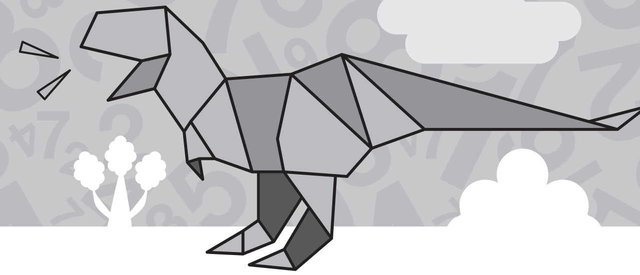
綜合習題 單元 1～4



一、單選題（每題 7 分，共 14 分）

（ C ）**1.** 已知 k 是實數，且滿足 $k<2\sqrt{2}+\sqrt{3}<k+1$，試求 k 之值為

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6 。〔搭配單元 1〕

解 因為 $\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=11+4\sqrt{6}=11+\sqrt{96}\approx 20.\times\times$，

所以 $2\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 介於 4 與 5 之間，k 取 4 ，故選(C)。

（ D ）**2.** 伊森心血來潮，想要知道 $2^{77000}-1$ 展開後的數字，假定每張 B4 紙，可列印出 100 個數字，若想要列印出此數字至少需要多少張 B4 紙？在下列選項中，選出最接近的張數。（已知 $\log 2\approx 0.3010$ ）

(A) 20 張 (B) 70 張 (C) 150 張 (D) 230 張 (E) 420 張。〔搭配單元 4〕

解 $2^{77000}-1$ 的 -1 不改變位數，

則 $2^{77000}=\left(10^{\log 2}\right)^{77000}=10^{77000\times\log 2}\approx 10^{77000\times 0.301}=10^{23177}$ 表為 23178 位數，

又一張紙可列印 100 個數字 $\Rightarrow \dfrac{23178}{100}=231.78$，比較接近 230 張，故選(D)。

二、多選題（每題 10 分，共 20 分）

（ BCE ）**3.** 已知 a、b、c 為實數，下列敘述何者為真？　〔搭配單元 1〕

(A)若 a 為有理數，b 為無理數，則 $a\times b$ 為無理數

(B)若 $a+b$ 為有理數，$a\times b$ 為無理數，則 $a-b$ 必為無理數

(C)若 $a+b$、$b+c$、$c+a$ 均為有理數，則 a、b、c 必為有理數

(D)若 a 為無理數且 $a+b$、$a\times b$ 均為無理數，則 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 必為無理數

(E)若 a 為無理數且 $a+b$、$a\times b$ 均為有理數，則 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ 必為有理數。

解 (A) ×：反例 $a=0$，b 為無理數，則 $a\times b=0$ 為有理數。

(B) ○：如果 $a-b$ 為有理數，且已知 $a+b$ 為有理數，

則 a、b 為有理數與已知 $a\times b$ 為無理數不合，故 $a-b$ 為無理數。

(C) ○：因為 $(a+b)+(b+c)+(c+a)=2(a+b+c)$ 為有理數，

取 $a=(a+b+c)-(b+c)$ 為有理數，同理 b、c 為有理數。

(D) ×：反例取 $a=2+\sqrt{3}$，$b=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，

則 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\left(2-\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}+1\right)=3$ 為有理數。

(E) ○：$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{b^2+a^2}{ab}=\dfrac{(a+b)^2-2ab}{ab}=\dfrac{(a+b)^2}{ab}-2$ 為有理數。

故選(B)(C)(E)。

（ ABCE ）**4.** 奕科在上課過程中，對於數據 $\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)^4$ 感到興趣，他令 $x=\sqrt{11}+\sqrt{7}$，$y=\sqrt{11}-\sqrt{7}$，則下列何者正確？

(A) $xy=4$　(B) $x^2+y^2=36$　(C) $x^4+y^4=1264$　(D) $y^4>1$

(E) x^4 的整數部分為 1263。　〔搭配單元 1〕

解 (A) ○：$xy=\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)=4$ 且 $x+y=2\sqrt{11}$。

