

# Herbrand定理

张文生

中国科学院自动化研究所

# 内容

- **Skolem**范式
- **Herbrand**域
- 语义树
- **Herbrand**定理
- **Davis**的工作

# 复习

- 定义(定理)

- 如果**G**是公式**F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>, ... F<sub>n</sub>**的逻辑结论, 则公式

$$(\mathbf{F_1} \wedge \mathbf{F_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{F_n}) \rightarrow \mathbf{G}$$

称为定理.

- 定理

- 给定公式**F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>, ... F<sub>n</sub>**和**G**, **G**是公式**F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>, ... F<sub>n</sub>**的逻辑结论, 当且仅当公式

$$\mathbf{F_1} \wedge \mathbf{F_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{F_n} \wedge \sim \mathbf{G}$$

不相容 (是永假式)。

- **Skolem**范式
- **Herbrand**域
- 语义树
- **Herbrand**定理
- **Davis**的工作

# 化公式为Skolem范式的步骤

- 公式化为前束范式
- 母式化为合取范式
- 在不影响公式的不相容性的前提下, 使用**Skolem**函数, 将前束中的存在量词消去

# Skolem函数

- 消去存在量词

- 令公式**H**是一个前束范式，并且母式**M**是合取范式  
 **$(Q_1x_1) \dots (Q_nx_n)(M)$**

对前缀从左到右遇到的第一个存在量词 **$Q_r(1 \leq r \leq n)$** ，存在两种情况：

**(1)** 如果 **$Q_r$** 的左边(前边)没有全称量词，则**M**中的 **$x_r$** 用常数**a**代替；

**(2)** 如果 **$Q_r$** 的左边(前边)有全称量词 **$x_{s1}, \dots, x_{sk}$** ，且 **$1 \leq s_1 < \dots < s_k < r$** ，则**M**中的 **$x_r$** 用函数 **$f(x_{s1}, \dots, x_{sk})$** 代替；

从前缀中删除 **$(Q_r x_r)$** ；

## 例子(Skolem函数)

- $(\exists \mathbf{x})(\forall \mathbf{y})(\forall \mathbf{z})(\exists \mathbf{u})(\forall \mathbf{v})(\exists \mathbf{w})P(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$

$$\Rightarrow (\forall \mathbf{y})(\forall \mathbf{z})(\exists \mathbf{u})(\forall \mathbf{v})(\exists \mathbf{w})P(\mathbf{a}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

$$\Rightarrow (\forall \mathbf{y})(\forall \mathbf{z})(\forall \mathbf{v})(\exists \mathbf{w})P(\mathbf{a}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

$$\Rightarrow (\forall \mathbf{y})(\forall \mathbf{z})(\forall \mathbf{v})P(\mathbf{a}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \mathbf{v}, \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{v}))$$

# 注意

- 要求**a**必须是新的常量符号，它未曾在公式其他地方使用过；
- 要求**f()**不同于已出现在**M**中的任一函数，而对**f**的具体形式没有要求。



# Skolem函数的意义

- 化公式为**Skolem**范式与原来公式在不相容意义下保持等价(=).

- 定理: 令**G**是一个前束合取范式,

$$\mathbf{G} = (\mathbf{Q}_1 \mathbf{x}_1) \dots (\mathbf{Q}_n \mathbf{x}_n) \mathbf{M}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n],$$

$\mathbf{Q}_r$ 为**G**中从左向右遇到的第一个存在量词。令

$$\mathbf{G}_1 = (\mathbf{Q}_1 \mathbf{x}_1) \dots (\mathbf{Q}_{r-1} \mathbf{x}_{r-1}) (\mathbf{Q}_{r+1} \mathbf{x}_{r+1}) (\mathbf{Q}_n \mathbf{x}_n)$$

$$\mathbf{M}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{r-1}, \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{r-1}), \mathbf{x}_{r+1}, \dots, \mathbf{x}_n]$$

其中:  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{r-1})$ 是 $\mathbf{x}_r$ 的**Skolem**函数.

则有:  $\mathbf{G}$ 不相容  $\Leftrightarrow \mathbf{G}_1$ 不相容

## 证明：(对存在量词 $x_r$ 使用归纳法)

- 设论域为 $D$ .

由于 $G=(Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)M[x_1,\dots,x_n]$ ,

$$G_1=(Q_1x_1)\dots(Q_{r-1}x_{r-1})(Q_{r+1}x_{r+1})\dots(Q_nx_n) \\ M[x_1,\dots,x_{r-1}, f(x_1,\dots,x_{r-1}),x_{r+1},\dots,x_n]$$

- 一方面：如果 $G$ 不相容

假设 $G_1$ 相容：存在一个解释 $I$ ，使得  $G_1=T$ .

对任一组 $(x_1,\dots,x_{r-1})$ ，都有 $f(x_1,\dots,x_{r-1})$ ，使得

$(Q_{r+1}x_{r+1})\dots(Q_nx_n)M[x_1,\dots,x_{r-1}, f(x_1,\dots,x_{r-1}),x_{r+1},\dots,x_n]$ 为真  
 $f(x_1,\dots,x_{r-1})$ 是 $D$ 中一个元素. 因此, 对任一组 $(x_1,\dots,x_{r-1})$ ,

$$(\exists x_r)(Q_{r+1}x_{r+1})\dots(Q_nx_n)M[x_1,\dots,x_r,\dots,x_n]=T$$

$$(\forall x_1)\dots(\forall x_{r-1})(\exists x_r)(Q_{r+1}x_{r+1})\dots(Q_nx_n)M[x_1,\dots,x_r,\dots,x_n]=T$$

即：  $G$ 相容。

- 另一方面：如果  $\mathbf{G}_1$  不相容

假设  $\mathbf{G}$  相容：解释  $\mathbf{I}$ ：  $\mathbf{G}=\mathbf{T}$ .

对任一组  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{r-1})$ , 存在一个元素  $\mathbf{x}_r \in \mathbf{D}$ , 使得  
 $(\mathbf{Q}_{r+1}\mathbf{x}_{r+1}) \dots (\mathbf{Q}_n\mathbf{x}_n) \mathbf{M}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r, \dots, \mathbf{x}_n]$  为真.

扩充  $\mathbf{I}$  为  $\mathbf{I}'$ , 使其包含对函数符号  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{r-1})$  的指定:

$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{r-1}) = \mathbf{x}_r$ , 对任一组  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{r-1})$

对任一组  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{r-1})$ ,

$(\mathbf{Q}_{r+1}\mathbf{x}_{r+1}) \dots (\mathbf{Q}_n\mathbf{x}_n) \mathbf{M}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{r-1}), \dots, \mathbf{x}_n]$   
为真.

$\mathbf{I}'$  满足  $\mathbf{G}_1$ .

