11 多項式不等式

重點整理

1. 多項式不等式：

形如 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 為實係數 n 次多項式，

則 $f(x)>0$ 、 $f(x)\geq 0$ 、 $f(x)<0$ 、 $f(x)\leq 0$ 都稱為多項式不等式

(1) 當領導係數 $a_n>0$，則 $y=f(x)$ 的最右邊為正；

當領導係數 $a_n<0$，則 $y=f(x)$ 的最右邊為負。

(2) $f(x)=0$ 解的幾何意義為 $y=f(x)$ 圖形與 x 軸交點的 x 坐標。

$f(x)>0$ 解的幾何意義為 $y=f(x)$ 圖形在 x 軸上方部分的所有 x 的範圍。

2. 一次與二次不等式：

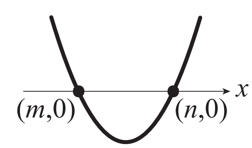
(1) 一次不等式：只要利用移項即可解出。

(2) 二次不等式：二次函數 $y=f(x)=ax^2+bx+c$，利用 $D=b^2-4ac$ 來檢視，

① $D=b^2-4ac>0$ 時， $f(x)=ax^2+bx+c=a(x-m)(x-n)$，其中 $a>0$ 且 $m<n$。

I. $f(x)=a(x-m)(x-n)\geq 0$ 的解為 $x\geq n$ 或 $x\leq m$。

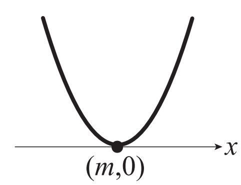
II. $f(x)=a(x-m)(x-n)<0$ 的解為 $m<x<n$。



② $D=b^2-4ac=0$ 時， $f(x)=ax^2+bx+c=a(x-m)^2$，其中 $a>0$。

I. $f(x)=a(x-m)^2>0$ 的解為 x 為任意實數解，但 $x\neq m$。

II. $f(x)=a(x-m)^2\leq 0$ 的解為 $x=m$。



③ $D=b^2-4ac<0$ 表 $y=f(x)$ 與 x 軸不相交。

I. 當 $a>0$， $f(x)=ax^2+bx+c>0$ 的解為任意實數解。

II. 當 $a<0$， $f(x)=ax^2+bx+c>0$ 的解為無實數解。

3. 高次不等式：

(1) 領導係數為正，最右邊的為正，奇數次方的左右變號，偶數次方的左右不變。

(2) 恆正對不等式不影響，可消去。

觀念是非題 試判斷下列敘述對或錯。(每題 2 分，共 10 分)

(　　) **1.** 已知不等式$3x-2>ax+3$的解為$x>1$，則$a=-2$。

解

(　　) **2.** 已知$x^2-4x+4\le 0$，則x無實數解。

解

(　　) **3.** $y=f(x)=2x^2+3x+4$的圖形恆在$y=g(x)=x^2+2x-1$圖形的上方。

解

(　　) **4.** 已知三次實係數函數$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，則$f(x)>0$可能恆成立。

解

(　　) **5.** 不等式$(x^2-1)(x-2)^4\ge 0$的解與不等式$(x-1)(x+1)^2(x^3+1)\ge 0$的解相同。

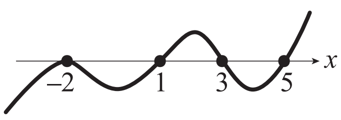
解

一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 已知 x 為實數，同時滿足一元二次不等式 $6x^2+x-2\le 0$ 與 $4x^2+4x+1\le 0$ 的 x 範圍為____________。

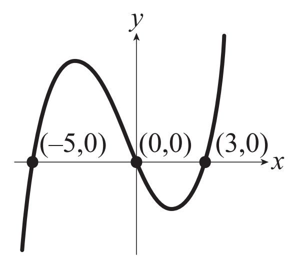
解

2. 若 $y=f(x)$ 的函數圖形如圖所示，已知 $\deg f(x)=5$，$f(x)\ge 0$ 的解為____________。



解

3. 已知三次函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 的圖形如圖所示，則滿足 $f(2x+1)>0$ 的最小整數解為____________。



解

4. 對任意實數 x，二次函數 $f(x)=x^2+ax+a$ 的圖形恆在 $y=2x-13$ 的上方，則 a 的範圍為____________。

解

5. 解多項不等式$\left(x-2\right)\left(x+3\right)\left(2x^2-5x+1\right)\left(3x^2+2x+1\right)<0$，則$x$的範圍為____________。

解

6. 不等式$x^2\left(2x+7\right)\left(x-8\right)<\left(2x-1\right)\left(2x+7\right)\left(x-8\right)$共有____________個整數解。

解

7. 設不等式$ax^2+bx+c>0$之解為$-3<x<2$，則不等式$ax^2+4bx+2c\geq 0$的解為$n\leq x\leq m$，求$m+n=$____________。

解

8. 已知不等式$\left(x^2+x+2\right)\left(x^2+ax+b\right)\le 0$的解為$-3\le x\le 1$，求不等式$\left(x^2-x-6\right)\left(x^2-ax+b\right)<0$的解為____________。

解

9. 明星中學一年級共有1000位學生投票選舉，今有10位候選人欲選出5位學生代表，試求候選人至少要獲得____________票才能篤定當選。

解

10. 設$A(-2)$、$B(3)$為數線上兩點（括號內代表坐標）。已知P點是數線上的動點，其坐標為整數，且滿足$\overline{PA}\times\overline{PB}<6$，試求動點$P$的個數有____________個。

解

二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 13 題為題組

有一塊鐵片，長 6 公尺，寬 4 公尺，今在四角各截去一個相同的「小正方形」，然後摺成一個無蓋的長方體容器。

(　　) **11.** 設邊長為 x 公尺，滿足一個無蓋的長方體容器，則邊長 x 有何範圍限制？（單選題，4 分）

(A) $0 \le x \le 2$　(B) $0 < x < 1$　(C) $0 < x < 2$　(D) $0 < x < 3$　(E) $2 < x < 3$。

12. 已知此無蓋的長方體容器的體積不小於 8 立方公尺（鐵片厚度不計），則邊長 x 的範圍為__________。（已知邊長 $x = 1$ 可以滿足條件）（填充題，8 分）

13. 已知長方體的體積不小於 8 立方公尺，則截去四個小正方形後剩餘鐵片面積最小為多少平方公尺？（非選擇題，8 分）

解