9 一次與二次函數

重點整理

1. 函數：

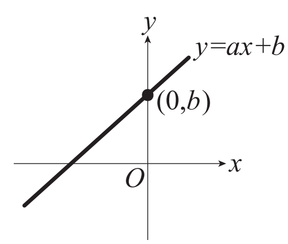
(1) 定義：對所有的 x 值，必存在唯一的 y 值，使得 $y=f(x)$，則稱這種對應的關係 f 為函數。

(2) x 稱為自變數，$y=f(x)$ 稱為應變數，而 $f(a)$ 表示 $x=a$ 所對應的函數值。

(3) 函數不可一對多或一對零，故在平面坐標上作任一鉛直線至多有一交點。

2. 一次函數：

形如 $f(x)=ax+b$ 的多項式函數稱為線型函數，因其在坐標平面上的圖形為一直線。



(1) 已知 $a\neq 0$，為一次函數，其圖形就是直線 $y=ax+b$，其中 a 為斜率，b 為 y 截距。

(2) 若 $a=0$，$b\neq 0$，則為零次函數，其圖形為非 x 軸的水平線；若 $a=0$，$b=0$，則為零函數，其圖形為 x 軸。

3. 二次函數：

形如 $f(x)=ax^2+bx+c$，其中 a、b、c 為實數，且 $a\neq 0$，就是一個二次函數。

(1) 一般式：將二次函數寫成 $y=ax^2+bx+c$ 之形式稱為一般式，其圖形在坐標平面上為開口向上或向下的拋物線，其中頂點坐標為 $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$。

(2) 標準式：將一般式 $y=ax^2+bx+c$ 經配方後可化為 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，稱為標準式，其中頂點坐標為 (h,k)。

(3) 依 $y=ax^2+bx+c$ 之圖形判斷 a、b、c 之正負：

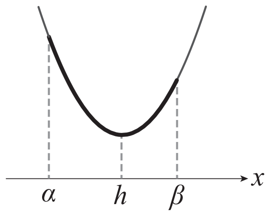
① 開口向上 $a>0$，開口向下 $a<0$。

② 頂點在 y 軸右側，則 $ab<0$，頂點在 y 軸左側，則 $ab>0$，頂點在 y 軸上，則 $b=0$。

③ 圖形與 y 軸之交點在原點的上方，則 $c>0$，下方則 $c<0$，通過原點則 $c=0$。

(4) $f(x)=ax^2+bx+c=a(x-h)^2+k$，其中頂點$(h,k)$，討論$\alpha\le x\le\beta$區間的最大、最小值

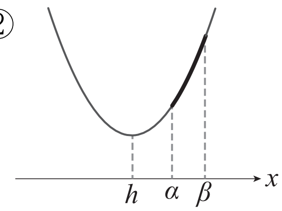
①



在$x=\alpha$時，有最大值$=f(\alpha)$；

在$x=h$時，有最小值$=k$。

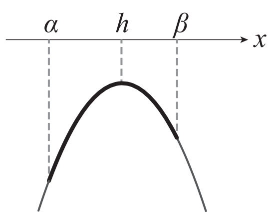
②



在$x=\beta$時，有最大值$=f(\beta)$；

在$x=\alpha$時，有最小值$=f(\alpha)$。

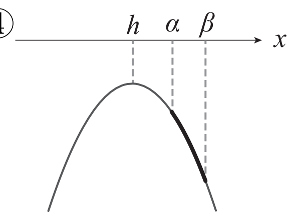
③



在$x=h$時，有最大值$=k$；

在$x=\alpha$時，有最小值$=f(\alpha)$。

④

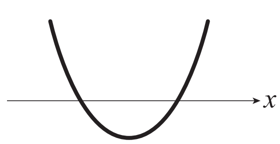
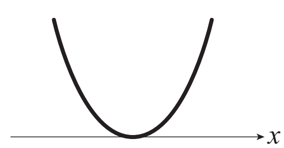
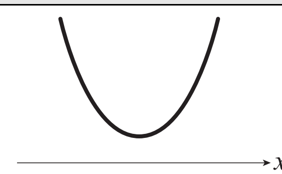
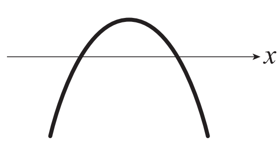
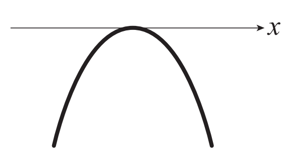
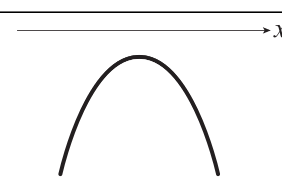


