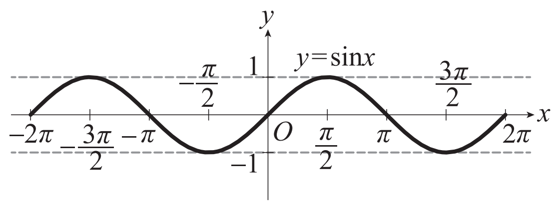
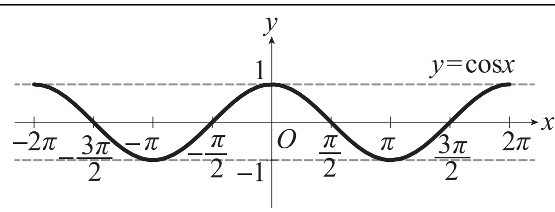
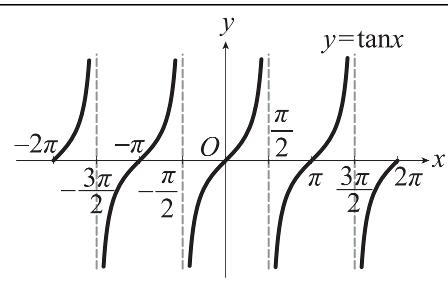
2 三角函數的圖形

重點整理

1. 三角函數的圖形：

函數	部分圖形	定義域與值域	週期
$y=\sin x$		定義域：$\mathbb{R}$ 值域：$\left\{y\in\mathbb{R}\middle\|-1\le y\le 1\right\}$	2π
$y=\cos x$		定義域：$\mathbb{R}$ 值域：$\left\{y\in\mathbb{R}\middle\|-1\le y\le 1\right\}$	2π
$y=\tan x$		定義域： $\left\{x\in\mathbb{R}\middle\|x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ 值域：$\mathbb{R}$	π

2. 週期的改變：

已知 a 、 b 為非零常數， c 、 d 為常數。

(1)若 $f(x)$ 的週期為 T ，則 $f(bx)$ 的週期為 $\dfrac{T}{|b|}$ 。

(2) $y=a\sin(bx+c)+d$ 、 $y=a\cos(bx+c)+d$ 的週期為 $\dfrac{2\pi}{|b|}$ 。

(3) $y=a\tan(bx+c)+d$ 的週期為 $\dfrac{\pi}{|b|}$ 。

3. 平移和伸縮：

(1) 三角函數之圖形的平移：將 $y=\sin x$ 平移成 $y=\sin(x-h)+k$，

$h>0 \Rightarrow$ 往右平移 h 單位，$h<0 \Rightarrow$ 往左平移 $|h|$ 單位；

$k>0 \Rightarrow$ 往上平移 k 單位，$k<0 \Rightarrow$ 往下平移 $|k|$ 單位。

(2) 三角函數之圖形的伸縮：$y=a\sin(bx)$，$a>0$、$b>0$，

振幅變為 $y=\sin x$ 圖形振幅的 a 倍，週期變為 $y=\sin x$ 圖形週期的 $\frac{1}{b}$ 倍。

觀念是非題　試判斷下列敘述對或錯。（每題 2 分，共 10 分）

（ ○ ）**1.** 若 $f(x)$ 的週期為 T，則 $af(x)$ 的週期仍為 T，其中 a 為非零常數。

解 平移、往鉛直方向伸縮皆不改變週期。

（ ╳ ）**2.** 若 $f(x)$ 的週期為 T，則 $f(bx)$ 的週期為 $b\times T$，其中 b 為非零常數。

解 $f(bx)$ 的週期應為 $\dfrac{T}{|b|}$。

（ ○ ）**3.** $y=\tan x$ 的圖形對稱於原點。

解 將 $y=\tan x$ 的圖形畫出來後可知對稱於原點。

（ ╳ ）**4.** 已知 $y=\sin x$ 的週期為 2π，因此 $y=|\sin x|$ 的週期亦為 2π。

解 描點畫圖後，可得 $y=|\sin x|$ 的週期為 π。

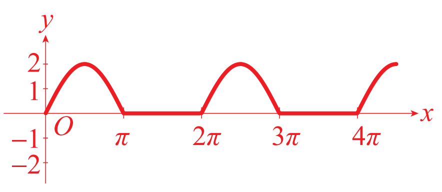
（ ○ ）**5.** 已知 $y=\sin x$ 為週期函數，則 $y=\sin x+|\sin x|$ 為週期函數。

