9 平面向量的運算

重點整理

1. 向量的內積：

當兩個非零向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$ 與 $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$ 的夾角為 θ（$0°\le\theta\le180°$）時，

定義 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的內積為 $\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta$，以 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 表示。

(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2$。

(2) $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|}$。

註：$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 並不是向量，而是實數。

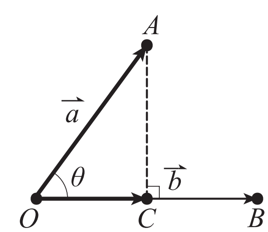
2. 向量的平行與垂直：

設兩非零向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，且 $b_1b_2\ne0$。

(1)若 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$，則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2=0$。

(2)若 $\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}$，則 $\overrightarrow{a}=r\overrightarrow{b}\Rightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$（各分量成比例）。

3. 正射影：



若 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 為兩個非零向量，則 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影為 $\left(\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{b}\right|^2}\right)\overrightarrow{b}$。

4. 柯西不等式：

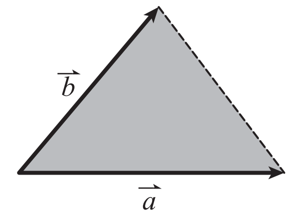
設 a_1、a_2、b_1、b_2 為實數，則 $(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2)^2$，當等號成立時，

$a_1b_2=a_2b_1$，又若 $b_1b_2\ne0$，則 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$。

5. 面積與二階行列式：

(1) 二階行列式：$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$。

(2) 設 $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$、$\overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$，則以 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 所決定的



①三角形面積為 $\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2 - \left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^2} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|$。

②平行四邊形面積為 $\sqrt{\left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2 - \left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^2} = \left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|$。

6. 兩直線的夾角：

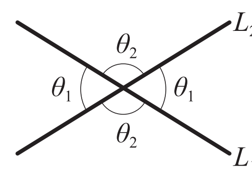
(1) 直線的法向量：向量 $\overrightarrow{n} = (a, b)$ 為直線 $L: ax + by + c = 0$ 的一個法向量。

(2) 二直線的夾角：

只要求得兩法向量的夾角，就可求得兩直線的其中一個夾角。

因為 $\theta_1 + \theta_2 = 180°$，所以只需求出其中任一個夾角，

另一個夾角就可求出。



7. 三角不等式：

(1) 代數觀點：①$|a| + |b| \geq |a + b|$，當等號成立時，$ab \geq 0$。

②$\big||a| - |b|\big| \leq |a + b|$，當等號成立時，$ab \leq 0$。

(2) 幾何觀點：①已知平面上兩非零向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$，則 $\left|\overrightarrow{a}\right| + \left|\overrightarrow{b}\right| \geq \left|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right|$，

當等號成立時，$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 同向。

②已知平面上兩非零向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$，則 $\left|\left|\overrightarrow{a}\right| - \left|\overrightarrow{b}\right|\right| \leq \left|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right|$，

當等號成立時，$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 反向。

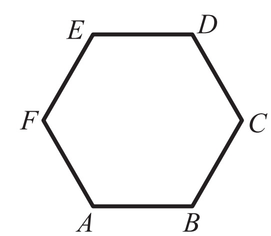
觀念是非題　試判斷下列敘述對或錯。(每題 2 分，共 10 分)

(　　) **1.** 正$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{BC}$的夾角為$60°$。

解

(　　) **2.** 正六邊形 $ABCDEF$ 中，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}>\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}>\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$。



解

(　　) **3.** 若$\overrightarrow{a}\neq 0$，且$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$，則$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$。

解

(　　) **4.** 若非零向量$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$滿足$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$，則$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$。

解

(　　) **5.** 由向量$\overrightarrow{a}=(2,3)$與$\overrightarrow{b}=(5,1)$所決定的平行四邊形面積為$\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 1\end{vmatrix}$。

解

一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 平行四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=8$，則 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$____________。