在$x=\alpha$時，有最大值$=f(\alpha)$；

在$x=\beta$時，有最小值$=f(\beta)$。

(5) 恆正與恆負：

二次函數$y=ax^2+bx+c$之圖形與x軸相交的情形如下，

	$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
$a>0$			
$a<0$			

由上圖知：

① 對所有的實數x，$f(x)>0$恆成立（圖形恆在x軸上方），

則$a>0$且$b^2-4ac<0$。

② 對所有的實數x，$f(x)<0$恆成立（圖形恆在x軸下方），

則$a<0$且$b^2-4ac<0$。

觀念是非題　試判斷下列敘述對或錯。（每題 2 分，共 10 分）

（ ○ ）**1.** 已知一次函數 $f(x)$ 滿足 $f(1)=5$，$f(3)=-1$，則 $\dfrac{f(1000)-f(998)}{1000-998}=-3$。

解　斜率 $m=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{-1-5}{2}=-3$，$\dfrac{f(1000)-f(998)}{1000-998}$ 亦為 $f(x)$ 上兩點的斜率，

所以 $\dfrac{f(1000)-f(998)}{1000-998}=-3$。

（ ○ ）**2.** 二次函數 $f(x)=3x^2-6x-7$ 圖形的頂點坐標為 $(1,-10)$。

解　$f(x)=3x^2-6x-7=3(x-1)^2-10$，可知頂點坐標為 $(1,-10)$。

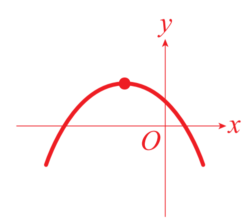
（ ○ ）**3.** 已知二次函數 $f(x)$ 滿足 $f(4-t)=f(-2+t)$，其中 t 為任意實數，則 $y=f(x)$ 的對稱軸為 $x=1$。

解　當 $t=0$ 時，$f(4)=f(-2)$ 表二次函數 $y=f(x)$ 關於 $x=1$ 對稱。

（ × ）**4.** 已知二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$，其中 a、b、c 為實數，當 $a<0$，$b<0$，$c>0$ 時，此拋物線的頂點在第一象限。

解　$a<0\Rightarrow$開口向下，$ab>0\Rightarrow$頂點在 y 軸左側，

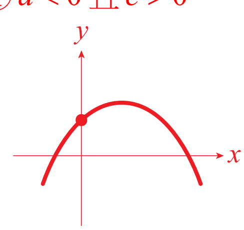
又 $c>0\Rightarrow$與 y 軸的交點在原點的上方，故頂點在第二象限。



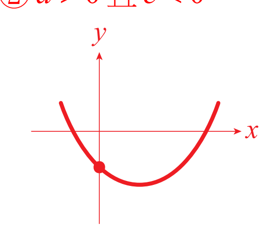
（ ○ ）**5.** 已知二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$，其中 a、b、c 為實數，當 $ac<0$，則 $y=f(x)$ 的圖形會通過四個象限。

解　當 $ac<0$ 有以下兩種情況，都會通過四個象限。

① $a<0$ 且 $c>0$



② $a>0$ 且 $c<0$



一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 某次考試，全班成績不佳，最高為 50 分。老師想用一個線型函數來調整分數，使 50 分變成 100 分，20 分變成 60 分，則原來的 41 分變成＿＿88＿＿分。

解 設 $f(x)=ax+b$，50 分變成 100 分 $\Rightarrow a\times 50+b=100$，

20 分變成 60 分 $\Rightarrow a\times 20+b=60$，故 $a=\dfrac{4}{3}$，$b=\dfrac{100}{3}$。

$f(x)=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{100}{3}$，又 $f(41)=\dfrac{4}{3}\times 41+\dfrac{100}{3}=88$ 分。

2. 已知二次函數 $y=f(x)=2x^2-4x-6$，若將 $f(x)$ 的圖形向左平移 4 單位，再向上平移 5 單位後，可得另一拋物線 $y=g(x)=a(x+b)^2+c$，則序組 $(a,b,c)=$＿＿$(2,3,-3)$＿＿。

解 $y=f(x)=2x^2-4x-6=2(x-1)^2-8\xrightarrow[\text{向上平移5單位}]{\text{向左平移4單位}}y=2(x+3)^2-3$，

故序組 $(a,b,c)=(2,3,-3)$。

3. 二次函數 $y=f(x)$ 之圖形通過 $A(-2,11)$、$B(-1,5)$、$C(2,11)$ 三點，則 $f(x)=$＿＿$2x^2+3$＿＿。

解 過 $A(-2,11)$、$C(2,11)$，設 $f(x)=a(x+2)(x-2)+11$，

又過 $B(-1,5)$，得 $f(-1)=a\times 1\times(-3)+11=5\Rightarrow a=2$，

故 $f(x)=2(x+2)(x-2)+11=2x^2+3$。

4. 已知二次函數 $f(x)$ 滿足 $f(2)=f(-1)=-4$，且 $f(x)$ 有最大值 5，求 $f(x)=$ $\underline{-4x^2+4x+4}$。

