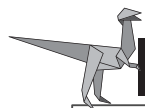
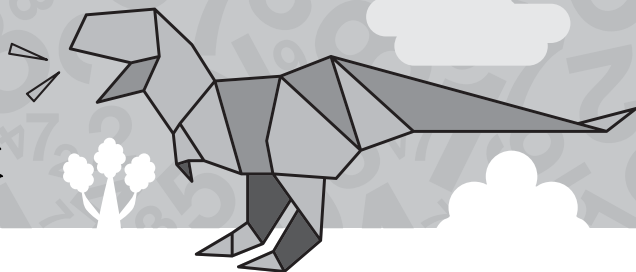


# 2 三角函數的圖形



## 重點整理

### 1. 三角函數的圖形：

函數	部分圖形	定義域與值域	週期
$y = \sin x$		定義域： $\mathbb{R}$ 值域： $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$	$2\pi$
$y = \cos x$		定義域： $\mathbb{R}$ 值域： $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$	$2\pi$
$y = \tan x$		定義域： $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ 值域： $\mathbb{R}$	$\pi$

### 2. 週期的改變：

已知  $a$ 、 $b$  為非零常數， $c$ 、 $d$  為常數。

(1) 若  $f(x)$  的週期為  $T$ ，則  $f(bx)$  的週期為  $\frac{T}{|b|}$ 。

(2)  $y = a \sin(bx + c) + d$ 、 $y = a \cos(bx + c) + d$  的週期為  $\frac{2\pi}{|b|}$ 。

(3)  $y = a \tan(bx + c) + d$  的週期為  $\frac{\pi}{|b|}$ 。

### 3. 平移和伸縮：

(1) 三角函數之圖形的平移：將  $y = \sin x$  平移成  $y = \sin(x - h) + k$ ，

$h > 0 \Rightarrow$  往右平移  $h$  單位， $h < 0 \Rightarrow$  往左平移  $|h|$  單位；

$k > 0 \Rightarrow$  往上平移  $k$  單位， $k < 0 \Rightarrow$  往下平移  $|k|$  單位。

(2) 三角函數之圖形的伸縮： $y = a \sin(bx)$ ， $a > 0$ 、 $b > 0$ ，

振幅變為  $y = \sin x$  圖形振幅的  $a$  倍，週期變為  $y = \sin x$  圖形週期的  $\frac{1}{b}$  倍。



### 觀念是非題 試判斷下列敘述對或錯。(每題 2 分，共 10 分)

( ) 1. 若  $f(x)$  的週期為  $T$ ，則  $af(x)$  的週期仍為  $T$ ，其中  $a$  為非零常數。

解

( ) 2. 若  $f(x)$  的週期為  $T$ ，則  $f(bx)$  的週期為  $b \times T$ ，其中  $b$  為非零常數。

解

( ) 3.  $y = \tan x$  的圖形對稱於原點。

解

( ) 4. 已知  $y = \sin x$  的週期為  $2\pi$ ，因此  $y = |\sin x|$  的週期亦為  $2\pi$ 。

解

( ) 5. 已知  $y = \sin x$  為週期函數，則  $y = \sin x + |\sin x|$  為週期函數。

解

## 一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 下列選項何者為真？\_\_\_\_\_。（多選題）

(A)  $y = \sin 2x$  的週期為  $2\pi$ (B)  $y = 1 + \sin 2x$  的週期與  $y = \sin 2x$  相同(C)  $y = 1 + \sin 2x$  的最大值為 2，最小值為 0(D)  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  之週期為  $2\pi$ (E)  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  的圖形是將  $y = \sin x$  的圖形向右移  $\frac{\pi}{3}$  單位而得。

解

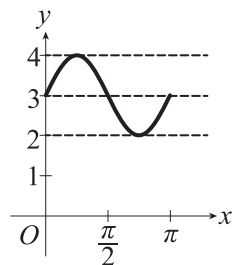
2. 函數  $f(x) = -2\sin 3x$ ，請問下列選項何者為真？\_\_\_\_\_。（多選題）(A)  $-2 \leq f(x) \leq 2$  (B)  $f(x)$  在  $x = \frac{\pi}{6}$  時有最小值 (C)  $f(x)$  的週期為  $\frac{2\pi}{3}$ (D)  $y = f(x)$  的圖形對稱於直線  $x = \frac{\pi}{2}$  (E)  $f(2) < 0$ 。

【聯考（修）】

解

# 10 單元 2 三角函數的圖形

3. 右圖為  $y = f(x) = a \sin bx + c$  在某個週期內的圖形，且  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為常數， $a > 0$ ， $b > 0$ 。



