8 多項式的除法原理

重點整理

1. 多項式的定義：

形如 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的代數式稱為多項式，其中 n 為正整數，a_n、a_{n-1}、…、a_1、a_0 為實數。

(1) 其中 a_nx^n、$a_{n-1}x^{n-1}$、…、a_1x、a_0 分別稱為多項式的 n 次項、$n-1$ 次項、……、一次項和常數項。

(2) a_k 稱為 k 次項的係數。

(3) 若 $a_n\neq 0$ 時稱為 n 次多項式，a_n 稱為多項式的領導係數，而 n 稱為多項式的次數，常以 $\deg f(x)=n$ 表示。

(4) 若 $a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1=0$ 時，稱為常數多項式。

(5) 若 a_n、a_{n-1}、…、a_1、a_0 為整數，則稱為整係數多項式；同理可推知有理係數多項式、實係數多項式。

(6) 常數項 $a_0=f(0)$，各項係數和 $=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n=f(1)$。

(7) $f(x)$、$g(x)$ 為兩個非零的多項式，若同次項的係數相等且次數相同，稱 $f(x)$、$g(x)$ 兩多項式相等。

2. 除法原理：

設 $f(x)$、$g(x)$ 為兩個非零的多項式，若 $\deg f(x)\geq \deg g(x)$，則存在兩多項式 $Q(x)$ 及 $r(x)$，使得 $f(x)=g(x)\times Q(x)+r(x)$，其中 $r(x)=0$ 或 $\deg r(x)<\deg g(x)$。常用的方法為長除法及綜合除法。

3. 餘式定理：

(1) 多項式 $f(x)$ 除以 $(x-\alpha)$ 的餘式為 $f(\alpha)$。

(2) 多項式 $f(x)$ 除以 $(ax-b)$ 的餘式為 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)$。

例如：① $f(7)$ 表 $f(x)$ 除以 $(x-7)$ 的餘式。　② $f(x)$ 除以 $(2x+1)$ 的餘式為 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$。

③ $f(x)$ 除以 $(x+2)$ 的餘式為 3，表 $f(-2)=3$。

4. 因式定理：

(1) 多項式 $f(x)$ 被 $(x-\alpha)$ 整除，表 $f(x)$ 有 $(x-\alpha)$ 的因式，則 $f(\alpha)=0$。

(2) 多項式 $f(x)$ 有 $(x-\alpha)$、$(x-\beta)$、$(x-\gamma)$ 的因式，

則 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)Q(x)$。

觀念是非題　試判斷下列敘述對或錯。（每題 2 分，共 10 分）

(×) **1.** 已知 $\deg f(x)=3$ 且 $\deg g(x)=5$，則 $\deg\left[g(x)-x^2\times f(x)\right]=5$。

解 $\left[g(x)-x^2\times f(x)\right]$ 的次數會小於或等於 5。

(×) **2.** 設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 為兩非零多項式，若 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式為 $Q(x)$，餘式為 $r(x)$，則 $f(x)$ 除以 $2g(x)$ 的商式為 $\frac{1}{2}Q(x)$，餘式為 $\frac{1}{2}r(x)$。

解 由除法原理知 $f(x)=g(x)Q(x)+r(x)$，其中 $r(x)=0$ 或 $\deg r(x)<\deg g(x)$，

推 $f(x)=\left[2\times g(x)\right]\left[\frac{1}{2}\times Q(x)\right]+r(x)$，商式為 $\frac{1}{2}Q(x)$，但餘式仍為 $r(x)$。

(○) **3.** 若 $f(x)=x^{10}+x^8-x^5+x^3-x-1$，則 $x-1$ 為 $f(x)$ 的因式。

解 因為 $f(1)=1^{10}+1^8-1^5+1^3-1-1=0$，所以 $f(x)$ 有 $(x-1)$ 的因式。

(○) **4.** 若 $f(x)=\left(x^2-x-1\right)^{100}$，則 $f(x)$ 除以 $100x-100$ 的餘式為 1。

解 由餘式定理知 $f(x)$ 除以 $(100x-100)$ 的餘式為 $f(1)=\left(1^2-1-1\right)^{100}=1$。

(○) **5.** 設 $f(x)=x^3-x^2+x-7=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$，則 $a-b+c-d=7$。

