

## 摘 要

一维激波管问题是一个基本的测试算例，通过该算例，重现了多种计算流体力学的经典以及前沿算法，求解激波管问题中的捕捉激波的技术也会被用于高级算法。自上世纪 50 年代开始，CFD 发展出了许多卓有成效的算法，其中包括有限差分法如 Lax-Friedrichs、Lax-Wendoff 以及初代有限体积法如 Godunov 类格式，到改进的 TVD、WENO、MUSCL 格式。本文选取了 lax 算例和 sod 算例，使用 python 对一些经典方法进行实现，并从数值结果尝试分析这些算法的优缺点。

针对一维欧拉方程的数值方法大体上可以分为通量方法和波方法，后者又可以分为通量向量分裂方法和通量差分分裂方法，其中，通量方法形式简单，主要是从泰勒展开构造的差分格式，但是由于缺乏物理意义，在计算中体现出在间断处产生抹平或者非物理振荡。波方法则更具物理意义，相对来说对激波的处理会好一些，它是从积分形式的欧拉方程中得到的，即将流体区域分成小控制体，并在每个控制体中进行重构-前进两个步骤。其中重构步骤中对每个结构体的初始变量的估计可以理解为对其进行插值，从最基本的分段常数插值，到分段线性以及多项式插值衍生出了许多不同的方法，还可以加入斜率限制器以减少在间断附近的振荡，本文使用的是分段常数插值。前进步骤中的本地黎曼问题求解有精确黎曼求解器和近似黎曼求解器如 Roe、HLL、Osher 求解器等，求解器的选择常常决定了该格式能处理特定类型的物理问题，而具体的时间推进方法又有 Runge-Kutta 等方法，在计算中发现采用简单的时间推进，本地黎曼求解器不会收敛，故此本文采用了三阶 Runge-Kutta 格式。

**关键词:** 一维激波管问题；Godunov 方法；有限差分法

## ABSTRACT

This paper mainly implements some classical finite difference method (FDM) and finite volume method (FVM) through the example of one-dimensional shock tube problem. This article is divided into two parts. The first part is the first two chapters, of which the first chapter is an introduction, reviewing the development process of the classic CFD methods in the 50-90s; The second chapter mainly introduces the various forms and properties of the one-dimensional Euler equation, as well as the classification of shock tube problems, as well as some concepts such as simple wave, discontinuity, and stability of the difference scheme. The second part is the last three chapters. The third chapter gives the exact solution of the one-dimensional shock tube problem; the fourth and fifth chapters introduce numerical algorithms. The numerical methods for the one-dimensional Euler equation can be roughly divided into flux methods Harmonic wave method, the latter can be divided into flux vector splitting method and flux differential splitting method. Among them, the flux method is simple in form, mainly the difference format constructed from Taylor expansion, and the wave method is more physically meaningful. It is obtained from the Euler equation in integral form, that is, the fluid region is divided into small control bodies, and then reconstruction-advanced two steps are performed in each control body. Among them, the estimation of the initial variables of each structure in the reconstruction step can be understood as interpolation. From the most basic piecewise constant interpolation, to piecewise linear and polynomial interpolation, many different methods are derived, and you can also add Slope limiter to reduce oscillations near discontinuities, this article uses piecewise constant interpolation. There are precise Riemann solvers and approximate Riemann solvers such as Roe, HLL, and Osher solvers in the local Riemann problem solving in the forward step. The choice of solver often determines that the format can handle specific types of physical problems. There are Runge-Kutta and other methods for time advancement. This article uses the third-order Runge-Kutta format.

**Key words:** 1D shock tube problem;Godunov scheme;Finite difference method

## 目 录

<b>摘要 .....</b>	<b>III</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>IV</b>
<b>第1章 绪论 .....</b>	<b>1</b>
1.1 研究背景 .....	1
1.2 文章结构和研究意义 .....	4
<b>第2章 一维激波管问题 .....</b>	<b>5</b>
2.1 欧拉方程组 .....	5
2.2 激波管问题及其性质 .....	7
2.3 差分格式概述 .....	8
<b>第3章 黎曼问题精确解 .....</b>	<b>15</b>
<b>第4章 通量方法 .....</b>	<b>21</b>
4.1 Lax-Friedrichs 格式 .....	21
4.2 Lax-Wendoff 格式 .....	22
<b>第5章 波方法 .....</b>	<b>26</b>
5.1 通量差分分分裂 .....	26
<b>第6章 结论 .....</b>	<b>33</b>
<b>致谢 .....</b>	<b>34</b>

