

皆既月食から月の直径を計算する、更に地球との距離を求めよう

3年ぶりに、2018年1月31日20時50分から翌日0時12分までに月食があった。

皆既食は21時50分から23時8分、食分の最大は22時30分で1.321だった。

このとき、多くの人々が、暁月すなわち赤い月に感激して見入っていたらしい。

しかし、この天体観測イベントで月の大きさや距離が計算できるかもしれないと思う人がどれほどいただろう。

古代の哲人たちは、図学(Graphic science)的に月の大きさあるいは変形を求めていた。

図学なんて、CAD時代の現代では、すでに役目を終えた学問だろうとも思われる。

しかし、数学の幾何の応用だと思えば、立派な科学教材になる。

ということで、実際に計算して見よう。

計算には、皆既月食のピークではなく、次の写真のように、重なり始まる部分食のところで計測する。



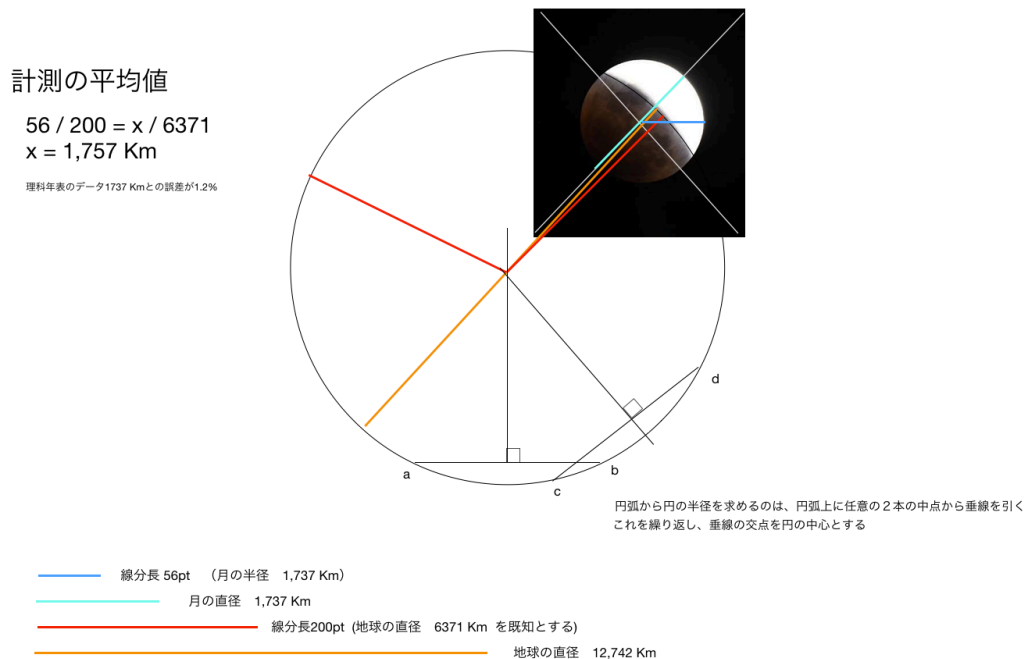
写真は、9時32分の部分食、千葉日報オンラインから借用

上の図は、地球の影の輪郭が明瞭で、計算には好都合だ。

ただ、Mare Imbrium (雨の海)の影が、少しだけ地球の影の輪郭を見にくくしている。

これを、台紙あるいはKeynote (power point) に貼り付け、円の中心と直径比を図学的に求める。

さて、この図学問題で使える数学は、三角比と、次の定理である。



(定理) 円弧上の任意の2点の線分の中点から垂線を引く、また別の任意の2点から垂線を引く。
この垂線の交点は円の中心である。

写真の上から月の半径に相当する線分の長さは、56ptであった。

次に、地球の半径に相当する線分の長さは、200ptであった。

地球の半径を既知の 6,371Kmとする。(注1)

