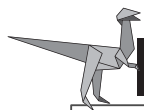
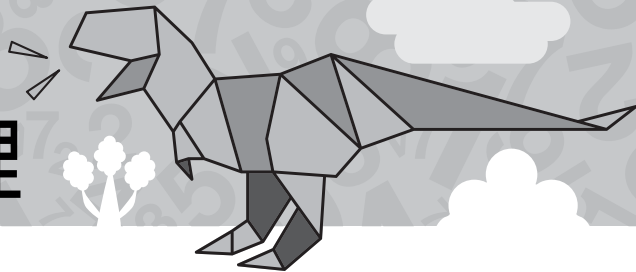


8 多項式的除法原理



重點整理

1. 多項式的定義：

形如 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 的代數式稱為多項式，其中 n 為正整數， a_n 、 a_{n-1} 、 \cdots 、 a_1 、 a_0 為實數。

- (1) 其中 $a_n x^n$ 、 $a_{n-1} x^{n-1}$ 、 \cdots 、 $a_1 x$ 、 a_0 分別稱為多項式的 n 次項、 $n-1$ 次項、 \cdots 、一次項和常數項。
- (2) a_k 稱為 k 次項的係數。
- (3) 若 $a_n \neq 0$ 時稱為 n 次多項式， a_n 稱為多項式的領導係數，而 n 稱為多項式的次數，常以 $\deg f(x) = n$ 表示。
- (4) 若 $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = 0$ 時，稱為常數多項式。
- (5) 若 a_n 、 a_{n-1} 、 \cdots 、 a_1 、 a_0 為整數，則稱為整係數多項式；同理可推知有理係數多項式、實係數多項式。
- (6) 常數項 $a_0 = f(0)$ ，各項係數和 $= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = f(1)$ 。
- (7) $f(x)$ 、 $g(x)$ 為兩個非零的多項式，若同次項的係數相等且次數相同，稱 $f(x)$ 、 $g(x)$ 兩多項式相等。

2. 除法原理：

設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 為兩個非零的多項式，若 $\deg f(x) \geq \deg g(x)$ ，則存在兩多項式 $Q(x)$ 及 $r(x)$ ，使得 $f(x) = g(x) \times Q(x) + r(x)$ ，其中 $r(x) = 0$ 或 $\deg r(x) < \deg g(x)$ 。常用的方法為長除法及綜合除法。

3. 餘式定理：

- (1) 多項式 $f(x)$ 除以 $(x - \alpha)$ 的餘式為 $f(\alpha)$ 。
- (2) 多項式 $f(x)$ 除以 $(ax - b)$ 的餘式為 $f\left(\frac{b}{a}\right)$ 。

例如：① $f(7)$ 表 $f(x)$ 除以 $(x - 7)$ 的餘式。 ② $f(x)$ 除以 $(2x + 1)$ 的餘式為 $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ 。

③ $f(x)$ 除以 $(x + 2)$ 的餘式為 3，表 $f(-2) = 3$ 。

4. 因式定理：

- (1) 多項式 $f(x)$ 被 $(x-\alpha)$ 整除，表 $f(x)$ 有 $(x-\alpha)$ 的因式，則 $f(\alpha)=0$ 。
- (2) 多項式 $f(x)$ 有 $(x-\alpha)$ 、 $(x-\beta)$ 、 $(x-\gamma)$ 的因式，
則 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)Q(x)$ 。



觀念是非題 試判斷下列敘述對或錯。(每題 2 分，共 10 分)

- () 1. 已知 $\deg f(x)=3$ 且 $\deg g(x)=5$ ，則 $\deg[g(x)-x^2 \times f(x)]=5$ 。

解

- () 2. 設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 為兩非零多項式，若 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式為 $Q(x)$ ，餘式為 $r(x)$ ，則 $f(x)$ 除以 $2g(x)$ 的商式為 $\frac{1}{2}Q(x)$ ，餘式為 $\frac{1}{2}r(x)$ 。

解

- () 3. 若 $f(x)=x^{10}+x^8-x^5+x^3-x-1$ ，則 $x-1$ 為 $f(x)$ 的因式。

解

- () 4. 若 $f(x)=(x^2-x-1)^{100}$ ，則 $f(x)$ 除以 $100x-100$ 的餘式為 1。

解

- () 5. 設 $f(x)=x^3-x^2+x-7=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ ，則 $a-b+c-d=7$ 。