# 第1章 绪论

## 1.1 研究背景

计算流体力学 (Computational Fluid Dynamics, 简称 CFD) 是 21 世纪流体力学和热力学领域的重要技术之一，是一种从守恒律出发，通过计算机，利用数值方法和算法来研究流体流动、流体和物质的化学反应，进行工业设计的科学，它既是理论，也是工具。早在上世纪八、九十年代，波音、通用电气、通用汽车、爱立信、福特等公司就开始大量在工程设计中使用 CFD。作为工具的 CFD 是计算机辅助工程 (Computer Aided Engineering, 简称 CAE) 的一个主要分支，从上世纪 70 年代至今已发展出了一些强大且完善的商业软件和大量的开源求解器，比如 ansys 旗下的 fluent, CFX 以及擅长气液两相流的 star-ccm+ 等；本世纪开始发展出了一些开源软件如 Openfoam, SU2, Palabos 等，也备受欢迎，虽然它们自由度高但操作相对商业软件更复杂，常用作为研究工具。CFD 涉及的问题可以分为六大类，有常规流体问题，即只涉及流体流动的问题，有低速流动、跨音速流动、高音速流动和超高音速流动；热问题，包括热传导、热辐射和对流；组分传输问题，包括常规组分散问题、化学反应、燃烧；多相流问题；运动部件的模拟，包括活塞和叶片等；以及多物理场耦合问题。实际中的问题通常以上多种问题的组合，比如 fluent 的一个入门算例，交叉管内流体混合问题就涉及流动和传热两个基本问题，现实中的工程问题则会更为复杂，比如在设计涡轮发动机时，常用 CFD 来预测单个部件性能；在设计民用或军用飞机时，CFD 计算的结果会作为载荷分布和翼地效应的重要数据来源。而这些问题涉及的控制方程通常都是非线性的，也无法给出解析解，因此数学家和物理学家通常是从一些简单情况比如一维线性/非线性方程开始研究方程的性质和数值格式，进而推广到方程组和高维情况，理论成熟后便可以用数值方法模拟现实情况。传统的流体研究方法通常都是基于实验，CFD 相较于实验流体力学，更为灵活、经济，甚至提供了新的物理上的洞察，纵使很多人还是更相信实验的结果，但是随着计算机和 CFD 理论的发展，计算得到的结果也得到了更多认可，甚至在某些湍流问题上，有些学者认为直接数值模拟 (DNS) 的可信

度已经高于实验。在更广泛的 CFD 定义中，实验流体力学过程中所用到的计算机技术也被包含在 CFD 研究范畴内。科学的发展通常都是理论和实际应用或者实验相辅相成，CFD 也是如此，实验的结果可以检验算法的合理性，而计算的结果又可作为实验的指导，因此，为了得到可靠的数值结果，建立合适的数值计算方法成为了 CFD 理论研究的重要内容之一。总体来讲，CFD 所求解的方程就是质量、动量守恒方程，对于可压缩流体或者传热，还需增加求解能量守恒方程；对于多种流体混合、反应、燃烧，或者湍流问题，也需增加相应的守恒方程后者运输方程。CFD 的常见数值方法可分为有限差分法、有限体积法，以及一些相对小众的方法比如 LBM(Lattice Boltzmann methods), SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics), ALE(Arbitrary Lagrangian-Eulerian) 等。其中有限差分法主要通过泰勒展开在离散网格上用差商代替导数，从是否对时间进行离散可以划分为半离散格式和全离散格式，从时间离散格式的不同可以分为显式、隐式、半隐式、显隐交替格式；其特点是方便控制时间、空间精度，适用于结构简单、外形规整的网格，数学意义直观且理论发展很完善，也是本文主要进行实现的方法之一。有限元法适合处理边界复杂的区域，过程复杂，本文不会进行实现。有限体积法结合了上述两种方法的优点，其思想是将网格看作单个控制体，并在控制体内基于守恒方程进行积分，并利用斯托克斯定理、高斯公式等转化积分形式，物理意义更直观；根据未知量所处位置可以分为在网格单元中心/在网格节点；根据通量的导数构造方法可以分为中心型格式和迎风型格式；迎风型格式有可以分为通量矢量分裂 (FVS)、通量差分分裂 (FDS)、总变差衰减 (TVD)、波动分裂 (FS)，本文也会对该类格式予以实现。LBM 方法是一种无网格方法，主要涉及多相流，多组分流等复杂流体，其明显优势是易于编程实现，本文不会涉及。以下回顾一些本文涉及的针对可压缩流体的数值方法。

1922 年，英国气象学家 Richardson 使用中心格式进行数值天气预报，由于该格式存在无条件不稳定和初始条件不合理的问题，导致预报失败。1928 年，Courant, Friedrichs 和 Lewy 首次提出特征线方法 [2]，证明了解的存在唯一性并给出了著名的 CFL 条件，开创了对稳定性问题的研究。1948 年 Von Neumann 等人用当时最强大的计算机 ENIAC 第一次成功的进行了 24 小时天气预报。1950 年，Von Neumann 等人正式提出了 Von Neumann 稳定性分析方法。同年，他又和 Richtmeyer 提出了

