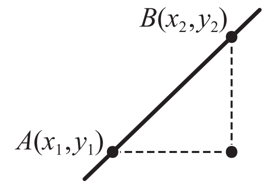
5 直線方程式

重點整理

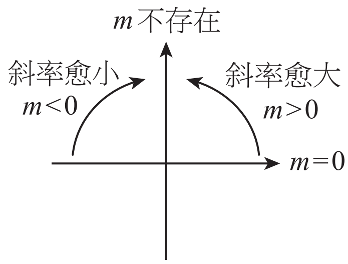
1. 斜率：



(1) 定義：斜率$(m)=\dfrac{\Delta_y}{\Delta_x}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$。

(2) 直線的斜率：二元一次方程式$ax+by+c=0$，其中$a^2+b^2\neq 0$，在坐標平面上的圖形為一直線，其斜率$m=-\dfrac{a}{b}$。

(3) 斜率大小：水平線的斜率為0，鉛直線的斜率為不存在。



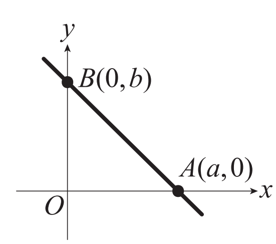
(4) 兩直線L_1、L_2的斜率分別為m_1、m_2，且L_1、L_2不是鉛直線。若$L_1 // L_2$，則$m_1=m_2$；若$L_1\perp L_2$，則$m_1\times m_2=-1$。

(5) 一直線L上相異三點A、B、C，則$m_{\overline{AB}}=m_{\overline{BC}}=m_{\overline{AC}}$。

(6) 與直線$L: ax+by+c=0$平行的直線可假設為$ax+by+k=0$。

(7) 與直線$L: ax+by+c=0$垂直的直線可假設為$bx-ay+k=0$。

2. 直線方程式：



(1) 截距：一直線L與x軸相交於$(a,0)$，則稱a為L的x截距。與y軸相交於$(0,b)$，則稱b為L的y截距。

(2) 點斜式：直線L通過$A(x_0,y_0)$，且斜率為m，則直線方程式為$y-y_0=m(x-x_0)$。

(3) 一般式反推：已知斜率$m=-\dfrac{a}{b}$，且通過$A(x_0,y_0)$，則假設直線方程式$ax+by=k$，將$A(x_0,y_0)$代入得k。

3. 直線的平移：

設 h 、 k 為正數，直線 $L: y = mx$ ，

(1) 直線 L 向右平移 h ，得直線 $y = m(x-h)$ 。

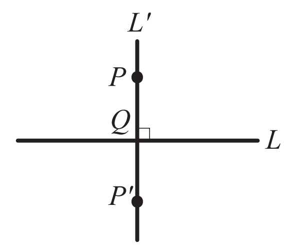
(2) 直線 L 向左平移 h ，得直線 $y = m(x+h)$ 。

(3) 直線 L 向上平移 k ，得直線 $y - k = mx \Rightarrow y = mx + k$ 。

(4) 直線 L 向下平移 k ，得直線 $y + k = mx \Rightarrow y = mx - k$ 。

4. 對稱點：

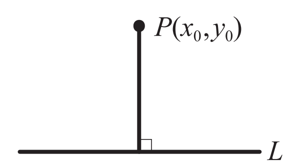
直線 L 外一點 P 作 L 的垂線 L' 交 L 於 Q ，在 L' 上的另一側 P' ，使得 $\overline{PQ} = \overline{P'Q}$ ，則 Q 稱為 P 在 L 上的正射影（垂足），而 P' 即為 P 關於直線 L 的對稱點。



5. 距離公式：

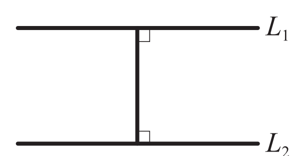
(1) 點到直線之距離：設點 $P(x_0, y_0)$ ，直線 $L: ax + by + c = 0$ ，

點 P 到 L 之距離常以 $d(P,L)$ 表示。 $d(P,L) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 。



