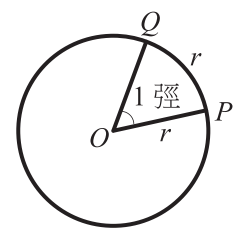
# 1 弧度量

## 重點整理

**1. 弧度量：**

在圓周上取 $P$、$Q$ 兩點，使 $\overset{\frown}{PQ}$ 的長度等於半徑 $r$，則 $\overset{\frown}{PQ}$ 所對的圓心角 $\angle POQ$ 是1弧度（弳）。

弧度量：$180° = \pi$ 弳，$1\text{弳} = \dfrac{180°}{\pi} \approx 57.3°$。




**2. 扇形的面積和弧長：**

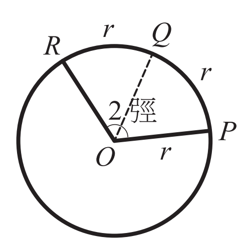
設扇形的半徑為 $r$，圓心角為 $\theta$ 弳，$0 < \theta < 2\pi$，

(1) 扇形的弧長為 $s = r\theta$。

(2) 扇形的面積為 $A = \dfrac{1}{2}r^2\theta = \dfrac{1}{2}rs$。

(3) 扇形周長 $= 2r + s = 2r + r\theta$。

## 觀念是非題　試判斷下列敘述對或錯。（每題 2 分，共 10 分）




（ ○ ）**1.** 由右圖可知 $\angle POR = 2$ 弳。

解　圓的半徑為 $r$，且 $\overset{\frown}{PR} = 2r$，可得 $\angle POR = 2$ 弳。

（ × ）**2.** $1\text{弳} = 57.3°$。

解　$1\text{弳} = \dfrac{180°}{\pi} \approx 57.3°$。

（ × ）**3.** 點 $P(\sin 2, \cos 2)$ 在第一象限。

解　2（弳）$\approx 2 \times 57.3° = 114.6°$ 為第二象限角

$\Rightarrow \sin 2 > 0$，$\cos 2 < 0$，故 $P$ 在第四象限。

( ✕ ) **4.** 廣義角$-\frac{\pi}{7}$弳與$\frac{20\pi}{7}$弳互為同界角。

解 $-\frac{\pi}{7}$弳$-\frac{20\pi}{7}$弳$=-3\pi$弳，並未相差$2\pi$的整數倍，因此不是同界角。

( ✕ ) **5.** 若一扇形的半徑為 6 且圓心角為$30°$，則扇形的弧長為$s=6\times30°=180$。

解 圓心角$\theta=30°=\frac{\pi}{6}$弳，因此扇形的弧長$s=r\times\theta=6\times\frac{\pi}{6}=\pi$。

## 一、填充題（每題 7 分，共 70 分）

**1.** 將度換算成弳：

(1) $220°=$ $\underline{\quad\frac{11\pi}{9}\quad}$ 弳。（2 分）

(2) $\pi°=$ $\underline{\quad\frac{\pi^2}{180}\quad}$ 弳。（1 分）

將弳換算成度：

(3) $\frac{4\pi}{5}$弳$=$ $\underline{\quad144°\quad}$。（2 分）

(4) 5弳$=$ $\underline{\quad\left(\frac{900}{\pi}\right)^{\circ}\quad}$。（2 分）

解 (1) $220°=220\times\frac{\pi}{180}$弳$=\frac{11\pi}{9}$弳。

(2) $\pi°=\pi\times\frac{\pi}{180}$弳$=\frac{\pi^2}{180}$弳。

(3) $\frac{4\pi}{5}$弳$=\frac{4\pi}{5}\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}=144°$。

(4) 5弳$=5\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}=\left(\frac{900}{\pi}\right)^{\circ}$。

**2.** 在坐標平面上，若 $\theta$ 與 $-1000^\circ$ 為同界角，且 $0\le\theta<2\pi$，求 $\theta$ 的弧度量為 $\underline{\quad\frac{4\pi}{9}\quad}$ 弳。

解　因為 $0^\circ<-1000^\circ+3\times360^\circ<360^\circ$，所以 $\theta=-1000\times\frac{\pi}{180}+3\times2\pi=\frac{4\pi}{9}$（弳）。

**3** 試求 $\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{3\pi}{2}\sin\frac{5\pi}{6}+\tan\frac{5\pi}{4}\sin\frac{7\pi}{6}=\underline{\quad\frac{1}{4}\quad}$。

解　$\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{3\pi}{2}\sin\frac{5\pi}{6}+\tan\frac{5\pi}{4}\sin\frac{7\pi}{6}$

$=\sin120^\circ\cos30^\circ+\cos270^\circ\sin150^\circ+\tan225^\circ\sin210^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+0\times\frac{1}{2}+1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$。

**4.** 若 $\theta$ 不為象限角，試化簡 $\frac{\sin(-\theta)}{\sin(\pi+\theta)}+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\cos(2\pi-\theta)}+\frac{\sin(\pi-\theta)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}=\underline{\quad1\quad}$。

