綜合習題 單元 5～7

一、單選題（每題 7 分，共 14 分）

(B) **1.** 設 $L_1: x+2y-2=0$，$L_2: x-y+2=0$，$L_3: ax+y=0$ 為相異三直線，若此三直線圍成一個直角三角形，則 a 之可能值總和為多少？

(A) -2　(B) -1　(C) 0　(D) 1　(E) 2。　〔搭配單元 5〕

解　L_1 的斜率 $m_1=-\dfrac{1}{2}$，L_2 的斜率 $m_2=1$，L_3 的斜率 $m_3=-a$，

(I) $L_1 \perp L_3 \Rightarrow m_1 \times m_3=-1 \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{2}\right)\times(-a)=-1 \Rightarrow a=-2$，

(II) $L_2 \perp L_3 \Rightarrow m_2 \times m_3=-1 \Rightarrow 1\times(-a)=-1 \Rightarrow a=1$，

所以 a 之可能值總和為 $(-2)+1=-1$，故選(B)。

(D) **2.** 小乘想模仿笛卡兒寫一封數學情書給他心儀的人，寫道：「我的心是平面坐標上 $x^2+y^2=1$ 的圓，而妳的心卻是這個坐標上 $(x-5)^2+(y-12)^2=1$ 的圓，現在我們之間雖仍有些距離，但我的心會像同心圓 $x^2+y^2-f=0$ 般輻射出去，當 $f=$ ＿＿＿時，我的圓將會第一次相切碰到妳的心，再不久將能完全擄獲妳的心。」試問正確的 f 值為

(A) -12　(B) 12　(C) 13　(D) 144　(E) 169。　〔搭配單元 6〕

解　$x^2+y^2=1$ 的圓心為 $O(0,0)$，半徑為 1；

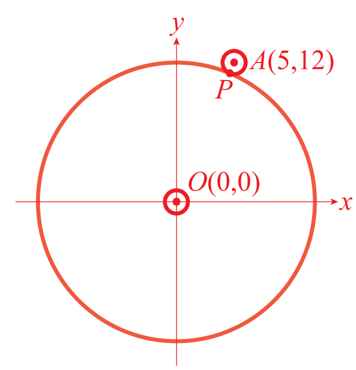
$(x-5)^2+(y-12)^2=1$ 的圓心為 $A(5,12)$，半徑為 1，

當半徑為 $\overline{OP}$ 時，與 $(x-5)^2+(y-12)^2=1$ 相切，

所以 $\overline{OP}=\overline{OA}-1=13-1=12$，

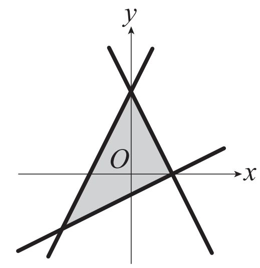
則 $x^2+y^2=12^2 \Rightarrow x^2+y^2-144=0$，

得 $f=144$，故選(D)。



二、多選題（每題 10 分，共 20 分）

（ ACD ）**3.** 已知聯立不等式$\begin{cases} ax+2y\ge -2 \\ 2x+y\le b \\ cx+dy\ge e \end{cases}$之解的範圍如圖，



請判斷下列選項何者正確？

(A) $a<0$　(B) $b<0$　(C) $cd<0$　(D) $e<0$

(E) a、b、c、d、e 中恰有三個正數。　〔搭配單元 5〕

解 $\begin{cases} ax+2y\ge -2\cdots\cdots① \\ 2x+y\le b\cdots\cdots② \\ cx+dy\ge e\cdots\cdots③ \end{cases}$

由①必過 $(0,-1)$，$ax+2y\ge -2$ 為左側 $\Rightarrow x$ 係數 $a<0$，

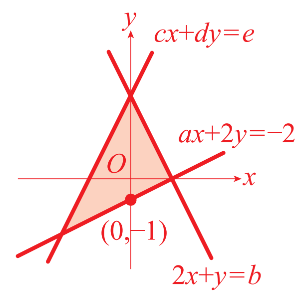
由②知 $2x+y\le b$，則斜率 $m_2=-2<0$，且交 x 軸於 $x=\dfrac{b}{2}>0\Rightarrow b>0$，

由③解範圍在 $cx+dy\ge e$ 為右側 $\Rightarrow x$ 係數 $c>0$；

在 $cx+dy\ge e$ 為下方 $\Rightarrow y$ 係數 $d<0$，

且交 x 軸於 $x=\dfrac{e}{c}<0\Rightarrow e<0$，

故選(A)(C)(D)。



(CD) **4.** 設 $A(0,-3)$ 、 $B(0,3)$ ，已知 $P(x,y)$ 為平面上滿足 $\overline{PA}=\sqrt{2}\,\overline{PB}$ 的動點，且所有 P 點所成的軌跡為一個圓 C 。請選出正確的選項：

