

**本 科 毕 业 设 计**

基于流形学习子空间的人脸识别算法

|  |  |
| --- | --- |
| 姓 名 | 姜希成 |
| 学 院 | 信息与电气工程学院 |
| 专 业 | 计算机科学与技术 |
| 年 级 | 2015 |
| 学 号 | 20152203031 |
| 指导教师 | 王庆军 |

2019年5月18日

独 创 声 明

本人郑重声明：所呈交的毕业设计，是本人在指导老师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果，成果不存在知识产权争议。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本设计不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体均已在文中以明确方式标明。

此声明的法律后果由本人承担。

作者签名：

年 月 日

毕业设计使用授权声明

本人完全了解鲁东大学关于收集、保存、使用毕业设计的规定。

本人愿意按照学校要求提交设计的印刷本和电子版，同意学校保存设计的印刷本和电子版，或采用影印、数字化或其它复制手段保存设计；同意学校在不以营利为目的的前提下，建立目录检索与阅览服务系统，公布设计的部分或全部内容，允许他人依法合理使用。

（保密论文在解密后遵守此规定）

论文作者：

年 月 日

**毕业设计开题报告**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 姓 名 | 姜希成 | | 学 院 | 信息与电气工程学院 | | 年级 | 2015 | 学号 | 20152203031 |
| 题 目 | | 基于流形学习子空间的人脸识别算法 | | | | | | | |
| 课题来源 | | 教师推荐 | | 课题类别 | 应用实践研究 | | | | |
| **选题意义（包括科学意义和应用前景，研究概况，水平和发展趋势，列出主要参考文献目录）：**  近年来，人脸识别市场得到了突飞猛进的发展，早在2017年，其市场规模就已经超过40.5亿美元，预计2022年会超过77.6亿美元，因此人脸识别技术的市场前期非常好，这预示着人脸识别的爆点已经到来，而且经过长时间的积淀，人脸识别技术已经十分成熟，而流形学习是进行人脸识别的常用方法，流形学习自上世纪60年代首次被提出到现在已经发展了近60年，相继出现许多经典算法和经典理论，所以非常具有研究价值，本文将以人脸识别为应用背景，对几种流性学习方法进行研究。  **主要参考文献：**  [1] 王庆军，张汝波，刘冠群. 一种应用于人脸识别的核正交等度规映射算法[J]. 光电子激光，2010,9(11): 1702-1705.  [2] 左加阔. 基于流形学习算法的新生儿疼痛表情识别[D]. 南京: 南京邮电大学，2011.  [3] 陶晓燕，姬红兵，景志宏. 一种用于人脸识别的正交邻域保护嵌入算法[J]. 西安电子科技大学学报（自然科学版），2008,3(6): 439-443.  [4] 陈江峰. 线性图嵌入算法及其应用[D]. 北京: 北京交通大学，2012. | | | | | | | | | |
| **研究主要内容和预期结果（说明具体研究内容和拟解决的关键问题，预期结果和形式，如在理论上解决哪些问题及其价值，或应用的可能性及效果）：**  主要研究内容：本文将主要介绍邻域保护嵌入算法（NPE）和等距映射算法（IsoProjection），并在其基础上进一步优化这两种算法，即改进为正交邻域保护嵌入算法（ONPE）和正交等距映射算法（OIsoProjection）。  预期结果： 在NPE算法和IsoProjection算法的基础上，通过正交化的方法改进出ONPE算法和OIsoProjection算法，进一步提升这两种算法的识别率，并在ORL人脸库上验证这两种改进算法的有效性。 | | | | | | | | | |
| **拟采取的研究方法和技术路线（包括理论分析、计算，实验方法和步骤及其可行性论证，可能遇到的问题和解决方法，以及研究的进度与计划）：**  研究方法：实验法、经验总结法、文献研究法、功能分析法  技术路线： 通过查阅整理相关学习资料学习流形学习的相关算法如MDS算法，ISOMAP算法，LLE算法，NPE算法和IsoProjection算法等，并使用MATLAB软件运行这些算法并分析算法原理，有了一定的基础后再在NPE算法和IsoProjection算法的基础上引入正交化的功能，并在MATLAB上实现NPE算法、IsoProjection算法和相关正交化算法，最后在ORL人脸库上验证这两种算法的有效性。  研究的进度与计划：2019年3月1日，选题。  2019年3月2日---2019年3月6日，查阅并整理相关资料。  2019年3月7日---2019年3月10日，完成开题报告。  2019年3月11日---2019年4月20日，完成程序创建与前期功能实现。  2019年4月21日---2019年5月1日，完善程序功能，完成论文初稿。 | | | | | | | | | |
| **指导教师意见（对论文选题的意义、应用性、可行性、进度与计划等内容进行评价，填写审核结果：同意开题、修改后再开题、不同意开题）：**  针对NPE和OIsoProjection的优缺点，在原算法的基础上拟加入正交化的思想，显然会使得人脸识别率明显提高。本设计的进度与计划安排合理，研究内容具有一定的研究价值和现实指导意义，且方案切实可行。同意开题。  签名：  年 月 日 | | | | | | | | | |
| **学院毕业设计领导小组意见：**    **同 意 开 题**  （签章）  年 月 日 | | | | | | | | | |

**毕业设计结题报告**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 姓 名 | 姜希成 | | 学 院 | 信息与电气工程学院 | | | 年级 | 2015 | 学号 | 20152203031 |
| 题 目 | | 基于流形学习子空间的人脸识别算法 | | | | | | | | |
| 课题来源 | | 教师推荐 | | | 课题类别 | 应用实践研究 | | | | |
| **本课题完成情况介绍（包括研究过程、实验过程、结果分析、存在的问题及应用情况等。）**  研究过程：查阅大量流形学习和人脸识别的相关文献，并学习流形学习相关算法的实现原理如MDS算法、ISOMAP算法、NPE算法和IsoProjection算法，在查阅许多正交化改进算法方法有关的文献后自己动手改进出正交算法，即ONPE算法和OIsoProjection算法。  实验过程：在ORL人脸库和Yale人脸库上运行ONPE算法和OIsoProjection算法，并对比之前学过的其他算法，分析各个算法之间的特点。  结果分析： ONPE算法和OIsoProjection算法确实可以提高原算法的识别率。  存在的问题：（1）改进的算法识别率没有预期的高，还需进一步改进算法。（2）还有许多算法的原理没有搞明白，需要进一步学习。（3）在算法改进过程中遇到许多问题还未解决，因为时间有限，虽然最终程序能跑出来，但是还是不够完美，还有改进的可能。 | | | | | | | | | | |
| **指导教师评语：**  该生顺利完成毕业设计，在NPE和IsoProjection算法的基础上，加入了正交化的思想，通过在人脸库上的实验，证明了算法的有效性，达到了预期效果，并且如期完成了设计内容及计划。实践证明，该设计具有可行性，且应用性强，算法具有有效性，设计思想新颖，具有创造性，且应用前景广泛。同意结题，参加毕业答辩。  签名：  年 月 日 | | | | | | | | | | |
| **学院毕业论文（设计）领导小组意见：**  **同 意 结 题**  （公章）  年 月 日 | | | | | | | | | | |

