4 正餘弦的疊合

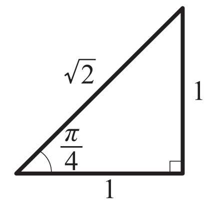
重點整理

1. 正餘弦函數的疊合：

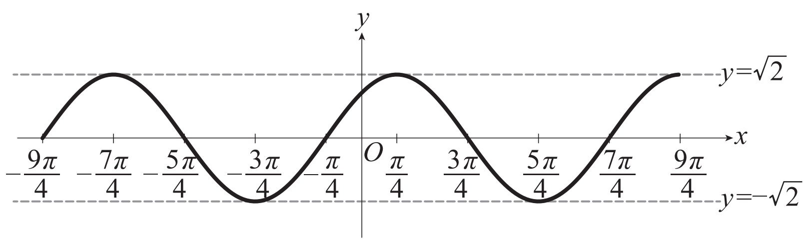
考慮兩週期相同的正弦函數 $y=\sin x$ 與餘弦函數 $y=\cos x$，將其加在一起的新函數 $f(x)=\sin x+\cos x$ 的圖形，可利用和差角公式及相位角改寫成新的正弦函數或餘弦函數，而求出其振幅及週期，並作出其圖形。

(1) $f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\sin x\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cos x\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos x\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

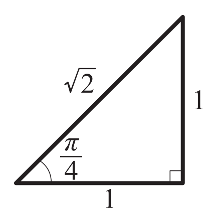


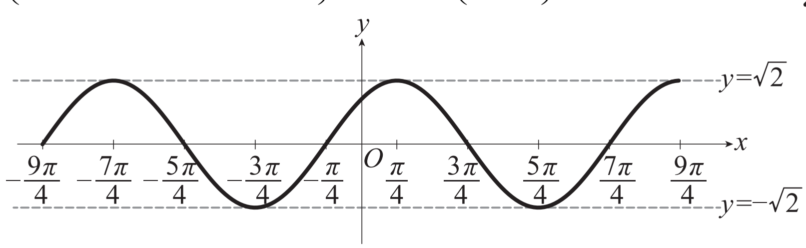
$f(x)$ 的振幅為 $\sqrt{2}$，相位角為 $\dfrac{\pi}{4}$，週期為 2π。



(2) $f(x)=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\left(\cos x\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\sin x\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos x\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin x\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$，





當 $x\in\mathbb{R}$ 時，兩者的圖形是一樣的。

觀念是非題　試判斷下列敘述對或錯。（每題 2 分，共 10 分）

（ ○ ）**1.** $\sin 74° + \sqrt{3}\cos 74° = 2\sin 134°$。

解 $\sin 74° + \sqrt{3}\cos 74° = 2\left(\frac{1}{2}\sin 74° + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 74°\right) = 2\sin(74° + 60°) = 2\sin 134°$。

（ ○ ）**2.** 函數 $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ 的振幅為 2。

解 $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 2\sin(x + 60°)$。

（ ○ ）**3.** 設 $f(x) = 3\sin x + 3\sqrt{3}\cos x = r\sin(x+\theta)$，且 $r > 0$，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，則數對 $(r,\theta) = \left(6, \frac{\pi}{3}\right)$。

解 $f(x) = 3\sin x + 3\sqrt{3}\cos x = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2}\left(\frac{3}{\sqrt{3^2+(3\sqrt{3})^2}}\sin x + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3^2+(3\sqrt{3})^2}}\cos x\right)$

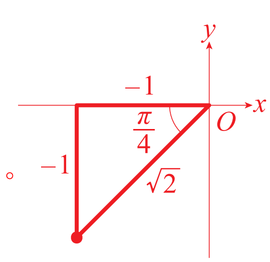
$= 6\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3} + \cos x\sin\frac{\pi}{3}\right) = 6\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$，

所以 $r = 6$，$\theta = \frac{\pi}{3}$，即 $(r,\theta) = \left(6, \frac{\pi}{3}\right)$。