(B) ○：$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=\left(2\sqrt{11}\right)^2-2\times4=36$。

(C) ○：$x^4+y^4=\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2=(36)^2-2\times(4)^2=1264$。

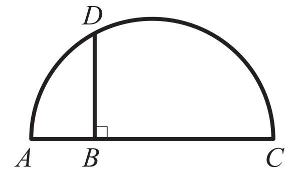
(D) ×：$y^2=\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)^2=18-2\sqrt{77}=18-\sqrt{308}<1$，故 $y^4<1$。

(E) ○：$x^4+y^4=1264$，且 $y^4<1$，則 x^4 的整數部分為 1263。

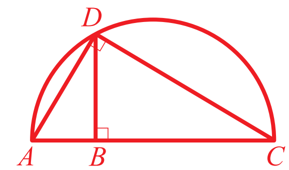
故選(A)(B)(C)(E)。

三、填充題（每題 8 分，共 48 分）

5. 點 B 在 $\overline{AC}$ 上，已知 $\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=11-6\sqrt{2}$，以 $\overline{AC}$ 為直徑作半圓，並過 B 作垂直 $\overline{AC}$ 的直線交半圓於 D 點，若 $\overline{BD}=a+b\sqrt{2}$，$a$、$b$ 均為有理數，則數對 $(a,b)=$ $\underline{\quad(3,-1)\quad}$。〔搭配單元 1〕



解 連接 $\overline{AD}$、$\overline{DC}$ 使得 $\angle ADC=90°$，
由母子相似性質得
$\overline{BD}^2=\overline{AB}\times\overline{BC}\Rightarrow\overline{BD}^2=1\times\left(11-6\sqrt{2}\right)$
$\Rightarrow\overline{BD}=\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{11-2\sqrt{18}}=\sqrt{9}-\sqrt{2}=3-\sqrt{2}$，
比較係數得 $a=3$，$b=-1$，則 $(a,b)=(3,-1)$。

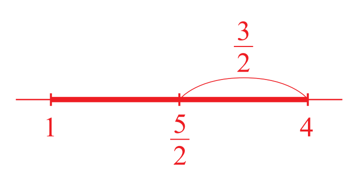


6. 已知 x 為實數，且滿足 $3|x-1|+2|x-15|=37$，其中 $1<x<15$，試求 $x=$ $\underline{\quad 10\quad}$。
〔搭配單元 2〕

解 因為 $1<x<15$，
則原式可得 $3(x-1)-2(x-15)=37\Rightarrow x=10$。

7. 設 x 為實數，若同時滿足 $|x-1|\le 3$ 和 $|x-3|\le 2$ 之 x 的範圍可以寫成 $|ax+1|\le b$，其中 a、b 為實數，則 $a+b=$ $\underline{\quad\frac{1}{5}\quad}$。（化為最簡分數）〔搭配單元 2〕

解 $|x-1|\le 3\Rightarrow -3\le x-1\le 3\Rightarrow -2\le x\le 4$，
$|x-3|\le 2\Rightarrow -2\le x-3\le 2\Rightarrow 1\le x\le 5$，
取交集可得 $1\le x\le 4$，
由 $1\le x\le 4$ 反推得 $\left|x-\frac{5}{2}\right|\le\frac{3}{2}$，同乘以 $\frac{2}{5}$ 得 $\left|\frac{2}{5}x-1\right|\le\frac{3}{5}$，
絕對值內變號得 $\left|-\frac{2}{5}x+1\right|\le\frac{3}{5}$，
故 $a=-\frac{2}{5}$，$b=\frac{3}{5}$，則 $a+b=\frac{1}{5}$。

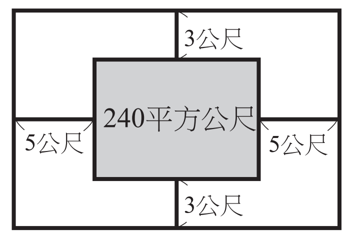


8. 凌志擔心自己設定的密碼會忘記，因此在手機提示的欄位打上 $0.\overline{abcdef}\times 999000$，已知 $abcdef$ 為凌志手機的後六碼 201515，試問凌志所設定的密碼為＿201314＿。