**毕业设计成绩评定表**

学院（公章）：信息与电气工程学院 学号：20152203031

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 姓 名 | | 姜希成 | | 总成绩 |  |
| 题 目 | | | 基于流形学习子空间的人脸识别算法 | | |
| 评  阅  人  评  语 |  | | | | |
| 签名： 年 月 日 | | | | |
| 答  辩  小  组  评  语 |  | | | | |
| 答辩成绩： 组长签名： 年 月 日 | | | | |

注：总成绩=答辩成绩（100%）。总成绩由百分制转换为五级制，填入本表相应位置。

目 录

[1引言 2](#_Toc8807833)

[1.1人脸识别技术简介 2](#_Toc8807834)

[1.1.1人脸识别技术的发展情况 2](#_Toc8807835)

[1.1.2人脸识别技术的优势 2](#_Toc8807836)

[1.1.3人脸识别技术的市场前景 3](#_Toc8807837)

[1.1.4人脸识别系统的研究内容 3](#_Toc8807838)

[1.2流形学习 4](#_Toc8807839)

[1.2.1流形学习的研究背景 4](#_Toc8807840)

[1.2.2流形学习的发展情况 5](#_Toc8807841)

[1.2.3流形的定义 6](#_Toc8807842)

[1.2.4流形学习的定义 6](#_Toc8807843)

[1.3小结 6](#_Toc8807844)

[2流形学习相关算法 6](#_Toc8807845)

[2.1规范正交基 7](#_Toc8807846)

[2.1.1施密特(Schmidt)正交化 7](#_Toc8807847)

[2.1.2单位化 7](#_Toc8807848)

[2.2迪杰斯特拉(Dijkstra)算法 8](#_Toc8807849)

[2.2.1迪杰斯特拉(Dijkstra)算法流程 8](#_Toc8807850)

[2.3 多维缩放(MDS)算法 8](#_Toc8807851)

[2.3.1 MDS算法推导 8](#_Toc8807852)

[2.3.2 MDS算法流程 10](#_Toc8807853)

[2.4 等度量映射(ISOMAP)算法 11](#_Toc8807854)

[2.4.1 ISOMAP算法步骤 11](#_Toc8807855)

[2.4.2 ISOMAP算法流程 11](#_Toc8807856)

[2.4.3 ISOMAP算法的特点 12](#_Toc8807857)

[2.5线性图嵌入算法(LGE) 12](#_Toc8807858)

[2.5.1 LGE算法推导 12](#_Toc8807859)

[2.6局部线性嵌入算法（LLE） 14](#_Toc8807860)

[2.6.1 LLE算法原理 14](#_Toc8807861)

[2.6.3 LLE算法流程 15](#_Toc8807862)

[2.7等距映射算法（IsoProjection） 15](#_Toc8807863)

[2.7.1 IsoProjection算法推导 15](#_Toc8807864)

[2.7.2 IsoProjection算法流程 16](#_Toc8807865)

[2.8领域保护嵌入算法（NPE） 16](#_Toc8807866)

[2.8.1 NPE算法推导 16](#_Toc8807867)

[2.8.2 NPE算法流程 17](#_Toc8807868)

[3正交化算法 17](#_Toc8807869)

[3.1 OIsoProjection 17](#_Toc8807870)

[3.1.1 OIsoProjection算法推导 18](#_Toc8807871)

[3.1.2 OIsoProjection算法流程 20](#_Toc8807872)

[3.2 ONPE 20](#_Toc8807873)

[3.2.1 ONPE算法推导 20](#_Toc8807874)

[3.2.2 ONPE算法流程 22](#_Toc8807875)

[4算法实现 22](#_Toc8807876)

[4.1常用的人脸数据库介绍 23](#_Toc8807877)

[4.2 在ORL人脸库上进行实验 23](#_Toc8807878)

[4.2.1 ORL人脸库介绍 23](#_Toc8807879)

[4.2.2 实验结果 24](#_Toc8807880)

[4.3分析 24](#_Toc8807881)

[5结束语 24](#_Toc8807882)

[参考文献 25](#_Toc8807883)

[致 谢 28](#_Toc8807884)

[6附录 29](#_Toc8807885)

[6.1 主要算法的核心代码 29](#_Toc8807886)

[6.1.1 IsoProjection算法 29](#_Toc8807887)

[6.1.2 NPE算法 32](#_Toc8807888)

[6.1.3 LGE算法 34](#_Toc8807889)

基于流形学习子空间的人脸识别算法

姜希成

（鲁东大学信息与电气工程学院）

**摘 要：** 近年来，人脸识别技术得到突飞猛进的发展，与此同时，流形学习方法也取得巨大进展，所以本文以人脸识别为应用背景，对几种常见的流形学习算法进行研究。主要研究了等距映射算法（IsoProjection）、邻域保护嵌入算法（NPE）以及正交的等距映射算法（OIsoProjection）和正交的邻域保护嵌入算法（ONPE），设计实现了NPE算法、IsoProjection算法及相关正交化算法。在本文最后将对这些算法进行对比，研究每种算法的优缺点，并在ORL人脸库上进行试验，验证这些算法的有效性。

**关键字：**人脸识别；流形学习；数据降维；正交化。

**Face Recognition Algorithm based on Manifold Learning Subspace**

Jiang XiCheng

(School of Information and Electrical Engineering, Ludong University)

**Abstract:** In recent years, face recognition technology has been developed by leaps and bounds, at the same time, the manifold learning method has made great progress, so this paper takes face recognition as the application background to study several common manifold learning algorithms. This paper mainly studies the isometric mapping Algorithm (IsoProjection), the Neighborhood Protection embedding Algorithm (NPE), the orthogonal isometric mapping algorithm (OIsoProjection) and the orthogonal Neighborhood Protection embedding algorithm (ONPE), and designs and implements the NPE algorithm, IsoProjection algorithm and related orthogonal algorithm. At the end of this paper, we will compare these algorithms, study the advantages and disadvantages of each algorithm, and experiment on the ORL face library to verify the effectiveness of these algorithms.

