计算机科学MOOC课程群

离散数学基础

- 自然语言形式化
  - 简称为 A、E、I、O 的全称肯定命题 A、全称否定命题 E、特称肯定命题 I 和特称否定命题 O 是传统形式逻辑研究的四种主要的简单命题结构。在谓词逻辑中需要对这四种命题进行形式化表示。

- 全称肯定命题 A
  - SAP：一切 S 是 P。
    - 即：对一切 x，如果 x 是 S，那么 x 是 P。
    - 形式化：$(\forall x)(S(x)\rightarrow P(x))$
  - 例1：所有的有理数都是实数。
    - $S(x)$：x 是有理数。$P(x)$：x 是实数。
    - 形式化：$(\forall x)(S(x)\rightarrow P(x))$

- 全称否定命题 E
  - SEP：没有 S 是 P (一切 S 不是 P)。
    - 即：对一切 x，如果 x 是 S，那么 x 不是 P。
    - 形式化：$(\forall x)(S(x)\rightarrow \neg P(x))$
  - 例2：所有的有理数都不是无理数。
    - $S(x)$：x 是有理数。 $P(x)$：x 是无理数。
    - 形式化：$(\forall x)(S(x)\rightarrow \neg P(x))$

- 特称肯定命题 I
  - SIP：有 S 是 P
    - 即：有 x，x 是 S，x 又是 P。
    - 形式化： $(\exists x)(S(x)\wedge P(x))$
  - 例3：有的实数是有理数。
    - $S(x)$：x 是实数。$P(x)$：x 是有理数。
    - 形式化：$(\exists x)(S(x)\wedge P(x))$

- 特称否定命题 O
  - SOP：有 S 不是 P

- » 即：有 x，x 是 S，x 又不是 P。
    - » 形式化：$(\exists x)(S(x)\wedge\neg P(x))$
  - 例4：有的实数不是有理数。
    - » $S(x)$：x 是实数。$P(x)$：x 是有理数。
    - » 形式化：$(\exists x)(S(x)\wedge\neg P(x))$

- 否定式的量化和量化式的否定
  - 例5：所有的无理数都不是有理数。
    - » $S(x)$：x 是有理数。$P(x)$：x 是无理数。
    - » 形式化：$(\forall x)(S(x)\rightarrow\neg P(x))$　全称否定命题 E
  - 例6：没有无理数是有理数。（或：“存在无理数是有理数。”是错的。）
    - » $S(x)$：x 是无理数。$P(x)$：x 是有理数。
    - » 形式化：$\neg(\exists x)(S(x)\wedge P(x))$　特称肯定命题 I 的否定

- 重叠量词
  - 例7：$V(x)$：x 是参观者。$E(x)$：x 是展品。$L(x, y)$：x喜欢y 。
  - (3) 有的参观者喜欢所有的展品。
    - $(\exists x)(V(x)\wedge(\forall y)(E(y)\rightarrow L(x, y)))$
  - (4) 有的参观者喜欢某些展品。
    - $(\exists x)(V(x)\wedge(\exists y)(E(y)\wedge L(x, y)))$

- 例8：自然数公理
  - (1) 对每个数，有且仅有一个直接后继；
  - (2) 没有以0为直接后继的数；
  - (3) 任何非0数有且只有一个直接前趋。
  - 形式化：设函数 $f(x)$：x 的直接后继。$g(x)$：x 的直接前趋。谓词 $E(x, y)$：$x = y$ 。（用“=”描述元素的同一性）
  - (1) 对每个数，有且仅有一个直接后继；
    $(\forall x)(\exists y)(E(y, f(x))\wedge(\forall z)(E(z, f(x))\rightarrow E(y, z)))$
  - (2) 没有以0为直接后继的数；
    $\neg(\exists x)E(0, f(x))$
  - (3) 任何非0数有且只有一个直接前趋。
    $(\forall x)(\neg E(x, 0)\rightarrow(\exists y)(E(y, g(x))\wedge(\forall z)(E(z, g(x)) \rightarrow E(y, z))))$

- 例9：只有一个中国
  - 形式化：设谓词 $P(x)$：x 是中国。$E(x, y)$：$x = y$。
    $(\exists x)(P(x)\wedge(\forall y)(P(y)\rightarrow E(y, x)))$

- 关于个体论域的扩展和收缩
  - 例：每个自然数都等于其自身。
  - 当规定 x 的论域是自然数集时，该命题可以表示为 $(\forall x)(x = x)$

- 当个体变量的论域是包括一切个体的类时， $(\forall x)(x=x)$ 表示“所有事物都等于其自身”。引进谓词 $N(x)$：x 是自然数，命题形式为：
  $(\forall x)(N(x) \rightarrow (x = x))$

- 关于“是”
  - (a) 白居易是《长恨歌》的作者。
    - 在命题 (a) 中，“是”是字谓词，表示等同 (同一)，即名叫“白居易”的个体和创作了《长恨歌》的个体（作者）是同一个。
  - (b) 白居易是诗人。
    - 在 (b) 中，“是”与名词“诗人”一起构成谓词，“是”表示类属关系，名叫“白居易”的个体是诗人这个类的一个分子，白居易具有性质“诗人”。

- 关于“是”
  - (c) 诗人是文学家。
    - 在 (c) 中，“是”表示两个类之间的包含关系。“诗人”是“文学家”的一部分。
  - 在 (a) (b) 和 (c) 中，“是”分别表示三种不同的逻辑关系。若用谓词 $E(x, y)$ 表示 x, y 同一，$F(x)$ 表示“x 是诗人”，$G(x)$ 表尔“x 是文学家”，则这三个命题分别具有形式：$E(x, y)$，$F(x)$， $(\forall x)(F(x)\rightarrow G(x))$

下一单元内容提示
- 谓词逻辑的等值演算：基本的谓词等值式