解 將 $y=\sin x+|\sin x|$ 的圖形分段討論如下：

① $0\le x<\pi \Rightarrow y=\sin x+\sin x=2\sin x$。

② $\pi\le x<2\pi \Rightarrow y=\sin x+(-\sin x)=0$。

且每 2π 會重複相同圖形，可知其週期為 2π。



一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 下列選項何者為真？ (B)(C)(D) 。（多選題）

(A) $y=\sin 2x$ 的週期為 2π

(B) $y=1+\sin 2x$ 的週期與 $y=\sin 2x$ 相同

(C) $y=1+\sin 2x$ 的最大值為 2，最小值為 0

(D) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 之週期為 2π

(E) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的圖形是將 $y=\sin x$ 的圖形向右移 $\dfrac{\pi}{3}$ 單位而得。

解 (A)╳：週期為 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$。

(B)○：將 $y=\sin 2x$ 的圖形向上平移 1 單位，可得 $y=1+\sin 2x$ 的圖形，不改變週期。

(C)○：$-1\le\sin 2x\le 1\Rightarrow 0\le 1+\sin 2x\le 2$。

(D)○：將 $y=\sin x$ 的圖形向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 單位，可得 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的圖形，不改變週期 2π。

(E)╳：將 x 以 $x+\dfrac{\pi}{3}$ 代入⇒即由 $y=\sin x$ 的圖形向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 單位而得。

故選(B)(C)(D)。

2. 函數 $f(x)=-2\sin 3x$，請問下列選項何者為真？ (A)(B)(C)(D) 。（多選題）

(A) $-2\le f(x)\le 2$　(B) $f(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 時有最小值　(C) $f(x)$ 的週期為 $\dfrac{2\pi}{3}$

(D) $y=f(x)$ 的圖形對稱於直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$　(E) $f(2)<0$。　【聯考（修）】

解 (A)○：因為 $-1\le\sin 3x\le 1\Rightarrow -2\le -2\sin 3x\le 2$。

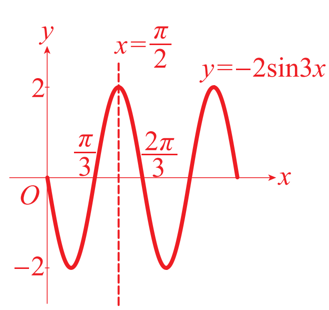
(B)○：$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-2\sin\dfrac{\pi}{2}=-2$。

(C)○：週期為 $\dfrac{2\pi}{3}$。

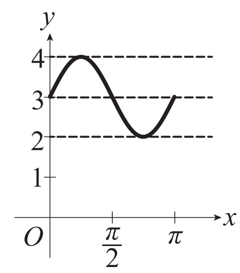
(D)○：由圖可知正確。

(E)╳：$f(2)=-2\sin 6>0$（因為 6 弳為第四象限角）。

故選(A)(B)(C)(D)。



3. 右圖為 $y=f(x)=a\sin bx+c$ 在某個週期內的圖形，且 a 、 b 、 c 為常數， $a>0$ ， $b>0$ 。



則 $a=$ ___1___ 。（3 分）

$b=$ ___2___ 。（2 分）

$c=$ ___3___ 。（2 分）

解 由圖可知振幅為 1（且 $a>0$），故 $a=1$ 。

週期為 $\frac{2\pi}{|b|}=\pi\Rightarrow b=\pm 2$（且 $b>0$），故 $b=2$ 。

$f(0)=1\times\sin 0+c=3\Rightarrow c=3$ 。

4. 已知函數 $f(x)=-4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1$ ，當 $0\le x\le\pi$ 時， $f(x)$ 的最大值為 a ，最小值為 b

