綜合習題 單元 5～7

一、單選題（每題 7 分，共 14 分）

（ B ）**1.** 設 a、b、c、d 為正實數，若 $2^a = 10^b = \log_2 c = \log d > 1$，則下列何者正確？

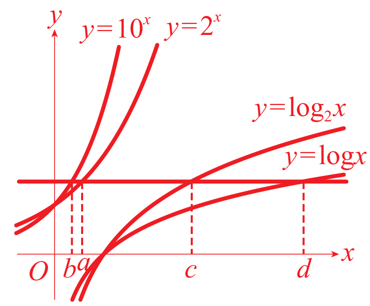
(A) $a > b > d > c$ (B) $d > c > a > b$ (C) $d > c > b > a$ (D) $b > a > d > c$

(E) $c > d > b > a$。〔搭配單元 5、單元 7〕

解 如示意圖，

則 $d > c > a > b$，

故選(B)。



（ C ）**2.** 天上的星星有的較暗、有的較亮，天文學中以「星等」區分，即選擇一特定的星光強度 F_0 為標準，對於星光強度為 F 的星體，定義其「星等」為 $m = -1.6\log\dfrac{F}{F_0}$，並稱此星體為「$m$ 等星」。設織女星為 -3 等星，牛郎星為 3 等星，則織女星的星光強度約是牛郎星的幾倍？（已知 $\log 5.624 \approx 0.75$）

(A) 6542 (B) 6245 (C) 5624 (D) 5462 (E) 5642。〔搭配單元 7〕

解 (1) 設織女星、牛郎星的星光強度分別為 F_1、F_2，

$$-1.6\log\frac{F_1}{F_0} = -3 \Rightarrow \log F_1 - \log F_0 = \frac{3}{1.6} \cdots\cdots ①，$$

$$-1.6\log\frac{F_2}{F_0} = 3 \Rightarrow \log F_2 - \log F_0 = -\frac{3}{1.6} \cdots\cdots ②。$$

(2) ①－② 得 $\log F_1 - \log F_2 = \dfrac{6}{1.6} = 3.75$

$$\Rightarrow \log\frac{F_1}{F_2} = 3 + 0.75 \approx 3 + \log 5.624 = \log 5624，$$

則 $\dfrac{F_1}{F_2} = 5624$，故選(C)。

二、多選題（每題 10 分，共 20 分）

（ CD ）**3.** 關於函數 $f(x)=a^{x}$，$g(x)=\log_{a}x$，其中 $a>0$，$a\neq 1$，且 α、β 為正實數，下列敘述哪些是正確的？

(A) $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$　(B) $f(3\alpha+2\beta)=[f(\alpha)]^{3}+[f(\beta)]^{2}$

(C) $f(\alpha\beta)=[f(\alpha)]^{\beta}$　(D) $g(\alpha\beta)=g(\alpha)+g(\beta)$

(E) $g\left(\dfrac{\alpha^{2}}{\beta^{3}}\right)=2g(\alpha)+3g(\beta)$。　〔搭配單元 5、單元 6〕

解 (A)╳：應為 $f(\alpha+\beta)=a^{\alpha+\beta}=a^{\alpha}\times a^{\beta}=f(\alpha)\times f(\beta)$。

(B)╳：應為 $f(3\alpha+2\beta)=a^{3\alpha+2\beta}=(a^{\alpha})^{3}\times(a^{\beta})^{2}=[f(\alpha)]^{3}\times[f(\beta)]^{2}$。

(C)○：$f(\alpha\beta)=a^{\alpha\beta}=(a^{\alpha})^{\beta}=[f(\alpha)]^{\beta}$。

(D)○：$g(\alpha\beta)=\log_{a}(\alpha\beta)=\log_{a}\alpha+\log_{a}\beta=g(\alpha)+g(\beta)$。

(E)╳：應為 $g\left(\dfrac{\alpha^{2}}{\beta^{3}}\right)=\log_{a}\dfrac{\alpha^{2}}{\beta^{3}}=\log_{a}\alpha^{2}-\log_{a}\beta^{3}=2\log_{a}\alpha-3\log_{a}\beta$

$=2g(\alpha)-3g(\beta)$。

故選(C)(D)。

（ACDE）**4.** 請問下列哪些選項是正確的？（已知 $\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$）

(A) $3^{4}>4^{3}$　(B) $\pi^{50}<1.7^{100}$　(C) $\sqrt{0.7}<\sqrt[3]{0.7}$　(D) $\log_{2}5<2.5$　(E) $10^{9}<9^{10}$。

