7 對數函數

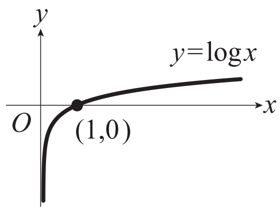
重點整理

1. 對數函數：

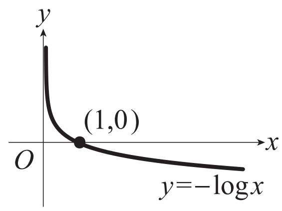
$y=f(x)=\log x$ 稱為以 10 為底數的對數函數，又簡稱常用對數函數，定義域（x 的取值範圍）為所有正實數，值域（y 的取值範圍）為所有實數。

2. 常用對數函數的圖形：

$y=\log x$



$y=-\log x$



3. 對數函數圖形的性質：

(1) 圖形恆在 y 軸的右方，且恆通過點 $(1,0)$。

(2) $y=\log x$ 的圖形遞增；$y=-\log x$ 的圖形遞減。

(3) 平行 x 軸的水平線與 $y=\log x$ 和 $y=-\log x$ 的圖形恰交於一點。

(4) 圖形逐漸往 y 軸靠近（$y=\log x$ 的圖形往 y 軸負向靠近；$y=-\log x$ 的圖形往 y 軸正向靠近），但恆不相交。

(5) $y=\log x$ 的圖形凹口向下，即圖形上相異兩點的連線段必在函數圖形的下方。
$y=-\log x$ 的圖形凹口向上，即圖形上相異兩點的連線段必在函數圖形的上方。

觀念是非題 試判斷下列敘述對或錯。(每題 2 分，共 10 分)

(╳) **1.** 已知 $x>0$ ，則 $y=\log x$ 之圖形的凹口向上。

解 $y=\log x$ 之圖形的凹口向下。

(╳) **2.** 已知 t 為實數，則 $y=t\times\log x$ 的圖形必為嚴格遞增函數。

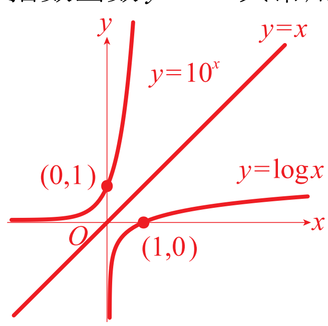
解 若 $t>0$ 時為嚴格遞增函數。若 $t<0$ 時為嚴格遞減函數。

(╳) **3.** 已知 a 、 t 均為實數，則 $y=t\times\log x$ 與鉛直線 $x=a$ 必有交點。

解 若 $a\le 0$ ，則兩圖形無交點。

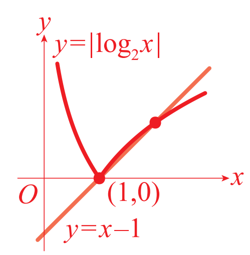
(○) **4.** 指數函數 $y=10^x$ 與常用對數函數 $y=\log x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$ 。

解

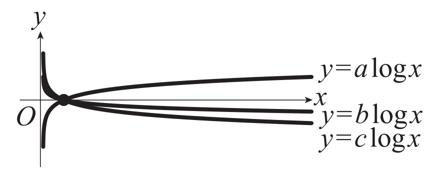


(○) **5.** 方程式 $x-1=|\log_2 x|$ 的相異實數解有 2 個。

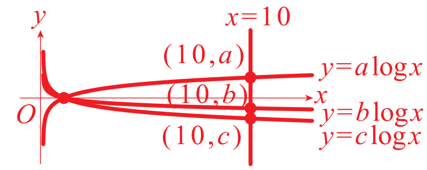
解 所求為 $y=x-1$ 與 $y=|\log_2 x|$ 圖形的交點個數，
兩者共有 2 個相異的交點(實根)。



一、填充題（每題 7 分，共 70 分）



1. 函數 $y=a\log x$、$y=b\log x$、$y=c\log x$ 的圖形如右圖所示，試比較 a、b、c 三數的大小關係為：$\underline{\quad a>b>c \quad}$。（由大到小）



解 畫出直線 $x=10$，

分別與三圖形交於 $(10,a)$、$(10,b)$、$(10,c)$，

因此可得 $a>b>c$。

2. 解方程式 $\log_2(3x+1)-\log_2(x-2)=2$，可得 $x=\underline{\quad 9 \quad}$。

解 ① 因為真數大於 0，所以 $3x+1>0$ 且 $x-2>0 \Rightarrow x>2$。

② 利用換底公式可得 $\dfrac{\log(3x+1)}{\log 2}-\dfrac{\log(x-2)}{\log 2}=\dfrac{\log 4}{\log 2}$，