- 显然，如果公式前缀中有多个存在量词，则用归纳法证明。

# 注意

- **Skolem**范式 and 原式在不相容意义下保持等价, 而非等价(=)。
  - 如果**G**不相容, 那么按照定理 **$G=G_1$** 。
  - 如果**G**是相容的, 一般情况下, **G**不等价于 **$G_1$** , 即:  **$G \neq G_1$** 。
- 例子:
  - **$G = (\exists x)P(x)$**
  - **$G_1 = P(a)$**
  - 在解释**I**下不相等:
    - **$D = \{1, 2\}$**
    - **$a = 1, P(1) = F, P(2) = T$** 。
  - **G**在**I**下为真,  **$G_1$** 在**I**下为假。

- 将一个公式化为**Skolem**范式后, 公式的到了简化, 进一步我们还可以简化, 那就是将公式化为子句集的形式。
- 下面引入子句集的概念。

# 子句集

- **Skolem**化以后, 将公式表示为子句集合.
  - $(\forall x)(\forall y)((P(x) \vee Q(y)) \wedge (Q(x) \vee \sim S(f(y))))$
  - $\{P(x) \vee Q(y), Q(x) \vee \sim S(f(y))\}$
- 定义(子句, **clause**):
  - 一个包含若干文字的析取式称为子句。例如:
    - $P \vee \sim S \vee R$
    - $P(x) \vee Q(y, z) \vee \sim R(y, y)$
  - 说明：一个子句中如果没有文字则称空子句( , **nil**, 永假);  
一个子句中有**n**个文字则称**n**文字子句。
- 定义（子句集合）：
  - 子句内部的关系是析取;
  - 子句间的关系是合取;
  - 所有子句受全程量词约束;

# 化子句集的方法（9个步骤）

例：  $(\exists \mathbf{z}) (\forall \mathbf{x})(\exists \mathbf{y})\{[(\mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{Q}(\mathbf{x})) \rightarrow \mathbf{R}(\mathbf{y})] \vee \mathbf{U}(\mathbf{z})\}$

## 1. 消蕴涵符

理论根据：  $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b} = \sim \mathbf{a} \vee \mathbf{b}$

$$(\exists \mathbf{z}) (\forall \mathbf{x})(\exists \mathbf{y})\{[\sim(\mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{Q}(\mathbf{x})) \vee \mathbf{R}(\mathbf{y})] \vee \mathbf{U}(\mathbf{z})\}$$

## 2. 移动否定符

理论根据：  $\sim(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) = \sim \mathbf{a} \wedge \sim \mathbf{b}$

$$\sim(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \sim \mathbf{a} \vee \sim \mathbf{b}$$

$$\sim(\exists \mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}) = (\forall \mathbf{x})\sim \mathbf{P}(\mathbf{x})$$

$$\sim(\forall \mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}) = (\exists \mathbf{x})\sim \mathbf{P}(\mathbf{x})$$

$$(\exists \mathbf{z}) (\forall \mathbf{x})(\exists \mathbf{y})\{[(\sim \mathbf{P}(\mathbf{x}) \wedge \sim \mathbf{Q}(\mathbf{x})) \vee \mathbf{R}(\mathbf{y})] \vee \mathbf{U}(\mathbf{z})\}$$



### 3. 变量标准化

即：对于不同的约束，对应于不同的变量

$$(\exists \mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) \wedge (\exists \mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (\exists \mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) \wedge (\exists \mathbf{y})\mathbf{B}(\mathbf{y})$$

### 4. 量词左移

$$(\exists \mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) \wedge (\exists \mathbf{y})\mathbf{B}(\mathbf{y}) = (\exists \mathbf{x})(\exists \mathbf{y})\{\mathbf{A}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{y})\}$$

### 5. 消存在量词 (skolem化)

$$\begin{aligned} & (\exists \mathbf{z})(\forall \mathbf{x})(\exists \mathbf{y})\{[(\sim \mathbf{P}(\mathbf{x}) \wedge \sim \mathbf{Q}(\mathbf{x})) \vee \mathbf{R}(\mathbf{y})] \vee \mathbf{U}(\mathbf{z})\} \\ \Rightarrow & (\forall \mathbf{x})\{[(\sim \mathbf{P}(\mathbf{x}) \wedge \sim \mathbf{Q}(\mathbf{x})) \vee \mathbf{R}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))] \vee \mathbf{U}(\mathbf{a})\} \end{aligned}$$

## 6. 化为合取范式

即  $(a \vee b) \wedge (c \vee d) \wedge (e \vee f)$  的形式

$$(\forall x) \{ [(\sim P(x) \wedge \sim Q(x)) \vee R(f(x))] \vee U(a) \}$$

$$\Rightarrow (\forall x) \{ (\sim P(x) \vee R(f(x)) \vee U(a)) \wedge (\sim Q(x) \vee R(f(x)) \vee U(a)) \}$$

## 7. 隐去全程量词

$$\{ (\sim P(x) \vee R(f(x)) \vee U(a)) \wedge (\sim Q(x) \vee R(f(x)) \vee U(a)) \}$$

## 8. 表示为子句集

$$\{\sim P(x) \vee R(f(x)) \vee U(a), \sim Q(x) \vee R(f(x)) \vee U(a)\}$$

## 9. 变量标准化（变量换名）

$$\{\sim P(x_1) \vee R(f(x_1)) \vee U(a), \sim Q(x_2) \vee R(f(x_2)) \vee U(a)\}$$

# 结论:

- 定理（公式不相容基本定理）

- 设**S**是公式**G**的子句集,  
**G**不相容  $\Leftrightarrow$  **S**不相容

- 说明:

**S**不相容: 对任一个解释, **S**中至少有一个子句为假;

**S**相容: 存在一个解释, 使**S**中所有子句为真;

■ 推论:

- 如果  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{G}_n$ ,  $\mathbf{S}_i$  是  $\mathbf{G}_i$  的子句集,  $i = 1, \dots, n$ . 令  $\mathbf{S}' = \mathbf{S}_1 \cup \dots \cup \mathbf{S}_n$ .

$\mathbf{G}$  不相容  $\Leftrightarrow \mathbf{S}'$  不相容

# 公式不相容基本定理的应用

## ——定理证明思路

- 证明定理**G**;
- 证明 $\sim\mathbf{G}$ 不相容;
- 证明 $\sim\mathbf{G}$ 的**Skolem**范式 $\mathbf{G}_1$ 不相容;
- 证明 $\mathbf{G}_1$ 的子句集不相容。

# 例1

■ 若群**F**中任一元素**x**都有 **$x \cdot x = e$** (单位元), 则**F**是交换群.

■ 设论域为**F**, 谓词 **$P(x,y,z)$** 表示 **$x \cdot y = z$** , 依群的定义有

■ **A<sub>1</sub>**: 若 **$x, y \in F$** , 则 **$x \cdot y \in F$**

可形式描述为:  **$(\forall x)(\forall y)(\exists z)P(x,y,z)$**

■ **A<sub>2</sub>**: 若 **$x, y, z \in F$** , 则 **$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$**

可形式描述为:

**$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)(\forall v)(\forall w)$**

**$[(P(x,y,u) \wedge P(y,z,v) \wedge P(u,z,w) \rightarrow P(x,v,w))$**

**$\wedge (P(x,y,u) \wedge P(y,z,v) \wedge P(x,v,w) \rightarrow P(u,z,w))]$**

- **A<sub>3</sub>**: 若**e**为单位元, 则对任一**x**∈**F**, **x·e=e·x=x**.

可形式描述为:  $(\forall \mathbf{x})(\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \mathbf{x}) \wedge \mathbf{P}(\mathbf{e}, \mathbf{x}, \mathbf{x}))$

- **A<sub>4</sub>**: 若**x**∈**F**, 必有**x<sup>-1</sup>**∈**F**, 使 **x·x<sup>-1</sup>=e**.

令**i(x)**: **x**的逆元**x<sup>-1</sup>**.

