10 二元一次聯立方程式

重點整理

1. 克拉瑪公式：

已知二元一次聯立方程式$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，並令$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，

$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$，若$\Delta\neq 0$，則此聯立方程式恰有一組解，且其解為$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$。

2. 二元一次聯立方程式的幾何意義（$a_2b_2c_2\neq 0$）：

係數比關係	行列式關係	聯立方程式的解	幾何意義
$\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$	$\Delta\neq 0$	恰有一組解	交於一點的兩直線
$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$	$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$	無窮多組解	重合的兩直線
$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$	$\Delta=0$， Δ_x、Δ_y不全為0	無解	平行的兩直線

3. 二階行列式的性質：

(1)行列互換其值不變。

(2)兩行（列）對調，其值變號。

(3)任一行（列）可以提出同一個數。

(4)兩行（列）成比例，其值為0。

(5)將一行（列）的k倍加到另一行（列），其值不變。

(6)可依某一行（列）將一個行列式拆成兩個行列式的和。

4. 二元一次聯立方程式的向量觀點：

聯立方程式$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$可視為$x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$，其中$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$、$\overrightarrow{c}=(c_1,c_2)$。

(1)當$\overrightarrow{a}\not\parallel\overrightarrow{b}$，則$\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$，其中$(x,y)$恰有一組解。

(2)當$\overrightarrow{a}\parallel\overrightarrow{b}$，且$\overrightarrow{c}$與$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$不平行，則$\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$，其中$(x,y)$無解。

(3)當$\overrightarrow{a}\parallel\overrightarrow{b}$，且$\overrightarrow{c}$與$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$平行，則$\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$，其中$(x,y)$無窮多組解。

觀念是非題 試判斷下列敘述對或錯。（每題 2 分，共 10 分）

(　　) **1.** 聯立方程式$\begin{cases} x+2y=3 \\ 4x+5y=6 \end{cases}$的$x$之解為$\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}}$。

解

(　　) **2.** 已知聯立方程式$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，其中$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$，則此聯立方程式必定無解。

解

(　　) **3.** 若實數a、b、c、d使得聯立方程式$\begin{cases} ax+3y=c \\ x-2y=1 \end{cases}$有解，且聯立方程式$\begin{cases} 3x+by=d \\ x-2y=1 \end{cases}$無解，則聯立方程式$\begin{cases} ax+3y=c \\ 3x+by=d \end{cases}$必定無解。

解

(　　) **4.** $\begin{vmatrix} 23 & 108 \\ 17 & 109 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 27 & 108 \\ 23 & 109 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 50 & 108 \\ 40 & 109 \end{vmatrix}$。

解

(　　) **5.** 已知行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2$，$\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} = 5$，則行列式$\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 3c-e & 3d-f \end{vmatrix} = 2$。

解

一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 利用克拉瑪公式解$\begin{cases} 3x-2y=12 \\ 5x+y=7 \end{cases}$，得$(x,y)=$____________。

解

2. 若$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 2$，$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 4$，$\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = 6$，則聯立方程式$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$的解

$(x,y)=$____________。

解

3. 已知實數 $a>0$，若 x、y 的聯立方程式 $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+y=a \\ x+ay=81 \end{cases}$ 有解，試求實數 $a=$____________。

解

4. 聯立方程式 $\begin{cases} (3k+1)x+(5k-2)y=4k-3 \\ (9-k)x+(2k+4)y=k+1 \end{cases}$，$k$ 為實數，若聯立方程式有無限多組解，則 $k=$____________。

解

5. 已知 $\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}=3$，$\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}=2$，求 $\begin{vmatrix} 2a-5b & 3e \\ 2c-5d & 3f \end{vmatrix}$ 的值為____________。

解

6.　設$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=24$，則下列敘述何者為真？____________。（單選題）

(A)$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=-24$　(B)$\begin{vmatrix} a & -b \\ -c & d \end{vmatrix}=-24$　(C)$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b \\ c & d \end{vmatrix}=6$　(D)$\begin{vmatrix} a & b+\frac{1}{3}a \\ c & d+\frac{1}{3}c \end{vmatrix}=8$

(E)$\begin{vmatrix} a+2b & a+3b \\ c+2d & c+3d \end{vmatrix}=24$。

解

7.　若$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=3$，則$\begin{vmatrix} 2a+6b & 5a-3b \\ 2c+6d & 5c-3d \end{vmatrix}$的值為____________。

解

8. 已知$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=2$，$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=3$，$\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}=5$。若聯立方程式$\begin{cases} b_1x+c_1y+a_1=0 \\ b_2x+c_2y+a_2=0 \end{cases}$的解為$(x,y)$，則$(x,y)$為____________。

解

9. 若聯立方程式$\begin{cases} x+2y=ax \\ 6x+2y=ay \end{cases}$除了$(x,y)=(0,0)$之外還有其他的解，則$a=$____________。

解

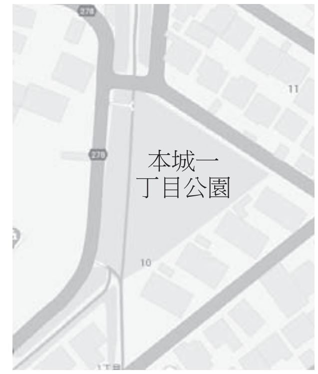
10. 若$\overrightarrow{u}=(a,b)$，$\overrightarrow{v}=(c,d)$且由$\overrightarrow{u}$與$\overrightarrow{v}$決定的平行四邊形面積為 5，則由$\overrightarrow{u}$與$2\overrightarrow{u}-3\overrightarrow{v}$決定的平行四邊形面積為____________。

解

二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 12 題為題組

日本動畫《佐賀偶像是傳奇》的偶像團體法蘭秀秀，在九州展開在地快閃演唱會。她們這次來到北九州八幡西區本城一丁目公園，這是一個三角形公園。



女主角源櫻想要算公園的面積，她從其中一個頂點 A 點，往北走 75 公尺再往東走 5 公尺來到 B 點；源櫻返回 A 點後，往東走 55 公尺，再往北走 50 公尺到了 C 點。她會選擇這樣走是因為想到：學校老師曾教過求三角形的面積公式，利用她剛才步行觀測的數值，我們可以得到

11. 公園的其中一邊 $\overline{BC}$ =____________公尺。（填充題，8 分）

12. 她發現求出 $\overline{BC}$ 後，還是很難算出面積，於是想到可以使用向量公式求解，則三角形公園的面積為？（非選擇題，12 分）

解