解 由題意知 $f(0)=a(-1)^3+b(-1)^2+c(-1)+d\Rightarrow -7=-a+b-c+d$，故 $a-b+c-d=7$。

一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 已知 $f(x)=4x^5-6x^3+3x^2+kx+1$，$g(x)=x^3+2kx^2-x-6$，若將 $f(x)\times g(x)$ 展開並化簡後可得 x^5 項的係數為 3，則實數 k 的值為 $\underline{\quad -2 \quad}$。

解　$f(x)\times g(x)$ 的展開式中可得 x^5 項的情形有：

① $f(x)$ 中的 $4x^5$ 乘以 $g(x)$ 中的 -6，可得 $-24x^5$。

② $f(x)$ 中的 $-6x^3$ 乘以 $g(x)$ 中的 $2kx^2$，可得 $-12kx^5$。

③ $f(x)$ 中的 $3x^2$ 乘以 $g(x)$ 中的 x^3，可得 $3x^5$。

因此 $-24x^5-12kx^5+3x^5=3x^5$，故 $k=-2$。

2. 用綜合除法求 x^4-2x^3+7x-5 除以 $x-3$ 的商式為 $\underline{\quad x^3+x^2+3x+16 \quad}$，餘式為 $\underline{\quad 43 \quad}$。（第 1 格 4 分，第 2 格 3 分）

解　由圖可知商式為 $x^3+x^2+3x+16$，餘式為 43。

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
1 & -2 & +0 & +7 & -5 & \\
 & +3 & +3 & +9 & +48 & 3 \\
\hline
1 & +1 & +3 & +16 & +43 &
\end{array}
$$

3. 計算 $3\times5^5-14\times5^4-6\times5^3+7\times5^2-12\times5+19$ 的值為 $\underline{\quad 9 \quad}$。

解　題目即求 $f(x)=3x^5-14x^4-6x^3+7x^2-12x+19$ 除以 $x-5$ 的餘式，
由圖可知餘式為 9。

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
3 & -14 & -6 & +7 & -12 & +19 & \\
 & +15 & +5 & -5 & +10 & -10 & 5 \\
\hline
3 & +1 & -1 & +2 & -2 & +9 &
\end{array}
$$

4. 設 $f(x)=54x^3-99x^2+66x-20$，試回答下列問題：

(1) 已知 $f(x)$ 表示成 $\left(x-\frac{1}{3}\right)$ 的多項式之形式為 $f(x)=a\left(x-\frac{1}{3}\right)^3+b\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+c\left(x-\frac{1}{3}\right)+d$，其中 a、b、c、d 均為實數，則序組 $(a,b,c,d)=$ ＿$(54,-45,18,-7)$＿。（2 分）

(2) 已知 $f(x)$ 表示成 $(3x-1)$ 的多項式之形式為 $f(x)=p(3x-1)^3+q(3x-1)^2+r(3x-1)+s$，其中 p、q、r、s 均為實數，則序組 $(p,q,r,s)=$ ＿$(2,-5,6,-7)$＿。（2 分）

(3) 求 $f(0.33)$ 的近似值到小數點以下第四位為＿-7.0605＿。（3 分）

解 $f(x)=54\left(x-\frac{1}{3}\right)^3-45\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+18\left(x-\frac{1}{3}\right)-7$

$=2(3x-1)^3-5(3x-1)^2+6(3x-1)-7$，

即 $f(x)=-7+6(3x-1)-5(3x-1)^2+2(3x-1)^3$

$\Rightarrow f(0.33)=-7+6(-0.01)-5(-0.01)^2+2(-0.01)^3$

$=-7-0.06-0.0005-0.000002=-7.060502\approx-7.0605$。

故 $(a,b,c,d)=(54,-45,18,-7)$，$(p,q,r,s)=(2,-5,6,-7)$。

$$\begin{array}{rrrr|l}
54 & -99 & +66 & -20 & \\
 & +18 & -27 & +13 & \frac{1}{3} \\
\hline
54 & -81 & +39 & -7 & \\
 & +18 & -21 & & \\
\hline
54 & -63 & +18 & & \\
 & +18 & & & \\
\hline
54 & -45 & & &
\end{array}$$