可形式描述为:  $(\forall \mathbf{x})(\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{i}(\mathbf{x}), \mathbf{e}) \wedge \mathbf{P}(\mathbf{i}(\mathbf{x}), \mathbf{x}, \mathbf{e}))$

- 所要证明的是**B**: 对**x, y**∈**F**, 如果**x·x=e**必有**x·y=y·x**

可形式描述为:

$$(\forall \mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{e}) \rightarrow (\forall \mathbf{u})(\forall \mathbf{v})(\forall \mathbf{w})(\mathbf{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}))$$



- 要证明定理:  $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4) \rightarrow B$
- 证明:  $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge \sim B)$  是永假式;
- 证明:  $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge \sim B)$  的子句集不相容;
- 根据推论, 只要分别求出  $A_1, A_2, A_3, A_4, \sim B$  的子句集。

- **$A_1: (\forall x)(\forall y)(\exists z)P(x,y,z)$** 
  - **$S_{A1}: \{P(x,y,f(x,y))\}$**
- **$A_2: (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)(\forall v)(\forall w)$** 

$$[(P(x,y,u) \wedge P(y,z,v) \wedge P(u,z,w) \rightarrow P(x,v,w))$$

$$\wedge (P(x,y,u) \wedge P(y,z,v) \wedge P(x,v,w) \rightarrow P(u,z,w))]$$
  - **$S_{A2}: \{\sim P(x,y,u) \vee \sim P(y,z,v) \vee \sim P(u,z,w) \vee P(z,v,w),$**   
 **$\sim P(x,y,u) \vee \sim P(y,z,v) \vee \sim P(x,v,w) \vee P(u,z,w)\}$**
- **$A_3: (\forall x)(P(x,e,x) \wedge P(e,x,x))$** 
  - **$S_{A3}: \{P(x,e,x), P(e,x,x)\}$**
- **$A_4: (\forall x)(P(x,i(x),e) \wedge P(i(x),x,e))$** 
  - **$S_{A4}: \{P(x,i(x),e), P(i(x),x,e)\}$**

- **B:**  $(\forall x)P(x,x,e) \rightarrow (\forall u)(\forall v)(\forall w)(P(u,v,w) \rightarrow P(v,u,w))$ 
  - $S_{\sim B}: \{P(x,x,e), P(a,b,c), \sim P(b,a,c)\}$
  
- $S_{A1} \cup S_{A2} \cup S_{A3} \cup S_{A4} \cup S_{\sim B}$  共含有 **10** 个子句:
  - $\{P(x,y,f(x,y)),$   
 $\sim P(x,y,u) \vee \sim P(y,z,v) \vee \sim P(u,z,w) \vee P(z,v,w),$   
 $\sim P(x,y,u) \vee \sim P(y,z,v) \vee \sim P(x,v,w) \vee P(u,z,w),$   
 $\dots,$   
 $\sim P(b,a,c)\}$

- **Skolem**范式
- **Herbrand**域
- 语义树
- **Herbrand**定理
- **Davis**的工作

# 动机

- 命题逻辑下验证定理是直观的，但是在谓词逻辑下验证定理是困难的。

- 公式**G**含有**n**个原子, 有 **$2^n$** 个解释;

- **$G_1 = P \vee (Q \wedge R)$**

- **$G_2 = ((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$**

P	Q	R	$G_1$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

P	Q	$G_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- 一阶逻辑下验证定理是困难的原因：
  - 个体变量论域**D**的任意性.
  - **D**中元素的任意性.
  - 解释的个数的无限性.
  
- 我们试图找到： 一个比较简单的、特殊的论域，使得只要在这个论域上该公式是不可满足的，便能保证该公式在任一论域上也是不可满足的？

——**Herbrand**域(简称**H**域)就具有这样的性质。

# Herbrand域

- 令 $H_0$ 是子句集 $S$ 中出现的常量的集合。若 $S$ 中没有常量出现, 则 $H_0$ 由单个常量 $a$ 组成(即 $H_0=\{a\}$ );
- 对于 $i=1,2,\dots$   
 $H_i=H_{i-1} \cup \{\text{所有形如 } f(t_1,\dots,t_n) \text{ 的项的集合}\}$   
其中:  $f(t_1,\dots,t_n)$ 是出现于 $S$ 中的任一函数符号 $t_1,\dots,t_n \in H_{i-1}$ 。  
1°
- 规定 $H_\infty$ 为 $S$ 的**Herbrand域** (Herbrand universe of  $S$ , 简称**H域**)。

例1  $S = \{P(z), P(x) \vee Q(y)\}$

- $H_0 = \{a\}$

$$H_1 = H_0$$

$$H_2 = H_1$$

...

$$H_\infty = \{a\}$$



例2  $S = \{P(a), P(x) \vee P(f(x))\}$

■  $H_0 = \{a\}$

$$H_1 = \{a\} \cup \{f(a)\} = \{a, f(a)\}$$

$$H_2 = H_1 \cup \{f(a), f(f(a))\} = \{a, f(a), f(f(a))\}$$

...

$$H_\infty = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\}$$

例3  $S = \{P(f(x), a, g(y), b)\}$

■  $H_0 = \{a, b\}$

$H_1 = \{a, b, f(a), g(a), f(b), g(b)\}$

$H_2 = \{a, b, f(a), g(a), f(b), g(b),$   
 $f(f(a)), f(g(a)), f(f(b)), f(g(b)),$   
 $g(f(a)), g(g(a)), g(f(b)), g(g(b))\}$

...

# 基本概念

## ■ 定义（基础，**ground**）:

- 没有变量的项，称为基础项(**ground term**).
  - $f(a,b)$
- 没有变量的原子，称为基础原子(**ground atom**).
  - $P(a,f(b))$
- 没有变量的文字，称为基础文字(**ground literal**).
  - $P(a,f(b)), \sim P(a,f(b))$
- 没有变量的子句，称为基础子句(**ground clause**).
  - $P(b,f(b)) \vee \sim Q(f(f(b)))$

# 原子集

- 定义：令**S**是一个子句集合，形如 **$P(t_1, \dots, t_n)$** 的**基础原子**集合，称为**S**的原子集，或**Herbrand**基，记为**A**。

其中： **$P(t_1, \dots, t_n)$** 是出现在**S**中的任一谓词符号，而 **$t_1, \dots, t_n$** 是**S**的**H域**的任意元素。

# 例子

- $S = \{P(z), P(x) \vee Q(y)\}$ 
  - $H_\infty = \{a\}$
  - $A = \{P(a), Q(a)\}$
- $S = \{P(a), P(x) \vee P(f(x))\}$ 
  - $H_\infty = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\}$
  - $A = \{P(a), P(f(a)), P(f(f(a))), \dots, P(a) \vee P(f(a)), \dots\}$
- $S = \{P(f(x), a, g(y), b)\}$ 
  - $H_\infty = \{a, b, f(a), g(a), f(b), g(b), \dots\}$
  - $A = \{P(a, a, a, a), P(a, a, a, b), P(a, a, b, b), \dots\}$

# 基础实例

- 定义：当**S**中的某子句**C**中所有变量符号均以**S**的**H**域的元  
素代入时，所得的基子句**C'**称作**C**的一个基础实例(基例，  
**a ground instance of a clause C**)。
- 例  $S = \{P(x), Q(f(y)) \vee R(y), Z(f(y))\}$ 
  - $H = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\}$
  - $P(a), P(f(a))$ 都称作子句**C**= $P(x)$ 的基例。
  - 同样,  $Q(f(a)) \vee R(a), Q(f(f(a))) \vee R(f(a))$ 都是  
 $Q(f(y)) \vee R(y)$ 的基例。
  - 对于任一**b**  $\in D$ , 子句**P(b), Q(f(b))  $\vee$  R(b)**都叫基子  
句。
  - 但是,  $Q(a) \vee R(a)$ 不是 **$Q(f(y)) \vee R(y)$** 的基础实例。