これから、三角比で、月の半径を計算できる。

$$56 \text{ pt} / 200 \text{ pt} = x / 6371 \text{ km}$$

$$x = 1,757 \text{ km}$$

この結果は、理科年表のデータ(注2)との誤差が1.2%と、十分な精度であった。

さらに、地球と月との起動半径を求める。

これには、月食ではなく皆既日食を利用する。

ただし、実際の月の軌道は真円でなく約35万Kmから40万Kmの楕円軌道を描く。

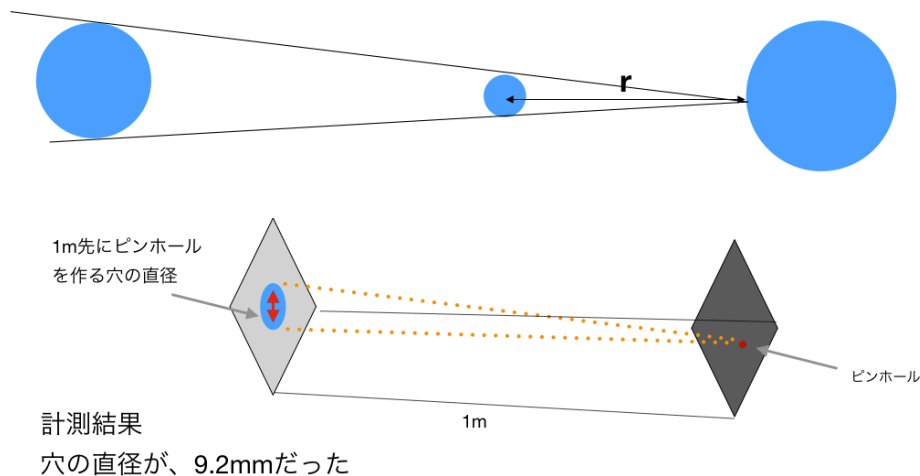
平均値は38万Kmとされている。

計算は、皆既日食時の月と地球の軌道半径を求める。

これには、ピンホール実験が必要だ。

ピンホール実験とは、小さな穴から入る光源が、離れた平板上に点を作るとき、その離れた距離を計測する実験である。

月と地球の距離は、皆既日食を利用して計算する



$$\begin{aligned} 1,000 \text{ mm} / 9.2 \text{ mm} &= r \text{ km} / (1,757 \times 2) \text{ km} \\ r &= 381,957 \text{ km} \end{aligned}$$

ここで、皆既日食の時、見かけの月の直径と太陽の直径が等しいと仮定する。

ピンホールになる時の穴の直径は、9.2mm. (注4)

三角比の式は、次の通り。

$$\begin{aligned} 1,000 \text{ mm} / 9.2 \text{ mm} &= r \text{ km} / (1,757 \times 2) \text{ km} \\ \text{ならば、} r &= 381,957 \text{ km} \text{ となる。} \end{aligned}$$

2018. 2. 10

注1) 地球の半径 R は、1分1NM, 1.852km . ならば赤道長が4万km、半径R = 6,371k

注2) 月の半径 x は、理科年表によると、1,737km、軌道半径r が381,957km

注3) 月の質量 m は、角運動量保存則から得られる. $F = G M m / r^2 = m r \omega^2 = m v^2 / r$ 、

Gは重力定数 は、 6.67408×10^{-11} 、 $v = 1,020 \text{ m/s}$ 、 $M = r v^2 / G$ 、 $= 5.9724 \times 10^{24} \text{ kg}$

これから月の質量は、 $m = 7.3458 \times 10^{22} \text{ kg}$

月の質量が求められたついでに、ついでに月面上の十重力加速度をExcelで計算してみよう.

月と地球の比較

	radius	square	volume	G const.	mass	gravitational acceleration
Lunar	1,737	3,017,169	5,240,822,553	6.67408E-11	7.3458E+22	1.62491583547358E+06
Earth	6,371	40,589,641	258,596,602,811	6.67408E-11	5.9724E+24	9.82030745036646E+06
rate	0.27	0.07	0.02	1	0.01	0.17
1 / rate	3.67	13.45	49.34	1	81.30	6.04

月の表面での重力加速度は、地球の表面の重力加速度の1/6となる

注4) このデータは、以前に行った皆既日食実験による.