解

2. 設 $\left|\overrightarrow{a}\right|=2$，$\left|\overrightarrow{b}\right|=3$，$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角 $60°$，若 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$，

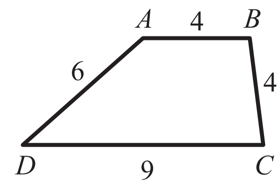
則 $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=$____________。

解

3. 若 $\overrightarrow{a}=(1,-3)$ 與 $\overrightarrow{b}=(k,2)$ 的夾角為 $135°$，則實數 k 的值為____________。

解

4. 如圖，在梯形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$，$\overline{AB}=\overline{BC}=4$、$\overline{CD}=9$、$\overline{AD}=6$，則 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$____________。

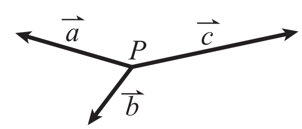


解

5. 若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 為兩非零向量，已知 $2\vec{a}+\vec{b}$ 與 $2\vec{a}-\vec{b}$ 垂直，且 $\vec{a}$ 與 $\vec{a}-\vec{b}$ 垂直，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為____________。

解

6. 如圖，三個拉力 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 同時施力於 P 點，並達到三力平衡。已知 $\left|\vec{a}\right|=5$，$\left|\vec{b}\right|=3$，且 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 $60°$，則 $\left|\vec{c}\right|=$____________。



解

7. 設 $\overrightarrow{a}=(x,y)$，$\overrightarrow{b}=(-2,1)$，$\overrightarrow{c}=(1,1)$，若 $\left(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{c}\right)\perp\overrightarrow{b}$，且 $\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}\right)//\overrightarrow{b}$，

則數對 $(x,y)=$ ____________。

解

8. 設 $\overrightarrow{p}=(-11,2)$、$\overrightarrow{a}=(-4,3)$。若 $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$，其中 $\overrightarrow{u}//\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{v}\perp\overrightarrow{a}$，

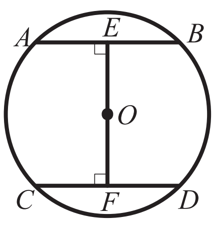
則 $\overrightarrow{v}=$ ____________。

解

9. 設 $\overrightarrow{a}=(x,-2)$、$\overrightarrow{b}=(1,y)$，其中 x,y 為實數。若 $x^2+y^2=5$，則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的最大值為 ＿＿＿＿＿＿。

解

10. 如圖，一圓形花圃的半徑為 2 公尺，內建步道 $\overline{AB}$、$\overline{EF}$、$\overline{CD}$，其中 $\overline{AB}=\overline{CD}$，試求：$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}$ 總長的最大值為＿＿＿＿＿＿公尺。（請化為最簡根式）

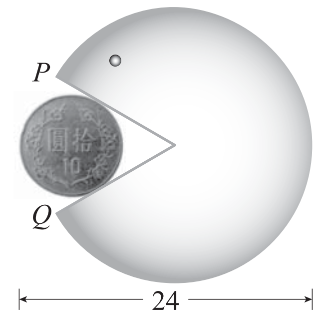


解

二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 13 題為題組

為了提醒同學某臺自動販賣機會「吃錢」，班聯會想在機上漆一個小圓與一個缺六分之一圓的大圓相切的圖案，如圖所示。基於空間考量，圖形的寬度要恰好 24 單位長，而且小圓必須與直線 PQ 有兩相異交點。漆大圓的油漆，每平方單位需要 6 元；漆小圓的油漆，每平方單位需要 45 元。設小圓的半徑為 x，大圓的半徑為 y。



11. 已知 x、y 滿足 $ax+by=24$，求數對 $(a,b)=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。（填充題，8 分）

12. 求油漆總費用（以 x、y 表示）。（非選擇題，4 分）

13. 當 x、y 為何時，油漆費用最少？（非選擇題，8 分）

解