# 注意

- 原子集和基础实例不同：
  - 原子集考虑单个原子，基础实例考虑子句。
    - $Q(f(a)) \vee R(a)$ 是基例，但不属于S的原子集。
  - 原子集是将某个谓词中的项改为H域中的元素，而基例是改变量。
    - $H = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\}$ .
    - $Q(a)$ 不是 $Q(f(y))$ 的基例，但是属于S的原子集。
    - $Q(f(a))$ 既是 $Q(f(y))$ 的基例，又属于S的原子集。
  - 一个基础实例是由原子集中的原子或原子的非析取而成。
    - $A = \{P(a), Q(a), R(a), Z(a), P(f(a)), Q(f(a)), \dots\}$
    - 基础实例:  $Q(f(a)) \vee R(a)$

# H解释

## ■ 起因

- 由子句集**S**建立**H**域，进而容易得到原子集**A**;
- 一般论域**D**上对**S**的解释**I**  $\Rightarrow$  **H**域上的解释**I\***;
- **S**在**D**上为真  $\Rightarrow$  **S**在**H**上为真;
- **S**在**D**上不可满足  $\Rightarrow$  **S**在**H**上不可满足。



# H解释

## ■ 定义(*H-interpretation of S*)

给定子句集 $S$ ,  $H$ 是 $S$ 上的Herbrand全域,  $I$ 是 $H$ 上 $S$ 的一个解释, 如果满足:

- $I$ 映射所有 $S$ 中的常数到自身;
- 令 $f$  是一个 $n$ -元函词,  $h_1...h_n$  是 $H$ 中的元, 在 $I$ 上 $f$ 被指派一个 $(h_1...h_n)$  到 $f(h_1...h_n)$ 的映射, 其中 $(h_1...h_n)$  属于 $H^n$ ;

则 $I$ 称为一个 $S$ 的 $H$ -解释。

例:  $S = \{P(x), Q(f(y)) \vee R(a), Z(f(y))\}$

■ **I:**

■  $H = \{a, f(a), f(f(a)) \dots\}$

■  $I = \{a, a; a, f(a); a, f(f(a)); \dots\}$

# H解释的表示

- 令  $\mathbf{A} = \{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n, \dots\}$  是  $\mathbf{S}$  的原子集, 一个  $\mathbf{H}$  解释可被表示为:

$$\mathbf{I} = \{\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_n, \dots\}$$

其中:  $\mathbf{m}_j$  或者是  $\mathbf{A}_j$ , 或者是  $\sim \mathbf{A}_j$ 。

如果  $\mathbf{m}_j$  是  $\mathbf{A}_j$ , 则  $\mathbf{A}_j$  为真, 否则,  $\mathbf{A}_j$  为假。

例1  $S = \{P(x) \vee Q(x), R(f(y))\}$

- $H = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\}$
- $A = \{P(a), Q(a), R(a), P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a)), \dots\}$
- 凡对**A**中各元素真假值的一个具体设定，都是**S**的一个**H**解释。

$I_1^* = \{P(a), Q(a), R(a), P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a)), \dots\}$

$I_2^* = \{\sim P(a), \sim Q(a), \sim R(a), \sim P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a)), \dots\}$

$I_3^* = \{P(a), \sim Q(a), \sim R(a), \sim P(f(a)), Q(f(a)), \sim R(f(a)), \dots\}$

$S \mid I_1^* = T, S \mid I_2^* = F, S \mid I_3^* = F$

注意：对S的任一个解释I均可找到一个H解释I\*与其对应.

■ 例子:  $S = \{P(x), Q(y, f(y, a))\}$

■ 设  $D = \{1, 2\}$ , 解释I作如下设定

a	f(1,1)	f(1,2)	f(2,1)	f(2,2)
2	1	2	2	1

P(1)	P(2)	Q(1,1)	Q(1,2)	Q(2,1)	Q(2,2)
T	T	F	T	T	F

- 对  $x=1, y=1$ :  $P(1) \wedge Q(1, f(1,2)) = T$   
对  $x=1, y=2$ :  $P(1) \wedge Q(2, f(2,2)) = T$   
对  $x=2, y=1$ :  $P(2) \wedge Q(1, f(1,2)) = T$   
对  $x=2, y=2$ :  $P(2) \wedge Q(2, f(2,2)) = T$

■ 在解释I下, S为真;

# 找I\*;

- $H = \{a, f(a,a), f(a,f(a,a)), f(f(a,a),a), f(f(a,a), f(a,a)), \dots\}$
- $A = \{P(a), Q(a,a), P(f(a,a)), Q(a,f(a,a)), Q(f(a,a), a), Q(f(a,a), f(a,a)), \dots\}$

- $a \rightarrow 2$

$f(a,a)$	$\rightarrow f(2,2)$	$\rightarrow 1$
$f(a,f(a,a))$	$\rightarrow f(2,1)$	$\rightarrow 2$
$f(f(a,a),a)$	$\rightarrow f(1,2)$	$\rightarrow 2$
$f(f(a,a),f(a,a))$	$\rightarrow f(2,2)$	$\rightarrow 1$

.....

- |                    |                      |                 |
|--------------------|----------------------|-----------------|
| $P(a)$             | $\rightarrow P(2)$   | $\rightarrow T$ |
| $Q(a,a)$           | $\rightarrow Q(2,2)$ | $\rightarrow F$ |
| $P(f(a,a))$        | $\rightarrow P(1)$   | $\rightarrow T$ |
| $Q(a,f(a,a))$      | $\rightarrow Q(2,1)$ | $\rightarrow T$ |
| $Q(f(a,a),a)$      | $\rightarrow Q(1,2)$ | $\rightarrow T$ |
| $Q(f(a,a),f(a,a))$ | $\rightarrow Q(1,1)$ | $\rightarrow F$ |

.....

- $I^* = \{P(a), \sim Q(a,a), P(f(a,a)), Q(a, f(a,a)), Q(f(a,a), a), \sim Q(f(a,a), f(a,a)), \dots\}$
- $S = \{P(x), Q(y, f(y, a))\}$
- $H = \{a, f(a,a), f(a, f(a,a)), f(f(a,a), a), f(f(a,a), f(a,a)), \dots\}$

## ■ 在 $I^*$ 下的 $S$ 的真值

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad S|I^* &= P(a) \wedge Q(a, f(a, a)) \quad \wedge \quad P(a) \wedge Q(f(a, a), f(f(a, a), a)) \\ &\quad (x=a, y=a \text{ 对应于 } x=2, y=2) \quad (x=a, y=f(a, a) \text{ 对应于 } x=2, y=1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\wedge \quad P(f(a, a)) \wedge Q(a, f(a, a)) \quad \wedge \quad P(f(a, a)) \wedge Q(f(a, a), f(f(a, a), a)) \\ &\quad (x=f(a, a), y=a \text{ 对应于 } x=1, y=2) \quad (x=f(a, a), y=f(a, a) \text{ 对应于 } x=1, y=1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\wedge P(a) \wedge Q(f(a, f(a, a)), f(f(a, f(a, a)), a)) \wedge \dots = T \\ &\quad (x=a, y=f(a, f(a, a))) \text{ 对应于 } x=2, y=2 \end{aligned}$$



