第六章　定积分

§6.1 定积分的概念与性质

1. **利用定积分的几何意义**，计算下列定积分：

（1）$\int_0^2 |x-1|\,dx$；

（2）$\int_{-1}^1 \sin x dx$；

（3）$\int_{-1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$.

2. 不计算积分，比较下列各积分值的大小（**指出明确的“>, <, =”关系，并给出必要的理由**）.

（1）$\int_0^1 x^2 dx$ 与 $\int_0^1 xdx$；

（3）$\int_1^2 x^2 dx$ 与 $\int_1^2 xdx$；

（3）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx$.

3. 利用定积分的性质，估计 $I=\int_0^2 xe^{-x}dx$ 的大小.

4. 设 $f(x)$在区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且满足 $f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)dx$，

试证：在$(0,1)$内至少存在一点ξ，使得 $f'(\xi)=0$.

5. 试判断下列定积分是否有意义（即，被积函数在相应的积分区间上是否“可积”），并说明理由.

(1) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$；

(2) $\int_0^2 f(x)dx$，其中 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\neq 1 \\ 2, & x=1 \end{cases}$.

6. 写出函数 $f(x)$在$[a,b]$上可积以及定积分$\int_a^b f(x)dx$的数学定义.

7*. 根据定积分的定义，将极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+......+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$表达为定积分的形式（**不需要计算出具体的数值结果**）：

§6.2 微积分基本定理

1．求下列函数关于 x 的导数：

（1）$\int_1^x (2-\sin 3t)^{\frac{1}{t}} dt$；

（2）$\int_{\sqrt{x}}^1 te^{t^2} dt$；

（3）$\int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^{t^2} dt$；

（4*）$\int_0^x (x-t)\sin t dt$.

2．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x \frac{1}{x^3}\left(e^{u^2}-1\right)du$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^{x^2}(1-\cos\sqrt{u})du$.

3．计算下列定积分：

（1）$\int_1^2 \frac{1+x^3}{x^2+x^3} dx$；

（2）$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$；

（3）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{1}{2}-\cos x\right| dx$；

（4）$\int_{-2}^{3} \min\{1, x^2\}dx$；

5．设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，且满足 $f(x)=-2x+3\int_0^1 f(x)dx$，试求 $f(x)$.

6*. 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，且满足 $f(x)=-2x+3\int_0^1 x f(x)dx$，试求 $f(x)$.

7*．利用定积分的定义计算极限

（1）　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+......+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$

（2）　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+......+\frac{1}{2n+n}\right)$

§6.3 定积分的换元积分法与分部积分法

1. 利用定积分的换元法计算下列积分：

(1) $\int_1^2 \sqrt{x-1}(x+1)^2 dx$；

(2) $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$；

(3) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx$；

(4) $\int_0^2 \frac{x}{x^4+2x^2+2} dx$；

2. 利用函数的奇偶性计算 $\int_{-1}^1 \left(x^5+3x^2-x\sqrt{1+x^2}\right) dx$.

3. 设 $f(x)$ 是 R 上的连续函数，试证：对于任意常数 $a>0$，均有

$$\int_0^a x^3 f\left(x^2\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} x f(x) dx.$$

4*. 设 $f(x)$是 R 上的连续函数，并满足$\int_0^x f(x-t)e^{-t}dt = x^2$，试求 $f(x)$.

5. 利用定积分的分部积分法计算下列积分：

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin xdx$；

（2）$\int_0^1 x\ln(1+x)dx$

（3）$\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos\ln xdx$.

6*. 试计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$，其中 $f(x)=\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}dt$.

7*. 已知 $f(x)$是 R 上的连续函数，试证：

$$\int_0^x f(t)(x-t)dt = \int_0^x \left[\int_0^t f(u)du\right]dt.$$

§6.4 定积分的应用

1. 计算下列曲线围成的平面封闭图形的面积：

（1） $y = x^3 - 4x,\ y = 0$；

（2） $y = \sqrt{x},\ y = x, y = 2x$.

2. 假设曲线 $y = 1 - x^2\ (0 \le x \le 1)$、$x$ 轴和 y 轴所围成的区域被曲线 $y = ax^2\ (a > 0)$ 分为面积相等的两部分，试确定常数 a 的值.

3. 求由下列曲线围成的平面图形绕指定轴旋转一周而成的立体体积：

（1） $xy^4 = 1,\ y = 0,\ x = \dfrac{1}{4},\ x = 1$；绕 x 轴；

（2） $y=x^3, y=0, x=2$：

（i）绕 x 轴；

（ii）绕 y 轴.

4. 已知某产品的固定成本为 50，边际成本和边际收益函数分别为 $MC(q)=q^2-4q+6$， $MR(q)=105-2q$，其中 q 为产品的销售量（产量），试求最大利润.

5. 已知某产品在定价 $p=1$ 时的市场需求量 $Q=a$，在任意价格 p 处的需求价格弹性为 $E_p=\dfrac{b}{Q}$，其中 $a>0, b<0$ 均为常数，Q 为产品在价格 p 处的市场需求量。试求该产品的市场需求函数 $Q=Q(p)$.（提示：弹性 $E_p=\dfrac{dQ}{dp}\dfrac{p}{Q}$）

§6.5 反常积分初步

1. 判定下列无穷限积分的敛散性；若收敛，则求其值.

（1） $\int_{-\infty}^{0}(1-x)^{q}dx$（ q 为常数）；

（2） $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{1+\cos^{2}x}dx$（其中， q,k 均为常数）.

2. 求下列极限：

（1） $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_{1}^{x}t^{-3}dt}{\int_{1}^{x}t^{-2}dt}$；

（2*） $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_{0}^{x}\arctan u\,du}{\sqrt{1+x^{2}}}$.

3. 判定下列积分的敛散性；若收敛，则求其值.

（1）$\int_0^1 \ln x dx$；

（2）$\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx$.

4. 利用Γ函数和B函数的性质，以及$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$的结果，分别计算：

$\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)$，　$\frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$和$\mathrm{B}(3.5, 3)$.

5. 计算下列反常积分（提示：利用Γ函数的定义，以及$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$的结果）

（1）$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{3}{2}} dx$；

（2）$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^2 dx$.

第六章　自测题

一、选择题

1．设 $f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，则下列论断不正确是(　　).

(A) $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 是 $f(x)$的一个原函数

(B) $\int_x^b f(x)\mathrm{d}x$ 是 $-f(x)$ 的一个原函数

(C) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是 $f(x)$的一个原函数

(D) $f(x)$在$[a,b]$上可积

2．设 $f(x)$是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$的原函数，则(　　).

