9 一次與二次函數

重點整理

1. 函數：

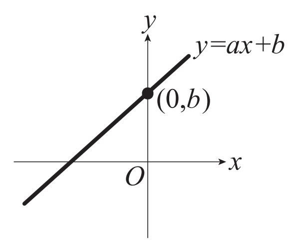
(1) 定義：對所有的 x 值，必存在唯一的 y 值，使得 $y=f(x)$，則稱這種對應的關係 f 為函數。

(2) x 稱為自變數，$y=f(x)$ 稱為應變數，而 $f(a)$ 表示 $x=a$ 所對應的函數值。

(3) 函數不可一對多或一對零，故在平面坐標上作任一鉛直線至多有一交點。

2. 一次函數：

形如 $f(x)=ax+b$ 的多項式函數稱為線型函數，因其在坐標平面上的圖形為一直線。



(1) 已知 $a\neq 0$，為一次函數，其圖形就是直線 $y=ax+b$，其中 a 為斜率，b 為 y 截距。

(2) 若 $a=0$，$b\neq 0$，則為零次函數，其圖形為非 x 軸的水平線；若 $a=0$，$b=0$，則為零函數，其圖形為 x 軸。

3. 二次函數：

形如 $f(x)=ax^2+bx+c$，其中 a、b、c 為實數，且 $a\neq 0$，就是一個二次函數。

(1) 一般式：將二次函數寫成 $y=ax^2+bx+c$ 之形式稱為一般式，其圖形在坐標平面上為開口向上或向下的拋物線，其中頂點坐標為 $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$。

(2) 標準式：將一般式 $y=ax^2+bx+c$ 經配方後可化為 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，稱為標準式，其中頂點坐標為 (h,k)。

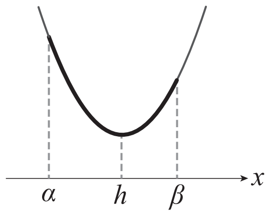
(3) 依 $y=ax^2+bx+c$ 之圖形判斷 a、b、c 之正負：

① 開口向上 $a>0$，開口向下 $a<0$。

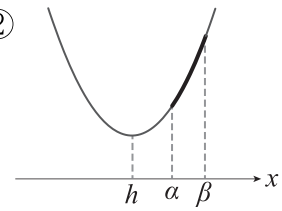
② 頂點在 y 軸右側，則 $ab<0$，頂點在 y 軸左側，則 $ab>0$，頂點在 y 軸上，則 $b=0$。

③ 圖形與 y 軸之交點在原點的上方，則 $c>0$，下方則 $c<0$，通過原點則 $c=0$。

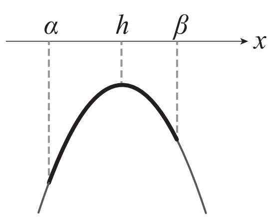
(4) $f(x)=ax^2+bx+c=a(x-h)^2+k$，其中頂點$(h,k)$，討論$\alpha\le x\le\beta$區間的最大、最小值

①


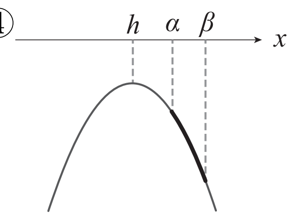
在$x=\alpha$時，有最大值$=f(\alpha)$；
在$x=h$時，有最小值$=k$。

②


在$x=\beta$時，有最大值$=f(\beta)$；
在$x=\alpha$時，有最小值$=f(\alpha)$。

③


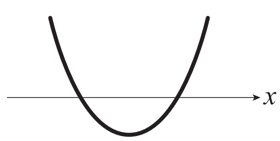
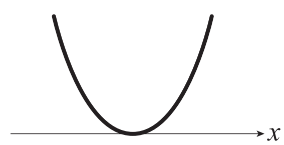
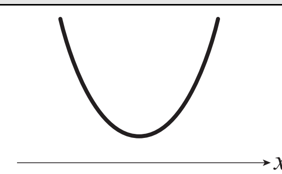
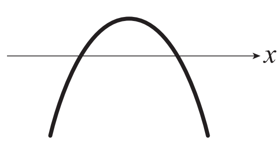
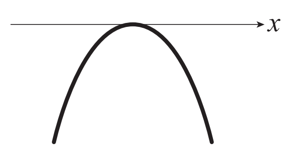
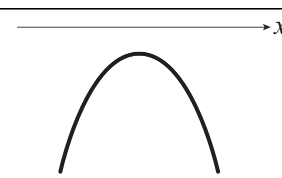
在$x=h$時，有最大值$=k$；
在$x=\alpha$時，有最小值$=f(\alpha)$。

④


在$x=\alpha$時，有最大值$=f(\alpha)$；
在$x=\beta$時，有最小值$=f(\beta)$。

(5) 恆正與恆負：

二次函數$y=ax^2+bx+c$之圖形與x軸相交的情形如下，

	$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
$a>0$			
$a<0$			

由上圖知：

① 對所有的實數x，$f(x)>0$恆成立（圖形恆在x軸上方），
則$a>0$且$b^2-4ac<0$。

② 對所有的實數x，$f(x)<0$恆成立（圖形恆在x軸下方），
則$a<0$且$b^2-4ac<0$。

觀念是非題 試判斷下列敘述對或錯。（每題 2 分，共 10 分）

(　　) **1.** 已知一次函數 $f(x)$ 滿足 $f(1)=5$， $f(3)=-1$，則 $\dfrac{f(1000)-f(998)}{1000-998}=-3$。

