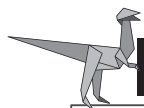
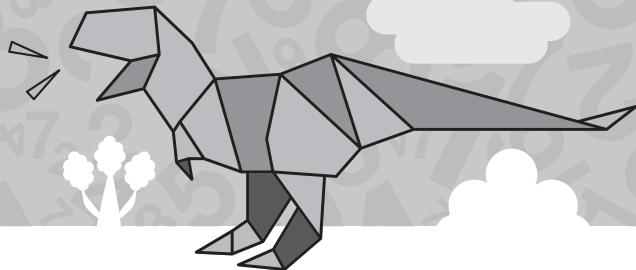


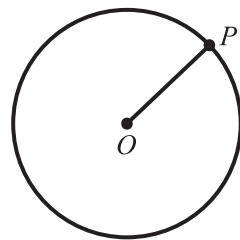
6 圓方程式



重點整理

1. 圓的定義：

在平面上與一定點 O 等距離的所有點 P 所成的圖形稱為圓，而此定點 O 稱為圓心，圓心與圓上任一點的距離 \overline{OP} 稱為半徑。



(1) 圓的標準式：

坐標平面上圓，圓心 $O(h, k)$ ，半徑 r ，設 $P(x, y)$ 為圓上任意一點，則因 $\overline{OP} = r$ ，依距離公式可得 $\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$ ，然後兩邊平方得 $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ，稱為圓的標準式，且圓心為 (h, k) ，且半徑為 r 。

(2) 圓的一般式：

因為圓心為 $O(h, k)$ ，半徑為 r 的圓方程式為 $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ，

將上式展開得： $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$ ，

可將它化成二元二次方程式： $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ ，稱為圓的一般式。

將 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 依 x 、 y 配方可得：

$$\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{e}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(d^2 + e^2 - 4f)，$$

則圓心為 $\left(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2}\right)$ ，半徑為 $\frac{1}{2}\sqrt{d^2 + e^2 - 4f}$ 。

2. 點與圓的關係：

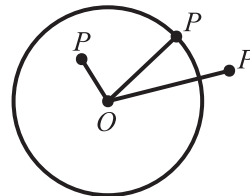
在平面上有一圓 C ，圓心為 O ，半徑為 r ， P 為平面上一點，則點 P 與圓 C 之關係有圓內、圓上、圓外。

(1) 幾何意義：

① 點在圓內 $\Rightarrow \overline{OP} < r$ 。

② 點在圓上 $\Rightarrow \overline{OP} = r$ 。

③ 點在圓外 $\Rightarrow \overline{OP} > r$ 。



(2) 代數意義：設 P 點坐標 (x_0, y_0) 代入圓方程式所得的值為 $f(x_0, y_0)$ ，

① 點在圓內 $\Rightarrow \underline{f(x_0, y_0) < 0}$ 。

② 點在圓上 $\Rightarrow \underline{f(x_0, y_0) = 0}$ 。

③ 點在圓外 $\Rightarrow \underline{f(x_0, y_0) > 0}$ 。

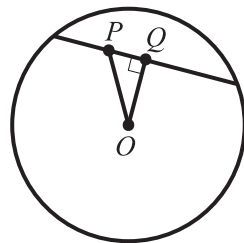
3. 軌跡方程式：

(1) 阿波羅尼斯圓 (Apollonius Circles)：

平面上相異兩點 A 、 B ，且 k 為正數 ($k \neq 1$)，則滿足 $\overline{AP} = k\overline{BP}$ 的點 P 之軌跡為一圓，稱此圓為阿波羅尼斯圓。

(2) 弦中點的軌跡：

已知圓心 O 和圓內一點 P ，過 P 的所有弦上的中點 Q ，其中 \overline{OQ} 與 \overline{PQ} 垂直，則弦中點 Q 在以 \overline{OP} 為直徑的圓上任一點。



觀念是非題 試判斷下列敘述對或錯。(每題 2 分，共 10 分)

