_2)$ 。

5. 向量的平行：

(1) 定義：當兩個非零向量 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 滿足 $\overrightarrow{a}=r\overrightarrow{b}$ （ r 為實數）時，稱 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 平行，記作 $\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}$ 。

(2) 設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$ 、 $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$ 為兩個非零向量，當 $b_1b_2\neq 0$ 時，常將上述條件改寫為比例式 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$ 。

6. 向量的線性組合：

若 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 為平面上兩個不平行的非零向量，則平面上的每一個向量 $\overrightarrow{OP}$ 都可以唯一表示成 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ ，這種形式的向量稱為 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 的線性組合。

7. 分點公式：

(1) 向量的分點公式： 設 P 為線段 AB 的內分點，若 O 不在直線 AB 上，

且 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，則 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$。

(2) 坐標的分點公式： 設 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 為坐標平面上的兩點，若點 $P(x,y)$ 在線段 AB 上，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，

則 P 點坐標為 $\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$。

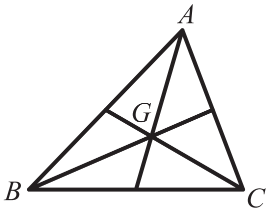
(3) 三點共線的條件： A、B、P 三點共線 $\Leftrightarrow$ 存在 α、β，且 $\alpha+\beta=1$，

使得 $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$。

8. 重心公式：

G 為 $\triangle ABC$ 之重心，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$

且 O 為平面上任一點，則



(1) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$。

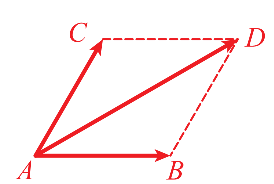
(2) $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$。

(3) $G\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$。

觀念是非題 試判斷下列敘述對或錯。(每題 2 分，共 10 分)

(╳) **1.** 已知 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$，則 $\overrightarrow{AD}$ 會平分 $\angle BAC$。

解 當 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|$ 時，$\overrightarrow{AD}$ 才會平分 $\angle BAC$。



(○) **2.** 已知 $\overrightarrow{OA}=\frac{5}{3}\overrightarrow{OP}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$，則 P 點在線段 $\overline{AB}$ 上。

解 $\overrightarrow{OA}=\frac{5}{3}\overrightarrow{OP}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\Rightarrow 3\overrightarrow{OA}=5\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OB}\Rightarrow 5\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}\Rightarrow \overrightarrow{OP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$，

故 P 點在線段 $\overline{AB}$ 上。

(×) **3.** 有兩非零向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，若 $\overrightarrow{a}\,/\!/\,\overrightarrow{b}$，則 $a_1b_1=a_2b_2$。

解 因為 $\overrightarrow{a}\,/\!/\,\overrightarrow{b}$，所以 $a_1b_2=a_2b_1$。

(○) **4.** 若 P 點在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:5$，則 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$。

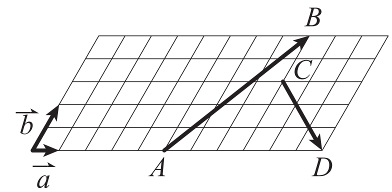
解 因為 P 點在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{AB}=2:7$，所以 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$。

(○) **5.** 若 $A(1,2)$、$B(4,8)$，且 $P(x,y)$ 在 $\overline{AB}$ 上滿足 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:3$，則 P 點的坐標為 $\left(\frac{3\times1+2\times4}{5},\frac{3\times2+2\times8}{5}\right)$。

解 由坐標的分點公式，得 P 點的坐標為 $\left(\frac{3\times1+2\times4}{5},\frac{3\times2+2\times8}{5}\right)$。

一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 如圖是由二組兩兩平行的直線所構成，且每一小格都是菱形，選出正確的選項 ____(E)____。（單選題）



(A) $\overrightarrow{AB}=3\vec{a}+5\vec{b}$ (B) $\overrightarrow{CD}=3\vec{a}-3\vec{b}$

(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=8\vec{a}$ (D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=-4\vec{b}$

(E) $3\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{CD}=24\vec{a}$。

解 (A) $\overrightarrow{AB}=3\vec{a}+\frac{5}{2}\vec{b}$。

(B) $\overrightarrow{CD}=3\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$。

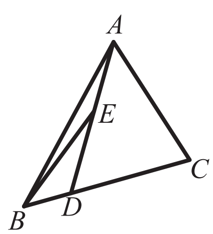
(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=6\vec{a}+\vec{b}$。

(D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=4\vec{b}$。

(E) $3\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{CD}=3\left(3\vec{a}+\frac{5}{2}\vec{b}\right)+5\left(3\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}\right)=24\vec{a}$。

故選(E)。

2. 如圖，已知 $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ 且 $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$，則 $\triangle ABE$ 面積 ：$\triangle ABC$ 面積 = ____1：5____。



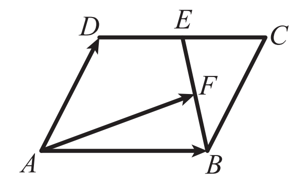
解 因為 $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\Rightarrow\overline{AE}:\overline{AD}=1:2=\triangle ABE$ 面積 ：$\triangle ABD$ 面積，