則數對 $(a,b)=$ ___$(1,-5)$___ 。

解 ① $\frac{\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{6}\le\frac{7\pi}{6}\Rightarrow -\frac{1}{2}\le\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le 1\Rightarrow -4\le -4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le 2$

$\Rightarrow -5\le -4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1\le 1$ 。

② $f(x)$ 的最大值為 $a=1$ ，最小值為 $b=-5$ ，所以數對 $(a,b)=(1,-5)$ 。

5. 將 $y=\cos x$ 的圖形根據下列條件伸縮、平移，寫出變換後的圖形。

(1) 先以 y 軸為基準線，水平伸縮為原來的 $\frac{1}{2}$ 倍，再往右平移 $\frac{\pi}{3}$ 單位，可得新圖形

$y=\cos(ax-b)$ ，其中 $a>0$ ， $0<b<\pi$ ，則數對 $(a,b)=$ ___$\left(2,\frac{2\pi}{3}\right)$___ 。（3 分）

(2) 先往右平移 $\frac{\pi}{3}$ 單位，再以 y 軸為基準線，水平伸縮為原來的 $\frac{1}{2}$ 倍，可得新圖形

$y=\cos(ax-b)$ ，其中 $a>0$ ， $0<b<\pi$ ，則數對 $(a,b)=$ ___$\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$___ 。（4 分）

解 (1) $y=\cos x\xrightarrow[\frac{1}{2}\text{倍}]{\text{水平伸縮}}y=\cos 2x\xrightarrow[\frac{\pi}{3}\text{單位}]{\text{往右平移}}y=\cos 2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$ ，

故 $(a,b)=\left(2,\frac{2\pi}{3}\right)$ 。

(2) $y=\cos x\xrightarrow[\frac{\pi}{3}\text{單位}]{\text{往右平移}}y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\xrightarrow[\frac{1}{2}\text{倍}]{\text{水平伸縮}}y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ ，

故 $(a,b)=\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$ 。

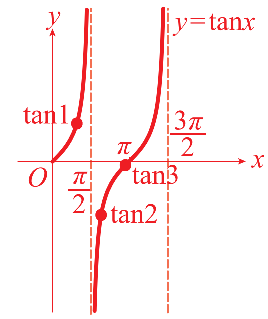
6. 試比較 $\tan 1$、$\tan 2$、$\tan 3$ 的大小關係：$\underline{\tan 1 > \tan 3 > \tan 2}$（由大到小）。

解　由圖形可知：

① $\tan 1 > 0$；$\tan 2 < 0$、$\tan 3 < 0$。

② 其中 $\tan 3 > \tan 2$。

故 $\tan 1 > \tan 3 > \tan 2$。

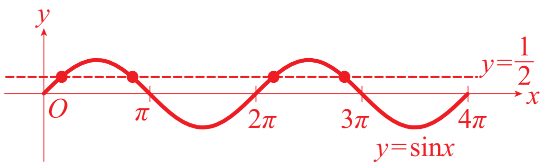


7. 在 $0 \le x \le 4\pi$ 的範圍內，求方程式 $\sin x \ge \frac{1}{2}$ 的解為 $\underline{\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5\pi}{6} \text{ 或 } \frac{13\pi}{6} \le x \le \frac{17\pi}{6}}$。

解　① 先將 $\begin{cases} y = \sin x \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ 的圖形畫出來，如右圖所示

在 $0 \le x \le 4\pi$ 的範圍內，

兩圖形相交於 $x = \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$ 或 $\frac{13\pi}{6}$ 或 $\frac{17\pi}{6}$ 之處。

