2 絕對值

重點整理

1. 實數的絕對值：

(1) 設 a 為實數，則 $|a|=\begin{cases}a, a\ge 0\\ -a, a<0\end{cases}$，故看到絕對值，若「正」照抄，若「負」變號。

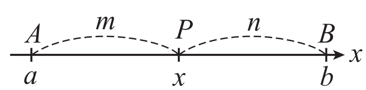
(2) $|-a|=|a|$，所以絕對值內變號，仍然不改變絕對值的值。

(3) 幾何意義：數線上兩點 $A(a)$、$B(b)$，則 $\overline{AB}$ 的距離 $=|a-b|$，故絕對值的幾何意義表示為距離。

(4) 整數的離散性：已知 a、b 為相異整數，則 $|a-b|\ge 1$。

2. 分點公式：

數線上兩點 $A(a)$ 與 $B(b)$，若 $\overline{AB}$ 上一點 $P(x)$ 滿足 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，則 $x=\dfrac{na+mb}{m+n}$。



例如：M 為 A、B 的中點，則 $M=\dfrac{a+b}{2}$。

3. 區間記號：

(1) $a\le x\le b$ 記為 $[a,b]$。（又稱為閉區間，即含兩端點）

(2) $a\le x<b$ 記為 $[a,b)$。

(3) $a<x\le b$ 記為 $(a,b]$。

(4) $a<x<b$ 記為 (a,b)。（又稱為開區間，即不含兩端點）

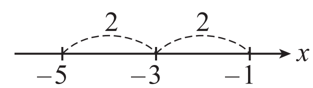
(5) $x\geq a$ 記為 $[a,\infty)$。（其中 ∞ 是表示無限大的一個記號）

(6) $x<a$ 記為 $(-\infty,a)$。

(7) $\mathbb{R}$ 記為 $(-\infty,\infty)$。

4. 絕對值不等式：

$|x+3|\leq 2$ 的解為 $-5\leq x\leq -1$。



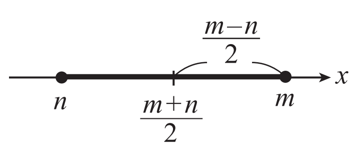
(1) 代數觀點：$|x+3|\leq 2 \Rightarrow -2\leq x+3\leq 2 \Rightarrow -5\leq x\leq -1$。

(2) 幾何觀點：$|x+3|\leq 2$ 表 $P(x)$ 到 $A(-3)$ 的距離小於或等於 2，解為 $-5\leq x\leq -1$。

5. 反推絕對值不等式：

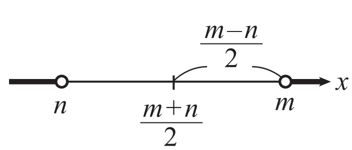
(1) 若 $n\leq x\leq m$，表數線上 $P(x)$ 到中點 $\left(\dfrac{m+n}{2}\right)$ 的距離小於或等於 $\dfrac{m-n}{2}$

$\Rightarrow \left|x-\dfrac{m+n}{2}\right|\leq \dfrac{m-n}{2}$。



(2) 若 $x>m$ 或 $x<n$，表數線上 $P(x)$ 到中點 $\left(\dfrac{m+n}{2}\right)$ 的距離大於 $\dfrac{m-n}{2}$

$\Rightarrow \left|x-\dfrac{m+n}{2}\right|>\dfrac{m-n}{2}$。



觀念是非題 試判斷下列敘述對或錯。(每題 2 分,共 10 分)

(○) **1.** 不等式 $|x-3|\le 5$ 與 $|9-3x|\le 15$ 的解相同。

解 絕對值內乘以 (-3),不改變。

(×) **2.** 若 $m<n$,且 m、n 為有理數,則 $m<\dfrac{2m+3n}{6}<n$ 必成立。

解 反例:取 $m=4$,$n=5$,則 $\dfrac{2m+3n}{6}=\dfrac{23}{6}<m$。

(×) **3.** 已知 $x<1$,化簡 $|x-1|+(x-1)$,可得 $|x-1|+(x-1)=-(x-1)+[-(x-1)]=-2x+2$。

解 已知 $x<1$,化簡 $|x-1|+(x-1)$,可得 $-(x-1)+(x-1)=0$。

(×) **4.** 已知 $0<x<1$,化簡 $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2}+\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}+2}$,