解

一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 已知 $f(x) = 4x^5 - 6x^3 + 3x^2 + kx + 1$ ， $g(x) = x^3 + 2kx^2 - x - 6$ ，若將 $f(x) \times g(x)$ 展開並化簡後可得 x^5 項的係數為 3，則實數 k 的值為_____。

解

2. 用綜合除法求 $x^4 - 2x^3 + 7x - 5$ 除以 $x - 3$ 的商式為_____，餘式為_____。（第 1 格 4 分，第 2 格 3 分）

解

3. 計算 $3 \times 5^5 - 14 \times 5^4 - 6 \times 5^3 + 7 \times 5^2 - 12 \times 5 + 19$ 的值為_____。

解

66 單元 8 多項式的除法原理

4. 設 $f(x) = 54x^3 - 99x^2 + 66x - 20$ ，試回答下列問題：

(1) 已知 $f(x)$ 表示成 $\left(x - \frac{1}{3}\right)$ 的多項式之形式為 $f(x) = a\left(x - \frac{1}{3}\right)^3 + b\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + c\left(x - \frac{1}{3}\right) + d$ ，

其中 a 、 b 、 c 、 d 均為實數，則序組 $(a, b, c, d) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(2 分)

(2) 已知 $f(x)$ 表示成 $(3x-1)$ 的多項式之形式為 $f(x) = p(3x-1)^3 + q(3x-1)^2 + r(3x-1) + s$ ，

其中 p 、 q 、 r 、 s 均為實數，則序組 $(p, q, r, s) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(2 分)

(3) 求 $f(0.33)$ 的近似值到小數點以下第四位為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(3 分)

解

5. 若 $f(x)$ 除以 $x^2 - 1$ 得餘式 $2x - 3$ ， $g(x)$ 除以 $x^2 + 3x - 4$ 得餘式 $5x + 4$ ，則 $(x^2 + 3)f(x) + (4x - 5)g(x)$ 除以 $x - 1$ 的餘式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

解

6. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $x-2$ 的餘式為 3，且 $f(x)$ 除以 $x+4$ 的餘式為 -3 ，求 $f(x)$ 除以 $(x-2)(x+4)$ 的餘式為_____。

解

7. 多項式 $f(x)$ 除以 x^2+x+3 的餘式為 $3x-1$ ，除以 $x-1$ 的餘式為 12，則 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x^2+x+3)$ 的餘式為_____。

解

8. 設 $f(x)$ 為三次多項式，若 $f(x)$ 除以 x^2-x-2 的餘式為 $3x+12$ ，除以 (x^2+2) 的餘式為 $3x-6$ ，則 $f(x)=$ _____。

解

68 單元 8 多項式的除法原理

9. 已知 $f(x)$ 為三次多項式且 $f\left(\frac{1}{3}\right) = f(-1) = f(2) = 6$ ， $f(1) = 10$ ，則 $(x^2 + 1)f(x)$ 除以 x 的餘式為_____。

解

10. 已知 a 、 b 、 c 為實數，多項式 $x^3 + ax^2 + bx + c$ 同時可被 $x^2 + x$ 與 $x^2 + 5x + 4$ 整除，則 $a + b + 1975c =$ _____。

解

二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 13 題為題組

令 $f(x) = mx^4 - 16x^3 + nx^2 + 12x + k$ ，右圖是小明使用綜合除法計算的過程，已知他的計算過程中沒有錯誤，試回答下列各題。

$$\begin{array}{r|rrrrr} m & -16 & +n & +12 & +k & \\ & +4 & -6 & +6 & +9 & \\ \hline m & +r & +g & +p & +10 & \end{array} \quad \frac{1}{2}$$

11. 若將 $f(x) = mx^4 - 16x^3 + nx^2 + 12x + k$ 寫成

$$a(2x-1)^4 + b(2x-1)^3 + c(2x-1)^2 + d(2x-1) + e,$$

求 $(a, b, c, d, e) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(填充題，7 分)

12. 求 $f(x)$ 除以 $(2x-1)^3$ 的餘式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(填充題，7 分)

13. 求 $f\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = ?$ （非選擇題，6 分）

解