计算机科学MOOC课程群

# 离散数学基础

- 定义：谓词逻辑公式的等值性
  - 设有谓词逻辑公式 A、B，如果在任意的赋值下，A 和 B 都有相同的真值，则称 A 与 B 等值，记作 $A \Leftrightarrow B$。
  - 定义2：设有谓词逻辑公式 A、B，称 A 与 B 等值当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 是普遍有效的。记作 $A \Leftrightarrow B$。

- 谓词逻辑的基本等值式
  1. 直接作为命题定律的原子命题替换实例的等值式
     - » 以原子谓词公式替换命题定律中的原子命题
       - » 例：$\neg\neg P(x) \Leftrightarrow P(x)$　　双重否定律 $\neg\neg P \Leftrightarrow P$

         $P(x) \rightarrow Q(x) \Leftrightarrow \neg P(x) \vee Q(x)$　联结词化归 $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

         。。。
       - » 证例：对 $x$ 在个体域内的任意赋值（解释） $x_0$ ，$P(x_0)$ 是一个命题，$\neg\neg P(x_0) \leftrightarrow P(x_0)$ 是一个重言式，所以$\neg\neg P(x) \leftrightarrow P(x)$ 是普遍有效的。由定义2，$\neg\neg P(x) \Leftrightarrow P(x)$ 成立。
     - » 以无自由变量的谓词公式替换命题定律的原子
       - » 例：$\neg\neg(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)P(x)$

         $(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

         。。。
       - » 证例： $\neg\neg r \leftrightarrow r$ 是重言式，而 $(\forall x)P(x)$ 是一个命题，作重言代入 $\{(\forall x)P(x)/r\}$，得到的 $\neg\neg(\forall x)P(x) \leftrightarrow (\forall x)P(x)$ 仍然是重言式。由定义2，$\neg\neg(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)P(x)$ 成立。
  2. 否定型等值式

     (1) $\neg(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x)$

     (2) $\neg(\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x)$
     - 在 {1,2} 论域上的证明

       (1) $\neg(\forall x)P(x) \Leftrightarrow \neg(P(1) \wedge P(2)) \Leftrightarrow \neg P(1) \vee \neg P(2) \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x)$

       (2) $\neg(\exists x)P(x) \Leftrightarrow \neg(P(1) \vee P(2)) \Leftrightarrow \neg P(1) \wedge \neg P(2) \Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x)$
     - 在一般论域上的证明：证明在任意解释 I 下，式子的左右取相同的真值。

       (1) 证明 $\neg(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x)$。在任意解释 I下，

(a) 设 $\neg(\forall x)P(x) = T$，则 $(\forall x)P(x) = F$

故存在 $x_0$，使得 $P(x_0) = F$，或 $\neg P(x_0) = T$

即 $(\exists x)\neg P(x) = T$

(b) 设 $\neg(\forall x)P(x) = F$，则 $(\forall x)P(x) = T$

故对任意 $x_0$，有 $P(x_0) = T$，或 $\neg P(x_0) = F$

由 $x_0$ 的任意性，$(\exists x)\neg P(x) = F$

(2) 可以构造类似的证明。

» 例：并非所有的动物都吃人。

$P(x)$：$x$ 是动物；$Q(x)$：$x$ 吃人。

$\neg(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)\neg(P(x)\rightarrow Q(x))$

$\Leftrightarrow (\exists x)(P(x)\wedge\neg Q(x))$

等价命题：有的动物不吃人。

» 例：天下乌鸦一般黑。

$P(x)$：$x$ 是乌鸦；$Q(x, y)$：$x$ 和 y 一般黑。

$(\forall x)(\forall y)((P(x)\wedge P(y))\rightarrow Q(x, y)) \Leftrightarrow$

$\neg(\exists x)(\exists y)(P(x)\wedge P(y)\wedge\neg Q(x, y))$

等价命题："有不一般黑的乌鸦" 是不对的。

3. 量词分配等值式（一）

» 设 p, q 为命题变量：

(1) $(\forall x)(P(x)\vee q) \Leftrightarrow (\forall x)P(x)\vee q$

$(\exists x)(P(x)\vee q) \Leftrightarrow (\exists x)P(x)\vee q$

(2) $(\forall x)(P(x)\wedge q) \Leftrightarrow (\forall x)P(x)\wedge q$

$(\exists x)(P(x)\wedge q) \Leftrightarrow (\exists x)P(x)\wedge q$

(3) $(\forall x)(P(x)\rightarrow q) \Leftrightarrow (\exists x)P(x)\rightarrow q$