解 $f(2)=f(-1)=-4$ 表 $y=f(x)$ 對稱 $x=\frac{1}{2}$，

又 $f(x)$ 有最大值 5 表頂點 $\left(\frac{1}{2},5\right)$ 且開口向下。

設 $f(x)=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+5$，又 $f(2)=a\left(\frac{3}{2}\right)^2+5=-4\Rightarrow a=-4$，

故 $f(x)=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+5=-4x^2+4x+4$。

5. 二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$，其中 $-1\le x\le 4$，若在 $x=2$ 時有最小值 -5，且圖形與 y 軸交於 $(0,3)$，則此函數之最大值為 $\underline{\quad 13 \quad}$。

解 在 $x=2$ 有最小值 -5 表頂點 $(2,-5)$ 且開口向上，

設 $f(x)=a(x-2)^2-5$，又過 $(0,3)$ 得 $f(0)=a\times 4-5=3\Rightarrow a=2$。

$f(x)=2(x-2)^2-5$，在 $-1\le x\le 4$ 的範圍內討論，

當 $x=-1$ 時，有最大值 $2(-1-2)^2-5=13$。

6. 已知拋物線 $y=x^2+7x+k$ 與 x 軸交於 P、Q 兩點且 $\overline{PQ}=13$，求實數 $k=$ $\underline{\quad -30 \quad}$。

解 $x^2+7x+k=0\Rightarrow x=\dfrac{-7\pm\sqrt{49-4k}}{2}$ 表示與 x 軸交於

$P\left(\dfrac{-7+\sqrt{49-4k}}{2},0\right)$、$Q\left(\dfrac{-7-\sqrt{49-4k}}{2},0\right)$

$\Rightarrow \overline{PQ}=\sqrt{49-4k}=13\Rightarrow 49-4k=169\Rightarrow k=-30$。

7. 設 x 、 y 為任意實數，且滿足 $x^2+2y^2=4$ ，試回答下列問題。

(1) 求 x 的範圍為 $\underline{\quad -2\le x\le 2 \quad}$ 。（3 分）

(2) 求 $2x+2y^2$ 的最小值為 $\underline{\quad -4 \quad}$ 。（4 分）

解 $2y^2=4-x^2\ge 0\Rightarrow x^2\le 4\Rightarrow -2\le x\le 2$ ，

$2x+2y^2=2x+\left(4-x^2\right)=-x^2+2x+4=-(x-1)^2+5$ ，

當 $x=-2$ 時， $2x+2y^2$ 有最小值 $-(-2-1)^2+5=-4$ 。

8. 一地產公司有80棟公寓住宅，當租金每棟每月為3000元時，所有住宅均租出；每月租金每增加100元時，則平均多一住宅不能租出，而每一租出之房屋每月需養護費300元，為求最高利潤如何改訂租金？ $\underline{\quad}$5600元或5700元$\underline{\quad}$ 。

解 設租金為 $3000+100x$ ，有 $80-x$ 棟公寓住宅出租，其中 x 為正整數或0，

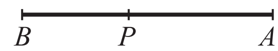
故利潤 $f(x)=(3000+100x)(80-x)-300(80-x)=(80-x)(2700+100x)$

$$=100\left[(80-x)(27+x)\right]=100\left(-x^2+53x+2160\right)$$

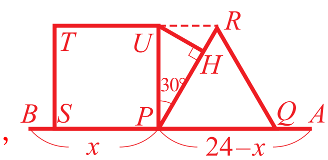
$$=100\left[-\left(x-\frac{53}{2}\right)^2+\frac{11449}{4}\right],$$

當 $x=26$ 或 27 時，有最大值，此時租金為5600元或5700元。

9. $\overline{AB}$ 是一條長 24 公分的鐵絲，如附圖，P 是 $\overline{AB}$ 上一點，將 $\overline{PB}$ 圍成一正方形，且順時針依序為 P、S、T、U，將 $\overline{AP}$ 圍成一正三角形且逆時針依序為 P、Q、R，而 P、U、R 決定一三角形，問 P 在 ___$\overline{AB}$ 之中點___ 時，$\triangle UPR$ 的面積為最大。



解　設 $\overline{PB}=x$，則 $PSTU$ 的邊長為 $\dfrac{x}{4}$，$\triangle PQR$ 的邊長為 $\dfrac{24-x}{3}$。



自 U 作 $\overline{PR}$ 之垂線 $\overline{UH}$，$\angle UPR=30^\circ$，故 $\overline{UH}=\overline{UP}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{8}$，