〔搭配單元 1〕

解 $0.201\overline{515}=\dfrac{201515-201}{999000}=\dfrac{201314}{999000}$，故 $0.201\overline{515}\times 999000=201314$。

9. 如圖所示，有一園藝設計師欲種植一片面積為 240 平方公尺的矩形綠地，且有一條步道環繞矩形綠地的外圍，此橫向步道的寬為 3 公尺，縱向步道的寬為 5 公尺，請問步道面積最小為＿300＿平方公尺。〔搭配單元 1〕



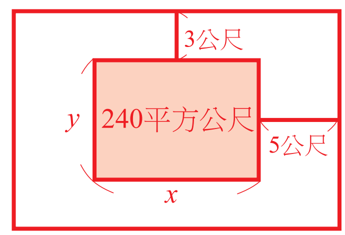
解 令矩形綠地長 $=x$，寬 $=y$，則矩形面積 $=xy=240$，

步道面積 $=(x+10)(y+6)-xy$

$$=6x+10y+60\geq 2\sqrt{(6x)(10y)}+60$$

$$=240+60=300\text{（平方公尺）。}$$

所以步道面積最小為 300 平方公尺。



10. 放射性物質每經過一段固定時間會衰變，質量變成原本的一半，我們稱此固定時間為該放射性物質的「半衰期」。已知放射物 A 的半衰期為 6 小時，放射物 B 的半衰期為 3 小時，若測得一塊礦石中，A、B 兩物質的殘餘量比為 $9:2$，則 18 小時前該礦石中，放射物 A 的含量是放射物 B 的＿$\dfrac{9}{16}$＿倍。〔搭配單元 3〕

解 18 小時前到現在 A 經過 $\dfrac{18}{6}=3$ 次半衰；B 經過 $\dfrac{18}{3}=6$ 次半衰，

令 A 現有的殘餘量為 $9k$，B 的殘餘量為 $2k$，其中 $k>0$，

則 18 小時前 A 為 $9k\times 2^3$，B 為 $2k\times 2^6$，故 A 為 B 的 $\dfrac{9k\times 2^3}{2k\times 2^6}=\dfrac{9}{16}$ 倍。

四、素養混合題（共 18 分）

第 11 至 12 題為題組

提丟斯—波德定律（Titius-Bode law）是太陽系中行星軌道半徑的一個簡單幾何學規則。1766 年天文學家波德提出「行星與太陽的平均距離為 a（AU），以數學式子 $a=\alpha+\beta\times 2^n$ 來表示，其中 AU 為天文上的長度單位」，下表為各行星對應的 n 值及部分行星與太陽的平均距離。

行星	行星對應的 n 值	行星與太陽的平均距離 a（AU）
水星	$-\infty$	0.4
金星	0	
地球	1	1
火星	2	
木星	4	
土星	5	
天王星		19.6

（ A ）**11.** 已知地球與太陽的平均距離為 1（AU），且木星與太陽的距離比地球與太陽的距離多 4.2（AU），試問下列何者為天王星所對應的 n 值？（單選題，9 分）
(A) 6　(B) 7　(C) 8　(D) 9。〔搭配單元 3〕

12. 承上題，1930 年克萊德．湯博發現了冥王星，並將其視為第九大行星。已知冥王星所對應的 n 值為 7，試求冥王星與太陽的平均距離為多少 AU？（非選擇題，9 分）〔搭配單元 3〕

解 11. $\begin{cases} 1=\alpha+\beta\times 2^1 \cdots\cdots ① \\ 5.2=\alpha+\beta\times 2^4 \cdots\cdots ② \end{cases}$，

②－①⇒ $4.2=14\beta \Rightarrow \beta=0.3$ 代回①得 $\alpha=0.4$，所以 $a=0.4+0.3\times 2^n$，

$19.6=0.4+0.3\times 2^n \Rightarrow 2^n=64 \Rightarrow n=6$，故選(A)。

12. 承上題，得到 $a=0.4+0.3\times 2^n$，將 $n=7$ 代入得 $a=38.8$（AU）。