Introducción matemática a Descartes

Departamento de Geometría y Topología

Universidad Complutense de Madrid

Objetivos del trabajo

- ...
    - ...
    - ...

1. Descartes y la Unificación del Álgebra y la Geometría

1.1 La Geometría de Descartes

Consideremos la ecuación algebraica de grado n:

$$P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

donde los coeficientes a_k son reales y $a_n \neq 0$

1.1 La Geometría de Descartes

Consideremos la ecuación algebraica de grado n:

$$P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

donde los coeficientes a_k son reales y $a_n \neq 0$

Teorema Fundamental del Álgebra Toda ecuación algebraica de grado n tiene n raíces reales o complejas, contadas según su multiplicidad

Una raíz ξ de la ecuación $P(x) = 0$ tiene multiplicidad s cuando

$$P(\xi) = P'(\xi) = P''(\xi) = \cdots = P^{s-1)}(\xi) = 0$$
$$P^{s)}(\xi) \neq 0$$

Teorema Si los coeficientes de la ecuación algebraica son reales, sus raíces son reales o conjugadas a pares, es decir, si $\xi = \alpha + \mathrm{i}\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ es raíz de $P(x)$, también lo es $\bar{\xi} = \alpha - \mathrm{i}\beta$

Teorema Si los coeficientes de la ecuación algebraica son reales, sus raíces son reales o conjugadas a pares, es decir, si $\xi = \alpha + \mathrm{i}\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ es raíz de $P(x)$, también lo es $\bar{\xi} = \alpha - \mathrm{i}\beta$

Corolario Una ecuación algebraica de grado impar con coeficientes reales tiene al menos una raíz real

Teorema de Newton Si para $x = c > 0$ el polinomio $P(x)$ y todas sus derivadas $P'(x)$, $P''(x)$, ... , $P^{n)}(x)$ son no negativas

$$P^{k)}(c) \geqslant 0 \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

y $P^{n)}(c) = n!a_n > 0$, entonces $R = c$ puede tomarse como frontera superior de las raíces positivas de la ecuación $P(x) = 0$

Teorema de Newton Si para $x = c > 0$ el polinomio $P(x)$ y todas sus derivadas $P'(x)$, $P''(x)$, ... , $P^{n)}(x)$ son no negativas

$$P^{k)}(c) \geqslant 0 \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

y $P^{n)}(c) = n!a_n > 0$, entonces $R = c$ puede tomarse como frontera superior de las raíces positivas de la ecuación $P(x) = 0$

Demostración Si $x > c$, por la fórmula de Taylor,
$P(x) = P(c) + P'(c)(x - c) + \cdots + \frac{P^{n)}}{n!}(x - c)^n > 0$
y así todas las raíces positivas x^+ satisfacen $x^+ \leqslant c$

En las aplicaciones prácticas del Teorema de Newton se utiliza el sistema de tanteo (por ejemplo, mediante el esquema de Hörner) para hallar una secuencia monótona creciente de números positivos

$$0 < c_1 \leqslant c_2 \leqslant \cdots \leqslant c_{n-1} \leqslant c_n$$

para los cuales se cumplan las desigualdades

$$\begin{gathered} P^{n-1)}(c_1) \geqslant 0 \\ P^{n-2)}(c_2) \geqslant 0 \\ \cdots \\ P'(c_{n-1}) \geqslant 0 \\ P(c_n) \geqslant 0 \end{gathered}$$

Tales números existen siempre, pues si $a_n > 0$,

$$P^{k)}(x) \xrightarrow{x \longrightarrow \infty} \infty \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

y podemos tomar $c = c_n$

En efecto, como $P^{n)}(x) = n!a_n > 0$, la función $P^{n-1)}(x)$ es creciente, y así

$$P^{n-1)}(x) > P^{n-1)}(c_1) \geqslant 0$$

En efecto, como $P^{n)}(x) = n!a_n > 0$, la función $P^{n-1)}(x)$ es creciente, y así

$$P^{n-1)}(x) > P^{n-1)}(c_1) \geqslant 0$$

Así de nuevo, $P^{n-2)}(x)$ es creciente en el intervalo $[c_1, \infty)$, y por tanto, para $x > c_2 \geqslant c_1$,

$$P^{n-2)}(x) > P^{n-2)}(c_2) \geqslant 0$$

En efecto, como $P^{n)}(x) = n!a_n > 0$, la función $P^{n-1)}(x)$ es creciente, y así

$$P^{n-1)}(x) > P^{n-1)}(c_1) \geqslant 0$$

Así de nuevo, $P^{n-2)}(x)$ es creciente en el intervalo $[c_1, \infty)$, y por tanto, para $x > c_2 \geqslant c_1$,