$\triangle PUR=\dfrac{1}{2}\times\overline{PR}\times\overline{UH}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{24-x}{3}\times\dfrac{x}{8}=\dfrac{1}{48}\left(24x-x^2\right)=\dfrac{1}{48}\left(-(x-12)^2+144\right)$，

當 $x=12$ 時，亦即 $\overline{AB}$ 之中點，有最大值 $\dfrac{1}{48}\times144=3$。

10. 對所有實數 x，$f(x)=x^2+(k+3)x+4$，$g(x)=-x^2+(k-1)x+(k-2)$，$f(x)$ 恆在 $g(x)$ 上方，求 k 的範圍為 ___$k<4$___。

解　$f(x)$ 恆在 $g(x)$ 上方，

則 $f(x)-g(x)=\left[x^2+(k+3)x+4\right]-\left[-x^2+(k-1)x+(k-2)\right]>0$ 恆成立

$\Rightarrow 2x^2+4x+(6-k)>0$ 恆成立

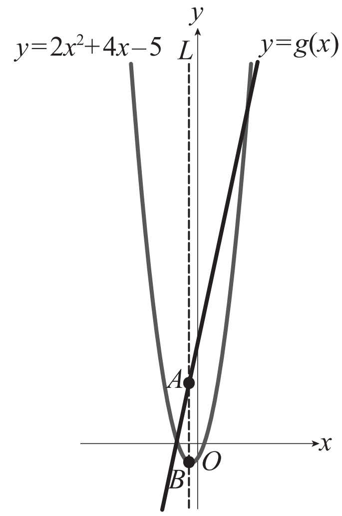
$\Rightarrow D=4^2-4\times2\times(6-k)<0\Rightarrow 8k-32<0\Rightarrow k<4$。

二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 12 題為題組

11. 設 $t>0$，$f(t)=2\left(t+\frac{4}{t}\right)^2+4\left(t+\frac{4}{t}\right)-5$，求 $f(t)$ 的最小值為____43____，此時的 t 為____2____。（填充題，每小格 5 分）

12. 坐標平面上有二次函數 $f(x)=2x^2+4x-5$ 與一次函數 $g(x)$，已知 $g(x)$ 過點 $(0,37)$ 與 $(-1,25)$，兩函數圍成一封閉區域（如附圖），若作一條鉛直線 L（虛線）垂直 x 軸，分別與封閉區域的邊界交於 A、B 兩點，試求在封閉區域內 $\overline{AB}$ 的最大值為多少？（非選擇題，10 分）

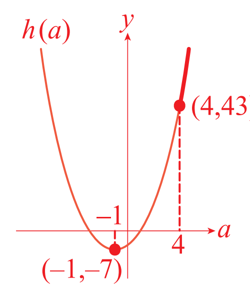


解 11. 令 $a=t+\frac{4}{t}$，因為 $t>0$，由算幾不等式得

$$\frac{t+\frac{4}{t}}{2}\geq\sqrt{t\times\frac{4}{t}}\Rightarrow t+\frac{4}{t}\geq 4\Rightarrow a\geq 4，$$

原式 $h(a)=2a^2+4a-5=2(a^2+2a+1)-2-5=2(a+1)^2-7$。

因為 $a\geq 4$，由圖可知當 $a=4$ 時，$h(a)$ 有最小值 43，



又 $a=t+\frac{4}{t}=4\Rightarrow t^2-4t+4=0\Rightarrow(t-2)^2=0\Rightarrow t=2$，

故當 $t=2$ 時，$f(t)$ 有最小值 43。

12. 因為 $g(x)$ 過 $(0,37)$ 與 $(-1,25)$，故斜率 $=\frac{37-25}{0-(-1)}=12$，設 $g(x)=12x+k$，

又 $g(0)=12\times 0+k=37\Rightarrow k=37$，所以 $g(x)=12x+37$。

因為 $f(x)=2x^2+4x-5$，$g(x)=12x+37$，求兩函數交點

得 $2x^2+4x-5=12x+37\Rightarrow 2x^2-8x-42=0\Rightarrow x^2-4x-21=0\Rightarrow x=7$ 或 $x=-3$。

設鉛直線 L 為 $x=t$ 且 $-3\leq t\leq 7$，

L 交 $g(x)$ 於點 $A(t,12t+37)$，交 $f(x)$ 於點 $B(t,2t^2+4t-5)$，

則 $\overline{AB}=(12t+37)-(2t^2+4t-5)=-2t^2+8t+42=-2(t^2-4t+4)+8+42=-2(t-2)^2+50$，

故當 $t=2$，即 $L:x=2$，$\overline{AB}$ 有最大值為 50。