人工粘性方法以捕捉激波，该方法沿用至今。1952 年，Courant 提出 CIR 格式，开创了迎风格式的研究 [3]。1954 年，Lax 针对包含激波的一维可压缩流体的计算提出一阶精度的 Lax-Friedrichs 精度方法具有较大的数值耗散，使得在激波附近的梯度被抹平，无法模拟其物理特性。1959 年，Godunov 提出了第一个精确黎曼求解器 [4] 以及在此基础上提出了一个一阶迎风格式，第一个将 CIR 格式推广到非线性方程，同时还提出了著名的 Godunov 定理，促使了后来大量的对非线性格式的研究。1960 年，Lax 和 Wendoff 提出 Lax-Wendoff 方法和 Lax-Wendoff 定理，虽然 Lax-Wendoff 方法为二阶精度，但将其写成人工粘性格式便会发现其粘性项是在满足 cfl 条件下最小的粘性，因此其稳定性较差，容易在间断解和大梯度处产生非物理震荡 [10]，要解决激波问题，必须对间断有较好的处理，在已知间断位置的情况下，可以采用激波装配法将激波作为边界处理，而在未知的情况下后续的研究者采用了激波装配法，是一类采用数值方法自动捕捉激波的手段，除此之外，差分解还要满足熵条件或者增加人工耗散来消除非物理震荡。1964 年，Harlow 提出 PIC(Particle-in-cell) 方法 [5]。1969 年，Maccormack 提出了易于编程且达到二阶精度的 Maccormack 方法 [14]。1971 年，Boris 在一篇报告 [1] 中首次提出了第一个高精度的保持单调性质的方法 FCT(Flux-Corrected Transport) 的概念。1973 年，Van leer 提出了二阶高分辨率的保单调性守恒格式 MUSCL[20]，从此，快速涌现出很多相关的高分辨率格式。1981 年，Roe 在 Godunov 求解器基础上提出了 Roe 黎曼近似求解器，其思想是将 Jacobian 矩阵线性化，避开了精确求解器的迭代求根步骤 [16]，简单且能分辨接触间断和激波，但是会产生膨胀激波这种非物理现象，也就是不能模拟膨胀波。1983 年，Harten 等人提出了 HLL 黎曼近似求解器，后经多人具体实现，但其不能分辨接触间断的特点限制了他的使用范围 [8]，同年 Harten 提出了 TVD(Total Variation Diminishing) 准则的概念，并且给出了一个二阶精度的高分辨的 TVD 格式，TVD 格式基本解决了高阶精度差分解在激波附近的非物理震荡问题 [6]。1984-1985 年，Colella 和 Woodward 提出了同样高精度单调性质的 PPM(Piecewise Parabolic Method) 格式，Roe[15] 和 Sweby[18] 用通量限制方法给出了一系列 TVD 格式，吸收了 FCT，MUSCL，PPM 中提出的通量估计，和斜率限制的概念。1987 年，Shu 基于 TVD 格式提出了 TVB 格式 (Total Variation Bounded)[17]，同年，Harten，Engquist，Osher，Chakavarthy 提出了满足 TVB 的

本质无震荡格式 ENO[7]。1994 年，在 ENO 格式的基础上，许多研究者又提出了 WENO 格式，比如 Liu, Osher, Chan 构造的一维三阶有限体积 WENO 格式 [13]，同年，Toro 等人改进了 HLL 黎曼近似求解器提出了 HLLC 黎曼近似求解器 [19]，使 HLL 方法能分辨接触间断。

## 1.2 文章结构和研究意义

一维激波管问题是为数不多的存在精确解的 CFD 问题，常常作为检测算例来检验数值格式，除此之外，很多数值方法都包含了黎曼精确求解器或者近似求解器来提高捕捉激波和处理光滑区域的能力，因此，对一维激波管问题进行学习和实现是最基本的也是有现实意义的。本文主要对一维欧拉方程组实现了一些经典的数值格式，并与精确求解器的结果相比较，尝试分析出现一些数值现象的原因，以达到学习了解数值方法的目的。

具体来说，第二章介绍一维欧拉方程组及一些理论基础，包括一维欧拉方程组的形式和激波管问题的基本性质，以及有限差分法概述，包括稳定性条件等。

第三到五章分别给出了黎曼问题精确解，及 Lax-Friedrichs、Lax-Wendoff、Godunov 类格式的结果和简单分析。

## 第2章 一维激波管问题

一维欧拉方程组由连续性方程、动量方程、能量方程组成，该方程组就是对质量守恒定律、牛顿第二定律、能量守恒定律的数学描述，本章介绍在无粘流体情况下的守恒形式欧拉方程组以及对应的激波管问题的性质。

### 2.1 欧拉方程组

一维非定常理想气体流动的守恒形式的欧拉方程组，其中  $\mathbf{f}$  也成为通量：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x)$$

在不连续情况则有如下积分形式的欧拉方程组：

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{u} dx - \mathbf{f} dt) = 0 \quad (2.2)$$

其中  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_T \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho e_T + p) u \end{bmatrix}$ ,  $e_T = e + \frac{u^2}{2}$ 。

特别地，当  $\Gamma$  为如图 (2.1) 四边形闭合回路时，方程 (2.2) 变为：

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t_2) dx = \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_1) dx + \int_{t_1}^{t_2} u(x_2, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} u(x_1, t) dt \quad (2.3)$$