$\overrightarrow{AD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overline{BD}:\overline{BC}=2:5=\triangle ABD$ 面積 ：$\triangle ABC$ 面積，

所以 $\triangle ABE$ 面積 ：$\triangle ABC$ 面積 = 1：5。

3. 平行四邊形 $ABCD$ 中，E、F 分別為 $\overline{CD}$、$\overline{BE}$ 的中點，

設 $\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，則數對 $(x,y)=$ $\underline{\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)}$。

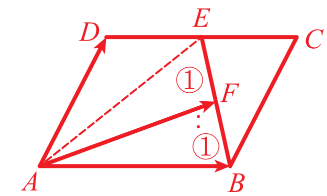


解 連接 $\overline{AE}$，因為 B、F、E 三點共線且 $\overline{BF}:\overline{FE}=1:1$，

所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$，

又 E 為 $\overline{DC}$ 的中點 $\Rightarrow \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，

故數對 $(x,y)=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)$。



4. 已知 $\overrightarrow{a}=(2,-4)$，$\overrightarrow{b}=(-3,1)$，若 $\overrightarrow{\mu}+2\overrightarrow{v}=-2\overrightarrow{a}$，$2\overrightarrow{\mu}-\overrightarrow{v}=\overrightarrow{b}$，

則 $\overrightarrow{\mu}+\overrightarrow{v}=$ $\underline{(-3,5)}$。

解 $\begin{cases}\overrightarrow{\mu}+2\overrightarrow{v}=-2\overrightarrow{a}\cdots\cdots ① \\ 2\overrightarrow{\mu}-\overrightarrow{v}=\overrightarrow{b}\cdots\cdots ②\end{cases}$

$①+②\times 2\Rightarrow 5\overrightarrow{\mu}=-2\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}=(-4,8)+(-6,2)=(-10,10)$，

所以 $\overrightarrow{\mu}=(-2,2)$ 代入②，

$\overrightarrow{v}=2\overrightarrow{\mu}-\overrightarrow{b}=(-4,4)-(-3,1)=(-1,3)$，

所以 $\overrightarrow{\mu}+\overrightarrow{v}=(-3,5)$。

5. 已知平面上三點 $A(-5,1)$、$B(1,1)$、$C(7,3)$，若 D 點滿足 $\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$，

則 D 點的坐標為 $\underline{(3,2)}$。

解 令 O 為原點，

$\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$

$\Rightarrow\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}\right)+2\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}\right)+3\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}\right)=\overrightarrow{0}$

$\Rightarrow 6\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}\Rightarrow D\left(\frac{-5+2\times1+3\times7}{6},\frac{1+2\times1+3\times3}{6}\right)=(3,2)$。

6. 設 $\overrightarrow{AB}=(1,3)$，$\overrightarrow{AC}=(-3x,x)$，$x>0$，若$\triangle ABC$的周長為$6\sqrt{10}$，則 $x=$ $\underline{\dfrac{12}{5}}$。

解 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-3x)^2+x^2}=\sqrt{10}x$，

$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right|=\left|(-3x-1,x-3)\right|=\sqrt{(-3x-1)^2+(x-3)^2}=\sqrt{10x^2+10}$，

所以$\triangle ABC$周長$=\sqrt{10}+\sqrt{10}x+\sqrt{10x^2+10}=6\sqrt{10}$

$\Rightarrow\sqrt{10x^2+10}=5\sqrt{10}-\sqrt{10}x\Rightarrow\sqrt{x^2+1}\times\sqrt{10}=(5-x)\times\sqrt{10}$，

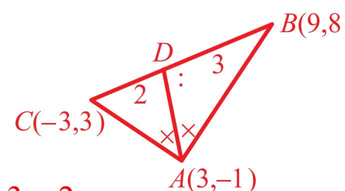
所以 $x^2+1=25-10x+x^2\Rightarrow 10x=24$，故 $x=\dfrac{12}{5}$。

7. $\triangle ABC$中，若 $A(3,-1)$、$B(9,8)$、$C(-3,3)$，$\angle A$之內角平分線與$\overline{BC}$交於 D 點，則 D 的坐標為 $\underline{\left(\dfrac{9}{5},5\right)}$。

解 $\overline{AB}=\sqrt{(9-3)^2+(8-(-1))^2}=3\sqrt{13}$，

$\overline{AC}=\sqrt{(3-(-3))^2+(-1-3)^2}=2\sqrt{13}$，

$\overline{AD}$為$\angle BAC$之角平分線$\Rightarrow\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}=3\sqrt{13}:2\sqrt{13}=3:2$，



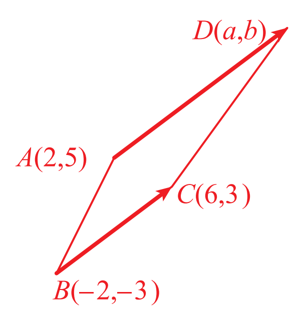
D點的坐標為$\left(\dfrac{2\times9+3\times(-3)}{5},\dfrac{2\times8+3\times3}{5}\right)=\left(\dfrac{9}{5},5\right)$。