(2) 兩平行線間距離：設直線 $L_1: ax + by + c_1 = 0$ ， $L_2: ax + by + c_2 = 0$ ，

其中 $L_1 // L_2$ ， $d(L_1, L_2) = \dfrac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 。



6. 二元一次不等式：

當常數 a 、 b 不全為 0 時，不等式 $ax + by + c > 0$ ， $ax + by + c < 0$ ， $ax + by + c \geq 0$ ， $ax + by + c \leq 0$ 稱為二元一次不等式。

(1) 設直線 L 的方程式為 $ax + by + c = 0$ ，

① $a > 0$ 時，不等式 $ax + by + c > 0$ 的圖解是直線 L 右側的半平面；
不等式 $ax + by + c < 0$ 的圖解是直線 L 左側的半平面。

② $b > 0$ 時，不等式 $ax + by + c > 0$ 的圖解是直線 L 上方的半平面；
不等式 $ax + by + c < 0$ 的圖解是直線 L 下方的半平面。

(2) 設直線 L 的方程式為 $ax + by + c = 0$ ，

① 若 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 在直線 L 的同側，則 $(ax_1 + by_1 + c)(ax_2 + by_2 + c) > 0$ 。

② 若 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 在直線 L 的異側，則 $(ax_1 + by_1 + c)(ax_2 + by_2 + c) < 0$ 。

③ 若 $\overline{AB}$ 與 L 有交點，則 $(ax_1 + by_1 + c)(ax_2 + by_2 + c) \leq 0$ 。

觀念是非題 試判斷下列敘述對或錯。(每題 2 分，共 10 分)

(○) **1.** 已知直線L的x截距不存在，表示直線L是水平線。

解 正確。

(○) **2.** $\triangle ABC$的外心為三中垂線的交點，重心為三中線的交點，垂心為三高的交點。

解 正確。

(○) **3.** $P(a,b)$關於x軸的對稱點為$A(a,-b)$，A關於y軸的對稱點為$B(-a,-b)$。

解 正確。

(×) **4.** 將直線$L:3x-4y-2=0$向左平移5單位，再向上平移1單位後，可得直線$L':3(x-5)-4(y+1)-2=0$。

解 平移後可得直線$L':3(x+5)-4(y-1)-2=0$。

(×) **5.** 已知m為實數，則直線$L:y-5=m(x-2)$必定通過點$(5,2)$。

解 直線L必定通過點$(2,5)$。

一、填充題（第 1 題每小格 2 分，其餘每題 7 分，共 75 分）

1. 試求下列的直線方程式：

(1) 過點$(4,0)$，且斜率為$-\frac{2}{3}$：$\underline{2x+3y=8}$。（2 分）

(2) 過兩點$(-2,3)$、$(1,-1)$：$\underline{4x+3y=1}$。（2 分）

(3) x截距為-2，且斜率為$\frac{1}{3}$：$\underline{x-3y=-2}$。（2 分）

(4) x截距為3，y截距為-5：$\underline{5x-3y=15}$。（2 分）

(5) $A(5,5)$、$B(-2,6)$的垂直平分線：$\underline{7x-y=5}$。（2 分）

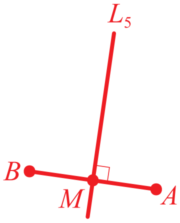
(6) $A(1,2)$、$B(5,6)$、$C(-1,8)$，求$\overline{BC}$邊上高所在的直線：$\underline{3x-y=1}$。（2 分）

解 (1) $m=-\frac{2}{3}$反推直線$L_1:2x+3y=k$，過$(4,0)$代入得$k=8$，故$L_1:2x+3y=8$。

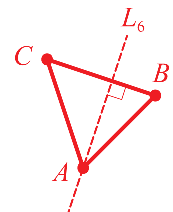
(2) 先求斜率$m=\frac{(-1)-3}{1-(-2)}=-\frac{4}{3}$反推直線$L_2:4x+3y=k$，過$(1,-1)$代入得$k=1$，故$L_2:4x+3y=1$。

(3) $m=\frac{1}{3}$反推直線$L_3:x-3y=k$，又x截距為-2，表過$(-2,0)$代入得$k=-2$，故$L_3:x-3y=-2$。

(4) 過$(3,0)$、$(0,-5)$，則斜率$m=\frac{5}{3}$，反推直線$5x-3y=k$，過$(3,0)$代入得$k=15$，故$L_4:5x-3y=15$。