对于方程 (2.1)，即使  $\mathbf{u}_0(x)$  无穷次可微，也无法保证一定有连续可微解存在，故须引入如下的弱解概念扩大解的范围：

**定义 1** 若  $\mathbf{u}(x, t)$  对任意分段可微的闭回路  $\Gamma$ ，使积分方程 (2.2) 成立，称其为弱解。

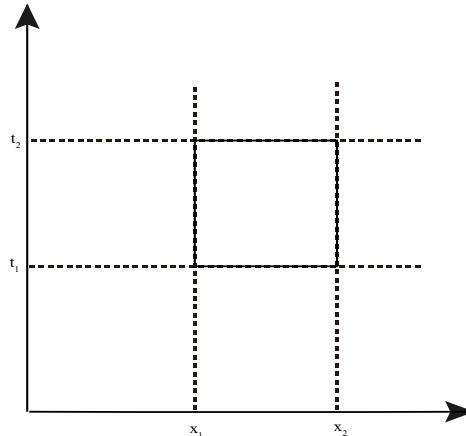


图 2.1 四边形闭合回路

弱解通常是不唯一的，导致用数值格式计算时会出现违反物理的现象，为了找得到合适的弱解，还需要引入熵条件对其进行限制，但是对于欧拉方程组，还没有一个定理能确定满足熵条件的弱解是否唯一。

如下拟线性格式也很常见：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

其中， $\mathbf{A}(\mathbf{u})$  为 Jacobian 矩阵：

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{(\gamma-3)u^2}{2} & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ \frac{(\gamma-3)u^3}{2} - \frac{\alpha^2 u}{\gamma-1} & \frac{(3-2\gamma)u^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} & \gamma u \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$\mathbf{A}$  的特征值为：

$$\lambda_1 = u - a \quad \lambda_2 = u \quad \lambda_3 = u + a \quad (2.6)$$

声速  $\alpha^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$ 。

另外，在间断两侧解要满足如下关系：

$$\begin{aligned} [\rho] D - [\rho u] &= 0 \\ [\rho u] D - [\rho u^2 + p] &= 0 \\ [\rho E] D - [\rho Eu + pu] &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

其中 [ ] 表示间断两侧括号中物理量的差,  $D$  表示间断的传播速度。

## 2.2 激波管问题及其性质

激波管问题是欧拉方程 Riemann 问题的一种, 简单来讲, 就是一类具有特殊初值条件的欧拉方程组, 是 CFD 算法中最常用的一维测试案例, 比如下述经典激波管问题, 其中  $\mathbf{W}_{L,R} = [\rho_{L,R} \quad u_{L,R} \quad p_{L,R}]^T$ :

$$(\text{sod 激波管}) \quad \begin{cases} \mathbf{W}_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & -1 < x < 0 \\ \mathbf{W}_R = \begin{bmatrix} 0.125 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} & 0 < x < 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

$$(\text{lax 激波管}) \quad \begin{cases} \mathbf{W}_L = \begin{bmatrix} 0.445 & 0.698 & 3.528 \end{bmatrix} & -1 < x < 0 \\ \mathbf{W}_R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.571 \end{bmatrix} & 0 < x < 1 \end{cases} \quad (2.9)$$

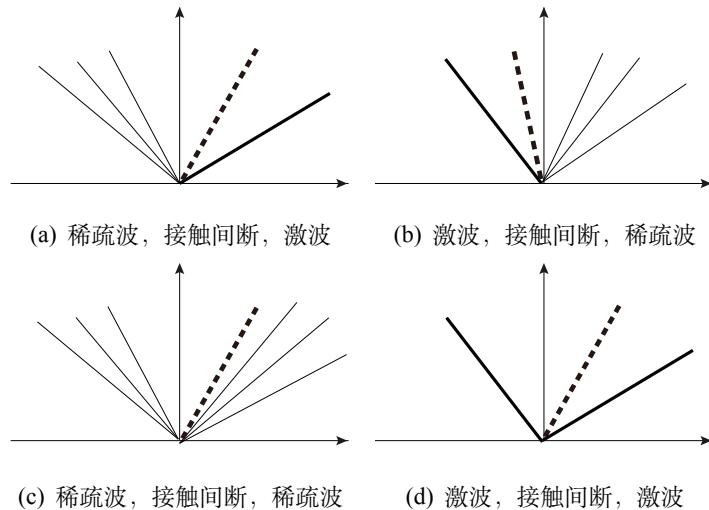


图 2.2 四种情况

激波管问题具有如下两个结论:

**结论 1** 对每个给定状态的  $\mathbf{W}_L$ , 存在一个临域, 使当另一状态  $\mathbf{W}_R$  属于该临域时, 激波管问题有唯一解。并且该解由  $n$  个初等波将  $t>0$  平面分为  $n+1$  个常数区组成 [11]。

**结论 2** 激波管问题的解是由从原点出发的中心稀疏波, 激波, 接触间断, 扇形常数区组成, 并且沿着射线  $\frac{x}{t} = \text{const}$ , 解为常数 (特征线或者常数区), 更具体

讲，左初等波的黎曼不变量  $u + \frac{2}{\gamma-1}c$  为常数，特征线族中特征线斜率  $\square u - c$ ；右初等波的黎曼不变量  $u - \frac{2}{\gamma-1}$  为常数，特征线族中特征线斜率为  $u + c$ [22]。