## 例2

■  $S = \{P(x) \vee Q(x), R(f(y))\}$

■ 设  $D = \{1, 2\}$ , 解释  $I$  作如下设定

■ 

<u>f(1)</u>	<u>f(2)</u>	<u>P(1)</u>	<u>P(2)</u>	<u>Q(1)</u>	<u>Q(2)</u>	<u>R(1)</u>	<u>R(2)</u>
2	2	T	F	F	T	F	T

于是有  $S|I = T$

- 由于**I**对常量符号**a**没有设定, 这时**a**设定**1**或**2**(**D**中元素), 便有相应于**I**的**H**解释**I<sub>1</sub>\***和**I<sub>2</sub>\***:
- $I_1^* = \{P(a), \sim Q(a), \sim R(a), \sim P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a)), \sim P(f(f(a))), Q(f(f(a))), R(f(f(a))), \dots\}$
- $I_2^* = \{\sim P(a), Q(a), R(a), \sim P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a)), \sim P(f(f(a))), Q(f(f(a))), R(f(f(a))), \dots\}$
- 有**S | I<sub>1</sub>\***=**T**, **S | I<sub>2</sub>\***=**T**。

## 对应于 $\mathbf{I}$ 的 $\mathbf{H}$ -解释 $\mathbf{I}^*$

### ■ 定义:

假定在域 $\mathbf{D}$ 上的一个解释 $\mathbf{I}$ ，一个对应于 $\mathbf{I}$ 的 $\mathbf{H}$ 解释 $\mathbf{I}^*$ 是指满足下列条件的 $\mathbf{H}$ 解释:

令 $h_1, \dots, h_n$ 是 $\mathbf{H}$ 的元素，每一个 $h_i$ 被映射到 $\mathbf{D}$ 域中的一些 $d_m$ ，如果 $\mathbf{P}(h_1 \dots h_n)$ 被解释 $\mathbf{I}$ 指派为 $T(F)$ ，则 $\mathbf{P}(h_1 \dots h_n)$ 也被 $\mathbf{I}^*$ 指派为 $T(F)$ 。

# H解释的性质

## ■ 引理

- 如果在论域**D**上的一个解释**I**满足**S**，则任何一个对应于**I**的**H**解释**I\***，也满足**S**。

## ■ 定理

- 子句集**S**是不可满足的，**当且仅当****S**的所有**H**解释使**S**为假。

## ■ 证明:

### ■ $(\Rightarrow)$ 设 **S** 是不可满足的.

- 则在任一个论域上的任一解释使 **S** 为假;
- **H** 是一个论域, 则 **H** 上的所有解释使 **S** 为假;
- 从而, **S** 的所有的 **H** 解释使 **S** 为假。

### ■ $(\Leftarrow)$ 设 **S** 的所有的 **H** 解释使 **S** 为假.

- 假设子句集 **S** 可满足.
- 在一个论域 **D** 中存在某个解释 **I** 使 **S** 为真;
- 令 **I\*** 是对应于 **I** 的一个解释, 根据引理, **S** 在 **I\*** 上也为真, 这与假设矛盾;
- 所以, 子句集 **S** 不可满足.

## 结论：

- 如果**S**为不满足的，则存在一个特殊域，当**S**被证明在这个域上的所有解释为**F**。
- 即证明了对所有域上的所有解释为**F**，也就证明了**S**为不相容的。

# 几个性质

- (性质1) 一个子句**C**的基础实例**C'**被解释**I**满足, **iff**存在一个**C'**的基础文字**L'**在**I**中, 即  $\mathbf{C}' \cap \mathbf{I} \neq \emptyset$ .
  - **C**:  $\sim P(x) \vee Q(f(x))$
  - **H**:  $\{a, f(a), f(f(a)), \dots\}$
  - **C'**:  $\sim P(a) \vee Q(f(a))$
  - **I**<sub>1</sub>:  $\{\sim P(a), \sim Q(a), \sim P(f(a)), \sim Q(f(a)), \dots\}$
- (性质2) 一个子句**C**在解释**I**下为真, **iff**这个子句**C**的每个基础实例被**I**所满足。
  - **I**<sub>2</sub>:  $\{P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), \dots\}$

- (性质3)一个子句**C**在解释**I**下为假，**iff**至少存在一个**C**的基础实例**C'**，使得**C'**不被**I**所满足。

- **C**:  $\sim P(x) \vee Q(f(x))$

- **H**:  $\{a, f(a), f(f(a)), \dots\}$

- **C'**:  $\sim P(a) \vee Q(f(a))$

- **I<sub>3</sub>**:  $\{P(a), \sim Q(a), P(f(a)), \sim Q(f(a)), \dots\}$

- (性质4)子句集**S**是不可满足的，**iff**对每个解释**I**下，至少有**S**的某个子句的某个基例不被**I**所满足。



- **Skolem**范式
- **Herbrand**域
- 语义树
- **Herbrand**定理
- **Davis**的工作

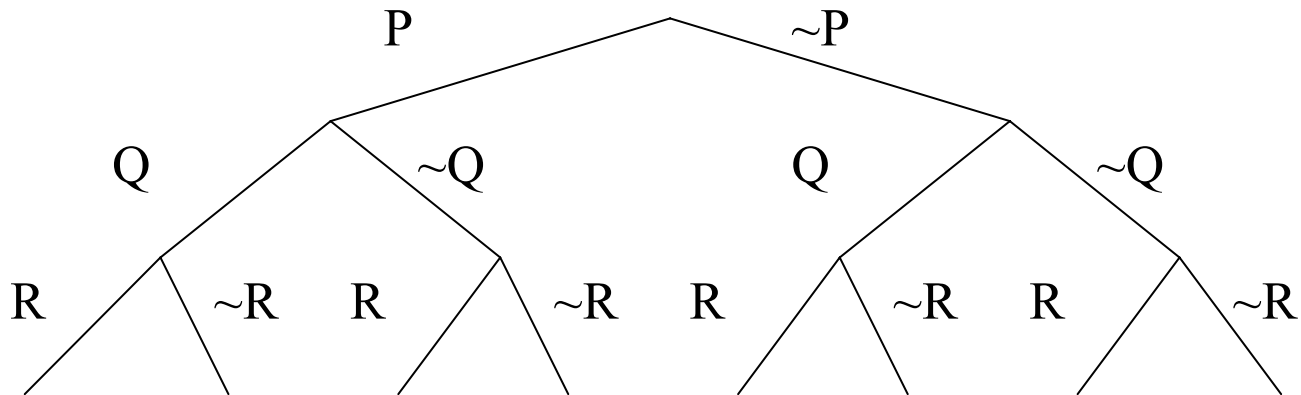
# 语义树(Semantic tree)

