# 5 指數函數

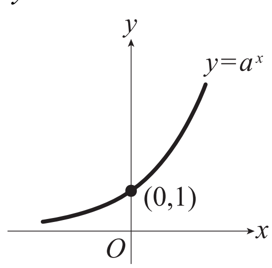
## 重點整理

**1. 指數函數：**

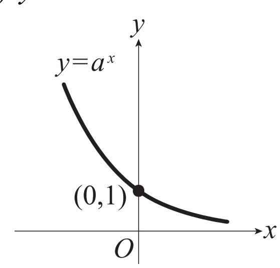
設 $a>0$，$a\neq 1$，$x\in\mathbb{R}$，則 $y=f(x)=a^x$ 稱為以 $a$ 為底數的指數函數，定義域（$x$ 的取值範圍）為所有實數，值域（$y$ 的取值範圍）為所有正實數。

**2. 指數函數的圖形：**

(1) $y=a^x$，$a>1$。




(2) $y=a^x$，$0<a<1$。




**3. 指數函數圖形的性質：**

(1) 圖形恆在 $x$ 軸的上方。

(2) 圖形恆通過點 $(0,1)$。

(3) $a>1$ 時，$y=a^x$ 為嚴格遞增函數，即 $\alpha<\beta\Rightarrow a^{\alpha}<a^{\beta}$。

(4) $0<a<1$ 時，$y=a^x$ 為嚴格遞減函數，即 $\alpha<\beta\Rightarrow a^{\alpha}>a^{\beta}$。

(5) 在 $x$ 軸上方的水平線和 $y=a^x$ 的圖形恰交於一點，即 $a^{\alpha}=a^{\beta}\Rightarrow\alpha=\beta$。

(6) 圖形逐漸往 $x$ 軸靠近（當 $a>1$ 時，往 $x$ 軸負向靠近；當 $0<a<1$ 時，往 $x$ 軸正向靠近），但恆不相交。

(7) $y=a^x$ 和 $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ 的圖形對稱 $y$ 軸。

(8) 圖形的凹口向上，即圖形上相異兩點的連線段必在指數函數圖形上方。

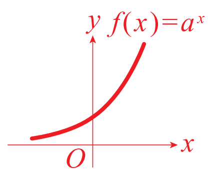
## 觀念是非題　試判斷下列敘述對或錯。（每題 2 分，共 10 分）

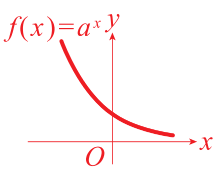
（ × ）**1.** 已知 $a>0$，$a\neq1$，指數函數 $f(x)=a^x$ 的圖形為由左向右上升。

解　當 $a>1$，$f(x)=a^x$ 的圖形為由左向右上升；

當 $0<a<1$，$f(x)=a^x$ 的圖形為由左向右下降。

（ ○ ）**2.** 已知 $a>0$，$a\neq1$，指數函數 $f(x)=a^x$ 之圖形的凹口向上。

解　當 $a>1$，圖形為 

，當 $0<a<1$，圖形為 


兩個圖形的凹口都是向上。

（ ○ ）**3.** 解不等式 $2^x>2^3$，可得 $x>3$。

解　底數為 $2>1$，因此 $y=2^x$ 是嚴格遞增函數圖形，故可得 $x>3$。

（ × ）**4.** 解不等式 $\left(\frac{1}{3}\right)^x>\left(\frac{1}{3}\right)^2$，可得 $x>2$。

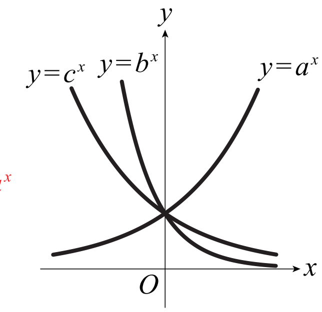
解　底數為 $\frac{1}{3}<1$，因此 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 是嚴格遞減函數圖形，故可得 $x<2$。

（ × ）**5.** 已知常數 $e\approx2.718281828$，因此可知常數 $e$ 為循環小數。

解　常數 $e$ 為無理數。

## 一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

**1.** 右圖為 $y=a^x$ 、 $y=b^x$ 、 $y=c^x$ 的圖形，試比較四數 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $1$ 的大小關係為：$\underline{\ a>1>c>b\ }$ 。（由大到小）