可得 $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2}+\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}+2}=\left|x-\dfrac{1}{x}\right|+\left|x+\dfrac{1}{x}\right|=2x$。

解 原式 $=\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2}+\sqrt{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2}=\left|x-\dfrac{1}{x}\right|+\left|x+\dfrac{1}{x}\right|=-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{2}{x}$。

(因為 $0<x<1$,則 $x<\dfrac{1}{x}$)

(×) **5.** 化簡 $|x-3|\ge 2$,可得 $x-3\ge \pm 2$。

解 $|x-3|\ge 2 \Rightarrow x-3\ge 2$ 或 $x-3\le -2$,即 $x\ge 5$ 或 $x\le 1$。

一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 設數線上兩點 $A(4)$、$B(7)$，試回答下列問題。

(1) 已知點 $P(x)$ 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=5:6$，則 x 值為 $\underline{\quad\dfrac{59}{11}\quad}$。（4 分）

(2) 已知點 $Q(y)$ 在 $\overline{AB}$ 外，且 $\overline{AQ}:\overline{BQ}=5:6$，則 y 值為 $\underline{\quad -11\quad}$。（3 分）

解 (1) 點 $P(x)$ 在 $\overline{AB}$ 上，利用分點公式，得 $x=\dfrac{5\times 7+6\times 4}{5+6}=\dfrac{59}{11}$。

(2) 因為 Q 點在 $\overline{AB}$ 外，又 $\overline{AQ}<\overline{BQ}$，所以 A 介於 Q 和 B 之間，可得 $\overline{QA}:\overline{BA}=5:1$。

利用分點公式，可知 $4=\dfrac{5\times 7+1\times y}{5+1}$，解得 $y=-11$。

2. 若 a、b 為有理數，且 $a<b$，試比較 $A=\dfrac{a+b}{2}$，$B=\dfrac{2a+b}{3}$，$C=\dfrac{a+2b}{3}$，$D=\dfrac{a+3b}{4}$，$E=\dfrac{2a+3b}{5}$，求五個數的大小順序為 $\underline{\quad D>C>E>A>B\quad}$。

解 （法一）令 $P(a)$、$Q(b)$，且 $a<b$，

$A=\dfrac{a+b}{2}$ 表 $\overline{PA}:\overline{AQ}=1:1=30:30$；$B=\dfrac{2a+b}{3}$ 表 $\overline{PB}:\overline{BQ}=1:2=20:40$；

$C=\dfrac{a+2b}{3}$ 表 $\overline{PC}:\overline{CQ}=2:1=40:20$；$D=\dfrac{a+3b}{4}$ 表 $\overline{PD}:\overline{DQ}=3:1=45:15$；

$E=\dfrac{2a+3b}{5}$ 表 $\overline{PE}:\overline{EQ}=3:2=36:24$；

故 $D>C>E>A>B$。

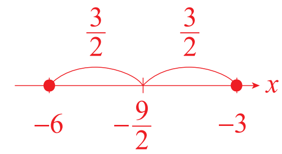
（法二）數字代入法，取 $a=0$、$b=1$ 代入 $A=\dfrac{1}{2}$，$B=\dfrac{1}{3}$，$C=\dfrac{2}{3}$，$D=\dfrac{3}{4}$，$E=\dfrac{3}{5}$，

故 $D>C>E>A>B$。

3. 解方程式 $|2x+9|=3$ ，可得 $x=$ ＿-3或-6＿ 。

解 代數解法：因為 $|2x+9|=3$ ，所以 $2x+9=3$ 或 -3 ，可得 $x=-3$ 或 -6 。

幾何解法：將方程式化為 $\left|x+\frac{9}{2}\right|=\frac{3}{2}$ ，



因為 $\left|x+\frac{9}{2}\right|=\frac{3}{2}$ 表示 x 與 $-\frac{9}{2}$ 的距離等於 $\frac{3}{2}$ ，

由圖可得 $x=-3$ 或 $x=-6$ 。

4. 優良學生的票選活動又開跑了，這次共有三位學生出來選拔，已知學生 A 、 B 累積支持者分別有 20 人、33 人，且學生 C 與學生 A 的支持者差距加上學生 C 與學生 B 的支持者差距共 21 人，試問學生 C 累積支持者有＿16 或 37＿人。