**Key words:** Face recognition; Manifold Learning; Data reduction dimension; Orthogonal .

# 1引言

人脸识别技术和扩展已应用于生活的各个方面，人脸识别技术具有广泛的应用前景，可以用于考勤、门禁、关口同行、社区安防、民航、保险、军事安全、银行金融系统、追击嫌疑犯和反恐等等。近年来，人脸识别技术及相关算法的飞速发展也为该技术提供了强有力的支持。

人脸识别技术在生物特征识别技术中占据非常重要的位置，本文将介绍如何使用流形学习子空间方法来实现人脸识别技术。

## 1.1人脸识别技术简介

党的十九大报告提出要推进互联网、大数据、人工智能和实体经济的深度融合，人脸识别技术作为人工智能与实体经济相结合的重要技术支撑，近几年来得到飞速发展。

### 1.1.1人脸识别技术的发展情况

人脸识别在生物特征识别技术中占据非常重要的位置，人脸识别技术不仅具有非侵犯性，而且符合人们自身识别习惯，是一种非常“人性化”的技术。人脸识别技术从上世纪60年代开始，到现在已经发展了将近60年，在这60年中人脸识别技术得到突飞猛进的发展，相继出现了许多经典算法、经典思想和经典的人脸数据库。

当前，人脸识别技术的最高识别率已经超过了99.5%，然而，在同等条件下的最高人眼识别率仅为97.52%。所以，人脸识别的准确率已经做到了比肉眼更精准，我相信在未来人脸识别技术一定能我们创造更加便利的生活条件。

### 1.1.2人脸识别技术的优势

人脸识别是生物识别的一种，生物识别因为具有易检测、唯一性和终身不变的特点，所以十分适合互联网时代用户对安全的需求，如今生物识别技术的识别速度更快，准确率更高，因此也更具有研究的价值。

目前主流的生物识别技术有人脸识别、指纹识别、虹膜识别、语音识别、静脉识别等。相对于其他的生物识别技术，人脸识别技术的成本更低、稳定性更好、准确率更高，因此也更具有发展优势，所以在多数应用场景中都会首选人脸识别技术。

### 1.1.3人脸识别技术的市场前景

市场前景是判断一项技术是否有研究价值的重要指标。人脸识别市场前景非常好，发展势头也非常迅速，2017年全球人脸识别的市场规模超过40.5亿美元，预计2022年达到77.6亿美元，复合年增长率高达13.9%。

根据前瞻产业研究院的报告，目前，人脸识别技术主要应用在考勤和门禁等领域，其市场份额比率约占42%；安防是人脸识别技术最早的应用领域之一，它的市场份额比率约占30%；作为未来人脸识别的重要应用领域之一，金融领域，其市场份额比率约占 20%。从市场需求的产品结构来看，嵌入式设备约占人脸识别市场的53%，剩下的是软件开发包(SDK)支持的联机应用。

同时大规模普及的软硬件基础条件已具备，产品系列达20多种类型，金融、安防、互联网等主要下游领域需求强劲，这一切都标志着人脸识别技术的爆点已经到来。

### 1.1.4人脸识别系统的研究内容

图1显示了人脸识别的一般步骤：



图 1 人脸识别流程图

可见人脸识别系统一般包括人脸检测与定位、图像预处理、人脸图像的特征提取与选择等。横线上方的是人脸识别系统的训练部分，横线下方的人脸识别系统的识别部分。

人脸识别系统在进行特征提取之前需要进行人脸检测与定位和图像预处理，这些操作主要包括几何归一化和灰度归一化。几何归一化是根据人脸检测定位的结果将图像中的人脸变换到同一位置和大小，灰度归一化是将图像进行光照补偿等处理来克服图像中的光照变化对人脸识别的影响。人脸识别过程是将待识别图像的特征和库中的特征进行比对匹配来确定图像中人脸的身份[1]。

## 1.2流形学习

流形学习的主要思想是将高维的数据映射到低维，使该低维的数据能够反映原高维数据的某些本质结构特征。流形学习的前提是有一种假设，即某些高维数据，实际是一种低维的流形结构嵌入在高维空间中。流形学习的目的是将其映射回低维空间中，揭示其本质。

### 1.2.1流形学习的研究背景

随着互联网时代的发展，在各个研究领域，每时每刻都在快速生成大量的数据，而在这些数据背后的规律却难以发现，人们虽然获取了海量的信息却发现自己正处于“数据丰富，知识匮乏”的尴尬境地，因此如何从海量信息中提取自己所需的知识是当今各个领域共同面临的巨大挑战。

在许多实际应用中，尤其是在人脸识别中，往往要对成千上万张图片进行处理，而每张图片又有极高的维度，这种高维的特质往往隐藏了数据间关系的本质，对于传统的数据分析方法往往会造成“维数灾难”，这种情况就需要通过降维来把高维空间的数据间的关系映射到低纬度空间，这样就可以更加方便快速的处理数据。因此降维就成了这一任务吸引了许多科研人员的注意，也成为了如人脸识别、机器学习和数据挖掘等领域的热门研究问题。而流形学习就是解决这类问题的方案之一。

自从流形学习方法被提出到现在，研究它的工作就一直在进行着，特别是近年来随着数据挖掘和人脸识别等技术的高速发展，“维度灾难”的问题就成了相关研究领域的重大障碍。本文将利用流行学习方法解决这类问题。

### 1.2.2流形学习的发展情况

1984年斯坦福大学统计系的Hastie在一份技术报告中首次提出主曲线和主曲面的概念。“流形学习”的概念在1995年由Bregler和Omohundro首次提出，主要用于语音识别和图像插值中。2000年Seung和Lee在《科学》杂志上发表《认知的流行模式》一文，提出了视觉感知的流行结构假说。就在同年同期的《科学》上还刊登了另外两篇著名的文章，它们提出了两个经典算法LLE和Isomap。随着后期学者不断地深入研究，又有许多经典算法相继被提出，比如Belkin和Niyogi提出拉普拉斯特征映射算法（LE），使高维空间相近的点映射到低微空间时也相近；Donoho和Grimes提出海森特征映射（HLLE），是对LLE算法的扩展；He和Hiyogi提出局部保持投影算法（LPP），是对LE算法的线性扩展；Zhang和Zha提出局部切空间校准算法（LTSA），基于“局部拟合，全局整合”的思想；Lin和Zha提出黎曼流行（RML），利用局部黎曼正交坐标系将高维空间的数据映射到低微本质空间中去。这些经典算法被提出后，又有许多学者为了弥补这些算法的缺陷而相继提出了很多经典的改进算法。

此外，很多学者发现不同的流形学习算法之间存在着一定的联系，又提出了一些框架将多种流形学习算法纳入其中，比如经典的核主成分分析框架（KPCA）将MDS、LLE、LE、Isomap和谱聚类进行统一，GA框架在将LE、LLE、LPP和Isomap等流形学习方法纳入其中的同时又将PCA和LDA等传统线性降维方法统一进去[2]。