大多数情况下给定的初始间断不满足条件 (2.1)，因而在初始时刻后，立刻分解为若干个满足条件 (2.1) 的间断线或者说波，并以不同的速度传播，依据不同的初始条件，激波管问题的解可以有四种，如图 (2.2) (不考虑真空情况)。在这些解中，对于任何时刻的左右波未到达的区域，都保持常数分布，即初始条件的值。虚线是接触间断，两侧的速度和压力值相同，密度不同。图中的一族直线为中心稀疏波，是一种弱间断，反映了气体的等熵膨胀过程，物理量连续的从波前过渡到波后，且波尾的压强小于等于两侧的初始压强，但是波前的物理量导数和波后是间断的。图中的单个直线为激波，从波前到波后要求熵增，且波尾的压强大于等于初始的压强。

除了初值外，气体的状态方程也会影响激波管问题的解的结构以及数学特性。本文所取的理想气体的状态方程为  $p = (\gamma - 1) \rho e$ ,  $\gamma = 1.4$ 。

## 2.3 差分格式概述

### 2.3.1 基本概念

**定义 2(相容性)** 当差分方程中的步长  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$  时，差分方程的截断误差也趋于 0。

**定义 3(收敛性)** 当  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$  时， $\|u_h - u\| \rightarrow 0$ ，则差分方程的近似解收敛于微分方程的精确解。

**定义 4(稳定性)** 当  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$  时， $\|u_h - u\| \rightarrow 0$  时，存在常数  $c_1$ ,  $c_2$ ，使得存在常数  $T$ ，对  $t < T$  有

$$\|u_h\| \leq c_1 e^{c_2(t-t_0)} \|u_h(t_0, x)\| \quad (2.10)$$

其中， $u_h$  表示差分方程的解。简单来说相容性描述了差分方程和原始方程的误差，收敛性描述了近似解和真实解的误差，稳定性描述了初值条件对解的影响。

接下来介绍构造差分格式的基本方法，为后文给出具体差分格式做好准备，

**方法 1(待定系数法)** 这种方法想法十分简答，先选定要应用到的网格点，然后将这些网格点在欲表示的点泰勒展开，在泰勒展开中便有欲表示的偏导数，对每个泰勒展开的该偏导的系数使用待定系数法，确定待定系数后整理出差分格式即可，可以用于构造单个偏导数的差分方程。

**方法 2(多项式方法)** 构造  $\partial^2 T / \partial x^2$  在  $(j, n)$  点的差分方程，首先选取网格点  $(j - 1, n)$  和  $(j + 1, n)$ ，设

$$\begin{aligned} T(j, n) &= a + bx + cx^2 \\ T(j + 1, n) &= a + b(x + \Delta x) + c(x + \Delta x)^2 \\ T(j - 1, n) &= a + b(x - \Delta x) + c(x - \Delta x) \end{aligned}$$

故

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}_{(j, n)} = c = \frac{T_{j+1, n} - 2T_{j, n} + T_{j-1, n}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (2.11)$$

**方法 3(积分法)** 对热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

首先选取积分限对该方程进行积分，比如取  $t_0 \rightarrow t_0 + \Delta t$ ,  $x_0 - \frac{\Delta x}{2} \rightarrow x_0 + \frac{\Delta x}{2}$  可得

$$\begin{aligned} &\int_{x_0 - \frac{\Delta x}{2}}^{x_0 + \frac{\Delta x}{2}} [u(t_0 + \Delta t, x) - u(t_0, x)] dx \\ &= a \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \left( t, x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial u}{\partial x} \left( t, x_0 - \frac{\Delta x}{2} \right) \right] dt \end{aligned}$$

应用积分中值定理，将积分转化为差分，方程左边取  $x_0$  为中值，右边取  $t_0 + \Delta t$ ，

$$\begin{aligned} & [u(t_0 + \Delta t, x_0) - u(t_0, x_0)] \Delta x \\ &= a \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \left( t_0 + \Delta t, x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial u}{\partial x} \left( t_0 + \Delta t, x_0 - \frac{\Delta x}{2} \right) \right] \Delta t \end{aligned}$$

对上式中偏导数采用中心差分格式即得到最终格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{a}{\Delta x^2} (u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) \quad (2.12)$$

对于比双曲型方程的差分格式，还必须满足如下 CFL 条件

**定义 5 (CFL 条件)** 差分格式的依赖域包含控制方程的的依赖域。

对于欧拉方程组的显示格式，如果  $u_i^{n+1}$  的依赖域是  $u_{i-K_1}^n, \dots, u_{i+K_2}^n$ ，则 CFL 条件可表示为

$$-K_2 \leq \lambda(u-a) \quad \lambda(u+a) \leq K_1 \quad (2.13)$$

### 2.3.2 守恒型格式

第一节介绍了一维激波管问题的控制方程两种形式，也就是守恒形式和积分形式的欧拉方程组，但在假设解的光滑性之后，可以将守恒形式的偏导数拆开，从而得到原始变量形式的欧拉方程组，对于求解像激波管问题这种存在间断的问题，不仅要有合适的数值方法，选择合适的方程形式也很重要。1994 年，Hou 和 Le Floch 就证明了，对于存在激波的问题，单纯的使用非守恒形式的数值方法不会收敛到正确的解 [9]。要正确模拟激波，差分格式必须是守恒型的，守恒型格式的定义如下：

**定义 6** 方程 (2.1) 的守恒格式数值方法为如下形式的相容于方程 (2.1) 的差分方程，

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{f}_{i-\frac{1}{2}} - \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}] \quad (2.14)$$