解

(　　) **2.** 二次函數 $f(x)=3x^2-6x-7$ 圖形的頂點坐標為 $(1,-10)$。

解

(　　) **3.** 已知二次函數 $f(x)$ 滿足 $f(4-t)=f(-2+t)$，其中 t 為任意實數，則 $y=f(x)$ 的對稱軸為 $x=1$。

解

(　　) **4.** 已知二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$，其中 a 、 b 、 c 為實數，當 $a<0$， $b<0$， $c>0$ 時，此拋物線的頂點在第一象限。

解

(　　) **5.** 已知二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$，其中 a 、 b 、 c 為實數，當 $ac<0$，則 $y=f(x)$ 的圖形會通過四個象限。

解

一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 某次考試，全班成績不佳，最高為 50 分。老師想用一個線型函數來調整分數，使 50 分變成 100 分， 20 分變成 60 分，則原來的 41 分變成__________分。

解

2. 已知二次函數 $y=f(x)=2x^2-4x-6$ ，若將 $f(x)$ 的圖形向左平移 4 單位，再向上平移 5 單位後，可得另一拋物線 $y=g(x)=a(x+b)^2+c$ ，則序組 $(a,b,c)=$__________。

解

3. 二次函數 $y=f(x)$ 之圖形通過 $A(-2,11)$、$B(-1,5)$、$C(2,11)$ 三點，則 $f(x)=$ __________。

解

4. 已知二次函數 $f(x)$ 滿足 $f(2)=f(-1)=-4$，且 $f(x)$ 有最大值 5，求 $f(x)=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。

解

5. 二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$，其中 $-1\le x\le 4$，若在 $x=2$ 時有最小值 -5，且圖形與 y 軸交於 $(0,3)$，則此函數之最大值為＿＿＿＿＿＿＿＿。

解

6. 已知拋物線 $y=x^2+7x+k$ 與 x 軸交於 P、Q 兩點且 $\overline{PQ}=13$，求實數 $k=$＿＿＿＿＿＿＿＿。

解

7. 設 x、y 為任意實數，且滿足 $x^2+2y^2=4$，試回答下列問題。

(1) 求 x 的範圍為＿＿＿＿＿＿。（3 分）

(2) 求 $2x+2y^2$ 的最小值為＿＿＿＿＿＿。（4 分）

解

8. 一地產公司有 80 棟公寓住宅，當租金每棟每月為 3000 元時，所有住宅均租出；每月租金每增加 100 元時，則平均多一住宅不能租出，而每一租出之房屋每月需養護費 300 元，為求最高利潤如何改訂租金？＿＿＿＿＿＿。

解

9. $\overline{AB}$ 是一條長 24 公分的鐵絲，如附圖，P 是 $\overline{AB}$ 上一點，將 $\overline{PB}$ 圍成一正方形，且順時針依序為 P、S、T、U，將 $\overline{AP}$ 圍成一正三角形且逆時針依序為 P、Q、R，而 P、U、R 決定一三角形，問 P 在__________時，$\triangle UPR$ 的面積為最大。

解

10. 對所有實數 x，$f(x)=x^2+(k+3)x+4$，$g(x)=-x^2+(k-1)x+(k-2)$，$f(x)$ 恆在 $g(x)$ 上方，求 k 的範圍為__________。

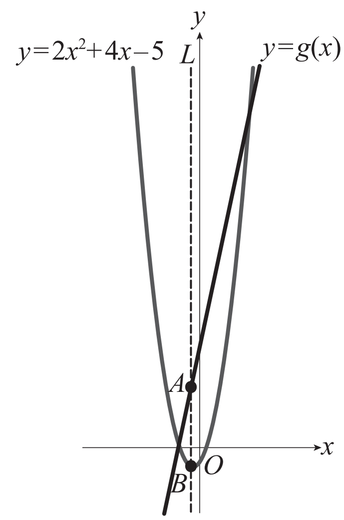
解

二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 12 題為題組

11. 設 $t>0$，$f(t)=2\left(t+\frac{4}{t}\right)^2+4\left(t+\frac{4}{t}\right)-5$，求 $f(t)$ 的最小值為__________，此時的 t 為__________。（填充題，每小格 5 分）

12. 坐標平面上有二次函數 $f(x)=2x^2+4x-5$ 與一次函數 $g(x)$，已知 $g(x)$ 過點 $(0,37)$ 與 $(-1,25)$，兩函數圍成一封閉區域（如附圖），若作一條鉛直線 L（虛線）垂直 x 軸，分別與封閉區域的邊界交於 A、B 兩點，試求在封閉區域內 $\overline{AB}$ 的最大值為多少？（非選擇題，10 分）



解