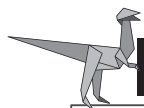
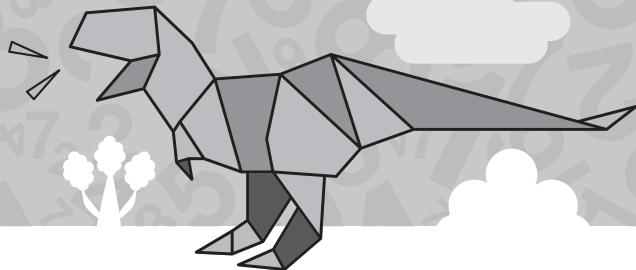


2 絕對值



重點整理

1. 實數的絕對值：

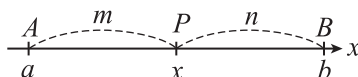
- (1) 設 a 為實數，則 $|a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$ ，故看到絕對值，若「正」照抄，若「負」變號。
- (2) $|-a| = |a|$ ，所以絕對值內變號，仍然不改變絕對值的值。
- (3) 幾何意義：數線上兩點 $A(a)$ 、 $B(b)$ ，則 \overline{AB} 的距離 $= |a - b|$ ，故絕對值的幾何意義表示為距離。



- (4) 整數的離散性：已知 a 、 b 為相異整數，則 $|a - b| \geq 1$ 。

2. 分點公式：

數線上兩點 $A(a)$ 與 $B(b)$ ，若 \overline{AB} 上一點 $P(x)$ 滿足 $\overline{AP} : \overline{PB} = m : n$ ，則 $x = \frac{na + mb}{m + n}$ 。



例如： M 為 A 、 B 的中點，則 $M = \frac{a + b}{2}$ 。

3. 區間記號：

- (1) $a \leq x \leq b$ 記為 $[a, b]$ 。(又稱為閉區間，即含兩端點)



- (2) $a \leq x < b$ 記為 $[a, b)$ 。



- (3) $a < x \leq b$ 記為 $(a, b]$ 。



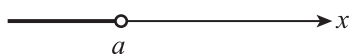
- (4) $a < x < b$ 記為 (a, b) 。(又稱為開區間，即不含兩端點)



- (5) $x \geq a$ 記為 $[a, \infty)$ 。(其中 ∞ 是表示無限大的一個記號)



- (6) $x < a$ 記為 $(-\infty, a)$ 。

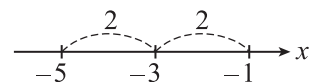


- (7) \mathbb{R} 記為 $(-\infty, \infty)$ 。



4. 絕對值不等式：

$|x+3| \leq 2$ 的解為 $-5 \leq x \leq -1$ 。



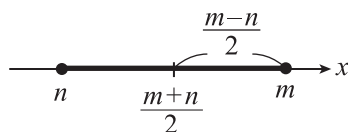
- (1) 代數觀點： $|x+3| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x+3 \leq 2 \Rightarrow -5 \leq x \leq -1$ 。

- (2) 幾何觀點： $|x+3| \leq 2$ 表 $P(x)$ 到 $A(-3)$ 的距離小於或等於 2，解為 $-5 \leq x \leq -1$ 。

5. 反推絕對值不等式：

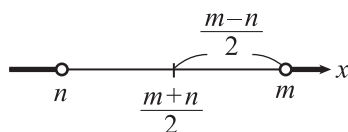
- (1) 若 $n \leq x \leq m$ ，表數線上 $P(x)$ 到中點 $\left(\frac{m+n}{2}\right)$ 的距離小於或等於 $\frac{m-n}{2}$

$$\Rightarrow \left| x - \frac{m+n}{2} \right| \leq \frac{m-n}{2}。$$



- (2) 若 $x > m$ 或 $x < n$ ，表數線上 $P(x)$ 到中點 $\left(\frac{m+n}{2}\right)$ 的距離大於 $\frac{m-n}{2}$

$$\Rightarrow \left| x - \frac{m+n}{2} \right| > \frac{m-n}{2}。$$





觀念是非題 試判斷下列敘述對或錯。(每題 2 分，共 10 分)

- () 1. 不等式 $|x-3| \leq 5$ 與 $|9-3x| \leq 15$ 的解相同。

解

- () 2. 若 $m < n$ ，且 m 、 n 為有理數，則 $m < \frac{2m+3n}{6} < n$ 必成立。

解

- () 3. 已知 $x < 1$ ，化簡 $|x-1| + (x-1)$ ，可得 $|x-1| + (x-1) = -(x-1) + [-(x-1)] = -2x+2$ 。