## ■ 例1

■  $G = P \wedge Q \wedge R$

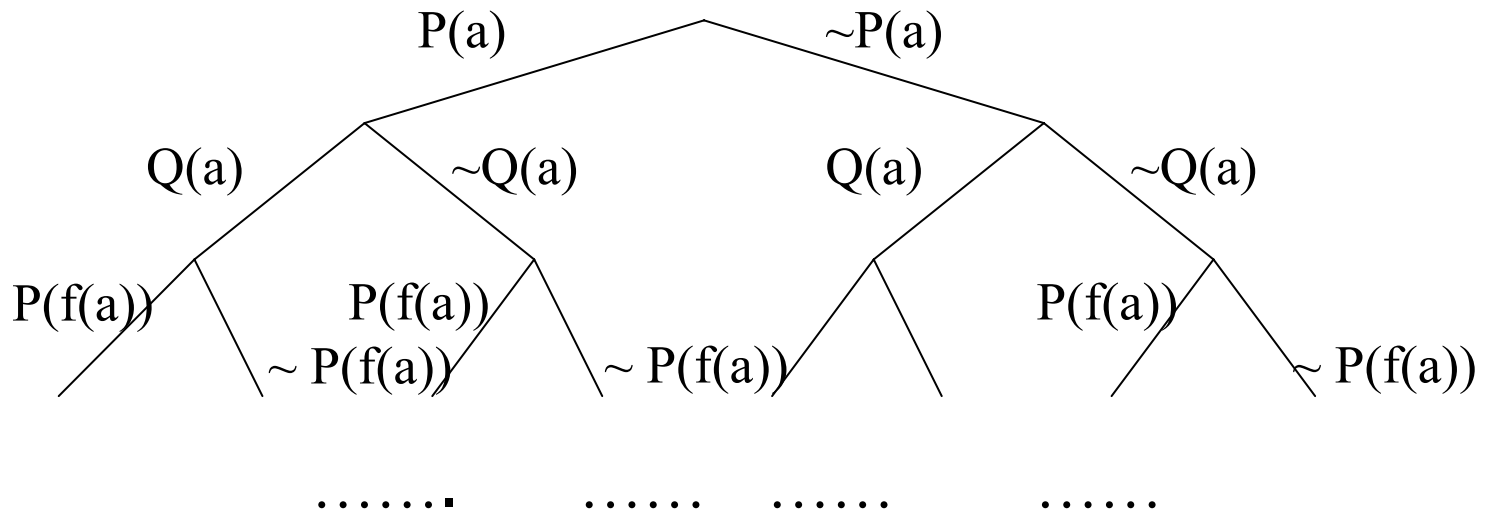
■  $S = \{P, Q, R\}$

■  $A = \{P, Q, R\}$



## ■ 例2

- $S = \{\sim P(x) \vee Q(x), P(f(y)), \sim Q(f(y))\}$
- $H = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\}$
- $A = \{P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), \dots\}$



# 注意

- 颠倒原子的顺序是可以的。例如 **$Q(a)$** 为第一个顶点。
- 如果原子集是无限的，则对应的语义树必定是无限的。
- 从任一个叶节点向根节点看，代表 **$S$** 的一个解释。
- 从任一个中间节点向根节点看，代表 **$S$** 的一个部分解释。

# some concepts

- 定义(**complementary pair**, 互补对)
  - 如果 **$A$**  是一个原子, 则两个文字 **$A$**  和  **$\sim A$**  被称为彼此互对, 且  **$\{A, \sim A\}$** 称为互补对。
- 如果一个字句包含一个互补对, 则称该子句是冗余/重言。
  - **$P \vee Q \vee \sim Q$**

# 定义(semantic tree, 语义树)

- 给定一个子句集合  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{A}$  是一个  $\mathbf{S}$  的原子集合, 一个对  $\mathbf{S}$  来说的语义树是一个向下的树结构, 在它的每一条联线上均附加了一个有限的在  $\mathbf{A}$  中的原子或原子非的集合, 如此:
  - 对每一个节点  $\mathbf{N}$ , 仅有有限个直接联线  $L_1, \dots, L_n$ , 令  $Q_i$  是附加在  $L_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 上的所有文字的合取, 则  $Q_1 \vee \dots \vee Q_n$  是一个永真的命题公式 (基础) .
  - 对每个节点  $\mathbf{N}$ , 令  $\mathbf{I}(\mathbf{N})$  是从根节点到节点  $\mathbf{N}$  的一个分支上所有附加在各个联线上文字集合的并集 (包含  $\mathbf{N}$ ), 则  $\mathbf{I}(\mathbf{N})$  不包含任何互补节对。

# 完备语义树(complete semantic tree)

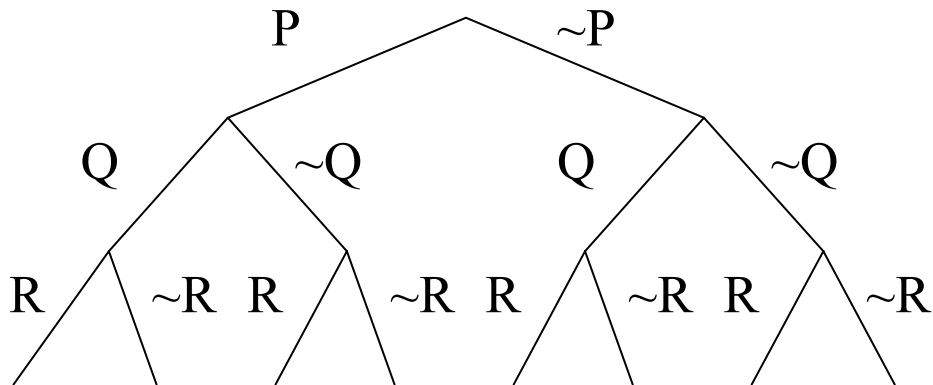
- 定义(**complete semantic tree**, 完备语义树):
  - 令  $\mathbf{A} = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k, \dots\}$  是原子集合, 一个对于  $\mathbf{S}$  来说的语义树是完备的, **iff** 对于这个语义树的每一个端节点  $\mathbf{N}$  (没有从这节点出发联线的节点)  $\mathbf{I}(\mathbf{N})$  包括  $\mathbf{A}_i$  或  $\sim \mathbf{A}_i$ , 对于  $i = 1, 2, \dots$  成立。

■ 例

■  $G = P \wedge Q \wedge R$

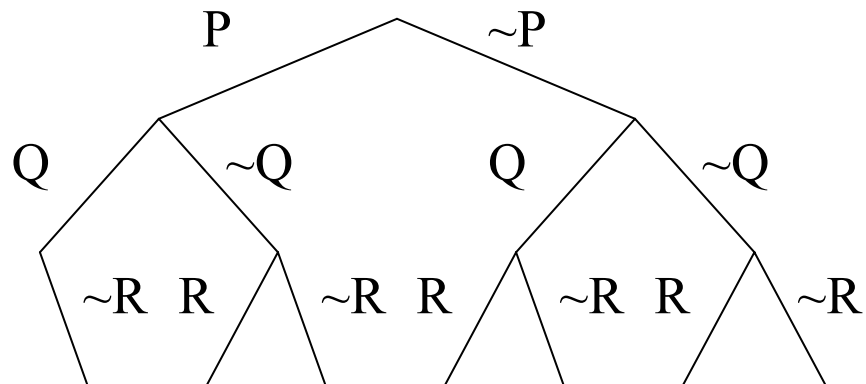
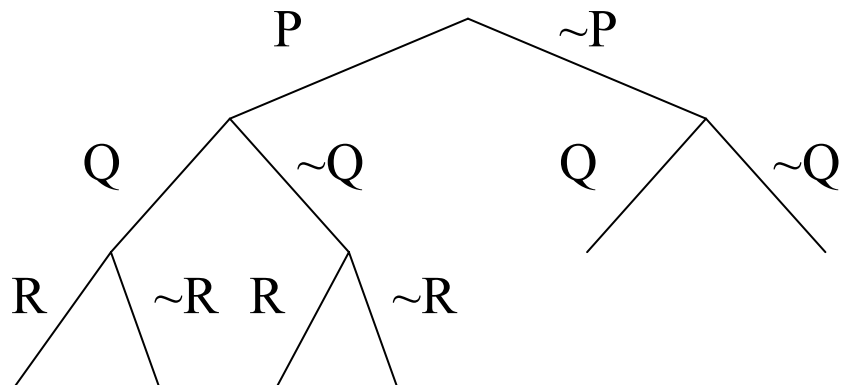
■  $S = \{P, Q, R\}$