本文将介绍LGE（线性图嵌入）框架，该框架由浙江大学计算机科学学院的蔡登教授等人开发，为基于图的子空间学习提供一般框架，该框架将LPP，NPE，IsoProjection，LSDA，MMP等流形学习算法进行统一，本文将在2.5节中详细介绍LGE算法的推导过程和算法实现流程。

### 1.2.3流形的定义

关于豪斯多夫（Hausdorff）空间，直观的理解：如果某空间中任两点可用开集合将彼此“豪斯多夫”开来，该空间就是“豪斯多夫”的。

拓扑流形：设M是豪斯多夫（Hausdorff）空间，若对M中的任意一点，都存在x的一个邻域U与中的一个开集同胚，则称M是一个d维的拓扑流形，简称d维流形[3]。

根据上述定义可以看出，欧氏空间本身就是一个d维流形。除了拓扑流形，学者们还进一步定义了微分流形、光滑流形、等距流形和黎曼流形等概念。

### 1.2.4流形学习的定义

给定高维数据集，并假设X中的样本是由低维空间中的数据集通过某个未知的线性变换g所生成，即：

其中，表示噪声，g:是的嵌入映射。那么流形学习的目的就是通过观测数据集X[4]：

1. 获取低维表示。
2. 构造高维空间到低维空间的非线性降维映射。

## 1.3小结

本文主要用到NPE算法和IsoProjection算法并详细介绍算法实现原理，本文会在后面介绍正交的NPE和IsoProjection算法，并对比这些算法的优缺点。

# 2流形学习相关算法

NPE和IsoProjection算法的实现需要用到LGE算法，IsoProjection算法因为涉及最短路径选择所以用到迪杰斯特拉算法，而IsoProjection算法又是基于ISOMAP算法的改进，ISOMAP算法又涉及到MDS算法。通过LGE算法构造OLGE算法要用到规范正交基。

## 2.1规范正交基

定义：设是一个向量空间。

（1）若是向量空间V的一个基，且是一个两两正交的向量组，那么就称是向量空间V的一个正交基。

（2）若是向量空间V的一个基，两两正交，且都是单位向量，则称是向量空间V的一个规范正交基（或标准正交基）。

求法：设是向量空间V的一个基，要求V的一个规范正交基，也就是要找一组两两正交的单位向量，使与等价。这一过程称为把基规范正交化[5]。

可以先进行施密特正交化在进行单位化。本节接下来将详细介绍施密特正交化和单位化的计算方法。

### 2.1.1施密特(Schmidt)正交化

令：

；

;

……

，

则易验证两两正交，且与等价。且满足：对任何，向量组与等价[6]。

### 2.1.2单位化

令：

则是V的一个规范正交基。

施密特正交化过程中可将中的任一线性无关的向量组化为与之等价的正交向量组；在经过单位化，得到与等价的规范正交向量组。

## 2.2迪杰斯特拉(Dijkstra)算法

迪杰斯特拉(Dijkstra)提出了一个按路径长度递增的次序产生最短路径的算法。该算法利用广度优先搜索的思想，从起始点向外逐渐搜索，直到找到最终点为止[7]。

### 2.2.1迪杰斯特拉(Dijkstra)算法流程

1. 准备工作。指定一个起点s，并且引入两个集合 S 和 U：S 集合记录已算出最短路径的顶点和相应最短路径的长度；U 集合记录还未求出最短路径的顶点和该顶点到S的距离，若不相邻则为。
2. S中只有s，U中是其他顶点。
3. 将U中的最短顶点移除并加入S中。
4. 更新U。
5. 重复3、4步，直到遍历完所有顶点。

## 2.3 多维缩放(MDS)算法

MDS 与 PCA 一样，是一种有效的降维方式，其可获得样本间相似性的空间表达。MDS 的原理可以简述为，利用样本的成对相似性，构建一个低维空间，使每对样本在高维空间的距离与在构建的低维空间中的样本相似性尽可能保持一致。

### 2.3.1 MDS算法推导

MDS 算法的核心思想是：降维前后，各自样本间的距离是不变的。由此可得到如下关系：假设m个样本在原始空间的距离矩阵为，则原空间中的两样本之间的距离等于降维后这两样本之间的距离 ，即，B为降维后样本的内积矩阵：

Z就是样本集在降维后空间的坐标矩阵。

所以，根据降维前后各样本间欧式距离保持不变，得：

假设降维后的样本集Z被中心化，即，则矩阵B的每行之和均为零，每列之和均为零，即：

为表示方便将dist简写为d，则有：

其中tr表示矩阵的迹。

令：

代入得：

现在的问题是，已知B如何求Z。

对B做特征值分解：

这里V是特征向量矩阵、A是由特征值构成的对角阵。此时，把A中的特征值排序后，把其中每个非0特征值拿出来构成对角矩阵，其对应的特征向量也需按特征值的大小改变排列顺序，组成新的特征向量矩阵。最终，通过以下公式完成降维操作（降到d维）[8]：

另外，在现实应用中为了有效降维，往往只需要降维后两样本间的距离应尽可能和原空间中两样本的距离相近就好了，不需要强行一致，因此上面特征值构成的对角阵和特征向量矩阵有了一些变化。

变化为：本来特征值取的是所有非0的特征值排序。现在变成排序好后，从大到小取特征值获得特征值对角矩阵与其对应的特征向量矩阵。比如要降维到n维，就从大到小取n个特征值。则通过以下公式完成降维操作（降到n维）：

### 2.3.2 MDS算法流程

输入：，低维空间数d。

过程：

根据式，式和式计算，和。

根据式计算矩阵B。

根据式对矩阵B进行特征值分解。

取n个最大的特征值构成对角矩阵，并获得特征向量矩阵。

根据式完成降维，获得低维空间中的矩阵Z。

输出：低维空间中的矩阵Z。

## 2.4 等度量映射(ISOMAP)算法

ISOMAP算法可以理解为是对MDS算法的改造，也就是将原始空间中的距离计算从欧氏空间中的欧氏距离转换为流形上的测地距离。

由于流形结构是未知的，所以需要构造近邻连接图来计算最短路径问题。



图 2 ISOMAP原理

从图2中可知，低维嵌入流形上的测地线距离（红色）不能用高维空间的直线距离计算，但能用近邻距离来近似。

### 2.4.1 ISOMAP算法步骤

ISOMAP算法分为三步[9]：

1. 构造近邻连接图。利用流形与欧氏空间在局部上同胚的性质，使用欧氏距离找出每个点在低维流形上的近邻点，建立近邻连接图。
2. 计算测地距离。计算近邻连接图上任意两点的最短路径。
3. 数据嵌入。使用MDS算法。