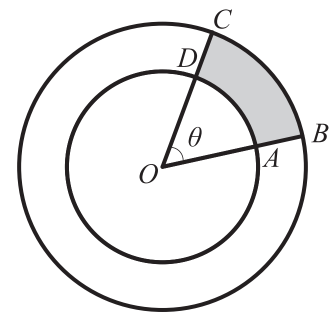
解　$\frac{\sin(-\theta)}{\sin(\pi+\theta)}+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\cos(2\pi-\theta)}+\frac{\sin(\pi-\theta)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}$

$=\frac{\sin(-\theta)}{\sin(180^\circ+\theta)}+\frac{\sin(90^\circ+\theta)}{\cos(360^\circ-\theta)}+\frac{\sin(180^\circ-\theta)}{\cos(270^\circ-\theta)}$

$=\frac{-\sin\theta}{-\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{-\sin\theta}$

$=1+1-1=1$。

**5.** 如右圖，兩同心圓的半徑分別為 2 及 3，若 $BC$ 弧長為 3，則：




(1)陰影區域（ $ABCD$ ）周長為 ___$7$___。（3 分）

(2)陰影區域（ $ABCD$ ）面積為 ___$\frac{5}{2}$___。（4 分）

解 (1) $\overset{\frown}{BC}=3\theta=3\Rightarrow\theta=1$，$\overset{\frown}{AD}=2\theta=2$，

因此周長為 $\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}+2=7$。

(2) 區域 $ABCD$ 的面積＝扇形 $OBC$ 的面積－扇形 $OAD$ 的面積

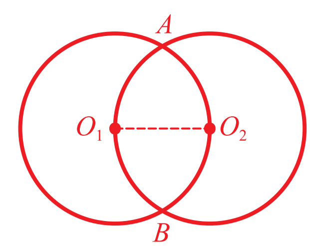
$$=\frac{1}{2}\times3^2\times1-\frac{1}{2}\times2^2\times1=\frac{5}{2}。$$

**6.** 一平面上有兩個單位圓且每一圓必通過另一圓之圓心，則兩圓之重疊區域的面積為 ___$\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$___。

解 ① 令兩圓交於 $A$、$B$ 二點，

因為 $\triangle O_1AO_2$、$\triangle O_1BO_2$ 均為邊長是1的正三角形，

所以 $\angle AO_1O_2=\angle BO_1O_2=60^\circ=\frac{\pi}{3}$。




② 計算重疊區域的上半部分面積

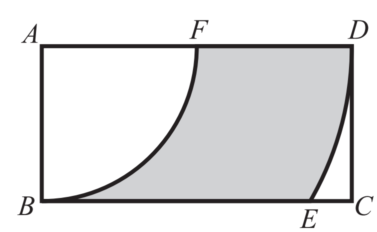
＝扇形 $O_1AO_2$ 的面積＋扇形 $O_2AO_1$ 的面積－$\triangle AO_1O_2$ 的面積

$$=\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}。$$

③ 重疊區域面積為 $2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$。

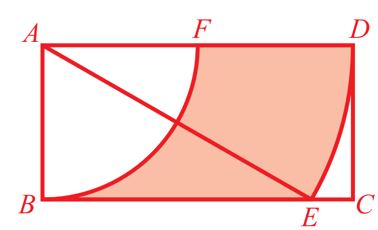
**7.** 矩形 $ABCD$ 中 $\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=2$，以 $A$ 為圓心，$\overline{AB}$、$\overline{AD}$ 分別為半徑畫弧，

求圖中鋪色區域的面積為 ___$\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$___。




解 ① 因為 $\overline{AE}=\overline{AD}=2$，$\overline{AB}=\overline{AF}=1$，

則 $\overline{BE}=\sqrt{3}$，$\angle BAE=\frac{\pi}{3}$，$\angle DAE=\frac{\pi}{6}$。




② 鋪色區域的面積

＝扇形 $ADE$ 的面積＋$\triangle ABE$ 的面積－扇形 $ABF$ 的面積

$$=\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}。$$

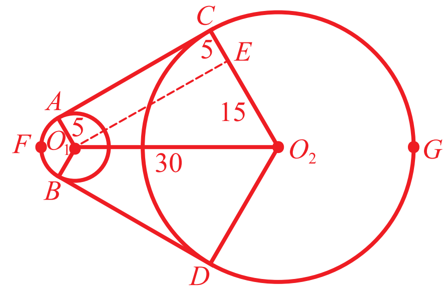
**8.** 設大小兩圓輪的半徑分別為 5 公尺與 20 公尺，兩輪的圓心距離為 30 公尺，有一皮帶繞此兩輪，使兩輪往同方向旋轉，則此皮帶之長度為 $\underline{30\pi+30\sqrt{3}}$ 公尺。

解 ① 設小圓圓心為 $O_1$，大圓圓心為 $O_2$，$A$、$B$、$C$、$D$ 為切點，如圖。

由 $O_1$ 對 $\overline{O_2C}$ 作垂線且與 $\overline{O_2C}$ 交於 $E$ 點，

$\overline{O_1E}=\overline{AC}=\sqrt{30^2-(20-5)^2}=15\sqrt{3}$，

且 $\angle O_1O_2E=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow\angle CO_2D=\dfrac{2}{3}\pi$，則 $\angle AO_1B=\dfrac{2}{3}\pi$。