5. 若 $f(x)$ 除以 x^2-1 得餘式 $2x-3$，$g(x)$ 除以 x^2+3x-4 得餘式 $5x+4$，則 $(x^2+3)f(x)+(4x-5)g(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為＿-13＿。

解 $f(x)=(x^2-1)Q_1(x)+2x-3\Rightarrow f(1)=-1$，

$g(x)=(x^2+3x-4)Q_2(x)+5x+4\Rightarrow g(1)=9$，

$(x^2+3)f(x)+(4x-5)g(x)$ 除以 $(x-1)$ 的餘式為

$(1^2+3)f(1)+(4-5)g(1)=4\times(-1)+(-1)\times9=-13$。

6. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $x-2$ 的餘式為 3，且 $f(x)$ 除以 $x+4$ 的餘式為 -3，求 $f(x)$ 除以 $(x-2)(x+4)$ 的餘式為 $\underline{\quad x+1 \quad}$。

解 $f(x)$ 除以 $x-2$ 的餘式為 $3 \Rightarrow f(2)=3$，且 $f(x)$ 除以 $x+4$ 的餘式為 $-3 \Rightarrow f(-4)=-3$。

因為除式 $(x-2)(x+4)$ 的次數為 2 次，

設餘式為 $ax+b$，即 $f(x)=(x-2)(x+4)q(x)+(ax+b)$，

又 $f(2)=2a+b=3$，$f(-4)=-4a+b=-3$，解 $\begin{cases}2a+b=3\\-4a+b=-3\end{cases}$，得 $a=1$，$b=1$，

故餘式為 $x+1$。

7. 多項式 $f(x)$ 除以 x^2+x+3 的餘式為 $3x-1$，除以 $x-1$ 的餘式為 12，則 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x^2+x+3)$ 的餘式為 $\underline{\quad 2x^2+5x+5 \quad}$。

解 $f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的餘式為 12，表 $f(1)=12$。

設 $f(x)=(x-1)(x^2+x+3)Q(x)+A(x^2+x+3)+3x-1$，

又 $f(1)=A(1+1+3)+3-1=12$，所以 $A=2$，

故餘式 $=2(x^2+x+3)+3x-1=2x^2+5x+5$。

8. 設 $f(x)$ 為三次多項式，若 $f(x)$ 除以 x^2-x-2 的餘式為 $3x+12$，除以 (x^2+2) 的餘式為 $3x-6$，則 $f(x)=\underline{\quad -x^3+5x^2+x+4 \quad}$。

解 $f(x)=(x^2-x-2)Q(x)+3x+12=(x+1)(x-2)Q(x)+3x+12$

$\Rightarrow f(-1)=9$ 且 $f(2)=18$。

$f(x)$ 為三次多項式，設 $f(x)=(x^2+2)(ax+b)+3x-6$，

又 $f(-1)=(1+2)(-a+b)-3-6=9 \Rightarrow -a+b=6 \cdots\cdots$①

$f(2)=(4+2)(2a+b)+6-6=18 \Rightarrow 2a+b=3 \cdots\cdots$②

由①②知 $a=-1$，$b=5$，故 $f(x)=(x^2+2)(-x+5)+3x-6=-x^3+5x^2+x+4$。

9. 已知 $f(x)$ 為三次多項式且 $f\left(\frac{1}{3}\right)=f(-1)=f(2)=6$，$f(1)=10$，則 $(x^2+1)f(x)$ 除以 x 的餘式為＿＿4＿＿。