其中

$$\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} (\mathbf{u}_{i-l_L}^n, \dots, \mathbf{u}_{i+l_R}^n)$$

$l_L, l_R$  是两个非负整数,  $\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}$  称为数值通量, 是对公式 (2.1) 中物理通量  $\mathbf{f}$  的估计。

对守恒型格式有如下基本定理

**定理 1 (Lax-Wendoff 定理)** 当方程 (2.1) 的守恒型差分格式的时间步长与空间步长趋于 0 时, 差分方程的解一致有界且几乎处处收敛到函数  $u(t, x)$ , 则该函数为方程 (2.1) 的弱解。

### 2.3.3 稳定性分析

对一维线性常系数偏微分方程组

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0$$

其中  $\mathbf{U}$  为  $m$  维向量,  $\mathbf{A}$  为  $m \times m$  维矩阵。对误差向量  $\mathbf{E}$  做傅立叶级数展开, 并带入上式得到放大因子, 类似如下形式

$$\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{G} \mathbf{V}^n$$

其中  $\mathbf{G}$  为即为放大矩阵其稳定条件为其谱半径

$$\rho(\mathbf{G}) \leq 1 + O(\Delta t) \quad (2.15)$$

而对于现实问题中更常见的非线性变系数偏微分方程组, 可以用某时刻的已知值带入方程, 再按上述线性稳定性方法分析, 给出一些必要条件, 而对于非线性问题还存在非线性不稳定的问题, 这种问题用上述冯诺伊曼稳定性判定方法无法判断, 因此除了从理论上分析还要进行数值实验来验证差分方程的稳定, 但是非线性稳定性分析也有如下对应的方法或者技巧, 比如在冯诺伊曼方法中, 将误差傅立叶展开后, 要求每一项是有界的或者是单调不增的, 这样对放大因子就有了

不同的限制，得出了不同的稳定条件；而在非线性的分析中，也存在类似的概念，即将总震荡量限制在有解范围内（total variation bounded，建成 TVB）或是让总震荡量缩小或不变（total variation diminishing，简称 TVD），要达到非线性稳定有很多必要条件，比如上文提到的 CFL 条件也是非线性稳定的必要条件。一维的非线性问题的不稳定现象可以理解为非物理的振荡或者超出了物理范围的增减，因此非线性稳定条件关注的是上界和下界，对他们进行某种限制。以下介绍一些非线性稳定性条件，这些条件几乎都是从标量守恒方程的守恒或者说保持性质演变出来的，虽然无法直接将这些条件推广到一维欧拉方程组或者多维问题、NS 方程，需要指出，以下任何一个单一条件都无法保证稳定。

**条件 1 (monotonicity preserving)** 如果初值为单调递增，那在任意一个时间点的解也是单调的增的，称为 monotonicity preserving，对有此类性质的问题（比如标量守恒方程），继承这种性质的数值方法从理论上讲也就避免了振荡，但事实上，对于大量不满足这种性质的问题，这个条件将完全失效，即使对适用问题，若解在开始存在小震荡，满足这种条件的数值方法可能会将小震荡发展为非物理震荡。除此之外，Godunov 证明，只有这种性质的线性方法最多只有一阶精度。

**条件 2 (TVD) total variation (总变差) 定义如下，**

$$tv(u(x, t)) = \sup_{\text{all } x_i} \sum_{-\infty}^{\infty} |u(x_{i+1}, t) - u(x_i, t)| \quad (2.16)$$

TVD 条件即

$$tv(u^{n+1}) \leq tv(u^n)$$

TVD 条件是从标量守恒方程的保波形性质演变来的，由保波形，极大值不会增加，极小值不会减少，新的上界下界也会产生，故此，总变差也不应该增加。TVD 包含 monotonicity preserving。理论上，TVD 允许非物理振荡存在，因为存在非物理振荡的解也可以有和稳定解相同的总变差，但现实中这种情况比较少见；TVD 条件在数值计算中也会在最值附近产生“削平”现象，这是由于数值计算中的最值所在的网格点可能并非对应实际中的最值的点，这样就会造成最值附近的精度损失。

**条件 3 (range diminishing)** 这个条件是直接从标量守恒方程的性质的出的，即每个极大值不增加，极小值不减少，新的极值不会产生，这个条件自然就保证了

数值不会产生非物理振荡也不会产生无限制增大的现象。range diminishing 包含 TVD，因此，它也有和 TVD 一样的缺点，即在极值处会有精度损失，最好只有二阶精度，除此之外，和前两个条件一样，对一些特殊的物理现象比如会产生极大值增大或是极小值减小的现象，该条件会让满足该条件的数值方法无法模拟这些现象。