同乘 $\log 2$ 可得 $\log(3x+1)-\log(x-2)=\log 4 \Rightarrow \log\dfrac{3x+1}{x-2}=\log 4 \Rightarrow \dfrac{3x+1}{x-2}=4 \Rightarrow x=9$。

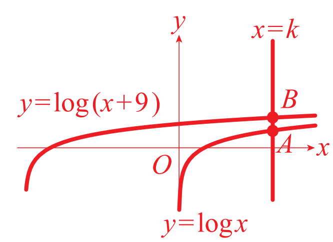
3. 解方程式 $\log_2 x-\log_x 4+1=0$，可得 $x=\underline{\quad 2\text{或}\dfrac{1}{4} \quad}$。

解 ① 令 $t=\log_2 x=\dfrac{\log x}{\log 2}$，則 $\log_x 4=\dfrac{\log 4}{\log x}=\dfrac{2\log 2}{\log x}=\dfrac{2}{t}$

$\Rightarrow t-\dfrac{2}{t}+1=0 \Rightarrow t^2+t-2=0 \Rightarrow (t+2)(t-1)=0 \Rightarrow t=1$ 或 -2。

② 因為 $\log_2 x=1$ 或 -2，可得 $x=2$ 或 $\dfrac{1}{4}$。

4. 設直線 L：$x=k$ 分別與 $y=\log x$、$y=\log(x+9)$ 的圖形交於 A、B 兩點，已知 $\overline{AB}=\dfrac{1}{2}$，則 $k=\underline{\quad \sqrt{10}+1 \quad}$。



解 ① 令 $A(k,\log k)$、$B(k,\log(k+9))$。

② $\overline{AB}=\log(k+9)-\log k=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \log\dfrac{k+9}{k}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{k+9}{k}=\sqrt{10}$

$\Rightarrow k+9=\sqrt{10}k \Rightarrow k(\sqrt{10}-1)=9$，

所以 $k=\dfrac{9}{\sqrt{10}-1}=\sqrt{10}+1$。

5. 試比較 $a=\log_2 5$、$b=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{7}$、$c=\log_4\sqrt{6}$ 三數的大小關係為 $\underline{\quad b>a>c \quad}$。（由大到小）

解　$a=\log_2 5=\dfrac{\log 5}{\log 2}$。

$$b=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{7}=\frac{\log\frac{1}{7}}{\log\frac{1}{2}}=\frac{-\log 7}{-\log 2}=\frac{\log 7}{\log 2}。$$

$$c=\log_4\sqrt{6}=\frac{\log\sqrt{6}}{\log 4}=\frac{\frac{1}{2}\log 6}{2\log 2}=\frac{\frac{1}{4}\log 6}{\log 2}=\frac{\log 6^{\frac{1}{4}}}{\log 2}。$$

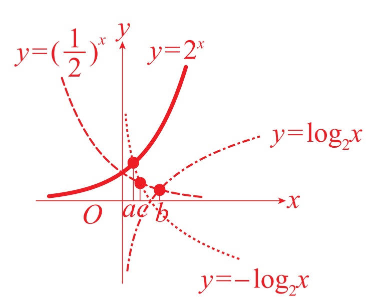
因為 $\log x$ 為嚴格遞增函數，所以 $\log 7>\log 5>\log 6^{\frac{1}{4}}$，因此可得 $b>a>c$。

6. 設 a、b、c 為正數，且 $2^a=-\log_2 a$，$\left(\frac{1}{2}\right)^b=\log_2 b$，$\left(\frac{1}{2}\right)^c=-\log_2 c$，試比較 a、b、c 三數的大小關係為 $\underline{\quad b>c>a \quad}$。（由大到小）

解　① $2^a=-\log_2 a$ 表示 $\begin{cases} y=2^x \\ y=-\log_2 x \end{cases}$ 圖形交點的 x 坐標為 a。

② $\left(\frac{1}{2}\right)^b=\log_2 b$ 表示 $\begin{cases} y=\left(\frac{1}{2}\right)^x \\ y=\log_2 x \end{cases}$ 圖形交點的 x 坐標為 b。

③ $\left(\frac{1}{2}\right)^c=-\log_2 c$ 表示 $\begin{cases} y=\left(\frac{1}{2}\right)^x \\ y=-\log_2 x \end{cases}$ 圖形交點的 x 坐標為 c。



由圖得 $b>c>a$。

7. 解不等式 $\log_{\frac{1}{2}} x+\log_{\frac{1}{2}}(x-3)>-2$，可得 x 的範圍為___$3<x<4$___。

解 ① 真數：令 $x>0$ 且 $x-3>0 \Rightarrow x>3$。

② 利用換底公式可得 $\dfrac{\log x}{\log\frac{1}{2}}+\dfrac{\log(x-3)}{\log\frac{1}{2}}>-2$，即 $\dfrac{\log x}{-\log 2}+\dfrac{\log(x-3)}{-\log 2}>-2$，