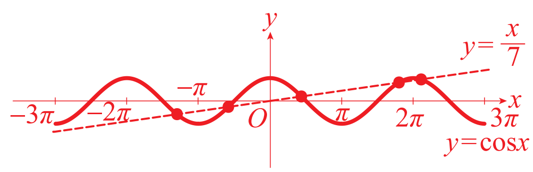


② 由右圖可知，在 $0 \le x \le 4\pi$ 的範圍內，$\sin x \ge \frac{1}{2}$ 的解為 $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5\pi}{6}$ 或 $\frac{13\pi}{6} \le x \le \frac{17\pi}{6}$。

8. 方程式 $\cos x = \frac{x}{7}$ 共有 $\underline{\quad 5 \quad}$ 個實根。

解　所求為 $\begin{cases} y = \cos x \\ y = \frac{x}{7} \end{cases}$ 的圖形交點個數，

由圖可知共有 5 個實根。

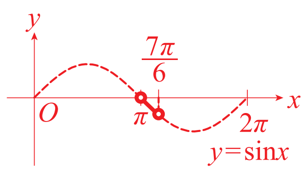


9. 設 $a = \sin\left(\pi^2\right)$，試問下列哪個選項是對的？$\underline{\quad (C) \quad}$。（單選題）

(A) $-1 < a \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $-\frac{\sqrt{3}}{2} < a \le -\frac{1}{2}$　(C) $-\frac{1}{2} < a < 0$　(D) $\frac{1}{2} < a \le \frac{\sqrt{3}}{2}$　(E) $\frac{\sqrt{3}}{2} < a \le 1$。

解　$a = \sin\left(\pi^2\right) = \sin\left(\pi \times \pi\right) \approx \sin\left(3.14\pi\right) = \sin 1.14\pi$，

又 $\pi < 1.14\pi < \frac{7}{6}\pi$，故 $\sin\frac{7\pi}{6} < a < \sin\pi \Rightarrow -\frac{1}{2} < a < 0$，故選(C)。



10. 在 $0 \le x < 2\pi$ 的範圍內，求不等式 $2\sin^2 x + \cos x - 1 < 0$ 之解的範圍為 $\underline{\dfrac{2}{3}\pi < x < \dfrac{4}{3}\pi}$ 。

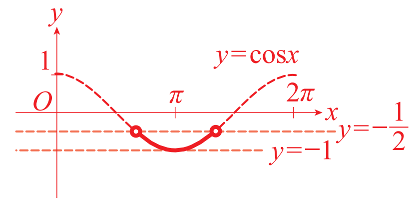
解 ① 原式 $\Rightarrow 2\left(1-\cos^2 x\right)+\cos x-1<0 \Rightarrow 2\cos^2 x-\cos x-1>0$

$\Rightarrow (2\cos x+1)(\cos x-1)>0 \Rightarrow \cos x>1$ 或 $\cos x<-\dfrac{1}{2}$ ，

但 $-1 \le \cos x \le 1$ ，故 $-1 \le \cos x < -\dfrac{1}{2}$ 。

② 在 $0 \le x < 2\pi$ 的範圍內，

當 $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ 時， $x=\dfrac{2}{3}\pi$ 或 $\dfrac{4}{3}\pi$ ，所以 $\dfrac{2}{3}\pi < x < \dfrac{4}{3}\pi$ 。