$$P^{n-2)}(x) > P^{n-2)}(c_2) \geqslant 0$$

Iterando este razonamiento, llegamos a que $P(x)$ es creciente en el intervalo $[c_{n-1}, \infty)$, y para $x > c_n \geqslant c_{n_1}$

$$P(x) > P(c_n) \geqslant 0$$

con lo que $x^+ \leqslant c_n$

Ejemplo Sea

$$P(x) = 2x^5 - 100x^2 + 2x - 1$$

Ejemplo Sea

$$P(x) = 2x^5 - 100x^2 + 2x - 1$$

En este caso,

$$P'(x) = 10x^4 - 200x + 2$$
$$P''(x) = 40x^3 - 200$$
$$P'''(x) = 120x^2$$
$$P^{4)}(x) = 240x$$
$$P^{5)} = 240$$

$P'''(x) > 0$, $P^{4)}(x) > 0$, $P^{5)}(x) > 0$ para $x > 0$

También

$$P''(x) = 40(x^3 - 5) > 0 \quad \text{para } x \geqslant 2$$

Supondremos $c_1 = c_2 = c_3 = 2$

$P'''(x) > 0$, $P^{4)}(x) > 0$, $P^{5)}(x) > 0$ para $x > 0$

También

$$P''(x) = 40(x^3 - 5) > 0 \quad \text{para } x \geqslant 2$$

Supondremos $c_1 = c_2 = c_3 = 2$

$P'(2) = -238 < 0$, pero $P'(3) = 212 > 0$ así que tomamos $c_4 = 3$

$P'''(x) > 0$, $P^{4)}(x) > 0$, $P^{5)}(x) > 0$ para $x > 0$

También

$$P''(x) = 40(x^3 - 5) > 0 \quad \text{para } x \geqslant 2$$

Supondremos $c_1 = c_2 = c_3 = 2$

$P'(2) = -238 < 0$, pero $P'(3) = 212 > 0$ así que tomamos $c_4 = 3$

$P(3) = -409 < 0$, pero $P(4) = 455 > 0$ así que tomamos $c_5 = 4$, y $R = 4$ es frontera superior de las raíces positivas de esta ecuación

[Espirales Clásicas]

¿Cómo hallar el número total de raíces positivas de una ecuación algebraica? Recordemos

- Si $P(a)P(b) < 0$, en el intervalo (a, b) existe un número impar de raíces de $P(x)$ (contando multiplicidades)
- Si $P(a)P(b) > 0$, en el intervalo (a, b) existe un número par (o nulo) de raíces de $P(x)$

Teorema de Sturm Si un polinomio $P(x)$ no tiene raíces múltiples y $P(a)\,P(b) \neq 0$, el número de sus raíces reales en el intervalo $a < x < b$ es exactamente igual al número de cambios de signo perdidos en la secuencia de Sturm del polinomio $P(x)$ yendo de $x = a$ a $x = b$, es decir

$$N(a, b) = N(a) - N(b)$$

Teorema de Sturm Si un polinomio $P(x)$ no tiene raíces múltiples y $P(a)\,P(b) \neq 0$, el número de sus raíces reales en el intervalo $a < x < b$ es exactamente igual al número de cambios de signo perdidos en la secuencia de Sturm del polinomio $P(x)$ yendo de $x = a$ a $x = b$, es decir

$$N(a,b) = N(a) - N(b)$$

Corolario 1 Si $P(0) \neq 0$, los números N_+ y N_- de raíces positivas y negativas del polinomio $P(x)$ son

$$N_+ = N(0) - N(+\infty) \qquad N_- = N(-\infty) - N(0)$$

Corolario 2 Un polinomio $P(x)$ de grado n (sin raíces múltiples) tiene todas sus raíces reales si y sólo si

$$N(-\infty) - N(+\infty) = n$$

De este modo, si $a_n > 0$, todas la raíces serán reales si y sólo si

1. la secuencia de Sturm tiene un número máximo de elementos $n+1$, esto es, $m = n$
2. son ciertas las desigualdades $P_k(+\infty) > 0$, es decir, los coeficientes dominantes de todas las funciones de Sturm $P_k(x)$ son positivos

Ejemplo Determinar el número de raíces positivas y negativas de la ecuación

$$x^4 - 4x + 1 = 0$$

Ejemplo Determinar el número de raíces positivas y negativas de la ecuación

$$x^4 - 4x + 1 = 0$$

Solución La secuencia de Sturm es de la forma

$$P(x) = x^4 - 4x + 1$$
$$P_1(x) = x^3 - 1$$
$$P_2(x) = 3x - 1$$
$$P_3(x) = 1$$

de donde

$$N(-\infty) = 2 \quad N(0) = 2 \quad N(+\infty) = 0$$
$$N_+ = 2 - 0 = 2 \qquad N_- = 2 - 2 = 0$$

con lo que $P(x)$ tiene dos raíces positivas y ninguna negativa (y por tanto dos raíces complejas)

