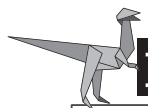


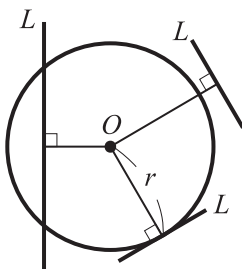
7 圓與直線的關係



重點整理

1. 圓與直線的關係：

在平面上有一圓 C ，圓心為 O ，半徑為 r ， L 為平面一直線，則直線 L 與圓 C 之關係有相交於兩點、相切、不相交。



(1) 幾何意義：過圓心 O 到直線 L 之距離常以 $d(O, L)$ 來表示

① L 與圓 C 相交於兩點（相割） $\Rightarrow d(O, L) < r$ 。

② L 與圓 C 相切（相切） $\Rightarrow d(O, L) = r$ 。

③ L 與圓 C 不相交（相離） $\Rightarrow d(O, L) > r$ 。

(2) 代數意義：直線 $L: y = mx + k$ 代入圓： $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 整理成一元二次方程式 $Ax^2 + Bx + C = 0$ ，其中 $D = B^2 - 4AC$ ，

① L 與圓 C 相交於兩點 $\Rightarrow D > 0$ 。

② L 與圓 C 相切 $\Rightarrow D = 0$ 。

③ L 與圓 C 不相交 $\Rightarrow D < 0$ 。

2. 切線：

已知 h 、 k 為實數， r 為正實數，圓： $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ，其中圓心 $O(h, k)$ ，半徑 r 。

(1) 已知切線的斜率求切線：

已知切線斜率 m ，設切線 $L: y = mx + k$ ，利用 $d(O, L) = r$ ，求出 k （兩解）。

(2) 已知圓外一點求切線：

已知圓外一點 $P(x_0, y_0)$ ，設切線 $L: y - y_0 = m(x - x_0)$ ，利用 $d(O, L) = r$ ，求出 m （兩解）。

(3) 已知切點求切線：

已知切點 $Q(x_0, y_0)$ ，又切線斜率 m 與 m_{OQ} 垂直，求出 m 。



觀念是非題 試判斷下列敘述對或錯。(每題 2 分，共 10 分)

- () 1. 直線 $L: 4x - 3y + 5 = 0$ 與圓 $C: x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ 的關係為相割。

解

- () 2. 設一圓同時與直線 $L_1: x + 2y + 3 = 0$ ，直線 $L_2: x + 2y + 8 = 0$ 相切，則此圓半徑為 $\sqrt{5}$ 。

解

- () 3. 平面上一圓 C 和一點 P ， P 對圓 C 作切線。若 P 在圓外，則切線有兩條；若 P 在圓上，則切線恰有一條；若 P 在圓內，則切線不存在。

解

- () 4. 已知圓 $C: x^2 + y^2 = 16$ 及一直線 $L: 4x + 3y - 10 = 0$ ，則圓上有三個點到直線 L 的距離為 2。

解

- () 5. 同時與 x 軸、 y 軸與直線 $L: x + y = 2$ 相切的圓恰有一個。

解

一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 已知圓 $C: x^2 + y^2 + 3x - 5y - 4 = 0$ ，求圓 C 與 x 軸的交點坐標為_____。

解

2. 已知圓 $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + k = 0$ 與 x 軸相切，求 $k =$ _____。

解

3. 設直線 $L: x - 2y = 0$ ，圓 $C: x^2 + y^2 + 6x - 2y + 5 = 0$ ，求垂直於 L 且與圓 C 相切的切線方程式為_____。

解

52 單元 7 圓與直線的關係

4. 設圓 $C: x^2 + y^2 + 4x + k = 0$ 與直線 $L: x - y = 0$ 不相交，試求實數 k 的範圍為_____。

解

5. 過圓 $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y + k = 0$ 上一點 $A(4, 2)$ 的切線方程式為_____。

解

6. 在坐標平面上，一圓與直線 $L_1: x - y = 1$ 以及直線 $L_2: x - y = 5$ 所截的弦長皆為 12，則此圓的面積為_____。

解

7. 已知圓 $C: x^2 + (y-1)^2 = 1$ ，求過圓外一點 $P(7,5)$ 的切線方程式為_____。

解

8. 自點 $A(-3,3)$ 發出的光線 L 射到 x 軸上，被 x 軸反射的光線 M 與圓 $C: x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$ 相切，則 L 的方程式為_____。

解

54 單元 7 圓與直線的關係

9. 已知圓 $C: x^2 + y^2 - x - 3y - 2 = 0$ ，若直線 $L: y = mx$ 和圓 C 相交於相異兩點 A 、 B ，且弦長 $\overline{AB} = 4$ ，則斜率 $m =$ _____。

解

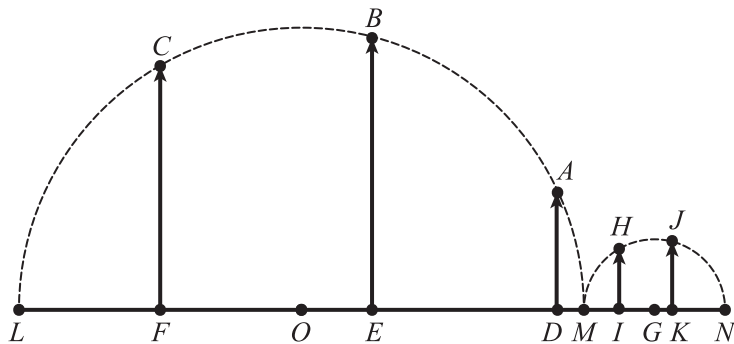
10. 已知 $P(1, -5)$ ，圓 $C: x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ ，且 O 點為圓 C 的圓心，則在 \overline{OP} 上有 _____ 個點對此圓作出的切線段長為正整數。

解

二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 12 題為題組

星空橋上有一個雙半圓的藝術裝飾建築，為了要支撐裝飾品的重量，在上頭加裝了許多條纜繩垂直橋面，設 O 點為坐標平面上的原點，且 E 點距離原點 4 公尺，纜繩 $\overline{BE} = 4\sqrt{15}$ 公尺，小半圓的半徑為大半圓半徑的 $\frac{1}{4}$ ，其中 O 為大半圓的圓心， G 為小半圓的圓心。



11. 為加強藝術建築的穩固性，計劃在雙半圓上各加裝一條纜繩，且兩條纜繩需垂直橋面，其中一條經評估要加裝在 O 點左方 8 公尺處（ \overline{CF} ），另一條加裝在 G 點左方 2 公尺處（ \overline{HI} ），則需要準備_____公尺的纜繩。（無條件進位，取至整數位）（填充題，10 分）
12. 聖誕節即將來臨，星空橋上有燈光秀，光源都從點 $L(-16,0)$ 與點 $N(24,0)$ 發射。在聖誕節當日有特別秀，驚喜安排的位置位在直線 L_1 ：「通過 L 點且與小半圓相切的直線」與直線 L_2 ：「通過 N 點且與大半圓相切的直線」的交點位置上，請問驚喜出現的坐標位置為何？（非選擇題，10 分）

解

