10 二元一次聯立方程式

重點整理

1. 克拉瑪公式：

已知二元一次聯立方程式$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，並令$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，

$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$，若$\Delta\neq 0$，則此聯立方程式恰有一組解，且其解為$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$。

2. 二元一次聯立方程式的幾何意義（$a_2b_2c_2\neq 0$）：

係數比關係	行列式關係	聯立方程式的解	幾何意義
$\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$	$\Delta\neq 0$	恰有一組解	交於一點的兩直線
$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$	$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$	無窮多組解	重合的兩直線
$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$	$\Delta=0$， Δ_x、Δ_y不全為0	無解	平行的兩直線

3. 二階行列式的性質：

(1)行列互換其值不變。
(2)兩行（列）對調，其值變號。
(3)任一行（列）可以提出同一個數。
(4)兩行（列）成比例，其值為0。
(5)將一行（列）的k倍加到另一行（列），其值不變。
(6)可依某一行（列）將一個行列式拆成兩個行列式的和。

4. **二元一次聯立方程式的向量觀點：**

聯立方程式$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$可視為$x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$，其中$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$、$\overrightarrow{c}=(c_1,c_2)$。

(1)當$\overrightarrow{a}\not\parallel\overrightarrow{b}$，則$\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$，其中$(x,y)$恰有一組解。

(2)當$\overrightarrow{a}\parallel\overrightarrow{b}$，且$\overrightarrow{c}$與$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$不平行，則$\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$，其中$(x,y)$無解。

(3)當$\overrightarrow{a}\parallel\overrightarrow{b}$，且$\overrightarrow{c}$與$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$平行，則$\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$，其中$(x,y)$無窮多組解。

觀念是非題　試判斷下列敘述對或錯。（每題 2 分，共 10 分）

（ ✕ ）**1.** 聯立方程式$\begin{cases} x+2y=3 \\ 4x+5y=6 \end{cases}$的$x$之解為$\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}}$。

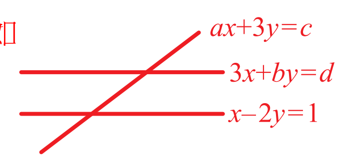
解　聯立方程式x的解為$\dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}}$。

（ ✕ ）**2.** 已知聯立方程式$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，其中$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$，則此聯立方程式必定無解。

解　$\Delta=0$可能無解或無窮多組解。

（ ✕ ）**3.** 若實數a、b、c、d使得聯立方程式$\begin{cases} ax+3y=c \\ x-2y=1 \end{cases}$有解，且聯立方程式$\begin{cases} 3x+by=d \\ x-2y=1 \end{cases}$無解，則聯立方程式$\begin{cases} ax+3y=c \\ 3x+by=d \end{cases}$必定無解。

解　可能有解，例如



。

(○) **4.** $\begin{vmatrix} 23 & 108 \\ 17 & 109 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 27 & 108 \\ 23 & 109 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 50 & 108 \\ 40 & 109 \end{vmatrix}$。

解 行列式可依某一行將一個行列式拆成兩個行列式的和。

(○) **5.** 已知行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2$，$\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} = 5$，則行列式 $\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 3c-e & 3d-f \end{vmatrix} = 2$。

解 $\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 3c-e & 3d-f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 3c & 3d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ e & f \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} = 6\times 2 - 2\times 5 = 2$。

一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 利用克拉瑪公式解 $\begin{cases} 3x-2y=12 \\ 5x+y=7 \end{cases}$，得 $(x,y)=$ __$(2,-3)$__。

解 $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3-(-10)=13$，$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 12-(-14)=26$，$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 21-60=-39$，

$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{26}{13}=2$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{-39}{13}=-3$，故 $(x,y)=(2,-3)$。

2. 若 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 2$，$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 4$，$\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = 6$，則聯立方程式 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 的解 $(x,y)=$ __$(-2,-3)$__。

解 利用克拉瑪公式，

解得 $x=\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\dfrac{-4}{2}=-2$，$y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\dfrac{-\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\dfrac{-6}{2}=-3$。

故聯立方程式的解 $(x,y)=(-2,-3)$。

3. 已知實數 $a>0$，若 x 、 y 的聯立方程式 $\begin{cases}2x-y=1\\x+y=a\\x+ay=81\end{cases}$ 有解，試求實數 $a=$ ___11___ 。

