计算机科学MOOC课程群

离散数学基础

- 定义：个体和谓词
  - 在原子命题中，描述的对象称为个体，用于描述个体的性质或个体之间的关系部分称为谓词。
  - 例：张三是个大学生。
    - » 个体：张三；谓词：是个大学生
  - 例：张三和李四是表兄弟。
    - » 个体：张三、李四；谓词：是表兄弟（关系）
  - 习惯上，用小写字母 $a, b, c, \ldots$ 表示个体，大写字母 P, Q, R, … 表示谓词。
  - 例：a：张三；b：李四；

    $P(x)$：x 是个大学生；$Q(x, y)$：x 和 y 是表兄弟。

    则：$P(a)$：张三是个大学生；

    $P(b)$：李四是个大学生；

    $Q(a, b)$：张三和李四是表兄弟。

- 定义：原子命题的谓词形式
  - 一个原子命题用一个谓词常项（如 P）和 n 个有次序的个体常量（如 $a_1, a_2, \ldots, a_n$）表示成 $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，称为该原子命题的谓词形式。
  - 例：$Q(a, b)$：张三和李四是表兄弟。
  - 当讨论的个体处于一个论述范围时，个体常量被个体变量取代。如 $Q(x, y)$。

- 定义：n 元原子谓词
  - 由一个谓词（如 P）和 n 个个体变量（如 $x_1, x_2, \ldots, x_n$）组成的 $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，称为 n 元原子谓词，或简称 n 元谓词，或 n 元命题函数。
  - 一个 n 元谓词 $P(x_1, \ldots, x_n)$ 只有 P 取谓词常项，且其中所有个体变量均取得个体常项时，该谓词才成为命题。
    - » 特别地将命题看成是0元谓词。

- 定义：个体论域
  - 个体变量 x_i 的论述范围（取值范围）称为 x_i 的论域或变程。
  - 全总论域：将一个 n 元谓词的各个个体论域综合在一起，称为该谓词的全总

论域。无特别声明时，谓词均在其全总论域下讨论。
  - 一元谓词 $P(x)$ 更广泛的定义：从全总论域到 $\{1, 0\}$ 的映射 $P: D \to \{1, 0\}$

- 定义：个体函数
  - 一个个体函数是个体域到个体域的映射。
  - 例：个体函数
    - » $father(x)$： x 的父亲。
    - » $f(x)$： $x+2$
    - » $g(x, y)$： $x+2*y$

- 定义：个体函数
  - 例：带函数表达式的谓词形式
    - » 设 *brother*(*x*)：*x*’s brother
      sister(*y*)：*y* ’s sister
      Married(*u*, *v*)：*u* married *v*.
    - » 谓词形式：Married(*brother*(John), *sister*(Scott)) 表达了一个命题 “John’s brother married Scott’s sister”

- 单称命题和一般命题
  - 从主语的量的特征分类，命题可分为单称命题和一般（类）命题。如：
    - » 单称性质：π 是无理数。
    - » 单称关系：2和3之和等于5。
    - » 一般性质：所有的有理数都是实数。
    - » 一般关系：有的学生不喜欢数理逻辑课。 并非所有的学生都喜欢数理逻辑课。

- 定义：量化
  - 一般（类）命题的主语（如“所有的有理数”）并非个体词，在谓词逻辑中使用表示事物属性的谓词（如 “P(*x*)：*x* 是有理数”），并通过对个体的量加以概括或限制（如“所有的”、“有些”等），来表达上述一般类命题的主语。称这样的限制形式为量化。
  - 量化通过量词描述。

- 定义：全称量化
  - $\forall$ 称为全称量词符号，用来表示“对所有的（论域中）的个体” 的数量限制。$\forall x$ 称为全称量词，x 称为指导变量。
- 定义：存在量化
  - $\exists$ 称为存在量词符号，用来表示“至少有一个（在论域中）的个体”的数量限制。$\exists x$ 称为存在量词， x 称为指导变量。

- 谓词的量化：

- 谓词前加上量词作为对个体变量的约束，称为谓词的量化。被完全量化的谓词，其中的每一个个体变量都受到约束，可以用于表达命题。
- 量词仅用于限制个体变量时，称为狭谓词逻辑或一阶谓词逻辑。
- 谓词逻辑主要研究量词的逻辑性质，不同于命题逻辑对联结词的关注，因此谓词逻辑也叫做量词逻辑。

- 例1：任何事物都是运动的。
  - 设 $P(x)$：x 是运动的。
  - 形式化：$(\forall x)P(x)$ （或 $\forall x\, P(x)$ ）
- 例2：有的动物有四条腿。
  - 设 $Q(x)$： x 是有四条腿的动物。
  - 形式化： $(\exists x)Q(x)$ （或 $\exists x\, Q(x)$ ）
  - 或设 $Q(x)$： x 是动物。 $R(x)$：x 有四条腿。
  - 形式化： $(\exists x)(Q(x)\wedge R(x))$