解 令 $f(x)=a(3x-1)(x+1)(x-2)+6$，

又 $f(1)=a\times2\times2\times(-1)+6=10\Rightarrow a=-1$，

所以 $f(x)=-(3x-1)(x+1)(x-2)+6\Rightarrow f(0)=4$，

又 $(x^2+1)f(x)$ 除以 x 的餘式為 $(0^2+1)f(0)=4$。

10. 已知 a、b、c 為實數，多項式 x^3+ax^2+bx+c 同時可被 x^2+x 與 x^2+5x+4 整除，則 $a+b+1975c=$＿＿9＿＿。

解 整除⇒有 $x^2+x=x(x+1)$ 的因式，

有 $x^2+5x+4=(x+1)(x+4)$ 的因式，

故 $f(x)=x(x+1)(x+4)=x^3+5x^2+4x$，

比較係數得知 $a=5$，$b=4$，$c=0$，則 $a+b+1975c=9$。

二、素養混合題（共 20 分）

<u>第 11 至 13 題為題組</u>

令 $f(x)=mx^4-16x^3+nx^2+12x+k$，右圖是小明使用綜合除法計算的過程，已知他的計算過程中沒有錯誤，試回答下列各題。

$$\begin{array}{ccccc|c} m & -16 & +n & +12 & +k & \\ & +4 & -6 & +6 & +9 & \frac{1}{2} \\ \hline m & +r & +g & +p & +10 & \end{array}$$

11. 若將 $f(x)=mx^4-16x^3+nx^2+12x+k$ 寫成

$a(2x-1)^4+b(2x-1)^3+c(2x-1)^2+d(2x-1)+e$，

求 $(a,b,c,d,e)=$ <u>$\left(\frac{1}{2},0,\frac{3}{2},11,10\right)$</u>。（填充題，7 分）

12. 求 $f(x)$ 除以 $(2x-1)^3$ 的餘式為 <u>$6x^2+16x+\frac{1}{2}$</u>。（填充題，7 分）

13. 求 $f\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)=$？（非選擇題，6 分）

解 11. $\frac{1}{2}m=4\Rightarrow m=8$；$r=-16+4=-12$；$\frac{1}{2}g=6\Rightarrow g=12$；

$n+(-6)=g=12\Rightarrow n=18$；$p=12+6=18$；$k+9=10\Rightarrow k=1$，

故 $f(x)=8x^4-16x^3+18x^2+12x+1$

$$=8\left(x-\frac{1}{2}\right)^4+0\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+6\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+22\left(x-\frac{1}{2}\right)+10$$

$$=\frac{8}{16}(2x-1)^4+0(2x-1)^3+\frac{6}{4}(2x-1)^2+11(2x-1)+10，$$

故 $(a,b,c,d,e)=\left(\frac{1}{2},0,\frac{3}{2},11,10\right)$。

$$\begin{array}{ccccc|c} 8 & -16 & +18 & +12 & +1 & \\ & +4 & -6 & +6 & +9 & \frac{1}{2} \\ \hline 8 & -12 & +12 & +18 & \big| +10 & \\ & +4 & -4 & +4 & & \\ \hline 8 & -8 & +8 & \big| +22 & & \\ & +4 & -2 & & & \\ \hline 8 & -4 & \big| +6 & & & \\ & +4 & & & & \\ \hline 8 & \big| +0 & & & & \end{array}$$

12. 承上題，

$f(x)=(2x-1)^3\left[\frac{1}{2}(2x-1)\right]+\frac{3}{2}(2x-1)^2+11(2x-1)+10$，

故 $f(x)$ 除以 $(2x-1)^3$ 的餘式為 $\frac{3}{2}(2x-1)^2+11(2x-1)+10=6x^2+16x+\frac{1}{2}$。

13. 承上題，$f\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}\right)^4+0\left(\sqrt{5}\right)^3+\frac{3}{2}\left(\sqrt{5}\right)^2+11\left(\sqrt{5}\right)+10$

$$=\frac{25}{2}+\frac{15}{2}+11\sqrt{5}+10=30+11\sqrt{5}。$$