解 設學生 C 支持者 x 人， $|x-20|+|x-33|=21$ ，

分 $x>33$ ， $20<x\le 33$ ， $x\le 20$ 討論

① 當 $x>33$ 時，原式 $\Rightarrow(x-20)+(x-33)=21\Rightarrow x=37$ ，

② 當 $20<x\le 33$ 時，原式 $\Rightarrow(x-20)-(x-33)=21\Rightarrow 13=21$（不合），

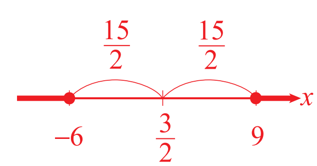
③ 當 $x\le 20$ 時，原式 $\Rightarrow-(x-20)-(x-33)=21\Rightarrow x=16$ ，

故 $x=16$ 或 37 。

5. 解不等式 $|2x-3|\ge 15$ ，可得 x 的範圍為＿$x\ge 9$或$x\le -6$＿，以區間符號表示為＿$[9,\infty)\cup(-\infty,-6]$＿。（第 1 格 4 分，第 2 格 3 分）

解 代數解法：因為 $|2x-3|\ge 15$ ，所以 $2x-3\ge 15$ 或 $2x-3\le -15$ ，可得 $x\ge 9$ 或 $x\le -6$ 。

幾何解法：將不等式化為 $\left|x-\frac{3}{2}\right|\ge\frac{15}{2}$ ，



因為 $\left|x-\frac{3}{2}\right|\ge\frac{15}{2}$ 表示 x 與 $\frac{3}{2}$ 的距離大於或等於 $\frac{15}{2}$ ，

由圖可得 $x\ge 9$ 或 $x\le -6$ 。

6. 在數線上滿足 $6 \le |-3x+5| < 17$ 的整數解 x 有____7____個。

解 $6 \le |-3x+5| < 17 \Rightarrow 6 \le -3x+5 < 17$ 或 $-17 < -3x+5 \le -6$，

① $6 \le -3x+5 < 17 \Rightarrow 1 \le -3x < 12 \Rightarrow -4 < x \le -\frac{1}{3}$，$x$ 整數為 $-1, -2, -3$，

② $-17 < -3x+5 \le -6 \Rightarrow -22 < -3x \le -11 \Rightarrow \frac{11}{3} \le x < \frac{22}{3}$，$x$ 整數為 $4, 5, 6, 7$，

故總共 7 個。

7. 設 x 、 y 為實數，若 $|x+3| \le 1$ 且 $|2y-7| \le 11$，求下列各小題的範圍，並以區間符號表示。

(1) $x+y$ 的範圍為____$[-6,7]$____。（2 分）

(2) $x-y$ 的範圍為____$[-13,0]$____。（2 分）

(3) xy 的範圍為____$[-36,8]$____。（2 分）

(4) x^2+y^2 的範圍為____$[4,97]$____。（1 分）

解 $|x+3| \le 1 \Rightarrow -1 \le x+3 \le 1 \Rightarrow -4 \le x \le -2$，$|2y-7| \le 11 \Rightarrow -11 \le 2y-7 \le 11 \Rightarrow -2 \le y \le 9$。

(1) $-6 \le x+y \le 7$。

(2) $-9 \le -y \le 2$，故 $-13 \le x-y = x+(-y) \le 0$。

(3) $-36 \le xy \le 8$（$-36 = (-4)\times 9$，$8 = (-4)\times(-2)$）。

(4) $4 \le x^2 \le 16$，$0 \le y^2 \le 81$，故 $4 \le x^2+y^2 \le 97$。

8. 解不等式$|x-3|-|x+1|\ge 0$，得x的範圍為$\underline{\quad x\le 1 \quad}$。

解 $|x-3|-|x+1|\ge 0 \Rightarrow |x-3|\ge|x+1|$，兩邊平方得$x^2-6x+9\ge x^2+2x+1\Rightarrow 8x\le 8\Rightarrow x\le 1$。

