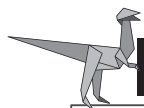
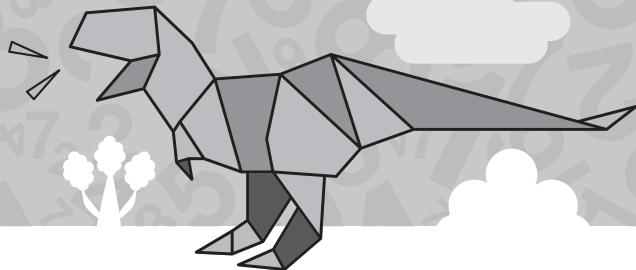


5 直線方程式



重點整理

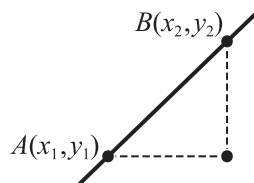
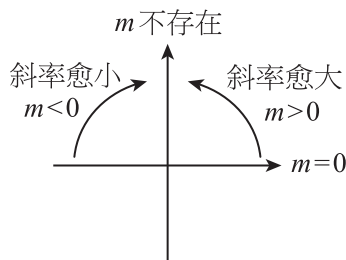
1. 斜率：

(1) 定義：斜率 $(m) = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 。

(2) 直線的斜率：二元一次方程式 $ax + by + c = 0$ ，其中 $a^2 + b^2 \neq 0$ ，在坐標平面上的圖形為一直線，其斜率

$$m = -\frac{a}{b}。$$

(3) 斜率大小：水平線的斜率為 0，鉛直線的斜率為不存在。



(4) 兩直線 L_1 、 L_2 的斜率分別為 m_1 、 m_2 ，且 L_1 、 L_2 不是鉛直線。若 $L_1 \parallel L_2$ ，則 $m_1 = m_2$ ；若 $L_1 \perp L_2$ ，則 $m_1 \times m_2 = -1$ 。

(5) 一直線 L 上相異三點 A 、 B 、 C ，則 $m_{\overline{AB}} = m_{\overline{BC}} = m_{\overline{AC}}$ 。

(6) 與直線 $L: ax + by + c = 0$ 平行的直線可假設為 $ax + by + k = 0$ 。

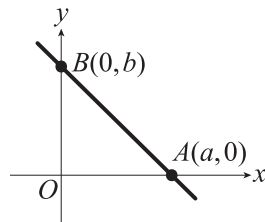
(7) 與直線 $L: ax + by + c = 0$ 垂直的直線可假設為 $bx - ay + k = 0$ 。

2. 直線方程式：

(1) 截距：一直線 L 與 x 軸相交於 $(a, 0)$ ，則稱 a 為 L 的 x 截距。
與 y 軸相交於 $(0, b)$ ，則稱 b 為 L 的 y 截距。

(2) 點斜式：直線 L 通過 $A(x_0, y_0)$ ，且斜率為 m ，則直線方程式為 $y - y_0 = m(x - x_0)$ 。

(3) 一般式反推：已知斜率 $m = -\frac{a}{b}$ ，且通過 $A(x_0, y_0)$ ，則假設直線方程式 $ax + by = k$ ，將 $A(x_0, y_0)$ 代入得 k 。



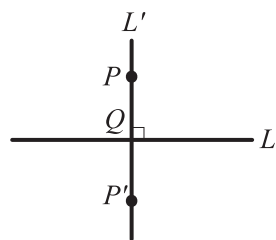
3. 直線的平移：

設 h 、 k 為正數，直線 $L: y = mx$ ，

- (1) 直線 L 向右平移 h ，得直線 $y = m(x - h)$ 。
- (2) 直線 L 向左平移 h ，得直線 $y = m(x + h)$ 。
- (3) 直線 L 向上平移 k ，得直線 $y - k = mx \Rightarrow y = mx + k$ 。
- (4) 直線 L 向下平移 k ，得直線 $y + k = mx \Rightarrow y = mx - k$ 。

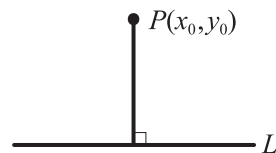
4. 對稱點：

直線 L 外一點 P 作 L 的垂線 L' 交 L 於 Q ，在 L' 上的另一側 P' ，使得 $\overline{PQ} = \overline{P'Q}$ ，則 Q 稱為 P 在 L 上的正射影（垂足），而 P' 即為 P 關於直線 L 的對稱點。

**5. 距離公式：**

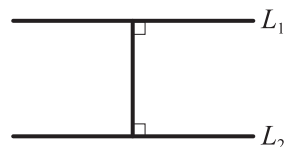
- (1) 點到直線之距離：設點 $P(x_0, y_0)$ ，直線 $L: ax + by + c = 0$ ，

點 P 到 L 之距離常以 $d(P, L)$ 表示。 $d(P, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 。



- (2) 兩平行線間距離：設直線 $L_1: ax + by + c_1 = 0$ ， $L_2: ax + by + c_2 = 0$ ，

其中 $L_1 \parallel L_2$ ， $d(L_1, L_2) = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 。

**6. 二元一次不等式：**

當常數 a 、 b 不全為 0 時，不等式 $ax + by + c > 0$ ， $ax + by + c < 0$ ， $ax + by + c \geq 0$ ， $ax + by + c \leq 0$ 稱為二元一次不等式。