() 1. 方程式 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ 的圖形為一圓，其圓心為 $(-2, 3)$ 且半徑為 9。

解

() 2. 若方程式 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + k = 0$ 的圖形為一點，則 $k = 13$ 。

解

44 單元 6 圓方程式

- () 3. 已知直線 $L_1: 2x - y = 0$ 與直線 $L_2: x - y + 1 = 0$ 為此圓的對稱軸，則此圓的圓心為 $(1, 2)$ 。

解

- () 4. 平面上相異兩點 A 、 B ，且 k 為正數，滿足 $\overline{AP} = k\overline{BP}$ 的所有 P 的軌跡為一圓。

解

- () 5. 已知方程式 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + k = 0$ 的圖形是一個圓，且點 $(3, 1)$ 在圓外，則實數 k 滿足 $-12 < k < 5$ 。

解

一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 平面上與一定點 $P(-1, 3)$ 之距離均為 4 的所有點形成的圖形為_____，其圖形方程式為_____。（第 1 格 3 分，第 2 格 4 分）

解

2. 已知 $A(3, 1)$ ， $B(5, -7)$ ，求以 \overline{AB} 為直徑的圓方程式為_____。

解

3. 已知圓 C 的半徑為 $\sqrt{10}$ ，其圓心的 x 、 y 坐標相等，且點 $(2,4)$ 在圓 C 上，試求圓心的坐標為_____。

解

4. 過點 $(1,8)$ 且與 x 軸、 y 軸都相切的圓方程式中，其中半徑最大為_____。

解

5. 設圓 C 通過 $(3,0)$ 、 $(-1,0)$ 、 $(0,1)$ 三點，求圓 C 的方程式為_____。

解

46 單元 6 圓方程式

6. 設圓 C 通過 $(5,2)$ 、 $(-1,2)$ 兩點且半徑為 5，求圓 C 的圓心坐標為

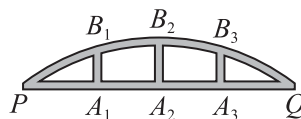
_____。

解

7. 過 $P(1,3)$ 對圓 $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ 作二切線，若切點為 A 、 B ，則 $\triangle PAB$ 之外接圓方程式為_____。

解

8. 如圖，橋面上有一圓拱型建築，圓拱的寬度 $\overline{PQ} = 30$ 公尺，拱高 $\overline{A_2B_2} = 5$ 公尺，在距中心左右 7 公尺處各有一纜繩連接橋面，求圖中纜繩 $\overline{A_3B_3}$ 長為_____公尺。



解

9. 已知坐標平面上兩定點 $A(1,4)$ 、 $B(0,2)$ ，若動點 P 滿足 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$ ，則 P 的軌跡方程式為_____。

解

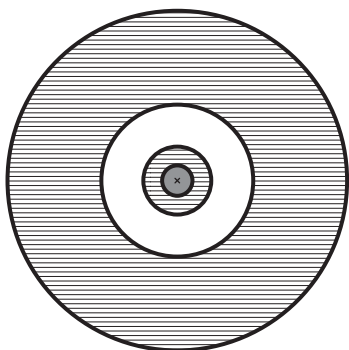
10. 已知 $P(a,b)$ 在圓 $C:x^2+y^2-2x-4y-4=0$ 上，若 $(a+3)^2+(b-5)^2$ 之最大值為 M ，最小值為 m ，試求 $(M,m)=$ _____。

解

二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 13 題為題組

下圖為射飛鏢的標靶，由許多個同心圓所組成，若將標靶放在坐標平面上，已知最內部灰色的圓方程式為 $25x^2 + 25y^2 - 150x + 100y + 69 = 0$ ，且由內而外的每個圓，其圓面積為前一個的 5 倍，試回答以下問題：



11. 圖中×的位置為靶心，問靶心的坐標位置為_____。（填充題，6 分）
12. 試問最大的圓方程式為_____。（填充題，7 分）
13. 試以不等式表示白色的環狀區域（含邊界）。（非選擇題，7 分）

解