■  $A = \{P, Q, R\}$





# 反例



## 完备语义树的性质:

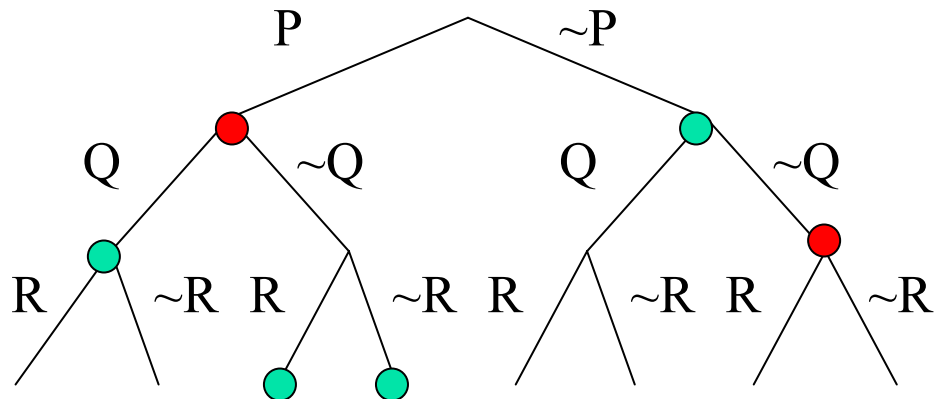
- **A complete semantic tree for  $S$  corresponds to an exhaustive survey of all possible interpretations for  $S$ . (全部)**
- **When the atom set  $A$  is infinite, any complete semantic tree for  $S$  will be infinite. (无限)**
- **If  $S$  is unsatisfiable, then  $S$  fails to be true in each of these interpretations. Thus, we may stop expanding nodes from a node  $N$  if  $I(N)$  falsifies  $S$ . (终止)**

# 封闭语义树(Closed semantic tree)

- 定义(failure node, 失败节点, 假节点)
  - A node  $N$  is a failure node if  $I(N)$  falsifies some ground instance of a clause in  $S$ , but  $I(N')$  does not falsify any ground instance of a clause in  $S$  for every ancestor node  $N'$  of  $N$ .

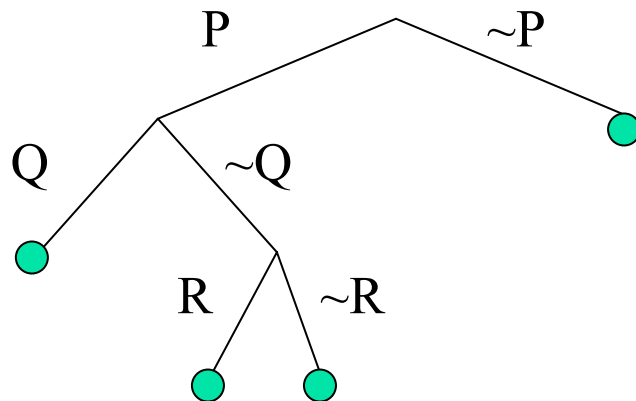
■ 例

■  $S = \{P, Q \vee R, \sim P \vee \sim Q, \sim P \vee \sim R\}$



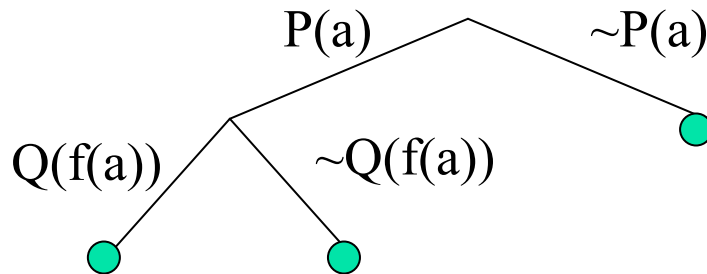
■ 定义(Closed semantic tree, 封闭语义树):

- A semantic tree  $T$  is said to be closed if and only if every branch of  $T$  terminates at a failure node.



■ 例

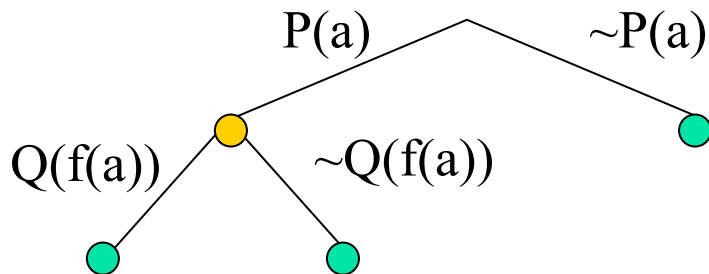
- $S = \{P(x), \sim P(x) \vee Q(f(x)), \sim Q(f(a))\}$
- $A = \{P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), \dots\}$



# 推理节点

- 定义(inference node, 推理节点)

- A node  $N$  of a closed semantic tree is called an inference node if all the immediate descendant nodes of  $N$  are failure nodes.



- 证明一个定理就是寻找一棵封闭语义树.
- **S**不可满足 $\rightarrow$ **S**在所有解释下为假 $\rightarrow$  **S**在所有**H**解释下为假;
- 完备语义树包含所有**H**解释;每一枝是一个**H**解释;
- **S**在**I**下为假, 则使某个基础实例为假;
- 这个节点称为假节点, 不用再扩展;
- 所有枝上都有假节点, 则为封闭语义树;



- Skolem范式
- Herbrand域
- 语义树
- Herbrand定理
- Davis的工作

## ■ Herbrand定理(Version 1)

子句集 $S$ 是不可满足的, 当且仅当对应于 $S$ 的任一棵完备语义树, 都存在一棵有限的封闭语义树。

# 证明

- 设子句集**S**不可满足.

要证:对应于**S**的任一棵完备语义树,都存在一棵有限的封闭语义树。

设**T**是**S**的完备语义树.

任选**T**的一个分支**B**, **I(B)**是**B**上所有连线上的文字的集合的并. **I(B)**是**S**的一个解释.

**S**不可满足, 则**I(B)**一定使**S**中的一个子句**C**为假;

**I(B)**一定使**C**的某个基础实例**C'**为假(性质3); **C'**的每个原子一定都在原子集**A**中;

因为**C'**的文字数目是有限的, 所以在**B**上一定存在一个假节点.

因为**B**的任意性, **T**的每个分支都有假节点. **T**是封闭的.

**T**是有限的.

**T**是有限的封闭语义树.

- 设对应于**S**的任一棵完备语义树, 都存在一棵有限的封闭语义树.

- 要证: 子句集**S**不可满足。

完备语义树包含**S**的所有解释, 每一枝对应一个解释;

封闭语义树: 每一枝都终止在假节点上: 每一枝都使**S**的某个子句的某个基例为假.