- (1) 設直線 L 的方程式為 $ax + by + c = 0$ ，

- ① $a > 0$ 時，不等式 $ax + by + c > 0$ 的圖解是直線 L 右側的半平面；
不等式 $ax + by + c < 0$ 的圖解是直線 L 左側的半平面。
- ② $b > 0$ 時，不等式 $ax + by + c > 0$ 的圖解是直線 L 上方的半平面；
不等式 $ax + by + c < 0$ 的圖解是直線 L 下方的半平面。

- (2) 設直線 L 的方程式為 $ax + by + c = 0$ ，

- ① 若 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 在直線 L 的同側，則 $(ax_1 + by_1 + c)(ax_2 + by_2 + c) > 0$ 。
- ② 若 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 在直線 L 的異側，則 $(ax_1 + by_1 + c)(ax_2 + by_2 + c) < 0$ 。
- ③ 若 \overline{AB} 與 L 有交點，則 $(ax_1 + by_1 + c)(ax_2 + by_2 + c) \leq 0$ 。



觀念是非題 試判斷下列敘述對或錯。(每題 2 分，共 10 分)

- () 1. 已知直線 L 的 x 截距不存在，表示直線 L 是水平線。

解

- () 2. $\triangle ABC$ 的外心為三中垂線的交點，重心為三中線的交點，垂心為三高的交點。

解

- () 3. $P(a, b)$ 關於 x 軸的對稱點為 $A(a, -b)$ ， A 關於 y 軸的對稱點為 $B(-a, -b)$ 。

解

- () 4. 將直線 $L: 3x - 4y - 2 = 0$ 向左平移 5 單位，再向上平移 1 單位後，可得直線 $L': 3(x - 5) - 4(y + 1) - 2 = 0$ 。

解

- () 5. 已知 m 為實數，則直線 $L: y - 5 = m(x - 2)$ 必定通過點 $(5, 2)$ 。

解

一、填充題（第 1 題每小格 2 分，其餘每題 7 分，共 75 分）

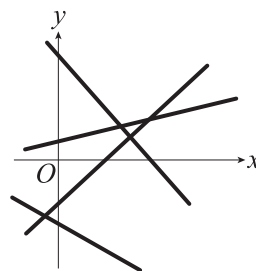
1. 試求下列的直線方程式：

(1) 過點 $(4,0)$ ，且斜率為 $-\frac{2}{3}$ ：_____。(2 分)(2) 過兩點 $(-2,3)$ 、 $(1,-1)$ ：_____。(2 分)(3) x 截距為 -2 ，且斜率為 $\frac{1}{3}$ ：_____。(2 分)(4) x 截距為 3 ， y 截距為 -5 ：_____。(2 分)(5) $A(5,5)$ 、 $B(-2,6)$ 的垂直平分線：_____。(2 分)(6) $A(1,2)$ 、 $B(5,6)$ 、 $C(-1,8)$ ，求 \overline{BC} 邊上高所在的直線：_____。(2 分)

解

38 單元 5 直線方程式

2. 四條直線： $y = ax + 1$ ， $y = bx + 5$ ， $y = cx - 2$ ， $y = dx - 3$ 的圖形如右，比較 a 、 b 、 c 、 d 之大小為_____。



解

3. 求通過點 $(2,3)$ ，且兩軸截距相等的直線方程式為_____。

解

4. 平面上 $A(1,6)$ 、 $B(-1,a)$ ，若 \overline{AB} 的垂直平分線為 $x + 3y + k = 0$ ，則數對 $(a, k) =$ _____。

解

5. $\triangle ABC$ 中，已知 $A(-2,3)$ 、 $B(5,4)$ 且垂心為 $H(1,2)$ ，試求直線 BC 的方程式為_____。

解

6. 一正方形中心為 $(2,2)$ 且此正方形有一邊在直線 $x+2y-1=0$ 上，求此正方形的面積為_____。

解

7. 已知兩平行直線 $L_1: 2x-6y+7=0$ 與 $L_2: ax+3y+\frac{13}{2}=0$ 的距離為 b ，求數對 $(a,b)=$ _____。

解

8. 設 $A(0,5)$ 、 $B(1,6)$ ，已知 P 點在直線 $L: x-y+2=0$ 上，點 A 對於直線 L 的對稱點為 A' 。
- (1) 求 A' 的坐標為_____。(4 分)
- (2) 求 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 的最小值為_____。(3 分)

解

40 單元 5 直線方程式

9. 若點 $P(a, 2a-3)$ 在三直線 $L_1: x+2y-4=0$, $L_2: 3x+y-4=0$, $L_3: x-y-4=0$ 所圍成的三角形內部 (含邊界), 則 a 值的範圍為_____。

解

10. 試作出 $6-2y \leq x-2 \leq y \leq 4$ 之圖形, 並求區域內的格子點個數有_____個。

解

二、素養混合題（共 15 分）

第 11 至 12 題為題組

小龍開了一間小熊民宿，在觀光導覽地圖上所涵蓋的區域滿足下列不等式
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + by - 18 \leq 0 \\ ax - y + 2 \geq 0 \end{cases},$$

且其中兩邊界的交點為 $(2,6)$ ，試回答以下問題：

11. 近期小龍準備開始進行民宿工程作業，請幫小龍計算小熊民宿在坐標平面上所涵蓋的面積為_____。（填充題，7 分）
12. 為了考量民宿客人的安全，小龍想在坐標平面 $(8,3)$ 的位置設置一台直線雷射掃描裝置，其掃描的範圍**只需**涵蓋整個民宿區域且包含區域邊界（但暫時不考慮物件高度），假設雷射掃描裝置的直線斜率為 m ，則 m 的範圍為多少？（非選擇題，8 分）

解