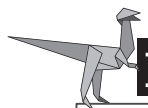


6 對數與對數律



重點整理

1. 對數的定義與性質：

設 $a > 0$ ， $a \neq 1$ ， $b > 0$ ，定義 $\log_a b$ 表示方程式 $a^x = b$ 的實數解 x ，稱為以 a 為底數時 b 的對數，其中 b 稱為真數，即 $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ ，由定義知 $\log_a a = 1$ ， $\log_a 1 = 0$ ， $a^{\log_a b} = b$ ， $\log_a a^x = x$ 。

2. 常用對數的對數律：

設 $r > 0$ ， $s > 0$ ，則

$$(1) \log rs = \log r + \log s。$$

$$(2) \log \frac{r}{s} = \log r - \log s。$$

$$(3) \log r^t = t \log r \quad (t \text{ 是實數})。$$

$$(4) \log_a b = \frac{\log b}{\log a} \quad (\text{換底公式})。(a > 0, b > 0, a \neq 1)$$

※3. 一般對數的對數律：

設 $a > 0$ ， $a \neq 1$ ， $r > 0$ ， $r \neq 1$ ， $s > 0$ ， $s \neq 1$ ，則

$$(1) \log_a rs = \log_a r + \log_a s。$$

$$(2) \log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s。$$

$$(3) \log_a r^n = n \log_a r, \log_{a^m} r^n = \frac{n}{m} \log_a r。(m、n \text{ 是實數}, m \neq 0)$$

$$(4) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \text{ 即 } \log_a b \times \log_b a = 1 \quad (\text{倒數關係})。(b > 0, b \neq 1)$$

$$(5) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (\text{換底公式})。(b > 0, c > 0, c \neq 1)$$

註：符號※表示：非課綱的內容，教師可視情況延伸補充。



觀念是非題

試判斷下列敘述對或錯。(每題 2 分，共 10 分)

- () 1. 因為 $16 = (-2)^4$ ，所以可知 $\log_{-2} 16 = 4$ 。

解

- () 2. $\log(5+8) = \log 5 \times \log 8$ 。

解

- () 3. $\log_3 5 = \frac{1}{\log_5 3}$ 。

解

- () 4. 半衰期是指放射性物質衰變至原來含量之一半所需的時間，已知一放射性物質的半衰期約為 10 年，若在西元 2000 年時測量其放射性物質含量為 a 單位，則在西元 2030 年時測量其放射性物質含量大約為 $\frac{1}{8}a$ 單位。

解

- () 5. 若小數 $a = 10^{-140.5}$ ，則 a 從小數點後第 140 位開始出現不為 0 的數。

解

一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 求下列各對數的值。

(1) $\log_4 \frac{1}{64} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(2 分)

(2) $\log_3 9\sqrt{3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(2 分)

(3) $5^{\log_5 7} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(2 分)

(4) $\log_{\pi} 1 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(1 分)

解

2. 計算 $\log \frac{4}{25} + \frac{1}{3} \log \frac{1}{64} - \frac{4}{3} \log \sqrt{8} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解

3. 設 x 為實數，若對數 $\log_{x-1}(6x^2 - 5x - 4)$ 有意義，則 x 的範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

解

4. 試求下列各式的值。

(1) $\log_3 7 \times \log_7 9 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(3 分)

(2) $\frac{1}{\log_4 \frac{1}{6}} + \frac{1}{\log_9 \frac{1}{6}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(4 分)

解

5. 將 $\left(\frac{2}{3}\right)^{100}$ 表示成小數時，從小數點後第 位開始出現不為 0 的數字。
(已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$)

解

6. $2^{100} \times 3^{1000}$ 是 位數，其最高位數字為 。
(第 1 格 3 分，第 2 格 4 分)(已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$)

解

46 單元 6 對數與對數律

7. 設 $\log_2 3 = a$ ， $\log_3 7 = b$ ，則 $\log_{14} 6 =$ _____。(以 a 、 b 表示)

解

8. 設 a 、 b 、 c 為異於 1 的正實數， $abc = 1$ ，求 $\log_a b + \log_b a + \log_b c + \log_c b + \log_c a + \log_a c$ 的值為 _____。

解

9. 設 a 、 b 為正實數，且 $\log a = \log_{100} b = \log_{1000}(a+b)$ ，求 a 的值為_____。

解

10. 聲音的強度是用每平方公尺多少瓦特 (W/m^2) 來衡量，一般人能感覺出聲音的最小強度為 $I_0 = 10^{-12}$ (W/m^2)，當測得的聲音強度為 I (W/m^2) 時，產生的噪音分貝數 $dB(I) = 10 \log \frac{I}{I_0}$ 。依照集會遊行法規定集會遊行的噪音不能超過 90 分貝，某廠商製造一款低噪音的氣笛，此氣笛每支只會產生 60 分貝的噪音，在不考慮其他噪音的情況下，試問集會遊行時最多能有_____支氣笛同時響起。

解

二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 12 題為題組

芮氏地震規模（ M ）最早是在 1935 年由兩位來自美國加州理工學院的地震學家芮克特（Charles Francis Richter）和古騰堡（Beno Gutenberg）共同制定，而古騰堡進一步提出芮氏規模（ M ）與震源釋放的能量（ E ）（單位：爾格）之間的關係為 $\log E(M) = 11.8 + 1.5M$ 。臺灣位於板塊交界地帶，地震活動頻繁，近幾年來災情較嚴重的地震分別是 2018 年花蓮縣近海發生芮氏規模 6.2 的地震，造成 17 人罹難，以及 2016 年高雄市美濃區發生芮氏規模 6.6 的強震，造成 117 人罹難、551 人受傷，此為 921 地震後最嚴重的地震，也是臺灣有史以來單一建築物倒塌罹難人數最多的災害。

（已知 $\log 3 \approx 0.4771$ 、 $\log 4 \approx 0.6021$ 、 $\log 5 \approx 0.6990$ 、 $\log 6 \approx 0.7782$ ）

（ ）11. 試問 2016 年高雄市美濃區發生之地震釋放的能量約為 2018 年花蓮縣近海發生之地震的幾倍？（單選題，10 分）

(A) 2 倍 (B) 3 倍 (C) 4 倍 (D) 5 倍 (E) 6 倍。

12. 美軍在 1945 年對日本廣島市投下史上第一枚原子彈，而此枚原子彈釋放 5.5×10^{21} 爾格的能量。921 地震發生於 1999 年 9 月 21 日凌晨 1 時 47 分，南投縣集集鎮發生芮氏規模 7.3 的強震，試問 921 地震釋放的能量是否多於這一枚原子彈所釋放的能量？請說明原因。

（非選擇題，10 分）（已知 $10^{0.7404} \approx 5.5$ ）

解