〔搭配單元 5、單元 7〕

解 (A)○：$3^{4}=81$，$4^{3}=64$，故 $3^{4}>4^{3}$。

(B)╳：π^{50}，$1.7^{100}=(1.7^{2})^{50}=2.89^{50}$，故 $\pi^{50}>1.7^{100}$。

(C)○：$\sqrt{0.7}=0.7^{\frac{1}{2}}=(0.7^{3})^{\frac{1}{6}}=0.343^{\frac{1}{6}}$，$\sqrt[3]{0.7}=0.7^{\frac{1}{3}}=(0.7^{2})^{\frac{1}{6}}=0.49^{\frac{1}{6}}$，

故 $\sqrt{0.7}<\sqrt[3]{0.7}$。

(D)○：$\log_{2}5=\log_{2}\sqrt{25}$，$2.5=\dfrac{5}{2}=\log_{2}2^{\frac{5}{2}}=\log_{2}\sqrt{32}$，故 $\log_{2}5<2.5$。

(E)○：$\log 10^{9}=9$，$\log 9^{10}=10\times 2\log 3\approx 9.542$，故 $10^{9}<9^{10}$。

故選(A)(C)(D)(E)。

三、填充題（每題 8 分，共 48 分）

5. 解不等式 $2^{2x+1}-33\times 2^{x-2}+1>0$，則 x 的範圍為 $\underline{\ x>2 \text{ 或 } x<-3\ }$。〔搭配單元 5〕

解 $2^{2x+1}-33\times 2^{x-2}+1>0 \Rightarrow 2\times 2^{2x}-\dfrac{33}{4}\times 2^{x}+1>0 \overset{\times 4}{\Rightarrow} 8\times\left(2^{x}\right)^{2}-33\times 2^{x}+4>0$

$\Rightarrow \left(8\times 2^{x}-1\right)\left(2^{x}-4\right)>0 \Rightarrow 2^{x}>4$ 或 $2^{x}<\dfrac{1}{8} \Rightarrow x>2$ 或 $x<-3$。

6. 已知 $\log 2=a$，$\log 3=b$，$\log 7=c$，求 $\log_{42}\left(\dfrac{3}{14}\right)=\underline{\ \dfrac{b-a-c}{a+b+c}\ }$。（以 a、b、c 表示）

〔搭配單元 6〕

解 $\log_{42}\left(\dfrac{3}{14}\right)=\dfrac{\log\dfrac{3}{14}}{\log 42}=\dfrac{\log 3-\log 2-\log 7}{\log 2+\log 3+\log 7}=\dfrac{b-a-c}{a+b+c}$。

7. 小龍為了抵抗新冠肺炎，由未來人提供一種新冠藥劑，已知此藥劑在胃中之殘留量 y 公克與服用後 x 小時的關係為 $y=10\times 0.38^{x}$，試問自服用後 x 小時到 $x+1$ 小時期間吸收的藥量與服用後 x 小時之殘留量的比值為 $\underline{\ 0.62\ }$。〔搭配單元 5〕

解 ① 自服用後 x 小時到 $x+1$ 小時吸收的藥量 $=10\times 0.38^{x}-10\times 0.38^{x+1}$。

② 比值為 $=\dfrac{\text{自服用後 } x \text{ 小時到 } x+1 \text{ 小時吸收的藥量}}{\text{服用後 } x \text{ 小時的殘留量}}=\dfrac{10\times 0.38^{x}-10\times 0.38^{x+1}}{10\times 0.38^{x}}$

$=\dfrac{1-0.38}{1}=0.62$。

8. 試問$\left(\frac{1}{2}\right)^{30}$化成小數後，小數點後第＿＿10＿＿位開始出現不為 0 的數字。

（已知 $\log 2 \approx 0.3010$）　〔搭配單元 6〕

解 $\left(\frac{1}{2}\right)^{30}=\left(10^{\log\frac{1}{2}}\right)^{30}=10^{30\log\frac{1}{2}}=10^{30\times(-\log 2)}\approx 10^{-9.030}=10^{0.970}\times 10^{-10}$，

故從小數點後第 10 位開始出現不為 0 的數字。

9. 解不等式$(\log x)^2+\log x^2-3\geq 0$，則 x 的範圍為＿＿$x\geq 10$ 或 $0<x\leq\frac{1}{1000}$＿＿。