（ ○ ）**4.** 已知 $a > 0$，$0 < \phi < 2\pi$，且 $-\cos\theta - \sin\theta = a\sin(\theta + \phi)$ 恆成立，則數對 $(a,\phi) = \left(\sqrt{2}, \frac{5}{4}\pi\right)$。

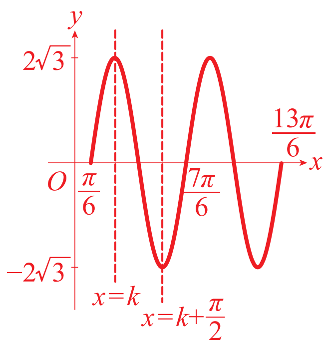
解 利用正餘弦函數的疊合，

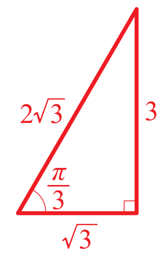
得 $-\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{5}{4}\pi\right)$，所以數對 $(a,\phi) = \left(\sqrt{2}, \frac{5}{4}\pi\right)$。



（ ○ ）**5.** 已知 $x=k$ 為 $y=\sqrt{3}\sin 2x-3\cos 2x$ 的一對稱軸，則 $x=k+\frac{\pi}{2}$ 亦為 $y=\sqrt{3}\sin 2x-3\cos 2x$ 的另一對稱軸。

解 $y=\sqrt{3}\sin 2x-3\cos 2x=2\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}\sin\left(2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right)$，週期為 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，





由圖可知正確。

一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 下列哪一個數值最接近 $\sqrt{2}$？＿＿(D)＿＿。（單選題）

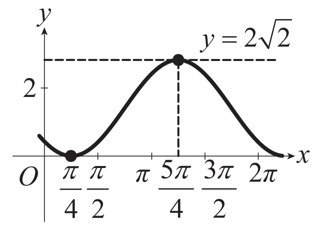
(A) $\sqrt{3}\cos 44°+\sin 44°$　(B) $\sqrt{3}\cos 54°+\sin 54°$
(C) $\sqrt{3}\cos 64°+\sin 64°$　(D) $\sqrt{3}\cos 74°+\sin 74°$
(E) $\sqrt{3}\cos 84°+\sin 84°$。

解 令 $f(x)=\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 最接近 $\sqrt{2}$，

代表 $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 最接近 $\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 最接近 $\frac{\pi}{4}$，x 最接近 $\frac{5\pi}{12}$，即 $75°$，

故選(D)。

2. 已知右圖為函數 $y=a\sin x+b\cos x+c$ 圖形的一部分，則 $(a,b,c)=$ $\underline{\left(-1,-1,\sqrt{2}\right)}$。



解　由圖形可知振幅為 $\dfrac{2\sqrt{2}-0}{2}=\sqrt{2}$，

故 $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}\Rightarrow a^2+b^2=2\cdots①$，

又點 $\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$，$\left(\dfrac{5\pi}{4},2\sqrt{2}\right)$ 在圖形上，

代入函數得 $a\sin\dfrac{\pi}{4}+b\cos\dfrac{\pi}{4}+c=0\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{2}}a+\dfrac{1}{\sqrt{2}}b+c=0\cdots②$，

$a\sin\dfrac{5\pi}{4}+b\cos\dfrac{5\pi}{4}+c=2\sqrt{2}\Rightarrow-\dfrac{1}{\sqrt{2}}a-\dfrac{1}{\sqrt{2}}b+c=2\sqrt{2}\cdots③$，

由②＋③，得 $2c=2\sqrt{2}\Rightarrow c=\sqrt{2}$，代入②，得 $a+b=-2\Rightarrow b=-2-a$，

代入①得 $a^2+2a+1=0\Rightarrow(a+1)^2=0\Rightarrow a=-1$，$b=-2-(-1)=-1$，

因此，$(a,b,c)=\left(-1,-1,\sqrt{2}\right)$。

3. 設 $270^\circ<\theta<360^\circ$，且 $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin2024^\circ$，則 $\theta=$ $\underline{286^\circ}$。