(A) 当 $f(x)$是奇函数时，$F(x)$必为偶函数

(B) 当 $f(x)$是偶函数时，$F(x)$必为奇函数

(C) 当 $f(x)$是周期函数时，$F(x)$必为周期函数

(D) 当 $f(x)$是单调递增函数时，$F(x)$必为单调递增函数

3．设在区间$[a,b]$上，$f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)<0$，则下列不等式成立的是(　　).

(A) $(b-a)f(a)<\int_a^b f(x)dx<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$

(B) $(b-a)f(b)<\int_a^b f(x)dx<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$

(C) $(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}<\int_a^b f(x)dx<(b-a)$

(D) $(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}<\int_a^b f(x)dx<(b-a)$

4．设 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$内为连续可导的奇函数，则下列函数中为奇函数的是(　　).

(A) $\sin f'(x)$　　(B) $\int_0^x \sin x f(t)dt$

(C) $\int_0^x f(\sin t)dt$　　(D) $\int_0^x \sin t f(t)dt$

5．设函数 $f(x)$ 有连续的导数，$f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$ 且当 $x\to 0$ 时，

$F(x)=\int_0^x(\sin^2 x-\sin^2 t)f(t)dt$ 与 x^k 为同阶无穷小，则 $k=$(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

6．已知 $f(x)=\int_0^{x^2}e^{-t^2}dt+\int_0^{-x^2}e^{-t^2}dt-1$, 则 $f(x)$ 为(　　).

(A) 正常数　　(B) 负常数　　(C) 零　　(D) 非常数

7．已知 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\sin x}\sin x dx$，则 $F(x)$为(　　).

(A) 正常数　　(B) 负常数　　(C) 零　　(D) 非常数

二、填空题

1．设函数 $f(x)$ 具有一阶连续导数，且 $f(0)=0$， $f'(0)\neq 0$，则

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{x^2\int_0^x f(t)dt}$ =________________.

2．设 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{d}{dx}\left(\int_0^x tf(x^2-t^2)dt\right)$=________________.

3．设 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上具有二阶连续导数， $f(1)=1$， $f'(1)=2$，

$\int_0^1 x^2 f''(x)dx=6$，$\int_0^1 f(x)dx$ =________________.

4 已知连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $\int_0^x f(x-\mathrm{t})e^t dt=\sin x$，则 $f(x)$

=________________.

三、解答题

1. 求下列定积分：

(1) $\int_1^4 \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$；

(2) $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^3 e^{x^2} dx$；

(3) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx \quad (a>0)$；

(4) 设 $f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ 5 & 1<x\le 2\end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x)dx$.

2．求下列反常积分：

(1) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx \ (a>0)$；

(2) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{(1-x)(x-3)}}dx$.

3．求由抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 与它在点 $M(0,-3)$ 及点 $N(3,0)$ 处的两条切线所围成图形的面积.

4．函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上单调递减,证明 $\int_0^{2\pi} f(x)\sin x dx \ge 0$.

错题小结

第七章　多元函数微积分学

§7.1　预备知识　　§7.2　多元函数的概念

1．已知点 $A\ (4,1,2)$，在 ox 轴上找出与点 A 相距 $\sqrt{30}$ 的点 B .

2．求过点 $(1,0,3)$，$(2,-1,2)$，$(4,-3,7)$ 的平面方程.

3．分别写出下列区域的“x-型”与“y-型”表达形式：

(1) 由 $y=x$、$x=2$、$y=1$ 所围成的区域；

(2) 由 $y=x^2$、$y=2$ 所围成的区域；

(3) 由 $y^2=x$、$y=x-2$ 所围成的区域.

4．求函数 $z=\arcsin\dfrac{y-x^2}{2}+\ln\ln(14-4x^2-y^2)$ 的定义域，画出定义域的示意图．

5．设 $f(x-y,\dfrac{y}{x})=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$．

6．试求下列二元函数的极限：

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$；

（2*）$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\dfrac{x^2+y^2}{e^{x+y}}$．

7*．设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性．

§7.3　偏导数与全微分

1．求下列函数在给定点处的偏导数：

（1）$z = x\sqrt{x^2 + y^3}$ ，求 $z'_x(1,2), z'_y(1,2)$；

（2）$u = (1+xy)^z$，求 $u'_x(1,2,3), u'_y(1,2,3), u'_z(1,2,3)$.

2．求下列函数的指定偏导数：

（1）$z = \ln(x^2 + y^2)$ ，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$；

（2）$z = (x + \sin y)^{xy}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

3．设 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ ，分别讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是否连续、是否存在偏导数.

4．求函数 $z=e^{y(x^2+y^2)}$ 的全微分．

5．求函数 $z=x^2y+y^2$ 在点(2,1)处的全微分．

6．利用全微分计算 $1.06^{5.03}$ 的近似值．

7．已知某矩形的长为 6 米、宽为 8 米。当长度增加 5 厘米，宽度减少 10 厘米时，求矩形对角线长度变化的近似值。

8．（1）写出 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处偏导数的定义；

（2）写出 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处全微分的定义；

（3）指出二元函数可微与偏导数存在之间的关系，并给出证明或反例．

§7.4　多元复合函数与隐函数微分法

1．求下列复合函数的偏导数或导数：

（1） $z=\dfrac{u^2}{v},u=x-2y,v=x+2y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

（2）$z=e^{u-2v},u=\sin x,v=x^3$，求 $\dfrac{dz}{dx}$；

2．设 $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

3．设 $f(u)$ 可导， $z=x^n f(\dfrac{y}{x^2})$，证明： $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+2y\dfrac{\partial z}{\partial y}=nz$.

4．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^y-y^x=\ln xy$ 所确定，试求 $\dfrac{dy}{dx}$.

5．求下列二元（三元）方程所确定的隐函数 $y=y(x)$（$z=z(x,y)$）的全微分：

（1）$2xz-2xyz+\ln(xyz)=0$；

（2） $x^y+\cos(x-y)=\arctan\dfrac{x}{y}$.

6*．设函数 $z=f(x,y)$ 与 $y=y(x)$ 均可微，且 $y=y(x)$ 由方程 $\varphi(x,y)=0$ 所确定，其中 $\varphi'_y\neq0$，试证：一元函数 $z=f(x,y(x))$ 的驻点 x_0 必然满足方程 $f'_x(x,y(x))\varphi'_y(x,y(x))=f'_y(x,y(x))\varphi'_x(x,y(x))$.

§7.5 高阶偏导数

1．设 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2．设 $z=\sin(x^2 y)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

3．设 $f(u,v)$ 的两个偏导函数连续，$z=f(x^2 y,\ln(xy))$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

4．设 $z^3-2xz+y=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

§7.6　多元函数的极值

1．求 $f(x, y)=xy-xy^2-x^2y$ 的极值.