② 皮帶的長度為 $\overset{\frown}{AFB}+\overline{AC}+\overline{BD}+\overset{\frown}{CGD}$

$=5\times\dfrac{2}{3}\pi+15\sqrt{3}+15\sqrt{3}+20\times\dfrac{4}{3}\pi=30\pi+30\sqrt{3}$（公尺）。

**9.** 將一條長度為 20 的鐵絲圍成一扇形，若此扇形的面積最大值為 $A$，且此時圓心角為 $\theta$ 弳，則數對 $(A,\theta)=\underline{(25,2)}$。

解 (1) 扇形的周長為 $2r+r\theta=20\Rightarrow r\theta=20-2r\cdots\cdots$①，又扇形的面積 $=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}r(r\theta)$，

將①代入 $\Rightarrow\dfrac{1}{2}r(20-2r)=-r^2+10r=-(r-5)^2+25$，

當 $r=5$ 時，扇形的面積之最大值為 25。

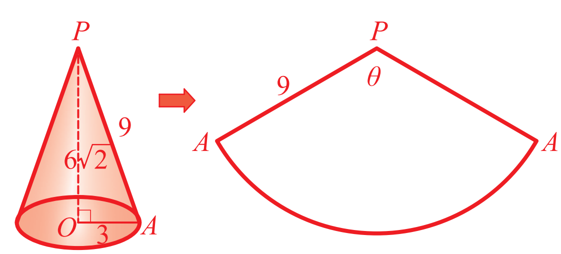
(2) 將 $r=5$ 代回①，得 $5\theta=20-10\Rightarrow\theta=2$，所以 $(A,\theta)=(25,2)$。

**10.** 設一直圓錐的底圓半徑為 3 公分，高為 $6\sqrt{2}$ 公分，$P$ 為圓錐頂點，$A$ 為底圓的圓周上之任一點，若自 $A$ 點出發，沿直圓錐的側面繞一圈回到 $A$ 點，則所經過之路徑長的最小值為 $\underline{9\sqrt{3}}$ 公分。

解 ① 沿 $\overline{AP}$ 將直圓錐展開形成一扇形，如圖。

$\overline{AP}=\sqrt{(6\sqrt{2})^2+3^2}=9=\overline{A'P}$。

② $\angle APA'=\theta$，$\theta=\dfrac{2\pi\times3}{9}=\dfrac{2}{3}\pi$。




③ 路徑長的最小值為 $\overline{AA'}$，

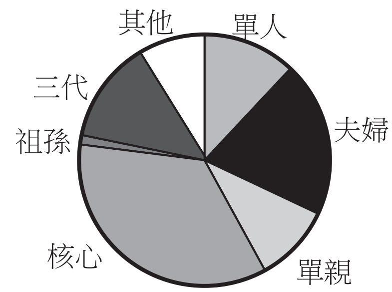
由餘弦定理可知 $\overline{AA'}^2=9^2+9^2-2\times9\times9\times\cos\dfrac{2}{3}\pi=9^2\times3$，

所以 $\overline{AA'}=9\sqrt{3}$（公分）。

## 二、素養混合題（共 20 分）

第 11 至 12 題為題組

近期龍龍在學校的公民課中討論家庭組織型態的議題，於是他上網至行政院性別平等會的重要性別統計資料庫中，找到如右的圓餅圖（或稱餅狀圖）。圓餅圖是一個劃分為數個扇形的統計圖表，主要用來顯示量或百分比之間的相對關係。右圖為臺灣108年的家庭組織型態，主要分為單人、夫婦、單親、核心、祖孫、三代及其他。




（ C ）**11.** 由圖可看出家庭組織型態中百分比最多者為「核心」且根據資料知其所占的比例為35%，則「核心」在圓餅圖中的扇形區域之圓心角為多少弳？（單選題，10分）

(A)$\frac{7}{5}\pi$　(B)$\frac{3}{5}\pi$　(C)$\frac{7}{10}\pi$　(D)$\frac{3}{4}\pi$　(E)$\frac{7}{6}\pi$ 。

**12.** 承上題，已知「夫婦」所佔的比例為20%，而「單人」所占的比例為「夫婦」的$\frac{3}{5}$且「單人」在圓餅圖中的扇形區域之弧長為$\frac{18}{25}\pi$，若「單親」的扇形區域之圓心角為$\frac{\pi}{5}$弳，試問「單親」所佔扇形的面積為多少？（非選擇題，10分）

解 11. $2\pi\times\frac{35}{100}=\frac{7}{10}\pi$ ，故選(C)。

12.「單人」所占的比例為$20\%\times\frac{3}{5}=12\%$ ，設圓的半徑為$r$ ，

則$2\pi r\times\frac{12}{100}=\frac{18}{25}\pi\Rightarrow r=3$ ，

又「單親」的扇形區域之圓心角為$\frac{\pi}{5}$弳，

故扇形的面積為$\frac{1}{2}\times3^2\times\frac{\pi}{5}=\frac{9}{10}\pi$ 。