**条件 4 (positivity)** 这是这些非稳定性条件中唯一一个没有物理意义的，也就是说，标量守恒方程中不具备的性质，该条件与前文中的波速分裂有关，

$$\begin{aligned} C_{i+\frac{1}{2}}^+ &\leq 0 \quad C_{i+\frac{1}{2}}^- \leq 0 \\ C_{i+\frac{1}{2}}^+ + C_{i+\frac{1}{2}}^- &\leq 1 \end{aligned}$$

positivity 是被讨论的最广泛的非稳定性条件，该条件包含了 TVD，同样也会导致在极值处的精度损失。

**条件 5 (upwind range condition)** 这个条件主要来自于  $u(x, t^{n+1})$  继承  $u(x, t^n)$  这一想法，具体描述如下，

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda a(x_i, t^n) \leq 1 \quad &\min(u(x_i, t^n), u(x_{i-1}, t^n)) \leq u(x_i, t^{n+1}) \\ &\leq \max(u(x_i, t^n), u(x_{i-1}, t^n)) \\ -1 \leq \lambda a(x_i, t^n) \leq 0 \quad &\min(u(x_i, t^n), u(x_{i+1}, t^n)) \leq u(x_i, t^{n+1}) \\ &\leq \max(u(x_i, t^n), u(x_{i+1}, t^n)) \end{aligned}$$

该条件也因易于证明和加强被广泛讨论，这个条件只在有限差分法满足 cfl 条件  $\lambda|a| \leq 1$  时才有意义，除了在声速点会因为  $a = 0$  导致波的方向可能改变而无法通过  $t^n$  时刻的  $a$  的正负来判断  $t^{n+1}$  时刻波的方向，进而无法判断  $\lambda|a|$  的区间，这会导致条件失效。

**条件 6 (TVB)** 这是目前为止最弱的非线性稳定条件，除了第一个非线性稳定性条件其余稳定性条件均包含该条件，也因此，它是最可能从其它标量守恒方程、一维欧拉方程推广到其它方程的稳定性条件，该条件具体如下，

$$tv(u^n) \leq M \leq \infty \tag{2.17}$$

TVB 不会像前几个条件在极值附近会造成精度损失，但是在给定初始条件后，若  $\Delta x \rightarrow 0$  和  $\Delta t \rightarrow 0$ ，TVB 并不会保证对给定  $t$  总变差不会无限制的增长。

#### 条件 7 (ENO)

$$tv(u^{n+1}) \leq tv(u^n) + O(\Delta x^\gamma) \quad (2.18)$$

### 第3章 黎曼问题精确解

黎曼问题的解情况如图 (2.2)，本章给出具体求解方法和结果。所谓求解即是求解下图中左右两个波中间的未知部分，即  $W_{*L}$ ,  $W_{*R}$ ,  $W$  指原始变量组成的列向量，参见 (2.9)，本章为求解精确解暂时不再使用守恒变量，下图也是图 (2.2) 中的第二种情况，本章以该情况为例给出具体求解过程，而其他情况直接给出结果。

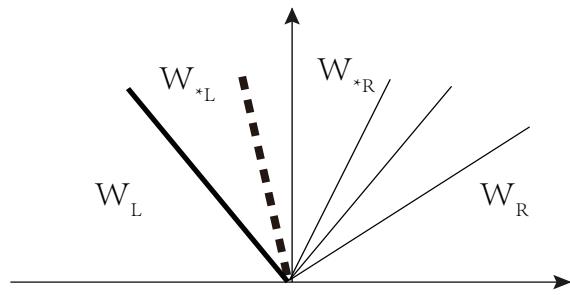


图 3.1 示例  
将间断两侧关系 (2.1)，改写为

$$m[v] = -[u]$$

$$m[u] = [p] \quad (3.1)$$

$$m[E] = [pu]$$

其中  $m = \rho_1(D - u_1) = \rho_2(D - u_2)$ ，表示单位时间扫过的质量， $v_1 = \frac{1}{\rho_1}$ ， $v_2 = \frac{1}{\rho_2}$ 。当  $m = 0$  时，间断两侧没有物质交换，这种间断称为接触间断，由上式得出

$$[u] = 0 \quad [p] = 0 \quad (3.2)$$

即接触间断两侧压力和速度连续，故可设图 (3.1) 两侧的星号区域的速度和压力为  $U$ 、 $P$ 。当  $m < 0$  时，物质由波的左侧进入右侧，即为图 (3.1) 所示情况中的左激波。由式 (3.1) 得出左激波波前波后的速度和压力的关系式

$$U - u_L + \frac{P - p_L}{a_L} = 0 \quad (3.3)$$

其中  $a_L = \rho_L c_L \sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma} \left( \frac{P}{p_L} \right) + \frac{\gamma-1}{2\gamma}}$ ,  $P > p_L$ 。

对图 (3.1) 中的向右中心稀疏波, 有如下黎曼不变量

$$U - \frac{2}{\gamma-1}c = u_R - \frac{2}{\gamma-1}c_R \quad (3.4)$$

其中  $c$  为声速, 由等熵区中声速和压力关系式  $c = c_R \left( \frac{P}{p_R} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}$  得,

$$U - u_R - \frac{P - P_R}{a_R} = 0 \quad (3.5)$$

其中

$$a_R = \rho_R c_R \frac{1 - \left( \frac{P}{p_R} \right)}{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[ 1 - \left( \frac{P}{p_R} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right]} \quad P < p_R$$