- 定义：约束变量、自由变量与辖域
  - 被某量词量化的一个谓词中，相应该量词的指导变量的那些个体变量称为（被该量词）约束的，其他的个体变量称为（相对该量词）自由的。该谓词称为是该量词的辖域。
  - 例1：$(\forall x)P(x)$
    - 个体变量 x 被量词 $\forall x$ 所约束， $\forall x$ 的辖域是 $P(x)$
  - 例2：$(\forall x)(P(x, y)\wedge Q(y))$
    - 个体变量 x 被量词 $\forall x$ 所约束，y 是自由的。
    - $\forall x$ 的辖域是 $P(x, y)\wedge Q(y)$。
  - 例3：$(\exists x)(\forall y)P(x, y)$
    - 个体变量 x 被量词 $\exists x$ 所约束，y 被量词 $\forall y$ 所约束。
    - $\exists x$ 的辖域是 $(\forall y)P(x, y)$，$\forall y$ 的辖域是 $P(x, y)$。
  - 例4： $(\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)$
    - $P(x)$ 中的个体变量 x 被第一个量词 $\forall x$ 所约束，$Q(x)$ 中的个体变量 x 被第二个量词 $\forall x$ 所约束，
    - 第一个量词 $\forall x$ 的辖域是 $P(x)$，第二个量词 $\forall x$ 的辖域是$Q(x)$。

- 变量易名规则
  - 若在同一论域中讨论，则 $(\forall x)P(x)$ 和 $(\forall y)P(y)$ 并无差异，可写成 $(\forall x)P(x)\equiv(\forall y)P(y)$。
  - 例5：$(\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)$
    - 可写成 $(\forall x)P(x)\wedge(\forall y)Q(y)$
- **闭公式**
  - 不含任何自由变量的合式公式称为闭公式。
  - 例6：$(\forall x)P(x)$ 是闭公式；$(\forall x)Q(x, y)$ 不是闭公式

- 谓词逻辑的合式公式
  - 谓词逻辑的合式公式定义从项和原子的概念开始。
  - 定义：项
    - » 项由下列规则形成
      - (1) 个体常量和个体变量是项；
      - (2) 若 f 是 n 元个体函数且 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是项，则 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 也是项；
      - (3) 所有项都只由(1) (2) 经有限步生成。
  - 定义：原子公式
    - » 若 $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 是 n 元谓词， $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是项，则称 $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 为谓词逻辑的原子公式。
  - 定义：合式公式

  (1) 原子公式是 wff；

  (2) 若 A 是 wff，则 $(\neg A)$ 也是；

  (3) 若 A、B 是 wff，且在 A、B 中同时出现的个体变量同为约束或同为自由，则 $(A\wedge B)$、$(A\vee B)$、$(A \rightarrow B)$、$(A \leftrightarrow B)$ 也是 wff；

  (4) 若 A 是 wff，x 在 A 中是自由的，则 $(\forall x)A$、$(\exists x)A$ 也是 wff；

  (5) 只有有限次使用上述四条规则形成的才是 wff。

- 谓词逻辑的合式公式
  - 例：一些含有量词的例子
    - » $\forall x P(x) \vee P(y)$
    - » $\forall x P(x) \vee \exists y P(y)$
    - » $\forall x\, (P(x) \vee \exists y\, (Q(y) \wedge \neg F(x,y)))$
    - » $\forall x\, ((F(x) \wedge P(x)) \rightarrow \exists y M(x,y))$
    - » $\forall x \exists y\, (F(x,y) \wedge \forall z\, (F(x,z) \rightarrow E(y,z)))$

- 谓词逻辑公式的普遍有效性
  - 如果一个谓词逻辑公式在任何个体解释下都为真，则称之为普遍有效的。
  - 如果一个谓词逻辑公式在任何个体解释下都为假，则称之为不可满足的，或矛盾的。
    - » 例：$P(x)\vee\neg P(x)$ 是普遍有效的。
    - » 例：$P(x)\wedge\neg P(x)$ 是不可满足的。

- 定理
  - 命题逻辑的重言式的任何代入实例都是一阶逻辑中的普遍有效公式。命题逻辑的矛盾式的任何代入实例都是一阶逻辑中的矛盾式。 （证略）
    - » 例：命题逻辑重言式 $P\vee\neg P$ 的一些代入实例。
      - $P(x)\vee\neg P(x)$
      - $\forall x P(x)\vee\neg\forall x P(x)$
      - $(\forall x P(x)\rightarrow\exists y Q(y)) \vee\neg(\forall x P(x)\rightarrow\exists y Q(y))$

- 定理 （不可判定性）
  - 谓词逻辑公式可以有无穷大的个体论域，存在无穷多的解释，因而不存在判定其公式的普遍有效性的通用的方法。

下一单元内容提示
  - 谓词逻辑的自然语言形式化