解

- () 4. 已知 $0 < x < 1$ ，化簡 $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 2}$ ，
可得 $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 2} = \left|x - \frac{1}{x}\right| + \left|x + \frac{1}{x}\right| = 2x$ 。

解

- () 5. 化簡 $|x-3| \geq 2$ ，可得 $x-3 \geq \pm 2$ 。

解

一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 設數線上兩點 $A(4)$ 、 $B(7)$ ，試回答下列問題。

(1) 已知點 $P(x)$ 在 \overline{AB} 上，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=5:6$ ，則 x 值為_____。(4 分)

(2) 已知點 $Q(y)$ 在 \overline{AB} 外，且 $\overline{AQ}:\overline{BQ}=5:6$ ，則 y 值為_____。(3 分)

解

2. 若 a 、 b 為有理數，且 $a < b$ ，試比較 $A = \frac{a+b}{2}$ ， $B = \frac{2a+b}{3}$ ， $C = \frac{a+2b}{3}$ ， $D = \frac{a+3b}{4}$ ， $E = \frac{2a+3b}{5}$ ，求五個數的大小順序為_____。

解

12 單元 2 絕對值

3. 解方程式 $|2x+9|=3$ ，可得 $x=$ _____。

解

4. 優良學生的票選活動又開跑了，這次共有三位學生出來選拔，已知學生 A 、 B 累積支持者分別有 20 人、33 人，且學生 C 與學生 A 的支持者差距加上學生 C 與學生 B 的支持者差距共 21 人，試問學生 C 累積支持者有_____人。

解

5. 解不等式 $|2x-3|\geq 15$ ，可得 x 的範圍為_____，以區間符號表示為_____。(第 1 格 4 分，第 2 格 3 分)

解

6. 在數線上滿足 $6 \leq |-3x+5| < 17$ 的整數解 x 有_____個。

解

7. 設 x 、 y 為實數，若 $|x+3| \leq 1$ 且 $|2y-7| \leq 11$ ，求下列各小題的範圍，並以區間符號表示。

- (1) $x+y$ 的範圍為_____。(2 分)
- (2) $x-y$ 的範圍為_____。(2 分)
- (3) xy 的範圍為_____。(2 分)
- (4) x^2+y^2 的範圍為_____。(1 分)

解

14 單元 2 絕對值

8. 解不等式 $|x-3|-|x+1|\geq 0$ ，得 x 的範圍為_____。

解

9. 不等式 $|x+1|-|x-2|< x+2$ 的解為_____。

解

10. 設 a 、 b 為實數，已知不等式 $|ax-5|\leq b$ 的解為 $-\frac{14}{3}\leq x\leq \frac{4}{3}$ ，則數對 $(a,b)=$

_____。

解

二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 12 題為題組

《Cytus》是一款由臺灣研發的音樂遊戲，可用來訓練玩家對於節奏感的敏銳度，這款遊戲的規則為依照節奏點擊音符，當玩家在點擊音符時，電腦會依照玩家所按下的時間點，去判定每個音符的準確度，依序評定給予 PERFECT（完美）、BAD（不佳）、MISS（失誤）。

假設玩家按下節奏音符的誤差值為 t 秒，若誤差值 t 的範圍為 ± 1.5 （含 1.5）則評定為 PERFECT；範圍為 $-2.5 < t < -1.5$ 或 $1.5 < t < 2.5$ 則評定為 BAD；範圍為 $t \leq -2.5$ 或 $t \geq 2.5$ 則評定為 MISS。

- () 11. 阿萱是一個新手玩家，已知在音樂 60 秒處有一個節奏音符「RE」，且阿萱在這個節奏音符被評定為 BAD，試寫出阿萱按下節奏時的秒數範圍並以 $a < |x+k| < b$ 表示，其中 x 為音樂進行時的時間秒數，求 $a+b+k$ 之值為何？（單選題，10 分）

(A) -64 (B) -56 (C) 56 (D) 61 (E) 64。

12. 已知阿萱選擇的這首歌，最後的評定方法是以 MISS 個數判斷玩家等級為金牌、銀牌、銅牌或參加獎，設 MISS 個數為 n 個，以下為各等級的範圍：

等級	金牌	銀牌	銅牌	參加獎
n	$ n-19 \leq 19$	$ n-57 \leq 18$	$ n-88 \leq 12$	$n > 100$

若阿萱在這首歌中最後獲得銀牌，且得到的 MISS 個數 n 滿足 $|-2n+21| < 63$ ，試問阿萱得到的 MISS 個數可能是幾個？（非選擇題，10 分）

解