解 ① $\begin{cases}2x-y=1\\x+y=a\end{cases}\Rightarrow\Delta=\begin{vmatrix}2&-1\\1&1\end{vmatrix}=3$ ， $\Delta_x=\begin{vmatrix}1&-1\\a&1\end{vmatrix}=1+a$ ， $\Delta_y=\begin{vmatrix}2&1\\1&a\end{vmatrix}=2a-1$ ，

故解為 $x=\dfrac{1+a}{3}$ ， $y=\dfrac{2a-1}{3}$ 。

② 因為聯立方程式有解，所以將解 $(x,y)=\left(\dfrac{1+a}{3},\dfrac{2a-1}{3}\right)$ 代入 $x+ay=81$ ，

得 $\left(\dfrac{a+1}{3}\right)+a\left(\dfrac{2a-1}{3}\right)=81\Rightarrow(a+1)+(2a^2-a)=243\Rightarrow2a^2=242\Rightarrow a=\pm11$ （負不合）。

4. 聯立方程式 $\begin{cases}(3k+1)x+(5k-2)y=4k-3\\(9-k)x+(2k+4)y=k+1\end{cases}$ ， k 為實數，若聯立方程式有無限多組解，

則 $k=$ ___1___ 。

解 聯立方程式有無限多組解，所以 $\Delta=\begin{vmatrix}3k+1&5k-2\\9-k&2k+4\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow(3k+1)(2k+4)=(5k-2)(9-k)$ ，所以 $6k^2+14k+4=-5k^2+47k-18$

$\Rightarrow11k^2-33k+22=0\Rightarrow k^2-3k+2=0$ ， $(k-2)(k-1)=0$ ，所以 $k=2$ 或 1 ，

當 $k=2$ 時， $\begin{cases}7x+8y=5\\7x+8y=3\end{cases}$ 無解，

當 $k=1$ 時， $\begin{cases}4x+3y=1\\8x+6y=2\end{cases}$ 有無限多組解，

所以 $k=1$ ，聯立方程式有無限多組解。

5. 已知 $\begin{vmatrix}a&e\\c&f\end{vmatrix}=3$ ， $\begin{vmatrix}e&b\\f&d\end{vmatrix}=2$ ，求 $\begin{vmatrix}2a-5b&3e\\2c-5d&3f\end{vmatrix}$ 的值為 ___48___ 。

解 $\begin{vmatrix}2a-5b&3e\\2c-5d&3f\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2a&3e\\2c&3f\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-5b&3e\\-5d&3f\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}a&e\\c&f\end{vmatrix}-15\begin{vmatrix}b&e\\d&f\end{vmatrix}=6\times3-15\times(-2)=48$ 。

6. 設$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=24$，則下列敘述何者為真？＿＿(E)＿＿。（單選題）

(A)$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=-24$　(B)$\begin{vmatrix} a & -b \\ -c & d \end{vmatrix}=-24$　(C)$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b \\ c & d \end{vmatrix}=6$　(D)$\begin{vmatrix} a & b+\frac{1}{3}a \\ c & d+\frac{1}{3}c \end{vmatrix}=8$

(E)$\begin{vmatrix} a+2b & a+3b \\ c+2d & c+3d \end{vmatrix}=24$。

解 (A) ╳：行列互換其值不變。

(B) ╳：$\begin{vmatrix} a & -b \\ -c & d \end{vmatrix}=ad-bc=24$。

(C) ╳：$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b \\ c & d \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\times 24=12$。

$\times\left(-\frac{1}{3}\right)$

(D) ╳：$\begin{vmatrix} a & b+\frac{1}{3}a \\ c & d+\frac{1}{3}c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=24$。

$\times(-1)$　　$\times(-2)$

(E) ○：$\begin{vmatrix} a+2b & a+3b \\ c+2d & c+3d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+2b & b \\ c+2d & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=24$。

故選(E)。

7. 若$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=3$，則$\begin{vmatrix} 2a+6b & 5a-3b \\ 2c+6d & 5c-3d \end{vmatrix}$的值為＿＿$-108$＿＿。

解

$\times 2$

$\begin{vmatrix} 2a+6b & 5a-3b \\ 2c+6d & 5c-3d \end{vmatrix}$

$\times(-5)$

$=\begin{vmatrix} 12a & 5a-3b \\ 12c & 5c-3d \end{vmatrix}=12\begin{vmatrix} a & 5a-3b \\ c & 5c-3d \end{vmatrix}$

$=12\begin{vmatrix} a & -3b \\ c & -3d \end{vmatrix}=(-36)\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=(-36)\times 3=-108$。