則  $a =$  \_\_\_\_\_。(3 分)

$b =$  \_\_\_\_\_。(2 分)

$c =$  \_\_\_\_\_。(2 分)

解

4. 已知函數  $f(x) = -4 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$ ，當  $0 \leq x \leq \pi$  時， $f(x)$  的最大值為  $a$ ，最小值為  $b$ ，則數對  $(a, b) =$  \_\_\_\_\_。

解

5. 將  $y = \cos x$  的圖形根據下列條件伸縮、平移，寫出變換後的圖形。

(1) 先以  $y$  軸為基準線，水平伸縮為原來的  $\frac{1}{2}$  倍，再往右平移  $\frac{\pi}{3}$  單位，可得新圖形

$y = \cos(ax - b)$ ，其中  $a > 0$ ， $0 < b < \pi$ ，則數對  $(a, b) =$  \_\_\_\_\_。(3 分)

(2) 先往右平移  $\frac{\pi}{3}$  單位，再以  $y$  軸為基準線，水平伸縮為原來的  $\frac{1}{2}$  倍，可得新圖形

$y = \cos(ax - b)$ ，其中  $a > 0$ ， $0 < b < \pi$ ，則數對  $(a, b) =$  \_\_\_\_\_。(4 分)

解

6. 試比較  $\tan 1$ 、 $\tan 2$ 、 $\tan 3$  的大小關係：\_\_\_\_\_（由大到小）。

解

7. 在  $0 \leq x \leq 4\pi$  的範圍內，求方程式  $\sin x \geq \frac{1}{2}$  的解為\_\_\_\_\_。

解

8. 方程式  $\cos x = \frac{x}{7}$  共有\_\_\_\_\_個實根。

解

9. 設  $a = \sin(\pi^2)$ ，試問下列哪個選項是對的？\_\_\_\_\_。（單選題）

(A)  $-1 < a \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$  (B)  $-\frac{\sqrt{3}}{2} < a \leq -\frac{1}{2}$  (C)  $-\frac{1}{2} < a < 0$  (D)  $\frac{1}{2} < a \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  (E)  $\frac{\sqrt{3}}{2} < a \leq 1$ 。

解

# 12 單元 2 三角函數的圖形

10. 在  $0 \leq x < 2\pi$  的範圍內，求不等式  $2\sin^2 x + \cos x - 1 < 0$  之解的範圍為\_\_\_\_\_。

解

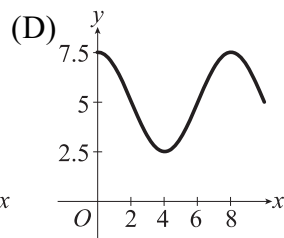
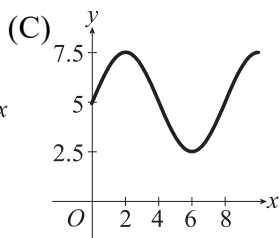
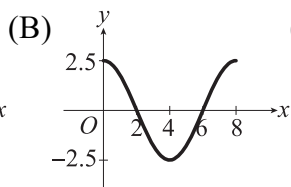
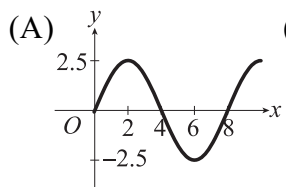
## 二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 13 題為題組

海水的水位受到太陽、月球引力以及地球自轉的影響，造成一種規律的現象，稱為潮汐現象。潮汐與港口的建設有密切的關聯，港口規劃建設時，須掌握潮汐的規律，使漲潮時船隻不會被淹沒；退潮時船隻不會擱淺。下表為某漁港一天時間  $x$ （時）與水深  $y$ （公尺）的部分關係，且時間  $x$  與水深  $y$  滿足正弦函數

時間 $x$ （時）	0	2	4	6	8	10	12	14	16
水深 $y$ （公尺）	5.0	7.5	5.0	2.5	5.0	7.5	5.0	2.5	5.0

（ ） 11. 試問下列各曲線中，何者最接近此正弦函數的圖形？（單選題，6 分）



12. 承上題，若上表的時間  $x$  與水深  $y$  滿足正弦函數  $y = a \sin(bx + c) + d$ ，其中  $a > 0$ ， $b > 0$  且  $0 \leq c < \pi$ ，求序組  $(a, b, c, d) = ?$ （非選擇題，7 分）

13. 為了避免船隻入港時有擱淺的危險，當水深不低於 6.25 公尺時，才會安排船隻入港，試問在 0 時到 16 時之間，約有多少小時船隻可以進入港口？（四捨五入取到整數位）（非選擇題，7 分）

解