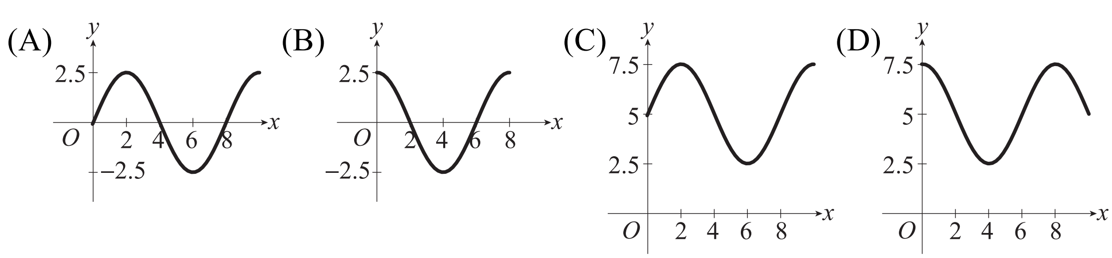
二、素養混合題（共 20 分）

<u>第 11 至 13 題為題組</u>

海水的水位受到太陽、月球引力以及地球自轉的影響，造成一種規律的現象，稱為潮汐現象。潮汐與港口的建設有密切的關聯，港口規劃建設時，須掌握潮汐的規律，使漲潮時船隻不會被淹沒；退潮時船隻不會擱淺。下表為某漁港一天時間 x（時）與水深 y（公尺）的部分關係，且時間 x 與水深 y 滿足正弦函數

時間 x（時）	0	2	4	6	8	10	12	14	16
水深 y（公尺）	5.0	7.5	5.0	2.5	5.0	7.5	5.0	2.5	5.0

（ C ）**11.** 試問下列各曲線中，何者最接近此正弦函數的圖形？（單選題，6 分）



12. 承上題，若上表的時間 x 與水深 y 滿足正弦函數 $y=a\sin(bx+c)+d$ ，其中 $a>0$ ，$b>0$ 且 $0 \le c < \pi$ ，求序組 $(a,b,c,d)=$ ？（非選擇題，7 分）

13. 為了避免船隻入港時有擱淺的危險，當水深不低於 6.25 公尺時，才會安排船隻入港，試問在 0 時到 16 時之間，約有多少小時船隻可以進入港口？（四捨五入取到整數位）（非選擇題，7 分）

解　11. 已知圖形為正弦函數，且由數據知選(C)。

12. ① 觀察附表可得函數的週期為 8 小時，且振幅為 $\dfrac{7.5-2.5}{2}=\dfrac{5}{2}$，

又週期 $=\dfrac{2\pi}{b}=8\Rightarrow b=\dfrac{\pi}{4}$，且振幅 $=a=\dfrac{5}{2}$，得 $y=\dfrac{5}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x+c\right)+d$。

② 觀察附表可得 y 的最大值為 7.5，又 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x+c\right)$ 的最大值為 1，

故當 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x+c\right)=1$ 時，$y=\dfrac{5}{2}+d=7.5\Rightarrow d=5$，

將 $(0,5)$ 代入 $y=\dfrac{5}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x+c\right)+5\Rightarrow \sin c=0$，因為 $0\le c<\pi$，故 $c=0$，

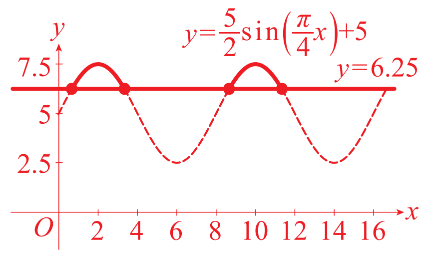
即 $y=\dfrac{5}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)+5$，所以 $(a,b,c,d)=\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{\pi}{4},0,5\right)$。

13. 求 $y=\dfrac{5}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)+5$ 與 $y=6.25$ 兩圖形的交點：

$\dfrac{5}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)+5=6.25\Rightarrow\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\dfrac{\pi}{4}x=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5\pi}{6}$，$\dfrac{13\pi}{6}$，$\dfrac{17\pi}{6}$，…

$\Rightarrow x=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{10}{3}$，$\dfrac{26}{3}$，$\dfrac{34}{3}$，…，



故在 0 時到 16 時之間，水深不低於 6.25 公尺的時間約有

$\left(\dfrac{10}{3}-\dfrac{2}{3}\right)+\left(\dfrac{34}{3}-\dfrac{26}{3}\right)=\dfrac{16}{3}\approx 5$（小時）。