2．求 $u=x-x^2-y^2$ 在 $D=\left\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leq 1\right\}$ 上的最大值与最小值.

3．求 $z=xy$ 在条件 $x+2y=1$，$x, y \geq 0$ 下的最值.

4．求曲线 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ xy=1 \end{cases}$ 上到 xoy 平面距离最短的点.

5．假设某企业在两个相互分割的市场上出售同一种商品，商品在两个市场上的需求量与定价分别满足 $p_1=18-2q_1, p_2=12-q_2$，其中 p_1, p_2 分别是该产品在两个市场上的价格(单位：万元/吨)，q_1, q_2 分别是该产品在两个市场上的需求量(单位：吨)，且该企业生产这种产品的总成本函数为 $C=2(q_1+q_2)+5$。如果该企业实行价格无差别策略，试确定两个市场上该产品的销售量及统一的价格，使该企业的总利润最大化。

§7.7 二重积分

1．将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 按照两种次序化为累次积分，其中积分区域 D 分别给定如下：

（1）D 由曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=1$ 所围成；

（3）D 由直线 $y=x$，$y=2x$，$x=3$ 所围成.

2．交换积分次序：

（1）$\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$；

（2）$\int_0^2 dy\int_{y^2}^{y+2} f(x,y)dx$；

（3）$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$.

3．计算二重积分：

（1）$\iint\limits_{\substack{0\le x\le\pi\\0\le y\le x}} y\cos(x+y)d\sigma$；

（2）$\iint\limits_D ye^{xy}dxdy$，其中 D 由 $xy=1,\ x=2,\ y=1$ 所围成.

4．计算累次积分：

（1）$\int_0^1 dx\int_x^1 e^{y^2} dy$；

（2）$\int_0^{\pi} dx\int_0^x \frac{\sin y}{\pi - y} dy$.

5．画出区域 D，并把 $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ 化为极坐标系下的二次积分：

（1）$D=\{(x, y)|\ 1\le x^2+y^2\le 4\}$；

（2）$D=\{(x, y)|\ 2x\le x^2+y^2\le 4x\}$.

6．计算 $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$，$D=\{(x, y)|-1\le y\le 1, -2\le x\le -\sqrt{1-y^2}\}$.

7．利用极坐标变换计算：$\iint\limits_{x^2+y^2\le 4x}(x+y)dxdy$.

8．用二重积分计算曲线 $y=x^2$，$y=\sqrt{x}$ 围成的平面图形的面积.

9．用二重积分计算由坐标面与平面 $x+2y+3z=6$ 所围立体的体积.

10*．计算二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 9}|x^2+y^2-4|\,dxdy$.

11*．设 $f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$，$D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$．给定常数 z，试求下列反常积分：

1）$\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$；

2）$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$.

第七章　自测题

一、选择题

1．极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在的充分条件是 [　　].

[A] 点 $P(x,y)$ 沿无穷条路径趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 的极限均存在且相等

[B] $f_x'(x_0,y_0), f_y'(x_0,y_0)$ 存在

[C] 点 $P(x,y)$ 沿过 (x_0,y_0) 的任意直线趋于 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 的极限均存在且相等

[D] $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续

2．若 $f(xy,x+y)=x^2+y^2+xy$，则 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=$ [　　].

[A] -1　　[B] $2y$　　[C] $2(x+y)$　　[D] $2x$

3． $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的偏导数存在是其在该点可微的 [　　].

[A] 充分条件　[B] 必要条件　[C] 充要条件　[D] 非充要条件

4．设 $f(x,y)$ 定义于有界闭区域 D，下列命题正确的个数是 [　　].

[A] 0 个　[B] 1 个　[C] 2 个　[D] 3 个

1）若 f 可微、存在唯一驻点 P_0，且为极值点，则 P_0 必为最值点

2）若 f 可微，且存在最值点 P_0，则 P_0 必为驻点

3）若 f 连续，且存在唯一的极值点 P_0，则 P_0 必为最值点

4）若 f 连续于 D，则 f 在 D 内必存在最值

5. 设 $\varphi(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内具有连续的偏导数，且 $\varphi_x'(x_0,y_0)\neq 0$. 若 (x_0,y_0) 是可微函数 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 之下的极值点，则下列命题正确的是 [　　].

[A] 恒有 $f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$

[B] $f_x'(x_0,y_0)=0 \Rightarrow f_y'(x_0,y_0)=0$

[C] $f_y'(x_0,y_0)=0 \Rightarrow f_x'(x_0,y_0)=0$

[D] $f_y'(x_0,y_0)=0 \Rightarrow \varphi_y'(x_0,y_0)=0$

二、填空题

1． $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=$________________.

2. 设 $u=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{t}dt$，则 $\frac{\partial u}{\partial x}$ =________________， $\frac{\partial u}{\partial y}$ =________________.

3．设 $dz=(2x+3y)dx+(3x+2y)dy$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ =________________.

4．设在 xoy 坐标系下， $D=\{(x,y)\,|\,0\le y\le\sqrt{2}, y\le x\le\sqrt{4-y^2}\}$，则在极坐标系下， D =________________.

5．无穷限积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ =________________.

三、解答题

1．设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0\\ 0\qquad, & x^2+y^2=0\end{cases}$，讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的连续性、偏导数以及 $f(x,y)$ 的偏导函数在在点 $(0,0)$ 的连续性.

2．求下列函数的全微分：

(1) $z=x^{\ln y}$，求 $dz|_{(1,e)}$；

(2) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求 du；

(3) 已知 $f(u,v)$ 有连续的偏导数， $z=\ln f(xy,x+\ln y)$，求 dz .

3．设 $f(x,y)$ 在连续偏导数，n 为正整数，证明 $f(x,y)$ 满足

$f(tx,ty)=t^n f(x,y),\ t\in(0,+\infty)$ 的充要条件是对任意 (x,y) 有

$xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=nf(x,y)$.

4．设 $xyz=\arctan(x+y+z)$，求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1,-1)}$.

5．设 f 具有二阶连续偏导数，$u=f(x+y+z,xyz)$，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$.

6．设 $z=f(x,y)$ 由方程 $xy+yz+zx=1$所确定，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

7．求 $f(x,y)=(x^2+2x+y)e^{2y}$ 的极值.

8．已知闭区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 16\}$，求 $f(x,y)=3x^2+3y^2-x^3$ 在 D 上的最值.

9*．求周长为定值 $2p$ 的三角形面积的最大值.