### 2.4.2 ISOMAP算法流程

输入：样本集；近邻参数k；低维空间维数n。

过程：

对每个样本点，计算它的k近邻；同时与它的k近邻的距离设置为欧氏距离，与其他点的距离设置为无穷大。

通过最短路径算法计算任意两个样本点之间的距离，获得距离矩阵

。

通过MDS算法，获得样本集在低维空间中的矩阵。

输出：样本集D在低维空间的投影。

### 2.4.3 ISOMAP算法的特点

ISOMAP算法的优点是使用了测地距离来计算样本间的距离，这样可以更好地反映流形结构，可以减少数据的流失，使高维数据可以更全面的映射到低维空间。

ISOMAP算法还有一个很大的缺点，对于新的样本，难以将其映射到低维空间。理论上虽然可以将新样本添加到样本集中，然后重新调用ISOMAP算法，但是这种方法的计算量太大了。解决方法是：训练一个回归学习器来对新样本的低维空间进行预测。再者ISOMAP算法本身的拓扑不稳定性会导致图的错误链接，其次ISOMAP算法针对的是凸形流形，对于其他流形ISOMAP算法将无法处理。ISOMAP算法对流形中的“孔洞”也不能很好地处理[10]。

## 2.5线性图嵌入算法(LGE)

为基于图的子空间学习提供一般框架。该算法将由NPE和IsoProjection调用。

### 2.5.1 LGE算法推导

数据集，n表示样本数量，m表示样本维度。LGE算法采用无向有权图描述数据集的流形结构，顶点集对应数据，，表示边的权重，W矩阵是对称的。LGE算法在保持图的邻接关系的前提下，寻找X的低维表示。令表示从图到实线的映射，则LGE的目标函数如下：

变换后可得：

L是图的拉普拉斯矩阵，D是对角矩阵，对应W矩阵第列（行）所有元素之和，即。

令（消除嵌入时的量化影响），则：

若图到实线的映射为线性，则，则：

则最优向量对应于以下最小特征值所对应的特征向量。

矩阵通常是奇异的，所以LGE算法要先把X集投影到PCA空间，使变成可逆矩阵，然后求解特征值问题。经过PCA处理后上式可通过奇异值分解进行求解：

可解出，设为PCA空间特征向量，则LGE算法的解为：

矩阵是非对称的，所以LGE算法的解往往是非正交的。本节会在接下来介绍正交的LGE算法(OLGE)。

许多常用的线性子空间算法如LPP等，都可以通过定义其权重矩阵W将该算法统一于LGE框架下，通过

进行求解[11][12]。

## 2.6局部线性嵌入算法（LLE）

LLE是流形学习方面经典的局部非线性方法，它试图保留邻域内样本之间的线性关系。它有参数少、计算快、易求全局最优并在图像分类、图像识别、谱重建、数据可视化等方面都有着广泛的应用。

### 2.6.1 LLE算法原理

矩阵是数据矩阵，包括所有的训练样本 。维度通常是很大的，（稀疏）线性降维的目标是变换数据从原来的高维空间到低维空间。

，，并且是一个m维列向量。

若相邻样本处于非线性流形的局部线性片上，则每个样本可由其k个最近邻居的加权线性组合近似表示。最小化如下成本函数：

是的k个最近邻居索引集，是最佳局部最小二乘重建系数。得到W后，可以通过最小化一下函数来得到最终嵌入坐标。

。对应于特征函数的较小特征值的特征向量是数据集的最终嵌入。

其中是对应于特征值的特征向量。

### 2.6.3 LLE算法流程

输入：数据集X，邻居个数k，降至的维度d。

第一步：计算对应距离和寻找邻居。

先计算向量到的距离，得到距离矩阵distance，然后每行排序，取前k个，对应原下标就是近邻点的编号。

第二步：解决重建权重问题。

对于任意i，若j不属于，则，故W只需存K行N列。

当且仅当每一项求和项极小时，极小。因此需要计算每一项的极小值，也就是极小化。

第三步：从成本矩阵的特征嵌入计算。

第四步：嵌入计算。

输出：降维后的矩阵Y。

## 2.7等距映射算法（IsoProjection）

IsoProjection是ISOMAP的线性近似。[3]

### 2.7.1 IsoProjection算法推导

设为输入数据集，其中，寻找投影矩阵W使得，其中。Y就是降维后的数据集。

定义一个距离矩阵D，表示到之间的测地距离，定义矩阵S令，令，I为单位矩阵，E为元素全为1的列向量，则可得内积矩阵：。则IsoProjection的目标函数如下：

使用拉格朗日算法将上式的解向量问题转化为求解下式的特征值和特征向量的问题。

所以要求是非奇异矩阵，因此IsoProjection的最佳投影向量就是上式最大特征值所对应的特征向量[13]。

IsoProjection算法求出来的投影向量往往是非正交的，这种非正交的性质会在从高维空间向低维空间的投影过程中扰乱数据的流形结构，而且会使算法本身对降维后的子空间的维数十分敏感，很难估计样本的内蕴维数。

### 2.7.2 IsoProjection算法流程

IsoProjection算法分五步执行：

1. 先使用PCA算法对样本进行降维。因为是奇异矩阵，所以要进行去奇异处理。使用PCA算法的主要目的是将变为非奇异矩阵，然后在低维空间使用IsoProjection算法。
2. 使用K-近邻方法构造近邻图G。
3. 使用迪杰斯特拉算法计算最短路径矩阵D。
4. 计算最佳投影矩阵W。
5. 特征提取。令，则。

## 2.8领域保护嵌入算法（NPE）

### 2.8.1 NPE算法推导

令NPE算法的权重矩阵为S，w为一投影向量，使得满足。则NPE算法的目标函数如下：

对该目标函数做出如下推导：

上式中，令。则简化后的目标函数如下：

则NPE算法的最佳投影向量就是以下特征方程的最小特征值所对应的特征向量[14]。

### 2.8.2 NPE算法流程

NPE算法的实现分为三步：

1. 构造近邻图。使用K-近邻法寻找与数据点欧氏距离最近的个近邻点。
2. 确定权值。用近邻对各个数据点进行重构。
3. 计算特征映射。在低维空间中，对各个进行数据点重构，即在保持重构权值不变的情况下，使重构误差最小，计算出降维矩阵。[28][30][39]

# 3正交化算法

## 3.1 OIsoProjection

OIsoProjection算法是在IsoProjection算法的基础上，得到一组正交基向量，因此该算法在保留IsoProjection算法线性的特点的同时又能够保持高维数据的流形结构[15]。

OIsoProjection算法希望通过一组正交基改造目标函数，正交基的求法也相类似，都是通过拉格朗日乘子法引入正交基约束条件来推导出一个特征方程，然后求出该特征方程的最大特征值对应的特征向量以求出正交基，再利用该正交基构造特征方程进行特征提取[16][17]。