同乘 $-\log 2$ 可得 $\log x+\log(x-3)<2\log 2$，即 $\log x(x-3)<\log 4$，

解不等式 $x(x-3)<4 \Rightarrow x^2-3x-4<0 \Rightarrow (x-4)(x+1)<0 \Rightarrow -1<x<4$，

綜合上述可得 x 的範圍為 $3<x<4$。

8. 解不等式 $\log x-6\log_x 10>1$，可得 x 的範圍為___$x>1000$ 或 $\dfrac{1}{100}<x<1$___。

解 ① 令 $t=\log x$，則 $\log_x 10=\dfrac{1}{\log x}=\dfrac{1}{t} \Rightarrow t-\dfrac{6}{t}>1$。

(i)若 $t>0$，則 $t^2-t-6>0 \Rightarrow (t-3)(t+2)>0 \Rightarrow t>3$ 或 $t<-2$，解得 $t>3$。

(ii)若 $t<0$，則 $t^2-t-6<0 \Rightarrow (t-3)(t+2)<0 \Rightarrow -2<t<3$，解得 $-2<t<0$。

② 將 $t=\log x$ 的解代回不等式。

(i) $\log x>3 \Rightarrow x>1000$。

(ii) $-2<\log x<0 \Rightarrow \dfrac{1}{100}<x<1$。

故 $x>1000$ 或 $\dfrac{1}{100}<x<1$。

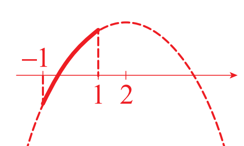
9. 已知 $\dfrac{1}{10}\le x\le 10$，求 $y=\log x^4-(\log x)^2$ 的最大值為___3___。

解 ① 令 $t=\log x$，$\dfrac{1}{10}\le x\le 10$，所以 $\log\dfrac{1}{10}\le\log x\le\log 10 \Rightarrow -1\le t\le 1$。

② $y=4\log x-(\log x)^2=-t^2+4t=-(t-2)^2+4$。

③ 當 $t=1$，最大值為 $-1+4=3 \Rightarrow \log x=1 \Rightarrow x=10$。

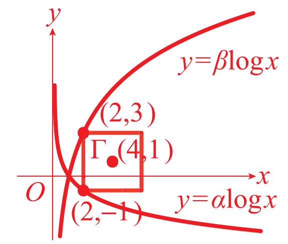
故當 $x=10$，最大值為 3。



10. 在坐標平面上，Γ是邊長為4的正方形，其中心位在點$(4,1)$，且各邊與坐標軸平行。已知函數 $y=t\times\log x$ 的圖形與 Γ 相交，其中 t 為實數，若 t 值的最大可能範圍為 $\alpha\le t\le\beta$，則$\dfrac{\beta}{\alpha}=$ ＿＿-3＿＿。

解 當函數 $y=t\times\log x$ 的圖形與 Γ 相交於點$(2,3)$時，t有最大值；

交於點$(2,-1)$時，t有最小值。



將點$(2,3)$代入可得 $3=t\times\log 2\Rightarrow t=\dfrac{3}{\log 2}$，

將點$(2,-1)$代入可得 $-1=t\times\log 2\Rightarrow t=\dfrac{-1}{\log 2}$，

因此 $\beta=\dfrac{3}{\log 2}$，$\alpha=\dfrac{-1}{\log 2}\Rightarrow\dfrac{\beta}{\alpha}=-3$。

二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 12 題為題組

（ C ）**11.** 小龍將10萬元存在銀行，並以年利率2%，每半年複利一次來計息，試求一年後的金額為？（單選題，10分）

(A)101000元 (B)102000元 (C)102010元 (D)104040元。

12. 小龍工作3年後，好不容易存到人生的第一桶金100萬元，打算拿出一半的錢50萬元來進行投資，完成早日買房子的夢想。若他的投資眼光不錯，每個月結算皆有3%的獲利，而買房子需要200萬元的頭期款，小龍想拿投資的50萬元以及獲利來付頭期款，則他至少要幾個月後才有足夠的頭期款買房子？（非選擇題，10分）

（已知 $\log 1.03\approx 0.01284$、$\log 4\approx 0.60206$）

解 11. 由年利率2%可知半年的利率為1%，一年以複利計息兩次。

一年後的金額為$100000\times(1.01)^2=102010$（元），故選(C)。

12. 設至少要 n 個月，本金50萬元，每個月皆獲利3%，

則 $50\times(1+0.03)^n\ge 200\Rightarrow(1+0.03)^n\ge 4\Rightarrow n\log 1.03\ge\log 4\Rightarrow n\ge\dfrac{\log 4}{\log 1.03}$

$$\Rightarrow n\ge\frac{0.60206}{0.01284}=46.\cdots,$$

故 n 取47，即至少要47個月。