$(\exists x)(P(x)\rightarrow q) \Leftrightarrow (\forall x)P(x)\rightarrow q$

(4) $(\forall x)(p\rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow p\rightarrow (\forall x)Q(x)$

$(\exists x)(p\rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow p\rightarrow (\exists x)Q(x)$

» (1) 证明：$(\forall x)(P(x)\vee q) \Leftrightarrow (\forall x)P(x)\vee q$。

在任意解释 I 下，

① 设 $(\forall x)(P(x)\vee q) = T$，即对任意 $x_0$，有 $P(x_0)\vee q = T$

(a) 若q = T，则 $(\forall x)P(x)\vee q = T$

(b) 若q = F，则须 $P(x_0) = T$。由 $x_0$ 的任意性有

$(\forall x)P(x) = T$，故仍有 $(\forall x)P(x)\vee q = T$

② 设 $(\forall x)P(x)\vee q = T$

(a) 若 q = T，则对任意 $x_0$，$P(x_0)\vee q = T$

故 $(\forall x)(P(x)\vee q) = T$

(b) 若 q = F，则须 $(\forall x)P(x) = T$，即对任意 $x_0$，$P(x_0) = T$

故 $P(x_0)\vee q = T$。由 $x_0$ 的任意性有 $(\forall x)(P(x)\vee q) = T$

综上，证毕。

» 其它等值式的证明完全类似。

4. 量词分配等值式（二）

(1) $(\forall x)(P(x)\wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)$

(2) $(\exists x)(P(x)\vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)P(x)\vee(\exists x)Q(x)$

» (1) 证明： $(\forall x)(P(x)\wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)$

- 在任意解释 I 下，
- ① 设 $(\forall x)(P(x)\wedge Q(x)) = T$，即对任意 $x_0$，有
  $P(x)\wedge Q(x_0) = T$，即$P(x_0) = T$ 且 $Q(x_0) = T$
  由 $x_0$ 的任意性有 $(\forall x)P(x) = T$ 且 $(\forall x)Q(x) = T$
  故 $(\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x) = T$

» (1) 证明：$(\forall x)(P(x)\wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)$

- ② 设 $(\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x) = T$，则
  $(\forall x)P(x) = T$ 且 $(\forall x)Q(x) = T$
  故对任意 $x_0$， $P(x_0) = T$且$Q(x_0) = T$，即
  $P(x_0)\wedge Q(x_0) = T$
  由 $x_0$ 的任意性有 $(\forall x)(P(x)\wedge Q(x)) = T$

» (2) 的证明完全类似。

- 定理：易名规则
  - 假设 $x, y$ 为个体变量，$x$ 在 $A(x)$ 中自由出现，$y$ 不在$A(x)$ 中出现，则有：
    (1) $(\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\forall y)A(y)$
    (2) $(\exists x)A(x) \Leftrightarrow (\exists y)A(y)$

- 定理：置换规则
  - 设 X 是谓词公式 A 的一个子式，Y 是一个合式公式且$Y \Leftrightarrow X$。将 A 中的子式 X 置换成 Y 得到的新的式子 B 若仍为一个合式公式，则 $B \Leftrightarrow A$。

- 例：$x, y$ 为个体变量，$x$ 在 $A(x)$ 中自由出现，$y$ 不在 $A(x)$中出现，则有

$$\begin{aligned}(\forall x)A(x) &\Leftrightarrow (\forall x)A(x)\vee(\forall x)A(x)\\ &\Leftrightarrow (\forall x)A(x)\vee(\forall y)A(y)\\ &\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(A(x)\vee A(y))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\exists x)A(x) &\Leftrightarrow (\exists x)A(x)\wedge(\exists x)A(x)\\ &\Leftrightarrow (\exists x)A(x)\wedge(\exists y)A(y)\\ &\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(A(x)\wedge A(y))\end{aligned}$$

- 例：设 $x, y$ 为个体变量，$x, y$ 分别不在 $B(y)$ 和 $A(x)$ 中出现或自由出现。证明：
  $(\forall x)(\forall y)(A(x)\to B(y)) \Leftrightarrow (\exists x)A(x)\to(\forall y)B(y)$
  - 证：

$(\forall x)(\forall y)(A(x)\to B(y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(A(x)\to (\forall y)B(y))$　　量词分配等值式1