8. 梯形 $ABCD$ 中，$A(2,5)$、$B(-2,-3)$、$C(6,3)$，若 $\overrightarrow{AD}//\overrightarrow{BC}$，且$\left|\overrightarrow{AD}\right|=15$，求 D 的坐標為 $\underline{(14,14)}$。

解 令 $D(a,b)$，$\overrightarrow{AD}=(a-2,b-5)$，$\overrightarrow{BC}=(8,6)$，且$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{8^2+6^2}=10$，

$\overrightarrow{AD}//\overrightarrow{BC}$，且$\left|\overrightarrow{AD}\right|=15\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BC}\Rightarrow(a-2,b-5)=(12,9)$

$\Rightarrow a=14$，$b=14$，故 $D(14,14)$。

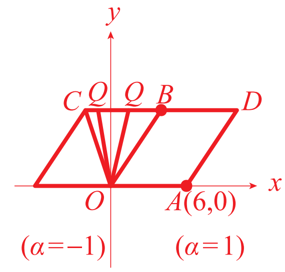


9. 設 $A(6,0)$、$B(4,6)$、$O(0,0)$，則滿足 $\overrightarrow{OQ}=\alpha\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，$-1\le\alpha\le1$ 且 α 為實數的所有點 Q 所成線段長為____12____。

解 如圖，

點 Q 所成線段表一過 B 平行於 $\overline{OA}$ 的線段 CD，長度為 $2\overline{OA}$，

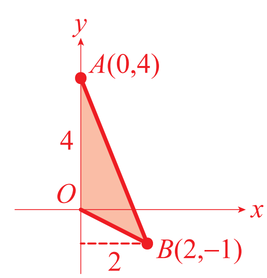
因為 $\overline{OA}=\sqrt{6^2+0^2}=6$，所以所求長度為 12。

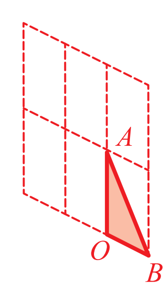


10. 已知 $O(0,0)$，$A(0,4)$，$B(2,-1)$，若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，$0\le x\le2$，$-2\le y\le1$，則 P 點所形成的圖形區域面積為____48____。

解 $\triangle OAB$ 面積 $=4\times2\times\dfrac{1}{2}=4$。

作圖，P 點的區域面積為 $4\times12=48$。

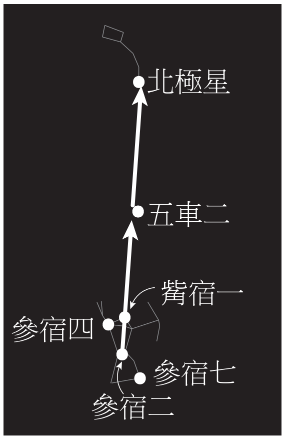




二、素養混合題（共 20 分）

<u>第 11 至 12 題為題組</u>

小龍在天文網站上看到利用獵戶座尋找北極星的方法：「從獵戶座腰帶三星中的參宿二往頭部的觜宿一（觜發音同嘴）延伸，即可找到北極星的位置，其中參宿二與北極星的距離為參宿二與觜宿一距離的 7 倍，另外參宿二往北極星的延伸線上，會通過御夫座的五車二，其中北極星的位置在參宿二到五車二的 2 倍距離處。」今小龍將星空想成一坐標平面，其中參宿二坐標為 $(12,17)$、觜宿一坐標為 $(7,23)$。



（ E ）**11.** 依上述資訊，北極星的坐標為何？（單選題，8 分）

(A)$(-25,60)$ (B)$(-28,65)$ (C)$(-23,65)$

(D)$(-28,59)$ (E)$(-23,59)$。

12. 已知在北半球觀測星空時，星空會以北極星為中心旋轉。若經過一段時間後，觜宿一的坐標為 $(13,89)$，求五車二的坐標。（非選擇題，12 分）

解 11. 令北極星坐標為 (x,y)，參宿二與北極星的距離為參宿二與觜宿一距離的 7 倍

$\Rightarrow (x-12,y-17)=7(7-12,23-17)$

$\Rightarrow (x-12,y-17)=(-35,42) \Rightarrow \begin{cases} x=-23 \\ y=59 \end{cases}$，

故選(E)。

12. 旋轉前後各星之間的距離不變，

令旋轉後 A 為參宿二、B 為觜宿一、C 為五車二、D 為北極星，

設五車二坐標為 (a,b)，已知 $\overline{AB}:\overline{BD}=1:6$，$\overline{AC}:\overline{CD}=1:1$，

可推得 $\overline{BC}:\overline{CD}=5:7$，

則 $\overrightarrow{DC}=\frac{7}{12}\overrightarrow{DB} \Rightarrow (a+23,b-59)=\frac{7}{12}(36,30)=\left(21,\frac{35}{2}\right) \Rightarrow (a,b)=\left(-2,\frac{153}{2}\right)$。