解　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin(\theta+30^\circ)$，

又 $2\sin(\theta+30^\circ)=2\sin2024^\circ$

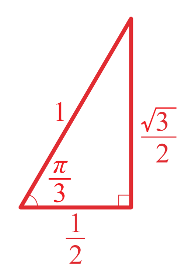
$\Rightarrow\sin(\theta+30^\circ)=\sin2024^\circ=\sin224^\circ=\sin(180^\circ+44^\circ)=-\sin44^\circ=\sin(360^\circ-44^\circ)=\sin316^\circ$

$\Rightarrow\theta=286^\circ$。

4. 若 $y=\sin x+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$，且 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$，若 y 的最大值為 a，此時的 x 為 b，則數對 $(a,b)=$ $\underline{\left(1,\dfrac{\pi}{6}\right)}$。

解　$y=\sin x+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)=\sin x+\sin\dfrac{\pi}{3}\cos x-\cos\dfrac{\pi}{3}\sin x$

$=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$。



$0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\dfrac{\pi}{3}\le x+\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{5}{6}\pi\Rightarrow\dfrac{1}{2}\le\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\le1$，最大值為 1。

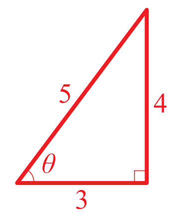
此時 $x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{6}$，故 $(a,b)=\left(1,\dfrac{\pi}{6}\right)$。

5. 當 $x=\alpha$ 時， $y=3\sin x-4\cos x$ 有最大值，求數對 $(\cos\alpha,\sin\alpha)=$ $\underline{\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)}$ 。

解 ① $y=3\sin x-4\cos x=5\sin(x-\theta)$ ，

$-5\le 5\sin(x-\theta)\le 5$ 。

② 最大值為 $5\Rightarrow\sin(\alpha-\theta)=1\Rightarrow\alpha-\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}+2k\pi+\theta$ ， $k\in\mathbb{Z}$



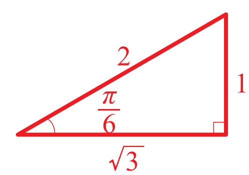
$\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi+\theta\right)=-\sin\theta=-\frac{4}{5}$ ，

$\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi+\theta\right)=\cos\theta=\frac{3}{5}$ ，

當數對 $(\cos\alpha,\sin\alpha)=\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ 時， y 的最大值為 5 。

6. 設 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ ，且 $\sqrt{3}\cos x-\sin x=1$ ，則 $x=$ $\underline{\frac{\pi}{6}}$ 。

解 $\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ ，



$2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1\Rightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ ，

又 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow-\frac{\pi}{3}<x+\frac{\pi}{6}<\frac{2}{3}\pi$ ，故 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}$ 。

7. 設 a 、 b 是常數且 $a>b$ ，若 $f(x)=a\sin x+b\cos x$ 的最大值為 $\sqrt{13}$ ，且 $a+b=5$ ，試求數對 $(a,b)=$ $\underline{(3,2)}$ 。

解 $f(x)=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$ ，

且 $\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ， $\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ，

$f(x)$ 最大值為 $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{13}\Rightarrow a^2+b^2=13$ ，又 $a+b=5\Rightarrow a=5-b$ ，代入 $a^2+b^2=13$ ，

$(5-b)^2+b^2=13\Rightarrow 2b^2-10b+12=0\Rightarrow b^2-5b+6=0$

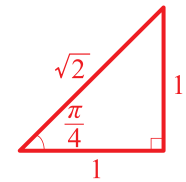
$\Rightarrow b=2$ 或 3（不合）， $a=3$ 。

故數對 $(a,b)=(3,2)$ 。

8. 若 $0\le\theta\le\pi$ ，求 $f(\theta)=3\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta$ 的最大值為 $\underline{\quad 2+\sqrt{2}\quad}$ 。

解 $f(\theta)=3\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta=1+\left(2\cos^2\theta-1\right)+1+\sin 2\theta$

$=\sin 2\theta+\cos 2\theta+2=\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+2$ ，