(提示：$S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$，其中 x, y, z 为三角形的各边长)

10．某厂生产甲、乙两种产品，当两种产品的产量分别是 x 和 y (单位：吨)时，总收益函数为 $R=27x+42y-x^2-2xy-4y^2$，总成本函数为 $C=36+12x+8y$ (单位：万元)。此外，生产甲种产品每吨还需支付排污费1万元，生产乙种产品每吨还需支付排污费 2 万元。在限制排污费用支出总额为6 万元的情况下，两种产品的产量各为多少时总利润最大? 最大总利润是多少?

11．计算二重积分：

（1）$\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ x\le y\le \sqrt{x}}}\frac{\sin y}{y}dxdy$；

（2）$\iint\limits_{\substack{0\le y\le 1\\ y\le x\le \sqrt[3]{y}}}e^{x^2}dxdy$

（3）$\iint\limits_{\substack{-1\le x\le 1\\ -1\le y\le 1}}\sqrt{|y-x|}dxdy$

（4）$\iint\limits_{0\le y\le x} e^{-x-y}dxdy$

12*．用二重积分计算圆锥体 $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=2$ 所截部分的体积.

13*．已知 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的正的连续函数，证明：

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx\ge(b-a)^2；$$

14*．已知 $f(x),g(x)$ 连续于 $[a,b]$，试证不等式：

$$[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx.$$

15*. 已知 $p(x),\ f(x)$ 及 $g(x)$ 连续于 $[a,b]$，且 $p(x)\ge0$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 均单增，证明

$$\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx\int_a^b p(x)dx\ge\int_a^b p(x)f(x)dx\int_a^b p(x)g(x)dx.$$

错题小结

第八章　无穷级数

§8.1　常数项级数的概念和性质

1. 利用级数收敛定义判断下列级数是否收敛；若收敛，求其和值.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{n+1}$.

2. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且和值为 S，证明：

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}+u_{n+2})$ 收敛，且和值为 $2S-2u_1-u_2$；

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+\frac{1}{2^n})$ 收敛.

4. 利用级数性质以及几何级数与调和级数的敛散性，判别下列级数敛散性：

(1) $\frac{1}{20}+\frac{1}{\sqrt{20}}+\frac{1}{\sqrt[3]{20}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{20}}+\cdots\cdots$；

(2) $1+\frac{1}{5}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$；

(3)* $\frac{2}{1}-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}-\frac{2^2}{3^2}+\frac{6}{5}-\frac{2^3}{3^3}+\frac{8}{7}-\frac{2^4}{3^4}+\cdots\cdots$.

5. 给定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，有 $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=a,\lim_{n\to\infty}u_n=0$，试证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，其和 $S=a$.

§8.2 正项级数

1．利用比较判别法或其极限形式判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{5^n}$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\sqrt{n+3}}$；

(3)* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$．

(4)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$．

2．利用比值判别法或根值法判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n+1)!}$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 5\cdot 9....(4n-3)}{2\cdot 5\cdot 8....(3n-1)}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\cdot n!}{n^n}$；

3*．证明：若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 均收敛.

§8.3　任意项级数

1. 判别下列级数是绝对收敛，条件收敛还是发散？

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{\dfrac{n}{n+2}}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos na}{(n+1)^2}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$；

(4)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}2^{n^2}}{n!}$.

2. 判别下列交错级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\left[n+(-1)^n\right]^2}$；

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots\cdots$.

3*. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，试证：

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n}u_n$ 绝对收敛；

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_n+\dfrac{1}{n}\right)^2$ 收敛.

§8.4　幂级数

1．求下列级数的收敛半径、收敛区间和收敛域：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n}$；

2．求下列级数的收敛域，以及它们在收敛域上的和函数：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$.

3. 求解幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 收敛域及和函数，并求常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 的和.

4．已知 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(2x-3)^n$ 在 $x=3$ 时收敛，试判定 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(2x-3)^n$ 在以下各点处的敛散性：（1） $x=0$；（2） $x=2$；（3） $x=\frac{1}{2}$；（4） $x=4$.

5．将下列函数展开成 x 的幂级数，并写明幂级数的收敛域.

(1) $f(x)=\frac{x^2}{1+x}$；

(2) $f(x)=\ln(4-3x)$.

6．求函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 在指定点 $x_0=2$ 的幂级数展开式，并求收敛域.

第八章　自测题

一、选择题

1. 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充分必要条件是［　　］.

［A］$\lim_{n\to\infty}u_n=0$　　［B］数列$\{u_n\}$单调有界

［C］部分和数列$\{S_n\}$有上界　　［D］$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho<1$

2. 下列结论中正确的是［　　］.

［A］若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$发散；

［B］若级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛；

［C］若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$收敛；

［D］若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$的敛散性不确定

3. 已知$\lim_{n\to\infty}a_n=a$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$［　　］.

［A］收敛且其和为a_1　　［B］收敛且其和为$-a$

［C］收敛且其和为a_1-a　　［D］发散

4. 下列级数中发散的是［　　］.

［A］$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a-1}{a}\right)^n\ (a>1)$　　［B］$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

［C］$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$　　［D］$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$

5. 设$0\le a_n<\frac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots)$，则下列级数中收敛的是［　　］.

［A］$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$　　［B］$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$　　［C］$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$　　［D］$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$

6. 命题“若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$发散”成立的条件是［　　］.

［A］$a_n\le b_n$　［B］$a_n\le|b_n|$　［C］$|a_n|\le|b_n|$　［D］$|a_n|\le b_n$

7. 若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=-1$收敛，则该级数在$x=2$处［　　］.

［A］条件收敛　　［B］绝对收敛

［C］发散　　［D］敛散性不能确定

8. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a$，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{bx}\ (b>1)$ 的收敛半径 $R=$ [　　].

[A] a　　[B] $a^{1/b}$　　[C] $\dfrac{1}{a}$　　[D] $\left(\dfrac{1}{a}\right)^{1/b}$

二、填空题

1. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n - u_{n+1})$ 收敛于__________.

2. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n + u_{n+1})$ 收敛于__________.

3. 已知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!} = e$，则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3n+2}{n!}$ =____________.

4. 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{n}+1}\right)$ 的敛散性是______________，

级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^{\alpha}-1} - \dfrac{1}{n^{\alpha}+1}\right), (\alpha > \dfrac{1}{2})$ 的敛散性是____________.

5. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^n$ 在 $x=3$ 条件收敛，则该幂级数的收敛半径至少等于____________.

三、解答题

1. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{(n+1)^{1/3}}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}\cos^2\dfrac{n\pi}{3}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$.（$x>0$）

2．证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{\ 2}$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$绝对收敛.

3．求下列级数的收敛域：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\ln x\right)^n$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}}\sin^n x$.

4．求解幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$的收敛半径、收敛区间、收敛域以及和函数，

并求常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$的和.