### 3.1.1 OIsoProjection算法推导

首先要计算出一组正交基，则目标函数如下：

则向量可以通过求解特征方程的最大特征值所对应的特征向量获得。

若已有d-1个正交基向量。则可以利用如下正交约束条件获得：。

利用拉格朗日乘子法得到如下方程：

令：，则：

方程两边同时左乘：

得：

将(30)式方程两边同时左乘，得到d-1个式子：

为方便求解做出如下定义：

；

；

；

；

所以就可以用矩阵形式表示这个方程了：

得：

将()两边同乘，得：

矩阵表示：

由和得：

得：

得特征方程：

可通过求解上式最大特征值对应的特征向量得到正交基。

所以，OIsoProjection算法的正交投影向量就是特征方程的最大特征值所对应的特征向量[18]。

### 3.1.2 OIsoProjection算法流程

OIsoProjection算法的前三步与IsoProjection算法的步骤相同，此处不再赘述。直接从第四步开始介绍：

4．计算正交投影向量。

通过5.2.1中的算法计算出一组正交基，具体流程如下：

(1) 通过求解特征方程的最大特征值所对应的特征向量获得计算。

(2) 通过求解特征方程的最大特征值所对应的特征向量获得，。

5. 特征提取。

令通过OIsoProjection算法得到的最佳投影矩阵为d维的，通过PCA算法得到的投影矩阵为，则令，则通过线性嵌入：

可以得到对任意x的d维特征[19]。

## 3.2 ONPE

ONPE算法在NPE算法的基础上添加了正交迭代处理。改进的思路与OIsoProjection算法类似，算法的推导过程也与OIsoProjection算法类似。

### 3.2.1 ONPE算法推导

定义邻域保护函数为：

最小化该函数将得到NPE算法，而ONPE算法既要找到一组正交向量又要满足上式最小，因此ONPE算法的目标函数如下：

可以通过求解的最小特征对应的特征向量获得。

若已有k-1个正交向量，则第k正交向量满足以下条件：

约束条件：。

利用拉格朗日乘子法得到如下方程：

令，则：

得：

将式两边同时左乘，得到k-1个式子：

其中。

为方便求解做如下定义：

；

；

；

所以就可以用矩阵形式表示这个方程了：

得：

将式两边同时左乘，得：

通过式和式得：

令：

得特征方程：

通过求解这个特征方程就能得到一组正交投影向量。

所以，ONPE算法的正交投影向量就是特征方程的最大特征值所对应的特征向量[20]。

### 3.2.2 ONPE算法流程

ONPE算法的前两步与NPE算法一样，这里从第三步开始介绍：

3.计算正交投影向量。通过5.2.1中的算法计算出一组正交投影向量。

（1）通过求解的最小特征对应的特征向量获得。

（2）通过求解的最小特征对应的特征向量获得。

4. 特征提取。

令通过ONPE算法得到的最佳投影矩阵为d维的，通过PCA算法得到的投影矩阵为，则令，则通过线性嵌入：

可以得到对任意x的d维特征。

# 4算法实现

在本节中，将分别运行NPE、ONPE、IsoProjection和OIsoProjection算法，并对比这些算法，分析这些算法的优缺点。

## 4.1常用的人脸数据库介绍

使用公开人脸数据库对程序进行测评是评判算法好坏的主要依据。常用的人脸数据库有：FERET人脸库，由美国国防部为研发自动人脸识别系统而创建的人脸库；Yale人脸库和Yale B人脸库，由耶鲁大学计算视觉与控制中心创建；ORL人脸库，由剑桥大学AT&T实验室创建；AR人脸库，由西班牙巴塞罗那计算机视觉中心创建；XM2VTS人脸库，由欧洲ACTS项目的研究计划M2VTS资助建立的身份认证资料数据库，是一个商业收费数据库；CMU PIE库，是卡耐基梅隆大学创建。本文将在ORL人脸库和Yale人脸库上进行试验。

## 4.2 在ORL人脸库上进行实验

### 4.2.1 ORL人脸库介绍

ORL人脸库由剑桥大学AT&T实验室创建，该库由40个人，每人10张图像，共400张图像组成。图像均在不同光照、不同角度和不同表情下获得。每张图片的分辨率均为像素。该库的面部表情表情变化主要是笑/不笑和睁眼/闭眼，还有一些其他的面部细节。拍摄的是受试者的正面、垂直头像，允许倾斜或旋转。



图 3 ORL人脸库

图3是ORL人脸库的示例图片。

人脸库下载：<http://www.cl.cam.ac.uk/research/dtg/attarchive/facedatabase.html>

### 4.2.2 实验结果

在ORL人脸库上分别运行NPE算法、IsoProjection算法、ONPE算法和OIsoProjection算法得到如下实验结果：

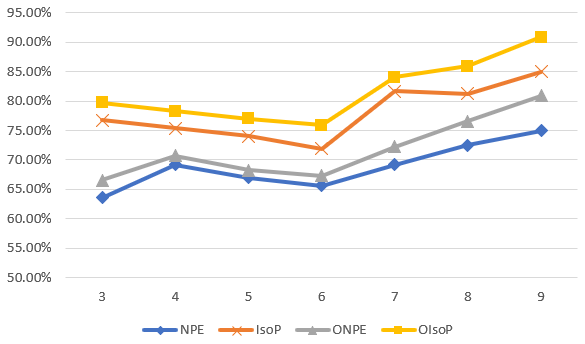


图4 ORL人脸库上随着每类训练样本的增加四种算法的识别率

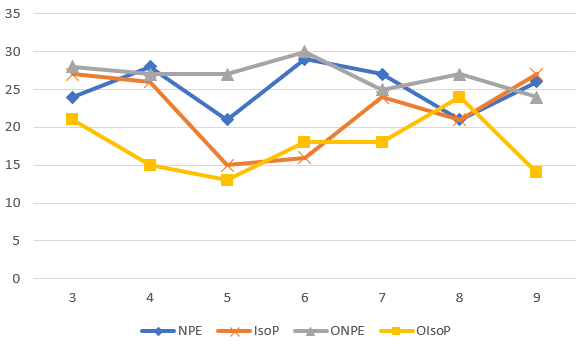


图5 ORL人脸库上随着每类训练样本的增加四种算法的最佳投影维数

## 4.3分析

从上述实验结果可以看出，IsoProjection算法的识别率要优于NPE算法，加入正交化实现ONPE算法和OIsoProjection算法后发现，正交化算法确实可以提升原算法的识别率，并且OIsoProjection算法的识别率要优于ONPE算法。

# 5结束语

毕业设计终于顺利完成，实验结果也比较符合预期。其实本文的结构顺序完全符合我的学习历程，在我刚开始接触人脸识别和流形学习的时候，先是查阅了很多介绍流形学习的文献，其中我觉得重要的东西都整理在了第一节中，然后我就开始学习一些经典的流形学习算法，比如MDS算法、LLE算法、LPP算法、PCA算法、NPE算法、ISOMAP算法、LGE框架和IsoProjection算法等等，在我确定了毕业设计要研究什么的时候，我有在网上查阅一些如何将算法正交化核化的文献，在学习过程中，我认为我最大的收获是学习了一种思维模式，这给我的思想中种下了一颗种子。

流形学习其实是有章可循的，尽管其在过去几年取得了丰硕的成果，但因其数学理论基础较为复杂，以及学科间存在交叉融合，所以这也意味着流形学习还具有广阔的发展空间。

# 参考文献

[1] 徐勇，范自柱，张大鹏. 基于稀疏算法的人脸识别[M]. 北京: 国防工业出版社，2014.