$\Leftrightarrow (\exists x)A(x)\to(\forall y)B(y)$　　量词分配等值式1

- 定义：前束范式
  - 一个谓词公式称为是前束范式形的，如果它具有如下形式：$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\ldots(Q_kx_k)$ B。其中 $x_i \neq x_j$, $Q_i\,(1\leq i\leq k)$ 为 ∀ 或 ∃ ，B 为不含量词的 wff。
  - 称 $(Q_1x_1)(Q_2x_2)\ldots(Q_kx_k)$ 为公式的首标。若 B 为析（合）取范式时，称该前束形为前束析（合）取范式。
    - » 前束范式中所有量词均非否定地出现在公式的左边，且其辖域一直延伸到公式末尾。

- 定理：前束范式存在定理
  - 谓词逻辑中的任何公式都有与之等价的前束范式。
  - 证明：构造性证明（略）

- 例：求 $\neg((\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\rightarrow(\exists x)(\neg(\forall y)Q(y, b)\rightarrow R(x)))$ 的前束范式

  (1) 消去条件词：

  $$\neg(\neg(\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\vee(\exists x)(\neg\neg(\forall y)Q(y, b)\vee R(x)))$$

  (2) 否定词深入：

  $$(\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\wedge\neg(\exists x)((\forall y)Q(y, b)\vee R(x)) \Leftrightarrow$$
  $$(\forall x)(\exists y)P(a,x,y)\wedge(\forall x)((\exists y)\neg Q(y, b)\wedge\neg R(x))$$

  (3) $(\forall x)$前移：$(\forall x)((\exists y)P(a, x, y)\wedge(\exists y)\neg Q(y, b)\wedge\neg R(x))$

  (4) 变量易名：$(\forall x)((\exists y)P(a, x, y)\wedge(\exists z)\neg Q(z, b)\wedge\neg R(x))$

  (5) $(\exists y)(\exists z)$前移：$(\forall x)(\exists y)(\exists z)(P(a, x, y)\wedge\neg Q(z, b)\wedge\neg R(x))$

- 例：求 $((\forall x)P(x)\vee(\exists y)Q(y))\rightarrow (\forall x)R(x)$ 的前束范式
  - 解1:

    (1) 变量易名：$((\forall x)P(x)\vee(\exists y)Q(y))\rightarrow (\forall z)R(z)$

    (2) 量词前移：

    $$((\forall x)P(x)\vee(\exists y)Q(y))\rightarrow (\forall z)R(z)$$
    $$\Leftrightarrow (\forall x)(P(x)\vee(\exists y)Q(y))\rightarrow (\forall z)R(z)$$
    $$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(P(x)\vee Q(y))\rightarrow (\forall z)R(z)$$
    $$\Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\forall z)((P(x)\vee Q(y))\rightarrow R(z))$$

  - 解2:

    (1) 变量易名：$((\forall x)P(x)\vee(\exists y)Q(y))\rightarrow (\forall z)R(z)$

    (2)′量词前移：

    $$((\forall x)P(x)\vee(\exists y)Q(y))\rightarrow (\forall z)R(z)$$
    $$\Leftrightarrow (\exists y)((\forall x)P(x) \vee Q(y))\rightarrow (\forall z)R(z)$$
    $$\Leftrightarrow (\exists y)(\forall x)(P(x)\vee Q(y))\rightarrow (\forall z)R(z)$$
    $$\Leftrightarrow (\forall y)(\exists x)(\forall z)((P(x)\vee Q(y))\rightarrow R(z))$$

- 定义：前束析（合）取范式。
  - 前束形 $(Q_1x_1)(Q_2x_2)\ldots(Q_kx_k)$ B 中 若 B 为析（合）取范式时，称该前束形为前

束析（合）取范式。

- 例1：前束合取范式

  $(\forall x)(\exists y)(\exists z)(P(a, x, y)\wedge\neg Q(z, b)\wedge\neg R(x))$

- 例2：前束范式

  $(\exists x)(\forall y)(\forall z)((P(x)\vee Q(y))\rightarrow R(z))$

- 定义：*Skolem* 范式
  - *Skolem* 范式（*Skolem* 标准形）是一类前束范式，它规定在前束范式的首标中，每个存在量词均出现在所有的全称量词之前（左边）。
  - 例1： *Skolem* 范式

    $(\exists x)(\forall y)(\forall z)((P(x)\vee Q(y))\rightarrow R(z))$

  - 例2：非*Skolem* 范式

    $(\forall y)(\exists x)(\forall z)((P(x)\vee Q(y))\rightarrow R(z))$

**下一单元内容提示**

- 谓词逻辑的推理演算：推理形式和演绎系统