5．将下列函数展开为 x 的幂级数，并求其收敛域：

(1) $f(x)=x^3e^{-x}$；

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$；

(3) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

错题小结

第九章　微分方程初步

§9.1　微分方程的基本概念

1. 验证下列各函数是否为所给微分方程的通解：

(1) $y'+y=e^{-x}$， $y=(x+C)e^{-x}$；

(2) $x''+9x=10\cos 2t$， $x=2\cos 2t+C_1\cos 3t+C_2\sin 3t$；

(3) $(x-2y)y'=2x-y$， $x^2-xy+y^2=C$.

2. 验证函数 $y=\dfrac{1}{x+1}$ 是否为初值问题 $(x+1)y'+y=0$， $y(0)=1$的解.

3. 验证函数 $y=1$是否分别为：1）微分方程 $y''-2y'+y=1$的解；2）初值问题 $y''-2y'+y=1$， $y(0)=1$， $y'(0)=1$的解.

§9.2 一阶微分方程

1. 求下列方程的通解或在给定条件下的特解：

(1) $yy' + xe^{y} = 0,\ y(1) = 0$；

(2) $x\dfrac{dy}{dx} = y\ln\dfrac{y}{x}$；

(3) $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$；

(4) $y' - \dfrac{y}{x+1} = (x+1)e^{x}$， $y(0) = 1$.

2. 设函数 $y(x)$ 满足方程 $y(x) = \int_0^{3x} y\left(\dfrac{t}{3}\right)dt + e^{2x}$，试求 $y(x)$.

3*. 设函数 $z = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$，试求 $f(x)$.

4*. 设 $y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots\ldots(2n)}x^{n}$，证明：和函数 $y(x)$ 满足微分方程

方程 $(1-x)y' = \dfrac{y}{2}$，并求 $y(x)$.

附录一：期中模拟试卷

《微积分二》期中模拟试卷一（考到 7.3）

一、单选题（共 4 小题，每小题 2 分，满分 8 分）

1．已知函数在 R 上 $f(x)$ 连续，且 $F'(x)=f(x), x\in R$，则下列等式中不成立的是 [　]

[A] $\int F'(x)dx=F(x)+C$　　[B] $[\int f(x)dx]'=f(x)+C$

[C] $d[\int F(x)dx]=F(x)dx$　　[D] $d[\int dF(x)]=f(x)dx$

2．下列不定积分中，能用初等函数表示的是 [　]

[A] $\int \frac{1}{1+x^3}dx$　　[B] $\int \frac{\sin x}{x}dx$

[C] $\int \sqrt{1+x^3}dx$　　[D] $\int e^{-x^2}dx$

3．设 $f(x)$ 连续于 R，且 $F'(x)=f(x), x\in R$，给定以下四个命题：

1）$F(x)$ 为偶函数的充要条件是 $f(x)$ 为奇函数；

2）$F(x)$ 为有界函数的充分非必要条件是 $f(x)$ 为有界函数；

3）$F(x)$ 为奇函数的充要条件是 $f(x)$ 为偶函数；

4）$F(x)$ 为周期函数的必要非充分条件是 $f(x)$ 为周期函数，

其中的真命题是 [　]

[A] 1）2）　[B] 2）3）　[C] 1）4）　[D] 3）4）

4．函数 $f(x,y)=\begin{cases}1, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处 [　]

[A] 可微且偏导数存在

[B] 不可微但偏导数存在

[C] 不可微且偏导数不存在

[D] 不可微但连续

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 3 分，满分 12 分）

1．若 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{x^2}，则 $\int xf'(x)\mathrm{d}x=$______________.

2．设 $f(x)=\min\{x^2, x^3\}$，则 $\int_{-1}^{4} f(x)\mathrm{d}x=$_______.

3．无穷限积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x=$______.

4．设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，

则其在 $(0,0)$ 处的偏导 $f_x(0,0)=$_____.

三、解答题（本题共 8 小题，满分 60 分）

1．（**6 分**）求 $\int_0^{\pi/2}(\sin x+\cos x)\cos 2x\,\mathrm{d}x$.

2．（**6 分**）求 $\int_0^4 \ln(1+\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$.

3．（**7 分**）求 $\int_0^{\pi/2}[\int_x^{\pi/2}\frac{\sin t}{t}dt]\,dx$.

4．（**7 分**）设 $\int_0^x f(x-t)tdt=e^x-x-1$，求连续函数 $f(x)$.

5．（**8 分**）设 $f(u,v)$ 可微，$f_u(1,2)=3$，$f_v(1,2)=4$，求 $z=f(xy,x+y)$ 在 $(1,1)$ 处的全微分.

6．（**8 分**）设 $y=y(x)$ 是由函数方程 $e^{xy^2}=x+y+1$ 在 $(0,0)$ 点附近所确定的隐函数，求曲线 $y=y(x)$ 在 $(0,0)$ 点处的法线方程.

7.（**9 分**）过点 $(-1,-1)$ 作曲线 Γ ： $y=x^3$ 的切线 L ，求：

(1) Γ 与 L 所围平面图形 D 的面积；(**6 分**)

(2) 图形 D 的 $x\geq 0$ 的部分绕 x 轴旋转一周所得立体的体积．(**3 分**)

8.（**9 分**）设 $f(x)$ 连续于 $[a,b]$ ，且 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b e^x f(x)dx = 0$.

(1) 证明： $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有两个零点；(**6 分**)

(2) 进一步，在什么条件下， $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有三个零点？试说明理由．(**3 分**)

《微积分二》期中模拟试卷二（考到 7.3）

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 2 分，满分 10 分）

1. 设 $\int f(x)dx=\sqrt{1+x}+C$，则 $\int xf(x^2)dx=$________.

2. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln(1-t)dt}{x^2}=$________.

3. $\int_{-1}^{1} x^3-x^2+x\cos x^2 dx=$________.

4. 利用全微分可得 $(1.02)^{3.03}\approx$________.（精确到小数点后两位）

5. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3n+1}+\dfrac{1}{3n+2}+\cdots+\dfrac{1}{3n+n}\right)=$________.

