8 多項式的除法原理

重點整理

1. 多項式的定義：

形如 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的代數式稱為多項式，其中 n 為正整數，a_n、a_{n-1}、⋯、a_1、a_0 為實數。

(1) 其中 a_nx^n、$a_{n-1}x^{n-1}$、⋯、a_1x、a_0 分別稱為多項式的 n 次項、$n-1$ 次項、⋯⋯、一次項和常數項。

(2) a_k 稱為 k 次項的係數。

(3) 若 $a_n\neq0$ 時稱為 n 次多項式，a_n 稱為多項式的領導係數，而 n 稱為多項式的次數，常以 $\deg f(x)=n$ 表示。

(4) 若 $a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1=0$ 時，稱為常數多項式。

(5) 若 a_n、a_{n-1}、⋯、a_1、a_0 為整數，則稱為整係數多項式；同理可推知有理係數多項式、實係數多項式。

(6) 常數項 $a_0=f(0)$，各項係數和 $=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n=f(1)$。

(7) $f(x)$、$g(x)$ 為兩個非零的多項式，若同次項的係數相等且次數相同，稱 $f(x)$、$g(x)$ 兩多項式相等。

2. 除法原理：

設 $f(x)$、$g(x)$ 為兩個非零的多項式，若 $\deg f(x)\geq\deg g(x)$，則存在兩多項式 $Q(x)$ 及 $r(x)$，使得 $f(x)=g(x)\times Q(x)+r(x)$，其中 $r(x)=0$ 或 $\deg r(x)<\deg g(x)$。常用的方法為長除法及綜合除法。

3. 餘式定理：

(1) 多項式 $f(x)$ 除以 $(x-\alpha)$ 的餘式為 $f(\alpha)$。

(2) 多項式 $f(x)$ 除以 $(ax-b)$ 的餘式為 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)$。

例如：① $f(7)$ 表 $f(x)$ 除以 $(x-7)$ 的餘式。　② $f(x)$ 除以 $(2x+1)$ 的餘式為 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$。

③ $f(x)$ 除以 $(x+2)$ 的餘式為 3，表 $f(-2)=3$。

4. 因式定理：

(1) 多項式 $f(x)$ 被 $(x-\alpha)$ 整除，表 $f(x)$ 有 $(x-\alpha)$ 的因式，則 $f(\alpha)=0$。

(2) 多項式 $f(x)$ 有 $(x-\alpha)$、$(x-\beta)$、$(x-\gamma)$ 的因式，

則 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)Q(x)$。

觀念是非題　試判斷下列敘述對或錯。（每題 2 分，共 10 分）

(　　) **1.** 已知 $\deg f(x)=3$ 且 $\deg g(x)=5$，則 $\deg\left[g(x)-x^2\times f(x)\right]=5$。

解

(　　) **2.** 設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 為兩非零多項式，若 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式為 $Q(x)$，餘式為 $r(x)$，則 $f(x)$ 除以 $2g(x)$ 的商式為 $\frac{1}{2}Q(x)$，餘式為 $\frac{1}{2}r(x)$。

解

(　　) **3.** 若 $f(x)=x^{10}+x^8-x^5+x^3-x-1$，則 $x-1$ 為 $f(x)$ 的因式。

解

(　　) **4.** 若 $f(x)=\left(x^2-x-1\right)^{100}$，則 $f(x)$ 除以 $100x-100$ 的餘式為 1。

解

(　　) **5.** 設 $f(x)=x^3-x^2+x-7=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$，則 $a-b+c-d=7$。

解

一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

1. 已知 $f(x)=4x^5-6x^3+3x^2+kx+1$，$g(x)=x^3+2kx^2-x-6$，若將 $f(x)\times g(x)$ 展開並化簡後可得 x^5 項的係數為 3，則實數 k 的值為＿＿＿＿＿＿。

解

2. 用綜合除法求 x^4-2x^3+7x-5 除以 $x-3$ 的商式為＿＿＿＿＿＿，餘式為＿＿＿＿＿＿。（第 1 格 4 分，第 2 格 3 分）

解

3. 計算 $3\times5^5-14\times5^4-6\times5^3+7\times5^2-12\times5+19$ 的值為＿＿＿＿＿＿。

解

4. 設 $f\left(x\right)=54x^3-99x^2+66x-20$，試回答下列問題：

(1) 已知 $f\left(x\right)$表示成$\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$的多項式之形式為 $f\left(x\right)=a\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^3+b\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+c\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+d$，

其中 a、b、c、d 均為實數，則序組$\left(a,b,c,d\right)=$__________。（2 分）

(2) 已知 $f\left(x\right)$表示成$(3x-1)$的多項式之形式為 $f(x)=p(3x-1)^3+q(3x-1)^2+r(3x-1)+s$，

其中 p、q、r、s 均為實數，則序組$\left(p,q,r,s\right)=$__________。（2 分）

(3) 求 $f\left(0.33\right)$的近似值到小數點以下第四位為__________。（3 分）

解

5. 若 $f\left(x\right)$ 除以 x^2-1 得餘式 $2x-3$，$g\left(x\right)$ 除以 x^2+3x-4 得餘式 $5x+4$，則 $\left(x^2+3\right)f\left(x\right)+\left(4x-5\right)g\left(x\right)$除以 $x-1$的餘式為__________。

解

6. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $x-2$ 的餘式為 3，且 $f(x)$ 除以 $x+4$ 的餘式為 -3，求 $f(x)$ 除以 $(x-2)(x+4)$ 的餘式為____________。

解

7. 多項式 $f(x)$ 除以 x^2+x+3 的餘式為 $3x-1$，除以 $x-1$ 的餘式為 12，則 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x^2+x+3)$ 的餘式為____________。

解

8. 設 $f(x)$ 為三次多項式，若 $f(x)$ 除以 x^2-x-2 的餘式為 $3x+12$，除以 (x^2+2) 的餘式為 $3x-6$，則 $f(x)=$____________。

解

9. 已知 $f(x)$ 為三次多項式且 $f\left(\frac{1}{3}\right)=f(-1)=f(2)=6$，$f(1)=10$，則 $\left(x^2+1\right)f(x)$ 除以 x 的餘式為____________。

解

10. 已知 a、b、c 為實數，多項式 x^3+ax^2+bx+c 同時可被 x^2+x 與 x^2+5x+4 整除，則 $a+b+1975c=$____________。

解

二、素養混合題（共 20 分）

<u>第 11 至 13 題為題組</u>

令 $f(x)=mx^4-16x^3+nx^2+12x+k$，右圖是小明使用綜合除法計算的過程，已知他的計算過程中沒有錯誤，試回答下列各題。

$$\begin{array}{ccccc|c} m & -16 & +n & +12 & +k & \\ & +4 & -6 & +6 & +9 & \frac{1}{2} \\ \hline m & +r & +g & +p & +10 & \end{array}$$

11. 若將 $f(x)=mx^4-16x^3+nx^2+12x+k$ 寫成

$a(2x-1)^4+b(2x-1)^3+c(2x-1)^2+d(2x-1)+e$，

求 $(a,b,c,d,e)=$____________。（填充題，7 分）

12. 求 $f(x)$ 除以 $(2x-1)^3$ 的餘式為____________。（填充題，7 分）

13. 求 $f\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)=$？（非選擇題，6 分）

解