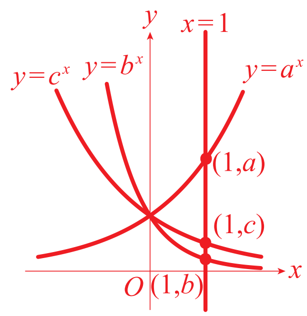

解 畫鉛直線 $x=1$ ，

由上到下分別交於點 $(1,a)$ 、 $(1,c)$ 、 $(1,b)$ ，

且 $y=a^x$ 為嚴格遞增函數，

$y=b^x$ 與 $y=c^x$ 為嚴格遞減函數，

因此可得 $a>1>c>b$ 。




**2.** 解方程式 $\left(\sqrt{2}\right)^{2x+3}=32$ ，可得 $x=\underline{\ \dfrac{7}{2}\ }$ 。

解 $\left(\sqrt{2}\right)^{2x+3}=2^5 \Rightarrow 2^{\frac{2x+3}{2}}=2^5 \Rightarrow \dfrac{2x+3}{2}=5 \Rightarrow x=\dfrac{7}{2}$ 。

**3.** 設兩直線 $y=2$ 和 $y=6$ 分別與 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ 的圖形交於 $A$ 、 $B$ 兩點，求 $\overline{AB}=\underline{\ \sqrt{17}\ }$ 。（化成最簡根式）

解 令 $A(x_1,y_1)$ 、 $B(x_2,y_2)$ ， $\begin{cases} y_1=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x_1}=2\cdots\cdots① \\ y_2=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x_2}=6\cdots\cdots② \end{cases}$ ，

$②\div① \Rightarrow \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x_2-x_1}=3=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} \Rightarrow x_2-x_1=-1$ ，

$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{17}$ 。

**4.** 解方程式 $9^x-7\times3^x-18=0$，可得 $x=$ ___2___。

解 原式 $=\left(3^x\right)^2-7\times\left(3^x\right)-18=0\Rightarrow\left(3^x-9\right)\left(3^x+2\right)=0\Rightarrow3^x=9$ 或 $3^x=-2$（不合），

因此可得 $x=2$。

**5.** 比較 $a=\sqrt{0.7}$、$b=(0.49)^{-0.75}$、$c=\left(\frac{10}{7}\right)^{-\frac{3}{5}}$ 三數的大小關係：___$b>a>c$___。（由大到小）

解 $a=(0.7)^{0.5}$，$b=(0.7)^{-1.5}$，$c=(0.7)^{0.6}$，

因為底數小於1，所以指數愈小，數值愈大。

指數：$-1.5<0.5<0.6$，因此 $(0.7)^{-1.5}>(0.7)^{0.5}>(0.7)^{0.6}$，

故 $b>a>c$。

**6.** 解不等式 $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2x^2+x+1}\geq\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2x-1}$，可得 $x$ 的範圍為 ___$x\geq0$ 或 $x\leq-\frac{3}{2}$___。

解 $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2x^2+x+1}\geq\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2x-1}\Rightarrow\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2x^2+x+1}\geq\left(\frac{\pi}{3}\right)^{-2x+1}$，

所以 $2x^2+x+1\geq-2x+1\Rightarrow2x^2+3x\geq0\Rightarrow x(2x+3)\geq0\Rightarrow x\geq0$ 或 $x\leq-\frac{3}{2}$。

**7.** 解不等式 $2^{1-2x}-33\times2^{-x-2}+1<0$，可得 $x$ 的範圍為 ___$-2<x<3$___。

解 $2^{1-2x}-33\times2^{-x-2}+1<0\Rightarrow2\times2^{-2x}-33\times\frac{1}{4}\times2^{-x}+1<0\xRightarrow{\times4}8\times2^{-2x}-33\times2^{-x}+4<0$

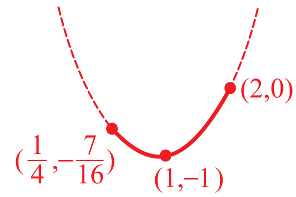
$\Rightarrow\left(8\times2^{-x}-1\right)\left(2^{-x}-4\right)<0\Rightarrow\frac{1}{8}<2^{-x}<4$，即 $2^{-3}<2^{-x}<2^2$，

所以 $-3<-x<2$，因此可得 $-2<x<3$。

**8.** 設 $-1\le x\le 2$，則 $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ 的最大值為 $\underline{\quad 0 \quad}$ 。

解 $\frac{1}{4}\le 2^{-x}\le 2$ ， $f(x)=2^{-2x}-2\times 2^{-x}=\left(2^{-x}-1\right)^{2}-1$ ，

當 $x=-1$ 時， $2^{-x}=2$ ，最大值為 $(2-1)^{2}-1=0$ 。




**9.** 已知函數 $f(x)=2\left(2^{2x}+2^{-2x}\right)-6\left(2^{x}+2^{-x}\right)+12$，試求下列各小題。

(1)令 $t=2^{x}+2^{-x}$ ，則 $t$ 的範圍為 $\underline{\quad t\ge 2 \quad}$ 。（2 分）

(2)若將函數 $f(x)$ 以 $t$ 表示，則新函數 $g(t)=\underline{\quad 2t^{2}-6t+8 \quad}$ 。（3 分）

(3)試求函數 $g(t)$ 的最小值為 $\underline{\quad 4 \quad}$ 。（2 分）

解 (1) 根據算幾不等式： $\frac{2^{x}+2^{-x}}{2}\ge\sqrt{2^{x}\times 2^{-x}}=1\Rightarrow t\ge 2$ 。