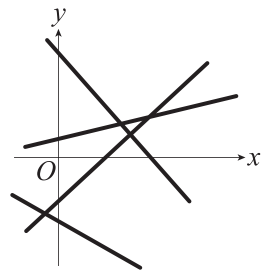


(5) 先求$m_{\overline{AB}}=\frac{-1}{7}$，又$L_5$與$\overleftrightarrow{AB}$垂直，得$m=\frac{7}{1}$反推直線$L_5:7x-y=k$，又過$\overline{AB}$的中點$M\left(\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right)$代入得$k=5$，故$L_5:7x-y=5$。



(6) $m_{\overline{BC}}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}$，又$L_6$與$\overleftrightarrow{BC}$垂直，得$m=\frac{3}{1}$反推直線$L_6:3x-y=k$，又過$A(1,2)$代入得$k=1$，故$L_6:3x-y=1$。

2. 四條直線：$y=ax+1$，$y=bx+5$，$y=cx-2$，$y=dx-3$ 的圖形如右，比較 a、b、c、d 之大小為 $\underline{c>a>d>b}$。



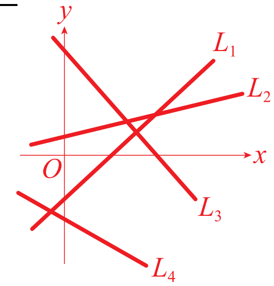
解 先以 y 截距來判斷直線，

$L_1: y=cx-2$，$L_2: y=ax+1$，

$L_3: y=bx+5$，$L_4: y=dx-3$，

其中 a、b、c、d 表示斜率，

由圖知斜率大小為 $c>a>d>b$。



3. 求通過點 $(2,3)$，且兩軸截距相等的直線方程式為 $\underline{x+y=5 \text{ 或 } 3x-2y=0}$。

解 由截距相等的兩種情況：(1) $x+y=a$　(2)過原點

(1) 令 $L: x+y=a$，過 $(2,3)$ 代入得 $a=5$，故 $L: x+y=5$。

(2) 過原點，截距為 0，且過 $(0,0)$、$(2,3)$ 的直線，得 $m=\dfrac{3}{2}$ 反推直線 $L: 3x-2y=k$，

$(0,0)$ 代入得 $k=0$，故 $L: 3x-2y=0$。

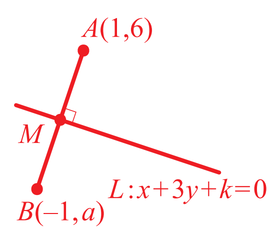
4. 平面上 $A(1,6)$、$B(-1,a)$，若 $\overline{AB}$ 的垂直平分線為 $x+3y+k=0$，則數對 $(a,k)=\underline{(0,-9)}$。

解 垂直 ⇒ 直線 L 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 垂直 $\Rightarrow m_L \times m_{\overleftrightarrow{AB}}=-1 \Rightarrow -\dfrac{1}{3}\times\dfrac{6-a}{1-(-1)}=-1 \Rightarrow a=0$。

平分 ⇒ $\overline{AB}$ 的中點 $M\left(\dfrac{1+(-1)}{2},\dfrac{6+0}{2}\right)=(0,3)$ 在直線 L 上，

代入得 $0+3(3)+k=0 \Rightarrow k=-9$。

故 $(a,k)=(0,-9)$。



5. $\triangle ABC$ 中，已知 $A(-2,3)$、$B(5,4)$ 且垂心為 $H(1,2)$，試求直線 BC 的方程式為 $\underline{3x-y-11=0}$。

解 已知 $A(-2,3)$、$H(1,2) \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{AH}}=\dfrac{2-3}{1-(-2)}=\dfrac{-1}{3}$，