8. 已知 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=2$，$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=3$，$\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}=5$。若聯立方程式 $\begin{cases} b_1x+c_1y+a_1=0 \\ b_2x+c_2y+a_2=0 \end{cases}$ 的解為 (x,y)，則 (x,y) 為 $\underline{\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)}$。

解　將聯立方程式 $\begin{cases} b_1x+c_1y+a_1=0 \\ b_2x+c_2y+a_2=0 \end{cases}$ 改寫為 $\begin{cases} b_1x+c_1y=-a_1 \\ b_2x+c_2y=-a_2 \end{cases}$。

因為 $\Delta=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=3$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} -a_1 & c_1 \\ -a_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}=5$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} b_1 & -a_1 \\ b_2 & -a_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=2$，

所以利用克拉瑪公式，得 $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{5}{3}$，$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{2}{3}$，$(x,y)=\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)$。

9. 若聯立方程式 $\begin{cases} x+2y=ax \\ 6x+2y=ay \end{cases}$ 除了 $(x,y)=(0,0)$ 之外還有其他的解，則 $a=\underline{5\text{或}-2}$。

解　除了 $(0,0)$ 之外還有其他的解 $\Rightarrow$ 聯立方程式有無窮多組解

$\Rightarrow \Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$，$\begin{cases} (1-a)x+2y=0 \\ 6x+(2-a)y=0 \end{cases}$，

$\Delta=\begin{vmatrix} 1-a & 2 \\ 6 & 2-a \end{vmatrix}=a^2-3a-10=0 \Rightarrow (a+2)(a-5)=0 \Rightarrow a=5\text{或}-2$，

且常數項皆為 0，$\Delta_x=\Delta_y=0$，所以 $a=5$ 或 -2。

10. 若 $\overrightarrow{u}=(a,b)$，$\overrightarrow{v}=(c,d)$ 且由 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 決定的平行四邊形面積為 5，則由 $\overrightarrow{u}$ 與 $2\overrightarrow{u}-3\overrightarrow{v}$ 決定的平行四邊形面積為 $\underline{15}$。

解　因為由 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 決定的平行四邊形面積為 $\left|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right|=5$，又 $2\overrightarrow{u}-3\overrightarrow{v}=(2a-3c,2b-3d)$，

所以由 $\overrightarrow{u}$ 與 $2\overrightarrow{u}-3\overrightarrow{v}$ 決定的平行四邊形面積為

$\left|\begin{vmatrix} a & b \\ 2a-3c & 2b-3d \end{vmatrix}\right| \times(-2)$

$=\left|\begin{vmatrix} a & b \\ -3c & -3d \end{vmatrix}\right|=|-3|\times\left|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right|=3\times5=15$。

二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 12 題為題組

日本動畫《佐賀偶像是傳奇》的偶像團體法蘭秀秀，在九州展開在地快閃演唱會。她們這次來到北九州八幡西區本城一丁目公園，這是一個三角形公園。

女主角源櫻想要算公園的面積，她從其中一個頂點 A 點，往北走 75 公尺再往東走 5 公尺來到 B 點；源櫻返回 A 點後，往東走 55 公尺，再往北走 50 公尺到了 C 點。她會選擇這樣走是因為想到：學校老師曾教過求三角形的面積公式，利用她剛才步行觀測的數值，我們可以得到

11. 公園的其中一邊 $\overline{BC}=$ $\underline{\quad 25\sqrt{5} \quad}$ 公尺。（填充題，8 分）

12. 她發現求出 $\overline{BC}$ 後，還是很難算出面積，於是想到可以使用向量公式求解，則三角形公園的面積為？（非選擇題，12 分）

解 假設 A 點為原點 $A(0,0)$，

由直角坐標表示法可知 $B(5,75)$、$C(55,50)$，

得 $\overrightarrow{AB}=(5,75)$、$\overrightarrow{AC}=(55,50)$ 及 $\overrightarrow{BC}=(50,-25)$。

11. $\overline{BC}=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{50^2+(-25)^2}=25\sqrt{5}$（公尺）。

12. $\triangle ABC$ 面積

$$=\frac{1}{2}\times\left|\begin{vmatrix}5 & 75\\ 50 & -25\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\times25\times5\times\left|\begin{vmatrix}1 & 15\\ 2 & -1\end{vmatrix}\right|=\frac{125}{2}\times\left|(-1)-30\right|=\frac{125}{2}\times31$$

$=1937.5$（平方公尺）。