Teorema de Budan-Fourier Si los números $a < b$ no son raíces de un polinomio $P(x)$ de grado n, el número $N(a,b)$ de raíces reales de la ecuación $P(x) = 0$ que caen entre a y b es igual al número mínimo ΔN de pérdidas de cambio de signo en la secuencia de derivadas sucesivas

$$P(x),\ P'(x),\ \cdots,\ P^{n-1)}(x),\ P^{n)}(x)$$

yendo de $x = a$ a $x = b$, o menor que ΔN por un número par

$$N(a,b) = \Delta N - 2k$$

donde

$$\Delta N = \underline{N}(a) - \bar{N}(b)$$

y $\underline{N}(a)$, $\bar{N}(b)$ son los números inferior y superior de variaciones de signo en la secuencia anterior en $x = a,\ b$

Teorema de Hua Si una ecuación

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

tiene coeficientes reales y todas sus raíces son reales, el cuadrado de cada coeficiente no extremo de la ecuación es mayor que el producto de los dos coeficientes adyacentes

$$a_k^2 > a_{k-1} a_{k+1}$$

Teorema de Hua Si una ecuación

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

tiene coeficientes reales y todas sus raíces son reales, el cuadrado de cada coeficiente no extremo de la ecuación es mayor que el producto de los dos coeficientes adyacentes

$$a_k^2 > a_{k-1} a_{k+1}$$

Corolario Si para cierto k tenemos la desigualdad

$$a_k^2 \leqslant a_{k-1} a_{k+1}$$

entonces la ecuación tiene al menos un par de raíces complejas

Ejemplo Determínese la composición de las raíces de la ecuación

$$x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 104x - 20 = 0$$

Ejemplo Determínese la composición de las raíces de la ecuación

$$x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 104x - 20 = 0$$

Solución Como

$$(-12)^2 < 8 \cdot 104$$

la ecuación tiene raíces complejas, y el número de raíces reales no excede de 2. En la secuencia de coeficientes de la ecuación hay $\Delta N = 3$ variaciones de signo y $\Delta P = 1$ no variaciones de signo. Así, en base a la regla de Descartes y a sus corolarios, nuestra ecuación tiene una raíz positiva, una negativa y un par de raíces complejas

Método de Bernouilli Supongamos que se tiene una ecuación algebraica

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

cuyas raíces $x_1, \, x_2, \, \cdots x_n$ son distintas

Método de Bernouilli Supongamos que se tiene una ecuación algebraica

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

cuyas raíces $x_1,\, x_2,\, \cdots x_n$ son distintas

En base a los coeficientes a_k formamos la relación de recurrencia

$$a_n y_{n+i} + a_{n-1} y_{n-1+i} + \cdots + a_0 y_i = 0 \qquad (i = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots)$$

1.2 Problemas clásicos de Apolonio y Pappus

1.3 Generalizaciones

1.4 Algebraización del problema geométrico

1.5 Lugares geométricos

1.6 Introducción a las curvas algebraicas planas

1.7 Cónicas y cúbicas

1.8 Propiedades fundamentales y clasificación

1.9 Nacimiento de la geometría analítica

2. La física matematizada de Descartes

2.1 La geometrización de problemas físicos

2.2 Intentos de unificación

2.3 La óptica cartesiana y problemas de geométricos

2.4 Antecedentes

2.5 La óptica de Kepler

2.6 La "Dióptrica" de Descartes

2.7 Ley de refracción

2.8 Teoría de la luz de Hobbes

2.9 Crítica y experimento

2.10 El principio de Fermat

3. Fuerza e inercia: Descartes y Newton

3.1 El movimiento y su cuantificación

3.2 Caída de objetos

3.3 Concepto e inferencia según Descartes y Beeckman

3.4 Fuerzas e inercia

3.5 Leyes del movimiento y principios de conservación

3.6 Contexto geométrico

3.7 Caída libre y gravitación

3.8 Experimentos de Galileo

3.9 Mecánica newtoniana

4. La teoría de poliedros según Descartes

4.1 Propiedades elementales de polígonos y poliedros

4.2 Característica de Euler

4.3 Complejos simpliciales en el plano y el espacio

4.4 Propiedades topológicas

4.5 Teorema de Descartes

4.6 Relación con el teorema de Gauss-Bonnet

4.7 Dualidad en poliedros

4.8 Teorema de Descartes dual

4.9 Números poligonales