[2] 古楠楠，樊明宇，王迪，韩志. 流形学习若干关键问题与算法研究[M]. 北京: 首都经济贸易大学出版社，2015.

[3] 王庆军. 流形学习算法分析及应用研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学，2008.

[4] 王庆军. 基于流形学习子空间的人脸识别方法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学，2011.

[5] 吴赣昌. 线性代数[M]. 北京: 中国人民大学出版社，2011.

[6] 黄结. 基于正交局部敏感辨别分析的人脸识别方法研究[D]. 烟台: 鲁东大学，2013.

[7] 严蔚敏，吴伟民. 数据结构（C语言版）[M]. 北京: 清华大学出版社，2007.

[8] 华校专，王正林. Python大战机器学习：数据科学家的第一个小目标[M]. 北京: 电子工业出版社，2017.

[9] 周志华. 机器学习[M]. 北京: 清华大学出版社，2016.

[10] 程起才，王洪元，刘爱萍，冯燕. 基于ISOMAP的一种多流形学习算法[J]. 微电子学与计算机，2009,3(10): 545-555.

[11] 陈江峰. 线性图嵌入算法及其应用[D]. 北京: 北京交通大学，2012.

[12] 陈江峰，袁保宗. 直接线性图嵌入算法及其在人脸识别中的应用[N]. 电子与信息学报，2010(6).

[13] Deng Cai, Xiaofei He, and Jiawei Han. Isometric Projection[R]. Department of Computer Science, University of Illinois at Urbana-Champaign: Yahoo! Research Labs, 2006.

[14] 刘嘉敏，李连泽，罗甫林，刘亦哲，刘玉梅. 相关NPE算法的人脸识别研究[J]. 计算机应用研究，2015,6(6): 1881-1883+1891.

[15] 王庆军，张汝波，刘冠群. 一种应用于人脸识别的核正交等度规映射算法[J]. 光电子激光，2010,21(11): 1702-1705.

[16] 王庆军，张汝波，潘海为. 基于核正交局部判别嵌入的人脸识别[J]. 光电子激光，2010,21(9): 1386-1389.

[17] 王庆军，张汝波，楼宋江，吕海燕. 一种核正交局部敏感辨别分析算法[J]. 小型微型计算机系统，2009,30(11): 2268-2271.

[18] 王庆军，张汝波. 基于LogGabor和正交等度规映射的人脸识别[J]. 计算机科学，2011,2(2): 274-276+295.

[19] 左加阔. 基于流形学习算法的新生儿疼痛表情识别[D]. 南京: 南京邮电大学，2011.

[20] 陶晓燕，姬红兵，景志宏. 一种用于人脸识别的正交邻域保护嵌入算法[N]. 西安电子科技大学学报（自然科学版），2008(6).

# 致 谢

时间仓促且自身水平不足，整篇论文肯定有缺陷或不足之处，恳请阅读此文的老师和同学，多予指正，不胜感激。

在实验室撰写论文和制作毕设期间，遇到了很多困难和阻碍，感谢我的班主任王庆军老师对我悉心教导。在这几个月间，我不仅收获了很多新的知识，最重要的是学会了一些新的思维方式，这为我以后的生活和工作提供了很多新的可能性。在向王老师请教的过程中，他那严谨的科研态度和精益求精的工作作风深深的影响着我。

在学习过程中，我不仅学习了人脸识别技术，更重要的是学会了很多处理和分析问题的能力，坚定了我的意志并且扩充了自己的只是领域，最终顺利完成本次毕业设计。

我之所以能够完成本次毕业设计，少不了老师、朋友和同学的帮助，在这里，衷心的感谢所有关心和帮助过我的人。

# 6附录

## 6.1 主要算法的核心代码

详见中国浙江大学计算机科学学院的蔡登教授的个人主页：

<http://www.cad.zju.edu.cn/home/dengcai/Data/DimensionReduction.html>

### 6.1.1 IsoProjection算法

if options.k <= 0 % Always supervised!

Label = unique(options.gnd);

nLabel = length(Label);

G = zeros(nSmp,nSmp);

for i=1:nLabel

classIdx = find(options.gnd==Label(i));

D = EuDist2(data(classIdx,:),[],1);

G(classIdx,classIdx) = D;

end

maxD = max(max(G));

% effectively infinite distance

INF = maxD\*INFratio;

D = INF\*ones(nSmp,nSmp);

for i=1:nLabel

classIdx = find(options.gnd==Label(i));

D(classIdx,classIdx) = G(classIdx,classIdx);

end

Else

switch lower(options.NeighborMode)

case {lower('KNN')}

D = EuDist2(data);

maxD = max(max(D));

% effectively infinite distance

INF = maxD\*INFratio;

[dump,iidx] = sort(D,2);

iidx = iidx(:,(2+options.k):end);

for i=1:nSmp

D(i,iidx(i,:)) = 0;

end

D = max(D,D');

D = sparse(D);

D = dijkstra(D, 1:nSmp);

D = reshape(D,nSmp\*nSmp,1);

infIdx = find(D==inf);

D = reshape(D,nSmp,nSmp);

case {lower('Supervised')}

Label = unique(options.gnd);

nLabel = length(Label);

G = zeros(nSmp,nSmp);

maxD = 0;

for idx=1:nLabel

classIdx = find(options.gnd==Label(idx));

nSmpClass = length(classIdx);

D = EuDist2(data(classIdx,:),[],1);

if maxD < max(max(D))

maxD = max(max(D));

end

if options.k >= nSmpClass

G(classIdx,classIdx) = D;

else

[dump,iidx] = sort(D,2);

iidx = iidx(:,(2+options.k):end);

for i=1:nSmpClass

D(i,iidx(i,:)) = 0;

end

D = max(D,D');

D = sparse(D);

D = dijkstra(D, 1:nSmpClass);

G(classIdx,classIdx) = D;

end

end

% effectively infinite distance

INF = maxD\*INFratio;

D = INF\*ones(nSmp,nSmp);

for i=1:nLabel

classIdx = find(options.gnd==Label(i));

D(classIdx,classIdx) = G(classIdx,classIdx);

end

end

end

S = D.^2;

sumS = sum(S);

H = sumS'\*ones(1,nSmp)/nSmp;

TauDg = -.5\*(S - H - H' + sum(sumS)/(nSmp^2));

TauDg = max(TauDg,TauDg');

[eigvector,eigvalue]=LGE(TauDg, [], options, data);

eigIdx = find(eigvalue < 1e-3);

eigvalue (eigIdx) = [];

eigvector(:,eigIdx) = [];

### 6.1.2 NPE算法

if options.k <= 0 % Always supervised!