〔搭配單元 7〕

解 ① 真數 $x>0$。

② $(\log x)^2+2\log x-3\geq 0$

$\Rightarrow(\log x+3)(\log x-1)\geq 0$

$\Rightarrow\log x\geq 1$ 或 $\log x\leq -3$

$\Rightarrow x\geq 10$ 或 $x\leq\frac{1}{1000}$。

綜合①②，可得 $x\geq 10$ 或 $0<x\leq\frac{1}{1000}$。

10. 某種病毒傳染力極強，已知每 1 個病毒在人體內每經過 6 小時就會分裂成 3 個，某人吸入 100 個病毒進入體內，當體內達到 2 億個病毒時，身體就會發病，在此期間稱為潛伏期，請問此病毒的潛伏期約有＿＿4＿＿天。（無條件進位至整數，已知 $\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$）　〔搭配單元 7〕

解 設潛伏期為 n 天，共經過 $4n$ 次分裂，

則 $100\times(3)^{4n}\geq 2\times 10^8\Rightarrow 3^{4n}\geq 2\times 10^6$

$\Rightarrow\log\left(3^{4n}\right)\geq\log\left(2\times 10^6\right)$

$\Rightarrow 4n\times\log 3\geq 6+\log 2$

$\Rightarrow n\geq\frac{6+0.3010}{4\times 0.4771}\approx 3.3$，

故潛伏期約有 4 天。

四、素養混合題（共 18 分）

第 11 至 12 題為題組

何謂漲停？何謂跌停？在股票市場中常會聽到這兩個專有名詞，漲停是指在某交易時段內股票價格允許的最大漲幅，而跌停與漲停相反，是指在某交易時段內股票價格允許的最大跌幅，此機制用來防止交易價格產生劇烈的波動，臺灣的金融監督管理委員會從民國104年6月1日起將股票的漲（跌）幅限制由7%放寬至10%。某股票當天的收盤價格為跌停，意思是相較前一天的收盤價格減少10%；某股票當天的收盤價格為漲停，意思是相較前一天的收盤價格增加10%。

（ C ）**11.** 試根據以上資訊選出**錯誤**的選項。（單選題，9 分） 〔搭配單元 7〕

(A) 若某股票前一天的收盤價格為 a 元，則當天的漲停價格為 $1.1a$ 元

(B) 若某股票前一天的收盤價格為 a 元，則當天的跌停價格為 $0.9a$ 元

(C) 在一個禮拜中，星期二的收盤價格為跌停，星期三的收盤價格為漲停，則星期三與星期一的收盤價格相同

(D) 在一個禮拜中，甲、乙兩股票星期一的收盤價格相同，若甲股票星期二的收盤價格為漲停、星期三的收盤價格為跌停、星期四的收盤價格為跌停，而乙股票星期二的收盤價格為跌停、星期三的收盤價格為漲停、星期四的收盤價格為跌停，則甲、乙兩股票於星期四的收盤價格相同。

12. 承上題，價格為100元的股票依民國104年6月1日前的舊制度連續漲停5天後收盤價格為 x 元，若依現行的制度收盤價格要達到 x 元，至少需連續漲停幾天？
（已知 $\log 1.07 \approx 0.0294$，$\log 1.1 \approx 0.0414$）（非選擇題，9 分） 〔搭配單元 7〕

解 11. (A) ○：當天的漲停價格為 $a\times(1+10\%)=1.1a$（元）。

(B) ○：當天的跌停價格為 $a\times(1-10\%)=0.9a$（元）。

(C) ╳：設星期一的收盤價格為 a 元，
則星期三的收盤價格為 $a\times(1-10\%)\times(1+10\%)=a\times0.9\times1.1=0.99a$（元）。

(D) ○：設甲、乙兩股票星期一的收盤價格為 a 元，
則甲股票星期四的收盤價格為
$a\times(1+10\%)\times(1-10\%)\times(1-10\%)=a\times1.1\times0.9\times0.9=0.891a$（元），
而乙股票星期四的收盤價格為
$a\times(1-10\%)\times(1+10\%)\times(1-10\%)=a\times0.9\times1.1\times0.9=0.891a$（元）。

故選(C)。

12. ① 依舊制度連續漲停 5 天後收盤價格為 $x=100\times(1+7\%)^5=100\times1.07^5$。

② 設依現行制度需連續漲停 n 天，
$100\times(1+10\%)^n\geq x\Rightarrow100\times1.1^n\geq100\times1.07^5$
$\Rightarrow n\log1.1\geq5\log1.07\Rightarrow0.0414n\geq0.147\Rightarrow n\geq3.55$，
故至少需 4 天。