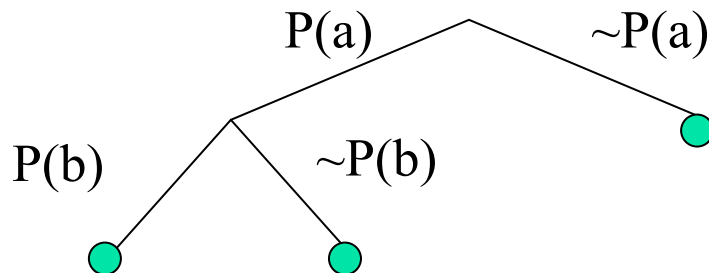
(性质4) 子句集**S**是不可满足的, **iff** 对每个解释**I**下, 至少有**S**的某个子句的某个基例为假。

## ■ Herbrand定理(Version 2)

- 子句集**S**是不可满足的，**当且仅当**存在一个有限不可满足的S的基础实例集合**S'**。

### ■ 例子：

- $S = \{P(x), \sim P(a) \vee \sim P(b), Q(f(x))\}$
- $H = \{a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)) \dots\}$
- $A = \{P(a), P(b), Q(a), Q(b), \dots\}$
- $S' = \{P(a), P(b), \sim P(a) \vee \sim P(b)\}$



## ■ 证明

- 设子句集**S**是不可满足的;

- 要证: 存在一个有限不可满足的**S**的基础实例集合**S'**.

根据**Version 1**, 有一棵有限的封闭语义树;

每一枝都终止在假节点上: 每一枝都使**S**的某个子句的某些基例为假: 构成**S'**.

**S'**不可满足.

有限的封闭语义树: 节点有限: 假节点有限: **S'**有限.

- 设存在一个有限不可满足的 $S$ 的基础实例集合 $S'$ 。
  - $S$ 的任一个解释 $I$ 都是一个对所有基础实例的解释；它包含一个对 $S'$ 的解释 $I'$ 。
  - 因为 $S'$ 不可满足, 所以 $I'$ 使 $S'$ 为假;
  - $I' \subseteq I$ , 所以 $I$ 使 $S'$ 为假; ( $I$ 使某个子句的某个基础实例为假)
  - 由于解释 $I$ 的任意性,  $S$ 不可满足.

# Gilmore的方法(1960)

- 子句集**S**是有限的;
- 基础实例的数目是可数的;
- 枚举;



- **Skolem**范式
- **Herbrand**域
- 语义树
- **Herbrand**定理
- **Davis**的工作

# Davis-Putnam的工作

- **Gilmore**的方法是指数复杂性的;
- **Davis-Putnam**: 提高效率(启发式方法);
- 四条规则:
  - 其应用不改变子句集的不相容性;

# 规则一

## ■ 重言式规则(**tautology rule**)

- **S**中的重言式子句，不会为**S**的不可满足提供任何信息，应该删除。
- **$S = \{P \vee \sim P, Q, R \vee P\}$**   
**S**的逻辑含义是  **$(P \vee \sim P) \wedge Q \wedge (R \vee P) = Q \wedge (R \vee P)$** ，从而删去重言式 **$P \vee \sim P$** ，不影响**S**的真值。
  - **$S' = \{Q, R \vee P\}$**
- **Delete all the ground clauses from  $S$  that are tautologies. The remaining set  $S'$  is unsatisfiable if and only if  $S$  is.**

# 规则二

## ■ 单文字规则(one-literal rule)

- 单文字: 在**S**中存在只有一个文字的基础子句**L**.
- 例子: **S**={**L**, **L**∨**P**, **~L**∨**Q**, **S**∨**~R**}
- 如果在**S**中存在只有一个文字的基础子句**L**, 消去在**S**中带有这个文字**L**的所有子句得到**S'**, 如果**S'**为空, 则**S**是相容的; 否则, 从**S'**中删去**~L**, 得到**S''**. **S''**不可满足当且仅当**S**不可满足.
  - **S'** = {**~L**∨**Q**, **S**∨**~R**}
  - **S''** = {**Q**, **S**∨**~R**}
- **S**不可满足, 则在所有解释下**S**都为假;
  - **L**=0;
  - **L**=1;
    - **~L**=0.

# 规则三

- 纯文字规则(**pure-literal rule**)

- 纯文字: 如果文字 $L$ 出现于 $S$ 中, 而 $\sim L$ 不出现于 $S$ 中,  $L$ 称为 $S$ 的纯文字.
- 例子:  $S = \{A \vee B, A \vee \sim B, \sim B, B\}$
- $L$ 是 $S$ 的纯文字. 从 $S$ 中删除含 $L$ 的子句得 $S'$ , 如果 $S'$ 为空集, 那么 $S$ 是可满足的。否则,  $S'$ 不可满足当且仅当 $S$ 不可满足.
  - $S' = \{\sim B, B\};$
- $S$ 不可满足, 在 $A$ 为真下不可满足;
  - $A=1: A \vee B=1, A \vee \sim B=1;$
  - $S'$ 不可满足, 当然 $S$ 不可满足;

# 规则四

- 分裂规则(**splitting rule**)

- $$\mathbf{S} = (\mathbf{L} \vee \mathbf{A}_1) \wedge \dots \wedge (\mathbf{L} \vee \mathbf{A}_m) \wedge$$
$$(\sim \mathbf{L} \vee \mathbf{B}_1) \wedge \dots \wedge (\sim \mathbf{L} \vee \mathbf{B}_n) \wedge \mathbf{R}$$

$\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{R}$ 中不含 $\mathbf{L}$ 和 $\sim \mathbf{L}$ 。

令 $\mathbf{S}' = \{\mathbf{A}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{A}_m \wedge \mathbf{R}\},$

$\mathbf{S}'' = \{\mathbf{B}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{B}_n \wedge \mathbf{R}\}$

则 $\mathbf{S}$ 不可满足当且仅当 $\mathbf{S}'$ 和 $\mathbf{S}''$ 同时是不可满足的。

- $\mathbf{L} = 1(\mathbf{S}'')$

- $\mathbf{L} = 0(\mathbf{S}')$

# 例1

- **$S = \{P \vee Q \vee \sim R, P \vee \sim Q, \sim P, R, U\}$** 
  - 对**U**使用纯文字:  **$\{P \vee Q \vee \sim R, P \vee \sim Q, \sim P, R\}$**
  - 对 **$\sim P$** 使用单文字:  **$\{Q \vee \sim R, \sim Q, R\}$**
  - 对 **$\sim Q$** 使用单文字:  **$\{\sim R, R\}$**
  - 对**R**使用单文字:  **$\{\square\}$**
  - **S**不可满足;

## 例2

- $S = \{P \vee Q, \sim Q, \sim P \vee Q \vee \sim R\}$ 
  - 对  $\sim Q$  使用单文字:  $\{P, \sim P \vee \sim R\}$
  - 对  $P$  使用单文字:  $\{\sim R\}$
  - 对  $\sim R$  使用纯文字:  $\{\}$
  - $S$  可满足;



# 作业

- 写出下式的H域和原子集.

- $S = \{P(f(x, a))\}$

- $S = \{P(x) \vee Q(y), R(f(y))\}$

- 前提：每个储蓄钱的人都获得利息。

结论：如果没有利息，那么就沒有人去储蓄钱。

令： $S(x, y)$  表示 $x$ 储蓄 $y$

$M(x)$  表示 $x$ 是钱

$I(x)$  表示 $x$ 是利息

$E(x, y)$  表示 $x$ 获得 $y$

用逻辑公式表示前提和结论并化为子句形式;

- 下述子句集是可满足的还是不可满足的(给出过程)?

- $S = \{P \vee \sim Q, \sim P \vee Q, Q \vee \sim R, \sim Q \vee \sim R\}$

- $S = \{P \vee Q, P \vee \sim Q, R \vee Q, R \vee \sim Q\}$

- $S = \{P \vee Q, P \vee \sim Q, \sim P \vee Q, \sim P \vee \sim Q\}$