(2) $t=2^{x}+2^{-x}\Rightarrow 2^{2x}+2^{-2x}=t^{2}-2$ ，

令新函數為 $g(t)=2\left(t^{2}-2\right)-6t+12=2t^{2}-6t+8$ 。

(3) $g(t)=2t^{2}-6t+8=2\left(t-\frac{3}{2}\right)^{2}+\frac{7}{2}$ ，

當 $t=2$ 時，最小值為 $g(2)=2\times 2^{2}-6\times 2+8=4$ 。

**10.** 心理專家以數學模式 $F(t)=a\left(1-10^{-bt}\right)$ 來描述學生經過時間 $t$（星期）的學習之後所得到的學習量（或成果），這裡的常數 $a$ 與 $b$ 跟學生及學習的科目相關。若小明一星期可以熟背 100 個英文單字，兩星期可以熟背 150 個英文單字，則小明三星期可以熟背 $\underline{\quad 175 \quad}$ 個英文單字。

解 $F(1)=a\left(1-10^{-b}\right)=100\cdots\cdots①$ ， $F(2)=a\left(1-10^{-2b}\right)=150\cdots\cdots②$ ，

$\frac{②}{①}\Rightarrow\frac{1-10^{-2b}}{1-10^{-b}}=\frac{150}{100}=\frac{3}{2}\Rightarrow 2\left(1-10^{-2b}\right)=3\left(1-10^{-b}\right)\Rightarrow 2\times 10^{-2b}-3\times 10^{-b}+1=0$

$\Rightarrow\left(2\times 10^{-b}-1\right)\left(10^{-b}-1\right)=0\Rightarrow 10^{-b}=\frac{1}{2}$ 或 1（不合），所以 $a=200$ ，

$F(3)=200\left(1-10^{-3b}\right)=200\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\right)=200\times\frac{7}{8}=175$ 。

## 二、素養混合題（共 20 分）

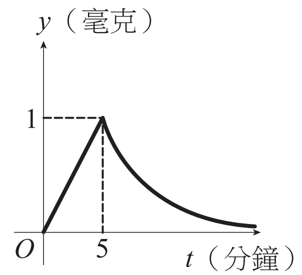
第 11 至 12 題為題組

（ D ）**11.** 某國在 2021 年 5 月面臨新型冠狀病毒肆虐，根據 WHO 的統計數據顯示染疫人數每經過 5 日變為原來的 2 倍，函數 $f(t)$ 表示經過 $t$ 日後的染疫人數，已知 $f(0)=50$，則下列哪個函數符合此國的染疫情況？（單選題，10分）

(A) $f(t)=50+\frac{1}{5}t$　(B) $f(t)=50+\frac{1}{5}t^2$　(C) $f(t)=50\times3^{\frac{t}{5}}$

(D) $f(t)=50\times2^{\frac{t}{5}}$　(E) $f(t)=\frac{50\times2^t}{5}$。

**12.** 經過幾個月後，此國家終於控制疫情，學生紛紛回到校園，為了預防新型冠狀病毒，學校固定每周使用漂白水進行消毒。漂白水剛開始噴灑時，教室內空氣中每立方公尺的漂白水量 $y$（毫克）與時間 $t$（分鐘）成正比，5 分鐘噴灑完後，$y$ 與 $t$ 的函數關係為 $y=\left(\frac{1}{8}\right)^{t+k}$，其中 $k$ 為常數，$t\geq5$，如圖所示。為了避免學生吸入漂白水而影響呼吸道健康，當空氣中每立方公尺的漂白水量不大於 0.0625 毫克時，學生方可進入教室，那麼從開始噴灑後，至少需經過幾分鐘（取到整數位）學生才能進入教室？（非選擇題，10 分）




解 11. ① $f(0)=50$ 表示開始時染疫人數為 50 人，

每經過 5 日變為原來的 2 倍，則每經過 1 日變為原來的 $2^{\frac{1}{5}}$ 倍。

② 經過 $t$ 日後變為原來的 $2^{\frac{t}{5}}$ 倍，則 $f(t)=50\times2^{\frac{t}{5}}$，故選(D)。

12. ① 當 $t=5$ 時，$y=\left(\frac{1}{8}\right)^{5+k}=1\Rightarrow5+k=0\Rightarrow k=-5$。

② 當每立方公尺的漂白水量小於或等於 $0.0625=\frac{1}{16}$（毫克）時，才能進入教室，

$$y=\left(\frac{1}{8}\right)^{t-5}\leq\frac{1}{16}\Rightarrow\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^{t-5}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^4\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{3t-15}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\Rightarrow3t-15\geq4\Rightarrow t\geq\frac{19}{3}\approx6.33$$，故取 $t=7$，

即至少需經過 7 分鐘才能進入教室。