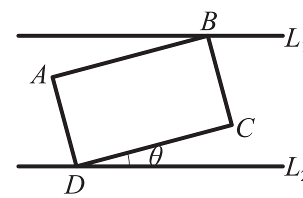


又 $0\le\theta\le\pi\Rightarrow 0\le 2\theta\le 2\pi$ ，

$-\sqrt{2}\le\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}\Rightarrow 2-\sqrt{2}\le\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+2\le 2+\sqrt{2}$ ，

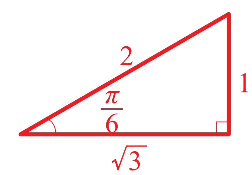
所以最大值為 $2+\sqrt{2}$ 。

9. 如圖， $L_1\,//\,L_2$ 且 L_1 和 L_2 距離為 $\sqrt{2}$ ，將一矩形 $ABCD$ 斜擺在此兩平行線之間，且 $\overline{AB}=\sqrt{3}$ ， $\overline{BC}=1$ ，使得頂點 B 在 L_1 上，頂點 D 在 L_2 上，求 $\overline{CD}$ 和 L_2 的銳夾角 $\theta=$ $\underline{\quad\dfrac{\pi}{12}\quad}$ 。



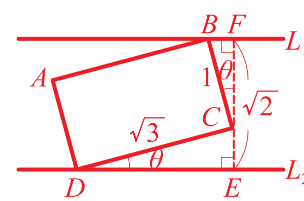
（已知 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ ）

解 $\overline{CF}=\cos\theta$ ， $\overline{CE}=\sqrt{3}\sin\theta$ ， $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$ ，



又 $2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}$

$\Rightarrow\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{12}$ 。



10. 設 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ ，函數 $f(x)=12\cos x-5\sin x+1$ ，若 $f(x)$ 在 $x=\theta$ 時有最小值 m ，則 $m=$ $\underline{\quad -4\quad}$ 。

解 $f(x)=12\cos x-5\sin x+1=13\left(\dfrac{12}{13}\cos x-\dfrac{5}{13}\sin x\right)+1$ ，

令 $\cos\phi=\dfrac{12}{13}$ ， $\sin\phi=\dfrac{5}{13}$ ，且 $0<\phi<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow f(x)=13\cos(x+\phi)+1$ ，

又 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\phi\le x+\phi\le\dfrac{\pi}{2}+\phi$ ，

所以當 $x+\phi=\dfrac{\pi}{2}+\phi$ 時， $\cos(x+\phi)$ 有最小值為 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\phi\right)$ ，

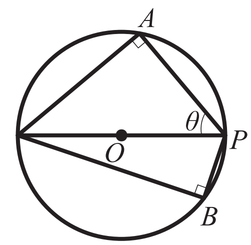
即當 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 時（ $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ ），

$f(x)$ 有最小值 $m=13\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\phi\right)+1=13(-\sin\phi)+1=13\times\left(-\dfrac{5}{13}\right)+1=-4$ 。

二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 12 題為題組

如圖，P 為單位圓（圓心為 O）上一定點，且圓上兩動點 A、B 分別在 P 點兩側移動，已知 $\angle APB=\frac{2}{3}\pi$，若 $\angle OPA=\theta$，試回答下列問題。



11. 試以 θ 表示 $2\overline{PA}+\overline{PB}=$ $\underline{\quad 3\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta \quad}$。（填充題，8 分）

12. 求 $2\overline{PA}+\overline{PB}$ 的最大值為多少？又此時 θ 的值為何？（非選擇題，12 分）

解 11. $\overline{PA}=2\cos\theta$，$\overline{PB}=2\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)$，

所以 $2\overline{PA}+\overline{PB}=4\cos\theta+2\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)$

$$=4\cos\theta+2\left(\cos\frac{2\pi}{3}\cos\theta+\sin\frac{2\pi}{3}\sin\theta\right)$$

$$=4\cos\theta-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=3\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$$ 。

12. $2\overline{PA}+\overline{PB}=3\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)=2\sqrt{3}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$，

所以當 $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=1$，即 $\theta-\frac{\pi}{6}=0\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$ 時，$2\overline{PA}+\overline{PB}$ 的最大值為 $2\sqrt{3}$。