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 2 分，满分 8 分）

1．下列结论正确的是（　）

（A）$\int_{-1}^{1}x^{-3}dx=0$　（B）$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\sin x}{2+\cos x}dx=0$　（C）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x t^{-7}dt}{\int_1^x t^{-5}dt}=0$

（D）$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x 2e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$

2．下列命题正确的个数是（　）

（A）1个　（B）2个　（C）3个　（D）4个

1）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积， $f(x)\geq 0$ 且不恒为零，则 $\int_a^b f(x)>0$

2）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

3）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积

4）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续且以 T 为周期，则对任意常数 a，均有 $\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$

3．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且满足 $f(x)=3x^2-x\int_0^1 f(t)dt$，则 $\int_0^1 f(x)dx=$（　）

（A）$\dfrac{1}{2}$　（B）$\dfrac{2}{3}$　（C）$\dfrac{5}{4}$　（D）2

4．下列命题错误的个数是（　）

（A）1个　（B）2个　（C）3个　（D）4个

1）若 $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$ 均存在，则 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微且 $dz|_{(x_0,y_0)}=f'_x(x_0,y_0)dx+f'_y(x_0,y_0)dy$

2）若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的偏导 $f'_x(x_0,y_0)$ 存在，则 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处连续

3）若点 $P(x,y)$ 沿过 (x_0,y_0) 的任意直线趋于 (x_0,y_0) 时 $f(x,y)$ 的极限都

存在且相等，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在

4）若 $f(0,0)=0$ 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-2x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，则 $z=f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处

可微

三、（本题共 5 小题，每小题 7 分，满分 35 分）

1．计算 $\int_2^5 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$．

2．求 $\int_{-1}^{2} \max\{x^2,x\}dx$ （$\max\{a,b\}$ 表示 a,b 两数的最大者）

3．判定 $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx$ 敛散性．若收敛，求其值．

4．设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $\sin z = x^2yz$ 确定的隐函数，求 dz．

5．已知函数 $f(u,v)$ 可微，$f_u'(2,0)=3$，$f_v'(2,0)=4$．试求函数 $z=f(xy,y-2x)$ 在 $(x,y)=(1,2)$ 处的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}$．

四、（满分 10 分）设平面图形由曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $y=x$ 围成．试求：

1）此平面图形的面积（5 分）；

2）此平面图形绕 y 轴旋转一周而成的立体体积（5 分）．

五、（满分 7 分） 已知某产品的固定成本为50，边际成本和边际收益分别为 $MC(q)=q^2-4q+6$， $MR(q)=105-2q$，其中 q 为产品的产量（销售量），试求最大利润.

六、证明题（本题共 2 小题，每小题 5 分，满分 10 分）

1. 已知 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上连续，试证：$\int_0^a f(x)dx = a\int_0^1 f(ax)dx$.

2. 设 $f(x)$ 连续于 $[0,1]$，可导于 $(0,1)$，且满足 $f(0)=2\int_{\frac{1}{2}}^1 e^x f(x)dx$. 试证：

存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

《微积分二》期中模拟试卷三（考到 7. 3）

一、填空题（本题共 5 小题，每空３分，满分 15 分）

1. 已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，且 $F(1)=1, F(0)=0$，则 $\int_0^1 f(x)\,dx=$________.

2. $\int_{-1}^{1} x^3\left[5x+(x+\sin x)^{2016}\right]dx=$____________.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+......+\sin\frac{n\pi}{n}\right)=$____________.

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\sin(xy)}{y}=$____________.

5. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则在该点________连续.（选填＂一定＂，＂不一定＂）.

二、计算题（本题共 5 小题，每题 7 分，满分 35 分）

1. 已知 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x\le\pi \\ 0, & other\end{cases}$，计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

2. 计算 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx$.

3. $u=\sin(x^2-y^2-e^z)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$、$\frac{\partial u}{\partial z}$.

4. 设 $z=x^2-2xy+y^3$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

5. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f(xy,x-y)$，求 dz，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

三、解答题（本题共 5 小题，每题 10 分，满分 50 分）

1．设 $f(x)$是 R 上的连续函数，并满足$\int_0^x f(x-t)e^{-t}dt = x^2$，试求 $f(x)$.

2．曲线 $y = x^3, y = 0, x = 2$ 所围成一个封闭的平面图形，（1）求该平面图形的面积；（2）求将该平面图形绕 x 轴旋转一周形成的旋转体体积.

3．已知某产品的固定成本为 50，边际成本和边际收益函数分别为 $MC(q) = q^2 - 4q + 6$，$MR(q) = 105 - 2q$，其中 q 为产品的销售量（产量），试求最大利润.

4．设 $z = f(x, y)$是由方程$\sin z = xy + yz + xz$ 确定的隐函数，求 dz .

5．设 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$，分别讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是否连续、是否存在偏导数、是否可微.

附录二：期末模拟试卷

《微积分二》期末模拟试卷一

一、填空题（共 5 小题，每小题 2 分，满分 10 分）

1．定积分 $\int_{-1}^{1} x^5+2x^2-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=$______________.

2．设 $f(x)=\int_{x^2}^{0}\ln(1+t^2)dt$，则导数 $f'(1)=$_____________.

3．将函数 xe^x 展开成 x 的幂级数后，其中 x^4 的系数等于_______.

4．交换积分次序 $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx=$_______________.

5．微分方程 $y'+y=e^{-x}$ 满足 $y(0)=1$ 的解为_______________.

二、单项选择题（共 5 小题，每小题 2 分，满分 10 分）

1．由曲线 $y=\sqrt{x}$，$x=0$，$y=1$ 围成的平面图形绕 y 旋转一周后所成立体的体积等于［　　］

(A)　$\frac{\pi}{5}$　　(B)　$\frac{4\pi}{5}$　　(C)　$\frac{\pi}{2}$　　(D)　π

2．下列命题**正确的个数**是［　　］

(A)　0 个　(B)　1 个　(C)　2 个　(D)　3 个

1）设 $f(x)$ 连续于 $[0,+\infty)$ 且严格大于零，则 $a\to+\infty$ 时 $\int_0^a f(x)dx\to+\infty$.

2）若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处两个偏导 $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$ 均存在，则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 也存在.

3）若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极小值，则 $f(x_0,y)$ 也在 y_0 处取得极小值.

4）若 (x_0,y_0) 是可微函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 内部的唯一驻点且极小值点，则 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在 D 上的最小值点.

3．反常积分 $\int_1^{+\infty} x^p dx$ 收敛的充要条件是［　　］

(A)　$p<1$　(B)　$p>1$　(C)　$p<-1$　(D)　$p>-1$

4．下列级数收敛的是［　　］

(A)　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$　　(B)　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$　　(C)　$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{2^n}\right)$　　(D)　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$

5．下列命题**错误的个数**是［　　］

(A) 1 个　(B) 2 个　(C) 3 个　(D) 4 个

1）绝对收敛的级数必然条件收敛.

2）若数列$\{u_n\}$单调递减、各项恒正且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$条件收敛.

3）若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

4）若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=2$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 可能收敛.

三、计算题（共 7 小题，每小题 6 分，满分 42 分）

1．求$\int_{-1}^{2}f(x)dx$，其中$f(x)=\begin{cases}2-x, & x\le 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$.

2．判断$\int_{0}^{+\infty}xe^{-2x}dx$的敛散性．若收敛，求其值.