W = zeros(nSmp,nSmp);

for ii=1:nSmp

idx = find(options.gnd==options.gnd(ii));

idx(find(idx==ii)) = [];

% shift ith pt to origin

z=data(idx,:)-repmat(data(ii,:),length(idx),1);

C = z\*z'; % local covariance

% regularlization

C = C + eye(size(C))\*tol\*trace(C);

tW = C\ones(length(idx),1); % solve Cw=1

tW = tW/sum(tW); % enforce sum(w)=1

W(idx,ii) = tW;

end

M = (eye(size(W)) - W);

M = M\*M';

M = max(M,M');

M = sparse(M);

Else

switch lower(options.NeighborMode)

case {lower('KNN')}

Distance = EuDist2(data,[],0);

[sorted,index] = sort(Distance,2);

neighborhood = index(:,2:(1+options.k));

case {lower('Supervised')}

Label = unique(options.gnd);

nLabel = length(Label);

neighborhood = zeros(nSmp,options.k);

for idx=1:nLabel

classIdx=find(options.gnd==Label(idx));

Distance=EuDist2(data(classIdx,:),[],0);

[sorted,index] = sort(Distance,2);

neighborhood(classIdx,:) = classIdx(index(:,2:(1+options.k)));

end

end

W = zeros(options.k,nSmp);

for ii=1:nSmp

% shift ith pt to origin

z = data(neighborhood(ii,:),:)-repmat(data(ii,:),options.k,1);

C = z\*z'; % local covariance

%regularlization

C = C + eye(size(C))\*tol\*trace(C);

W(:,ii) = C\ones(options.k,1);% solve Cw=1

% enforce sum(w)=1

W(:,ii) = W(:,ii)/sum(W(:,ii));

end

M = sparse(1:nSmp,1:nSmp,ones(1,nSmp),nSmp,nSmp,4\*options.k\*nSmp);

for ii=1:nSmp

w = W(:,ii);

jj = neighborhood(ii,:)';

M(ii,jj) = M(ii,jj) - w';

M(jj,ii) = M(jj,ii) - w;

M(jj,jj) = M(jj,jj) + w\*w';

end

M = max(M,M');

M = sparse(M);

end

M = -M;

for i=1:size(M,1)

M(i,i) = M(i,i) + 1;

end

[evector, evalue] = LGE(M, [], options, data);

eIdx = find(evalue < 1e-10);

evalue (eIdx) = [];

evector(:,eIdx) = [];

### 6.1.3 LGE算法

MAX\_MATRIX\_SIZE = 1600;

EIGVECTOR\_RATIO = 0.1;

% SVD

if bPCA

[U, S, V] = mySVD(data);

[U, S, V]=CutonRatio(U,S,V,options);

eigvalue\_PCA = full(diag(S));

if bD

data = U\*S;

eigvector\_PCA = V;

DPrime = data'\*D\*data;

DPrime = max(DPrime,DPrime');

else

data = U;

eigvector\_PCA = V\*spdiags(eigvalue\_PCA.^-1,0,length(eigvalue\_PCA),length(eigvalue\_PCA));

end

else

if ~bChol

if bD

DPrime = data'\*D\*data;

else

DPrime = data'\*data;

end

switch lower(options.ReguType)

case {lower('Ridge')}

if options.ReguAlpha > 0

for i=1:size(DPrime,1)

DPrime(i,i) = DPrime(i,i) + options.ReguAlpha;

end

end

case {lower('Tensor')}

if options.ReguAlpha > 0

DPrime = DPrime + options.ReguAlpha\*options.regularizerR;

end

case {lower('Custom')}

if options.ReguAlpha > 0

DPrime = DPrime + options.ReguAlpha\*options.regularizerR;

end

end

DPrime = max(DPrime,DPrime');

end

end

WPrime = data'\*W\*data;

WPrime = max(WPrime,WPrime');

% Generalized Eigen

dimMatrix = size(WPrime,2);

if ReducedDim > dimMatrix

ReducedDim = dimMatrix;

end

if isfield(options,'bEigs')

bEigs = options.bEigs;

else

if (dimMatrix > MAX\_MATRIX\_SIZE) && (ReducedDim < dimMatrix\*EIGVECTOR\_RATIO)

bEigs = 1;

else

bEigs = 0;

end

end

if bEigs

%disp('use eigs to speed up!');

opt = struct('disp',0);

if bPCA && ~bD

[evector, evalue] = eigs(WPrime,ReducedDim,'la',opt);

else

if bChol

option.cholB = 1;

[evector, evalue] = eigs(WPrime,R,ReducedDim,'la',opt);

else

[evector, evalue] = eigs(WPrime,DPrime,ReducedDim,'la',opt);

end

end

evalue = diag(evalue);

else

if bPCA && ~bD

[eigvector, eigvalue] = eig(WPrime);

else

[eigvector, eigvalue] = eig(WPrime,DPrime);

end

eigvalue = diag(eigvalue);

[junk, index] = sort(-evalue);

evalue = eigvalue(index);

evector = eigvector(:,index);

if ReducedDim < size(eigvector,2)

evector = eigvector(:, 1:ReducedDim);

evalue = eigvalue(1:ReducedDim);

end

end

if bPCA

evector = eigvector\_PCA\*evector;

end

for i = 1:size(evector,2)

evector(:,i) = evector(:,i)./norm(evector(:,i));

end

%function CutonRatio

function [U, S, V]=CutonRatio(U,S,V,options)

if ~isfield(options, 'PCARatio')

options.PCARatio = 1;

end

eigvalue\_PCA = full(diag(S));

if options.PCARatio > 1

idx = options.PCARatio;

if idx < length(eigvalue\_PCA)

U = U(:,1:idx);

V = V(:,1:idx);

S = S(1:idx,1:idx);

end

elseif options.PCARatio < 1

sEig = sum(eigvalue\_PCA);

sEig = sEig\*options.PCARatio;

sNow = 0;

for idx = 1:length(eigvalue\_PCA)

sNow = sNow + eigvalue\_PCA(idx);

if sNow >= sumEig

break;

end

end

U = U(:,1:idx);

V = V(:,1:idx);

S = S(1:idx,1:idx);

end