(A)圓 C 的方程式為 $x^2+y^2-10y+9=0$　　(B) $A(0,-3)$ 在圓 C 的內部

(C)自點 $A(0,-3)$ 作圓 C 的兩切線互相垂直　(D) $12-6\sqrt{2}\le\overline{PA}\le 12+6\sqrt{2}$

(E)有17 個 P 點滿足 $\overline{PA}$ 為整數。　〔搭配單元 6〕

解 $\overline{PA}=\sqrt{2}\,\overline{PB}\Rightarrow$兩邊平方得 $\overline{PA}^2=2\overline{PB}^2$

$\Rightarrow x^2+(y+3)^2=2\left(x^2+(y-3)^2\right)\Rightarrow x^2+y^2+6y+9=2x^2+2y^2-12y+18$

$\Rightarrow x^2+y^2-18y+9=0\Rightarrow x^2+(y-9)^2=72$ ，圓心 $O(0,9)$ ，半徑為 $r=6\sqrt{2}$ 。

(A) × ：應為 $x^2+y^2-18y+9=0$ 。

(B) × ： $A(0,-3)$ 代入得 $0+9+54+9>0$ ，在外部。

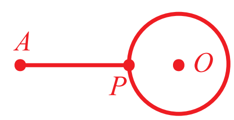
(C) ○ ：令切線 $L:y+3=mx\Rightarrow mx-y-3=0$ ，

$$d(O,L)=r\Rightarrow\frac{|-9-3|}{\sqrt{m^2+1}}=6\sqrt{2}\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$兩邊平方得 $m^2+1=2\Rightarrow m=\pm1$ ，互相垂直。

(D) ○ ： A 在圓外， $\overline{OA}-6\sqrt{2}\le\overline{PA}\le\overline{OA}+6\sqrt{2}$

$\Rightarrow 12-6\sqrt{2}\le\overline{PA}\le 12+6\sqrt{2}$ 。



(E) × ：由(D)知， $12-6\sqrt{2}=3.\times\times$ ， $12+6\sqrt{2}=20.\times\times$ ，

又 $\overline{PA}$ 為整數，則有 $17\times2=34$ 個。

故選(C)(D)。

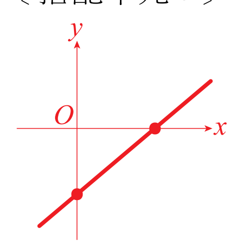
三、填充題（每題 8 分，共 48 分）

5. 已知 a 、 b 、 c 為非零實數，當 $ab<0$ 且 $ac<0$ ，則直線 $L:ax+by+c=0$ 不會通過坐標平面上第＿＿二＿＿象限。　〔搭配單元 5〕

解 $ab<0$ 且 $ac<0\Rightarrow$取 $a>0$ 、 $b<0$ 、 $c<0$ ，

則直線 L 的 x 截距 $=-\dfrac{c}{a}>0$ ， y 截距 $=-\dfrac{c}{b}<0$ ，

如圖所示，不通過第二象限。

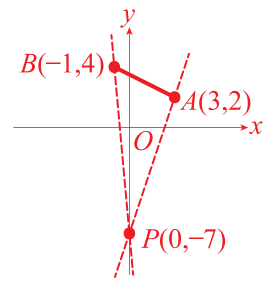


6. 已知 $A(3,2)$、$B(-1,4)$，若直線 $L: y=mx-7$ 與 $\overline{AB}$ 不相交，則 m 的範圍為 $\underline{-11<m<3}$。〔搭配單元 5〕

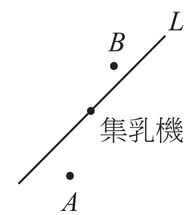
解 直線 L 為恆過 $P(0,-7)$，斜率為 m 的直線，

又 $m_{\overline{PA}}=\dfrac{9}{3}=3$，$m_{\overline{PB}}=\dfrac{-11}{1}=-11$，

不相交 $\Rightarrow m_{\overline{PB}}<m<m_{\overline{PA}} \Rightarrow -11<m<3$。



7. 爸媽兩人經營一個新興牧場，如圖所示，A 與 B 是兩個羊舍所在的位置。現今想在牧場上蓋一個集乳機，爸媽倆討論集乳機位置時，爸希望集乳機在直線 $L: x-y=0$ 上；媽則希望集乳機到兩個羊舍的距離相等，以便於收集羊乳。若 $A(3,1)$、$B(7,9)$，且集乳機位於第一象限，則在圍欄內滿足爸媽需求的集乳機地點坐標為 $\underline{(5,5)}$。〔搭配單元 5〕



解 設集乳機的位置在 P，

因為 P 到兩點距離相同，所以 $\overline{PA}=\overline{PB}$

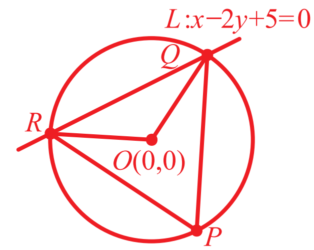
$\Rightarrow P$ 的軌跡必為 A、B 的中垂線 $L_1 \Rightarrow A$、B 中點為 $(5,5)$，