9. 不等式$|x+1|-|x-2|<x+2$的解為$\underline{\quad x>-5 \quad}$。

解 分成三段討論：① $x\ge 2$　② $-1\le x<2$　③ $x<-1$

① 若$x\ge 2$時，$(x+1)-(x-2)<x+2\Rightarrow x>1$，得$x\ge 2$。

② 若$-1\le x<2$時，$(x+1)+(x-2)<x+2\Rightarrow x<3$，得$-1\le x<2$。

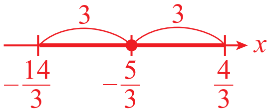
③ 若$x<-1$時，$-(x+1)+(x-2)<x+2\Rightarrow x>-5$，得$-5<x<-1$。

由①②③得知$x>-5$。

10. 設a、b為實數，已知不等式$|ax-5|\le b$的解為$-\frac{14}{3}\le x\le\frac{4}{3}$，則數對$(a,b)=$

$\underline{\quad (-3,9) \quad}$。

解 如圖，由解反推不等式，可得$\left|x+\frac{5}{3}\right|\le 3$，



兩邊同乘以 3，可得$|3x+5|\le 9$，

再將絕對值內的式子變號，可得$|-3x-5|\le 9$，

故數對$(a,b)=(-3,9)$。

二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 12 題為題組

《Cytus》是一款由臺灣研發的音樂遊戲，可用來訓練玩家對於節奏感的敏銳度，這款遊戲的規則為依照節奏點擊音符，當玩家在點擊音符時，電腦會依照玩家所按下的時間點，去判定每個音符的準確度，依序評定給予 PERFECT（完美）、BAD（不佳）、MISS（失誤）。

假設玩家按下節奏音符的誤差值為 t 秒，若誤差值 t 的範圍為 ± 1.5（含 1.5）則評定為 PERFECT；範圍為 $-2.5<t<-1.5$ 或 $1.5<t<2.5$ 則評定為 BAD；範圍為 $t\le -2.5$ 或 $t\ge 2.5$ 則評定為 MISS。

（ B ）**11.** 阿萱是一個新手玩家，已知在音樂 60 秒處有一個節奏音符「RE」，且阿萱在這個節奏音符被評定為 BAD，試寫出阿萱按下節奏時的秒數範圍並以 $a<|x+k|<b$ 表示，其中 x 為音樂進行時的時間秒數，求 $a+b+k$ 之值為何？（單選題，10 分）

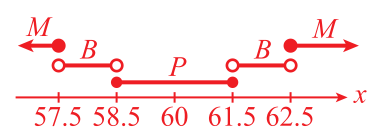
(A) -64　(B) -56　(C) 56　(D) 61　(E) 64。

12. 已知阿萱選擇的這首歌，最後的評定方法是以 MISS 個數判斷玩家等級為金牌、銀牌、銅牌或參加獎，設 MISS 個數為 n 個，以下為各等級的範圍：

等級	金牌	銀牌	銅牌	參加獎
n	$\lvert n-19\rvert\le 19$	$\lvert n-57\rvert\le 18$	$\lvert n-88\rvert\le 12$	$n>100$

若阿萱在這首歌中最後獲得銀牌，且得到的 MISS 個數 n 滿足 $|-2n+21|<63$，試問阿萱得到的 MISS 個數可能是幾個？（非選擇題，10 分）

解　11. 被評為 BAD $\Rightarrow 1.5<\underbrace{|x-60|}_{\text{和 60 秒相差秒數，即為 } t}<2.5$，



得 $k=-60$，$a=1.5$，$b=2.5$，

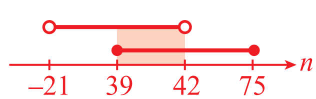
所以 $a+b+k=1.5+2.5-60=-56$。

12. 已知阿萱得到銀牌，

表示她得到的 MISS 數滿足 $|n-57|\le 18\Rightarrow -18\le n-57\le 18\Rightarrow 39\le n\le 75$，

又滿足 $|-2n+21|<63$

$\Rightarrow |2n-21|<63\Rightarrow -63<2n-21<63\Rightarrow -42<2n<84\Rightarrow -21<n<42$，



故同時滿足 $39\le n\le 75$ 及 $-21<n<42$，

得 $39\le n<42$，又 n 為正整數，則 n 可能為 39、40、41。