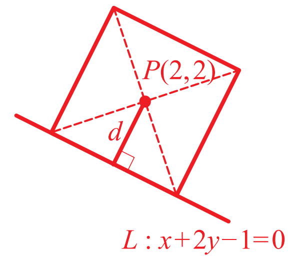
且 $\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{AH}$ 垂直 $\Rightarrow m_{\overleftrightarrow{BC}}\times m_{\overleftrightarrow{AH}}=-1$，因此可得 $m_{\overleftrightarrow{BC}}=3$。設 $\overleftrightarrow{BC}: 3x-y+k=0$，

又 $\overleftrightarrow{BC}$ 通過 $B(5,4)$，代入可得 $15-4+k=0 \Rightarrow k=-11$，故 $\overleftrightarrow{BC}$ 的方程式為 $3x-y-11=0$。

6. 一正方形中心為 $(2,2)$ 且此正方形有一邊在直線 $x+2y-1=0$ 上，求此正方形的面積為 ___20___。

解 正方形邊長 $=2\times d(P,L)=2\times\dfrac{|2+2\times2-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}$，

面積 $=\left(2\sqrt{5}\right)^2=20$。



7. 已知兩平行直線 $L_1:2x-6y+7=0$ 與 $L_2:ax+3y+\dfrac{13}{2}=0$ 的距離為 b，求數對 $(a,b)=$ ___$\left(-1,\sqrt{10}\right)$___。

解 設 L_1、L_2 的斜率分別為 m_1、m_2，

因為兩直線平行，可知 $m_1=m_2$，故 $\dfrac{1}{3}=-\dfrac{a}{3}$，可得 $a=-1$。

將 L_2 的方程式改寫成 $2x-6y-13=0$，

利用兩平行直線的距離公式，可得 L_1 與 L_2 的距離 $b=\dfrac{|7-(-13)|}{\sqrt{2^2+(-6)^2}}=\dfrac{20}{2\sqrt{10}}=\sqrt{10}$，

故數對 $(a,b)=\left(-1,\sqrt{10}\right)$

8. 設 $A(0,5)$、$B(1,6)$，已知 P 點在直線 $L:x-y+2=0$ 上，點 A 對於直線 L 的對稱點為 A'。

(1) 求 A' 的坐標為 ___$(3,2)$___。（4 分）

(2) 求 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 的最小值為 ___$2\sqrt{5}$___。（3 分）

解 (1) 因為 $A(0,5)$ 符合 $0-5+2<0$，$B(1,6)$ 符合 $1-6+2<0$，

所以 A、B 在直線 L 的同側。

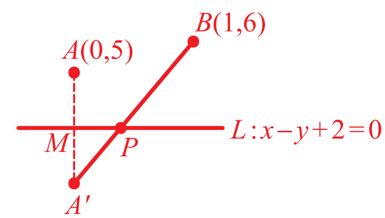
設 $A'(a,b)$，直線 AA' 通過點 A 且與 L 垂直，

其方程式為 $y-5=-1(x-0)$，即 $x+y-5=0$，

解 $\begin{cases}x+y-5=0\\x-y+2=0\end{cases}$，得 $M\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{7}{2}\right)$，

因為 M 為 $\overline{AA'}$ 的中點，所以 $\left(\dfrac{0+a}{2},\dfrac{5+b}{2}\right)=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{7}{2}\right)$，得 $a=3$，$b=2$，

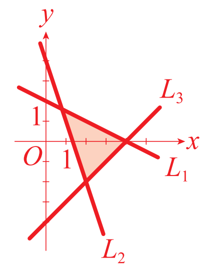
故 A' 的坐標為 $(3,2)$。



(2) $\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA'}+\overline{PB}\geq\overline{A'B}$，故 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 的最小值為 $\overline{A'B}=\sqrt{(3-1)^2+(2-6)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$。

9. 若點 $P(a,2a-3)$ 在三直線 $L_1: x+2y-4=0$，$L_2: 3x+y-4=0$，$L_3: x-y-4=0$ 所圍成的三角形內部（含邊界），則 a 值的範圍為 $\underline{\;\frac{7}{5}\le a\le 2\;}$ 。