3．设$z=\cos(x^2y)$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

4．设$z=z(x,y)$由方程$x^2z=ye^z$所确定，求$dz\big|_{(1,0,0)}$

5．求$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{x}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin y}{y}dy$.

6．求 $\iint\limits_{D}|y-x|dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 2,1\le y\le 2\}$.

7．试求由曲面 $z=e^{-(x^2+y^2)}$，$x^2+y^2=4$，$z=0$ 所围成的封闭立体体积.

四、（8 分）判定级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\tan\dfrac{\pi}{2n}$ 的敛散性．若收敛，指明是绝对收敛还是条件收敛.

五、（8 分）设有幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}x^n$，试求：

1）该级数的收敛域；

2）该级数在收敛域上的和函数.

六、(7 分) 设某产品的生产仅需耗费资本和劳动力两种要素．经统计，该产品的产量Q与这两种要素投入量K,L的依赖关系为$Q=K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$．已知资本要素的价格为$8$，劳动力要素的价格为$2$．当产量限定为$240$时，试问：使得总成本最小的资本要素投入量$K$与劳动力要素投入量$L$各自为多少？

七、(5 分) 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，且满足$f(x)=x^2-3x\int_0^1 f(t)dt$，试求$f(x)$.

八、证明题（共 2 小题，每小题 5 分，满分 10 分）

1、已知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，试证：$\frac{1}{2}\int_1^3 f(x)dx=\int_0^1 f(1+2x)dx$.

2、已知$f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(a)=a$，且$\int_a^b f(x)dx=\frac{b^2-a^2}{2}$，试证：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)+f'(\xi)=\xi+1$.

《微积分二》期末模拟试卷二

一、填空题（共 6 小题，每小题 2 分，满分 12 分）

1．已知 $f(x)=\int_0^x te^t dt$，则 $f'(x)=$____________.

2．将函数 $f(x)=e^x$ 展开成 x 的幂级数，其结果是______________.

3． $f(x,y)$ 满足 $f(0,0)=0$，并且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)+2x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，则 $f_y'(0,0)=$_____.

4．已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和 $S_n=\dfrac{2n-n^2}{2n^2-1}$，则该级数的和等于______.

5．微分方程 $y'+y=1$ 满足 $y(0)=0$ 的解为____________.

6．以下命题正确的是____________.（**不定项选择**）.

(A) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积.

(B) $f_x'(x_0,y_0)$ 存在，当且仅当 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处可微.

(C) 若 (x_0,y_0) 是可微函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 内部的唯一驻点且极小值点，则 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在 D 上的最小值点.

(D) 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n}{u_n}=\dfrac{1}{e}$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

二、计算与分析（共 9 小题，满分 60 分）

1．判断 $\int_{-\infty}^{0}\dfrac{2}{1+x^2}dx$ 的敛散性．若收敛，求其值.**（6 分）**

2．已知 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\ln(x^2+2y)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.**（6 分）**

3．设 $z=f(x,y)$ 由方程 $z^5+2xz-y=1$ 所确定．试求：**（7 分）**

1） dz；

2） $f(0.05,0.05)$ 的近似值（结果保留至小数点后两位）.

4．求 $f\left(x,y\right)=x^3+y^3-3xy$ 的极值，并指明极大值还是极小值．**（6 分）**

5．求 $\iint\limits_D xdxdy$，其中 D 由 $y=\sqrt{x}$， $y=x$ 围成．**（6 分）**

6．交换积分次序 $\int_0^1 dx\int_x^1 e^{y^2}dy$，并计算出结果．**（6 分）**

7．判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 的敛散性．若收敛，指明是绝对收敛还是条件收敛．**（8 分）**

8．对于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}x^n$，试求：**（8 分）**

1）该级数的收敛域；　　2）该级数在收敛域上的和函数．

9．已知 $f\left(x\right)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x\le \pi\\ 0, & x<0或x>\pi\end{cases}$，对于给定的 $t\in\left(-\infty,+\infty\right)$，计算 $\Phi\left(t\right)=\int_0^t f\left(x\right)dx$．**（7 分）**

三、应用（共 3 小题，满分 23 分）

1.**（共 8 分）**曲线 $y=x^2$， $y=x$ 围成一封闭的平面图形，试求：

1）该图形的面积；

2）该图形绕 x 轴旋转一周所成立体的体积.

2.**（7 分）**已知某地区居民各自的税前收入（单位：十万元）介于 0 到 4 之间。收入为 $x\in[0,4]$ 的居民占总人数的比例为 $-\dfrac{3}{32}\left(x^2-4x\right)$，并且需要缴纳个人所得税 $\dfrac{x}{5}$，试求该地区居民的税后人均收入.

3.**（8 分）**漂流到孤岛上的鲁滨逊为了生存，需要在椰子采摘与捕鱼两项食物获取活动上分配精力。鲁滨逊的健康水平记为 U，其收获的椰子和鱼的数量分别记为 x 和 y，三者之间满足 $U=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$。受制于自身的技能与自然资源，他能够获取的椰子和鱼在数量上满足 $x^2+2y^2=1$。试问：椰子采摘量 x 和鱼的捕捞量 y 各自多少时，能为鲁滨逊带来最高的健康水平？

四、综合（5 分）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且对任意 $t\geq 0$，满足

$$f(t)=1-\iint\limits_{x^2+y^2\leq t^2} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy.$$ 试求 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

《微积分二》期末模拟试卷三

一、填空（共 5 小题，每小题 2 分，满分 10 分）

1. 已知 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，xe^x 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int_0^1 f(x)dx =$____________.

2. 已知 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则积分上限函数的导数 $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'$ =____________.

3. 已知 $f(x)$ 是 T 为最小正周期的连续的奇函数，则 $\int_0^T f(x)dx$ =____________.

4. 将函数 e^x 在 $x=0$ 处展开成 x 的幂级数后，其中 x^4 的系数等于____________.

5. 已知首项等于 5 的数列 $\{u_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$ 的和等于____________.

二、选择题（共 5 小题，每小题 2 分，满分 10 分）

1. 反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 收敛的充要条件是（　　）.

A. $p<1$　　B. $p>1$　　C. $p\le 1$　　D. $p\ge 1$

2. 由曲线 $y=\sqrt{x}$，直线 $x=2$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周，所得旋转体的体积等于（　　）.

A. 1　　B. π　　C. 2　　D. 2π

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=$（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 不存在

4. 下列命题中，正确的是（　　）.

A. 若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处不连续，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处不存在偏导数.

B. 若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处存在偏导数.

C. 若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处不可微，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处不存在偏导数.

D. 若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处不存在偏导数，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处不可微.