又 $m_{L_1}=\dfrac{-1}{m_{AB}}=-\dfrac{1}{2}$，故 $L_1: x+2y=15$。

求 L 與 L_1 交點，即為 P 點，故 $\begin{cases} L_1: x+2y=15 \\ L: x-y=0 \end{cases} \Rightarrow P(x,y)=(5,5)$。

8. 坐標平面上有一以原點O為圓心的圓C，交直線$x-2y+5=0$於Q、R兩點。已知圓C上有一點P使得$\triangle PQR$為一正三角形，試求圓C之方程式為 $\underline{x^2+y^2=20}$ 。

〔搭配單元 7〕



解　令$L:x-2y+5=0$，由圖可知，O為正三角形的重心，

又$r=\overline{OP}=2d(O,L)=2\times\dfrac{5}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$，故$C:x^2+y^2=20$。

9. 已知$A(-3,1)$、$B(7,2)$、$C(6,3)$，求能包含$\triangle ABC$區域，其中$\triangle ABC$為鈍角三角形，且半徑為最小的圓方程式為 $\underline{(x-2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{101}{4}}$ 。

〔搭配單元 6〕

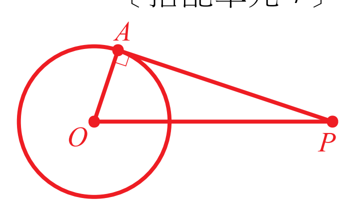
解　因為$\overline{AB}$為最長，且半徑為最小，且$\triangle ABC$為鈍角三角形，所以$\overline{AB}$必為圓直徑。

圓心O為$\dfrac{A+B}{2}=\left(2,\dfrac{3}{2}\right)$，又$r=\overline{OA}=\sqrt{25+\dfrac{1}{4}}=\sqrt{\dfrac{101}{4}}=\dfrac{\sqrt{101}}{2}$，

所以圓方程式為$(x-2)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{101}{4}$。

10. 圓$C:x^2+y^2-4x-6y+12=0$與圓外一點$P(-1,2)$，求過P的切線段長為 $\underline{\quad 3 \quad}$ 。

〔搭配單元 7〕



解　圓$C:x^2+y^2-4x-6y+12=0\Rightarrow(x-2)^2+(y-3)^2=1$，

圓心$O(2,3)$，半徑$r=1$，$\overline{OP}=\sqrt{(2+1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{10}$，

則切線段長$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OP}^2-r^2}=\sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2-1^2}=3$。

四、素養混合題（共 18 分）

第 11 至 12 題為題組

啵啵珍珠奶茶專賣店在高雄市開了三家分店，已知 A、B、C 三家分店在地圖坐標平面上的位置分別為 $(2,3)$、$(2,15)$、$(8,11)$。

(　B　) **11.** 近期店內與外送平臺合作，每天訂單都接不完，乘乘老闆規劃再開一家新的分店，且希望新分店的地點到原本三家分店的直線距離都相等，試問下列哪一個地圖上的坐標較符合乘乘老闆的需求？（單選題，9 分）

(A) $\left(\frac{11}{4},8\right)$　(B) $\left(\frac{7}{3},9\right)$　(C) $\left(\frac{11}{3},8\right)$　(D) $(6,9)$。　〔搭配單元 5〕

12. 承上題，假設新分店如規劃的順利開幕了，為維持飲料新鮮度，新分店到 A、B、C 三家分店的直線距離為最遠的外送範圍。今天有一份訂單，其外送地點在地圖坐標平面 $(4,3)$ 的位置，試問新分店是否會接這份訂單？請說明原因。（非選擇題，9 分）

〔搭配單元 6〕

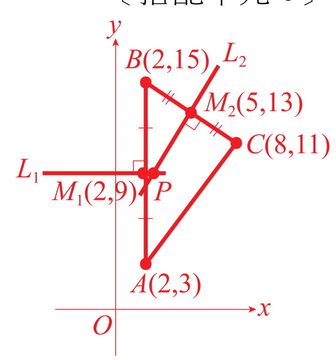
解　11. 設新分店的位置為 $P(x,y)$，

因為 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$，所以 P 為 $\triangle ABC$ 的外心。

外心為 $\triangle ABC$ 三邊中垂線的交點，

$L_1: y=9$，$L_2: y-13=\frac{3}{2}(x-5)$，

$$P:\begin{cases} y=9 \\ y-13=\frac{3}{2}(x-5) \end{cases} \Rightarrow (x,y)=\left(\frac{7}{3},9\right)$$，故選(B)。



12. 新分店能支援的外送範圍為 $\triangle ABC$ 之外接圓圓內的區域，

外接圓半徑 $R=\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}=\frac{\sqrt{325}}{3}$，

又 $(4,3)$ 到 $P\left(\frac{7}{3},9\right)$ 之距離為

$\sqrt{\left(4-\frac{7}{3}\right)^2+(3-9)^2}=\frac{\sqrt{349}}{3}>\frac{\sqrt{325}}{3}$ 超過可外送範圍，

故新分店不會接這份訂單。