解 先在坐標平面上作出 L_1、L_2、L_3 的圖形，如圖所示，

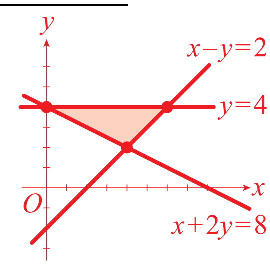


可知滿足三角形區域的二元一次聯立不等式為 $\begin{cases} x+2y-4\le 0 \\ 3x+y-4\ge 0 \\ x-y-4\le 0 \end{cases}$ 。

將 $P(a,2a-3)$ 代入聯立不等式，得 $\begin{cases} a+2(2a-3)-4\le 0 \Rightarrow a\le 2 \\ 3a+(2a-3)-4\ge 0 \Rightarrow a\ge \frac{7}{5} \\ a-(2a-3)-4\le 0 \Rightarrow a\ge -1 \end{cases}$，故 $\frac{7}{5}\le a\le 2$ 。

10. 試作出 $6-2y\le x-2\le y\le 4$ 之圖形，並求區域內的格子點個數有 $\underline{\quad 12 \quad}$ 個。

解 $\begin{cases} 6-2y\le x-2 \\ x-2\le y \\ y\le 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y\ge 8 \\ x-y\le 2 \\ y\le 4 \end{cases}$，



① $y=4$ 代入不等式得 $\begin{cases} x+8\ge 8 \\ x-4\le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x\le 6 \end{cases}$，

所以 $x=0,1,2,3,4,5,6$，共 7 個格子點。

② $y=3$ 代入不等式得 $\begin{cases} x+6\ge 8 \\ x-3\le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x\le 5 \end{cases}$，所以 $x=2,3,4,5$，共 4 個格子點。

③ $y=2$ 代入不等式得 $\begin{cases} x+4\ge 8 \\ x-2\le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 4 \\ x\le 4 \end{cases}$，所以 $x=4$，共 1 個格子點。

共 $7+4+1=12$ 個格子點。

二、素養混合題（共 15 分）

<u>第 11 至 12 題為題組</u>

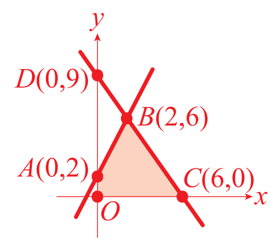
小龍開了一間小熊民宿，在觀光導覽地圖上所涵蓋的區域滿足下列不等式 $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 3x + by - 18 \le 0 \\ ax - y + 2 \ge 0 \end{cases}$，

且其中兩邊界的交點為 $(2,6)$，試回答以下問題：

11. 近期小龍準備開始進行民宿工程作業，請幫小龍計算小熊民宿在坐標平面上所涵蓋的面積為____20____。（填充題，7 分）

12. 為了考量民宿客人的安全，小龍想在坐標平面 $(8,3)$ 的位置設置一台直線雷射掃描裝置，其掃描的範圍**只需**涵蓋整個民宿區域且包含區域邊界（但暫時不考慮物件高度），假設雷射掃描裝置的直線斜率為 m，則 m 的範圍為多少？（非選擇題，8 分）

解　11. 因為 $(2,6)$ 為 $\begin{cases} 3x + by - 18 = 0 \\ ax - y + 2 = 0 \end{cases}$ 之交點，

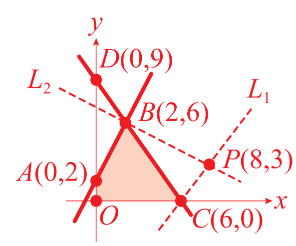


所以 $\begin{cases} 6 + 6b - 18 = 0 \\ 2a - 6 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 2 \end{cases}$，

得 $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 3x + 2y - 18 \le 0 \\ 2x - y + 2 \ge 0 \end{cases}$。

故民宿面積 $= \triangle OCD - \triangle BDA = 6 \times 9 \times \frac{1}{2} - 7 \times 2 \times \frac{1}{2} = 27 - 7 = 20$。

12. $m_{L_1} = m_{\overline{PC}} = \frac{3-0}{8-6} = \frac{3}{2}$，



$m_{L_2} = m_{\overline{PB}} = \frac{3-6}{8-2} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$

若需涵蓋民宿區域，

則直線斜率 m 的範圍為 $-\frac{1}{2} \le m \le \frac{3}{2}$。