5. 下列命题中，**错误的**是（　　）.

A. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$条件收敛，但不绝对收敛.

B. 若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(2x-1)^n$在$x=-1$处收敛，则在$x=1$处绝对收敛.

C. 若$\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

D. 两个正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$满足$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$同时收敛或同时发散.

三、计算题（共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）

1．已知$f(t)=\begin{cases}e^{-t}, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}$，求$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\,dt$.

2．设$z=\sin(x^2y)$，求二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

3. 交换积分次序$\int_0^{\frac{\pi}{6}}dy\int_y^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{x}dx$，并计算出结果.

4. 求一阶线性微分方程$y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x^2}$的通解.

5. 求由三元方程$\ln(1+x+yz)=x+y+z$所确定的隐函数$z=z(x,y)$的偏导数和全微分.

四、解答题（共 3 小题，满分 24 分）

1. 按照“分割、近似代替、求和、取极限”的四个步骤，计算由抛物线 $y=x^2$，直线 $x=0$， $x=1$ 以及 x 轴所围成的平面图形的面积.(6 分)

2. 利用极坐标计算二重积分 $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$，并据此写出概率积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ 的值. (8 分)

3. (10 分)对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2}x^n$，试求：

1）该级数的收敛域；

2）该级数在收敛域上的和函数.

五、应用题（共 2 小题，每小题 10 分，满分 20 分）

1. 某企业为生产甲、乙两种型号的产品，投入固定成本 10（万元）。设该企业生产甲、乙两种型号的产品分别为 x（件）和 y（件），且这两种产品的边际成本分别为 $20+0.5x$（万元/件）和 $6+y$（万元/件），两种产品的总收益为 $R(x,y)=-\frac{3}{4}x^2+22x+xy+9y$.

（1）求甲、乙两种型号产品的总成本 $C(x,y)$。

（2）当甲、乙两种型号的产品分别为多少件时，总利润最大，并求出最大利润。

2. 投资者小王希望将 100 万人民币投资于股票市场，用于购买 A、B、C 三种股票，打算将$100x$万元、$100y$万元、$100z$万元分别用于购买 A、B、C 三种股票，即(x,y,z)为投资 A、B、C 三种股票的投资比例，也称为投资组合，$0\le x,y,z\le 1$且$x+y+z=1$。根据历史经验，对于给定投资比例(x,y,z)的投资组合，其风险可以用$U=0.04x^2-0.04xy+0.09y^2+0.01z^2$来衡量。小王希望其投资的风险最小，请帮助小王确定其最优投资比例(x,y,z)为多少？

六、证明题（共 1 小题，满分 6 分）

设$f\left(x\right)$在$\left[a,b\right]$上连续，$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(x)e^x dx=0$，求证：$f\left(x\right)$在$\left(a,b\right)$内至少存在两个不同的零点.

《微积分二》期末模拟试卷四

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 2 分，满分 10 分）

1. 已知 $F'(x)=f(x), F(2)=2, F(1)=1$，则 $\int_2^1 f(x)dx=$________.

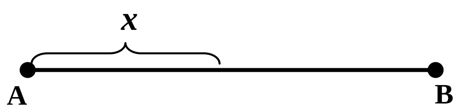
2. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t dt}{x^2}=$________.

3. 函数 $z=f(x,y)$ 可微，且满足 $dz=3x^2ydx+x^3dy$，

则 $f_x'(x,y)=$________.

4. 反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=$________.

5. 某地居民沿着长度为1的街道 AB 分布，距路口 A 为 x 的居民的人口密度为 $p(x)\in[0,1]$，如下图所示。假设 $p(x)$ 可视为定义在 $[0,1]$ 上的连续函数. 某超市开设在路口 A，则该地居民从住地到超市的平均距离等于________.



二、选择题（本题共 4 小题，每小题 2 分，满分 8 分）

1．下列命题正确的个数是［　］

（A）1 个　（B）2 个　（C）3 个　（D）4 个

1）若 $f(x)$ 连续于 $[a,b]$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$.

2）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导，且满足 $\Phi'(x)=f(x)$.

3）若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上必有最大最小值.

4）若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的偏导数 $f_x'(x_0,y_0), f_y'(x_0,y_0)$ 均存在，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微.

2．函数 $z=3xy+x^3-y^3$ 的所有极小值点是［　］

（A）$(0,0)$　（B）$(1,-1)$　（C）$(0,0)$ 与 $(1,-1)$　（D）以上选项都不对

3．由曲线 $y=\sqrt{x}$，$y=x$ 围成的平面图形面积等于［　］

（A）$\dfrac{1}{6}$　（B）$\dfrac{2}{3}$　（C）$\dfrac{1}{2}$　（D）1

4．下列命题正确的个数是［　］

（A）4 个　（B）3 个　（C）2 个　（D）1 个

1）若 $f(x)$ 连续于 $[0,+\infty)$ 且严格大于零，则 $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a f(x)dx=+\infty$.

2）若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$ 存在，则 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

3）若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极大值，则 $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处取得极大值.

4）若 (x_0,y_0) 是可微函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 内部的唯一驻点且极小值点，则 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在 D 上的最小值点.

三、计算题（共 7 小题，第 1 至 6 每题 6 分，第 7 小题 8 分，满分 44 分）

1．已知 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x>0 \\ 1-x, & x\le 0 \end{cases}$，求 $\int_{-1}^{2} f(x)dx$.

2．判定 $\int_0^{+\infty} 2^{-x}dx$ 的敛散性．若收敛，求其值.

3． $z=x^3y-x^2+xy^2-e$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

4．设 $z=z(x,y)$ 由方程 $xyz=\sin z$ 所确定，求 dz.

5．求 $\iint\limits_D ydxdy$，其中 D 由 $x=0,\ y=1,\ y=x$ 围成.

6． $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 4\}$.

7．甲、乙两种商品给消费者带来的主观满足水平（“效用”）记为U．当这两种商品的消费量分别为x, y时，$U = x^3y^2$．已知甲、乙两种商品的单价分别为20元和10元，消费者可支配的收入为1000元．试问：消费者分别购买多少数量的甲、乙商品，可最大化自身效用？

四、利用全微分计算$(1.015)^{2.013}$的近似值（写出计算过程，结果保留至小数点后两位）.**（8 分）**

五、（本题共 2 小题，每小题 5 分，满分 10 分）

1. 已知 $f(x)$是$\Re$上的连续函数，试证：$\int_0^4 xf(x)dx = 2\int_0^2 x^3 f(x^2)dx$.

2. 设 $f(x)$的导函数 $f'(x)$在$\Re$上连续，$g(x)=\int_a^x (x-t)f'(t)dt$，$a$为给定的常数．试求 $g'(x)$.