。对向右激波, 向左中心稀疏波, 也有类似结果, 可以统一为如下形式

$$\begin{aligned} \text{左波} \quad U - u_L &= -f(P; p_L, \rho_L) \\ \text{右波} \quad U - u_R &= f(P; p_R, \rho_R) \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中  $f(P; p_k, \rho_k) = \frac{P - p_k}{a_k}$ ,  $K = L, R$ , 记

$$a_K = \begin{cases} \rho_K c_K \frac{1 - \frac{P}{p_K}}{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[ 1 - \left( \frac{P}{p_K} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right]} & \text{当 } P < p_K \\ \rho_K c_K \sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma} \left( \frac{P}{p_K} - 1 \right) + 1} & \text{当 } P > p_K \end{cases}$$

对于激波还有关系式  $|m| = a_K$ ,  $K = L, R$ , 对于稀疏波, 相应的黎曼不变量为常量。

由式 (3.6) 可得

$$u_L - u_R = f(P; p_L, \rho_L) + f(P; p_R, \rho_R) = F(P) \quad (3.7)$$

由以下性质得到  $F(P)$  是单调上升的一阶连续凸函数

**条件 1**  $a_K$  是  $P$  的连续函数, 且  $\lim_{P \rightarrow p_K} a_K = \rho_K c_K$ 。

**条件 2**  $f(P; p_K, \rho_K)$  是  $P$  的一阶连续函数, 且  $f(p_K; p_K, \rho_K) = 0$ 。

**条件 3** 当  $P > 0$  时,  $f(P; p_K, \rho_K)$  是单调上升的凸函数。

现在便可给出判断黎曼问题的类型判断方法

- $p_L > p_R$ 
  - 当  $u_L - u_R > F(p_L)$  时,  $P > p_L > p_R$ , 接触间断左右两侧均为激波
  - 当  $F(p_L) > u_L - u_R > F(p_R)$  时,  $p_L > P > p_R$ , 接触间断左侧为中心稀疏波, 右侧为激波
  - $F(p_R) > u_L - u_R > F(0)$  时,  $p_L > p_R > P > 0$ , 接触间断两侧均为中心稀疏波
- $p_L < p_R$ 
  - 当  $u_L - u_R > F(p_R)$  时,  $P > p_L > p_R$ , 接触间断左右两侧均为激波
  - 当  $F(p_R) > u_L - u_R > F(p_L)$  时,  $p_L > P > p_R$ , 接触间断左侧为激波, 右侧为中心稀疏波
  - $F(p_L) > u_L - u_R > F(0)$  时,  $p_L > p_R > P > 0$ , 接触间断两侧均为中心稀疏波

有了以上准备接下来给出求解步骤

**步骤 1 (求接触间断两侧 U、P)** 进一步将式 (3.6) 变形

$$\begin{aligned} U &= \frac{a_L u_L + a_R u_R - (p_R - p_L)}{a_L + a_R} \\ P &= \frac{a_L p_R + a_R p_L - a_L a_R (u_R - u_L)}{a_L + a_R} \end{aligned} \quad (3.8)$$

该方程组的第二个方程仅是  $P$  的函数, 顾可采用简单迭代法以及上述黎曼问题类型方法求  $P$

$$\begin{aligned} P^{i+1} &= \frac{a_L^i p_R + a_R^i p_L - a_L^i a_R^i (u_L - u_R)}{a_L^i + a_R^i} \\ a_K^i &= a_K(P^i; p_K, \rho_K), \quad K = L, R \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$a_L^0 = \rho_L c_L \quad a_R^0 = \rho_R c_R$$

收敛后将所得  $P$  带入第一个方程求得  $U$ 。

**步骤 2(求相关特征量)** 若左波为激波, 由 (3.6) 和  $m = -a_L$ , 则

$$\begin{aligned} \text{激波波速} \quad D_L &= u_L - \frac{a_L}{\rho_L} \\ \text{波后密度} \quad R_L &= -\frac{a_L}{D_L - U} \end{aligned}$$

若左波为中心稀疏波, 由  $\alpha$  黎曼不变量和等熵区中声速和压力关系式得

$$\begin{aligned} \text{稀疏波波后声速} \quad c_{*L} &= c_L + \frac{\gamma - 1}{2} (u_L - U) \\ \text{稀疏波波后密度} \quad R_L &= \frac{\gamma P}{(c_{*L})^2} \\ \text{稀疏波波头速度} \quad D_{Lh} &= u_L - c_L \\ \text{稀疏波波尾速度} \quad D_{Lb} &= U - c_{*L} \end{aligned}$$

若右波为激波, 由 (3.6) 和  $m = a_R$  则

$$\begin{aligned} \text{激波波速} \quad D_R &= u_R + \frac{a_R}{\rho_R} \\ \text{波后密度} \quad R_R &= \frac{a_R}{D_R - U} \end{aligned}$$

若右波为中心稀疏波, 由  $\alpha$  黎曼不变量和等熵区中声速和压力关系式得

$$\begin{aligned} \text{稀疏波波后声速} \quad c_{*R} &= c_R - \frac{\gamma - 1}{2} (u_R - U) \\ \text{稀疏波波后密度} \quad R_R &= \frac{\gamma P}{(c_{*R})^2} \end{aligned}$$

$$\text{稀疏波波头速度 } D_{Rh} = u_R + c_R$$

$$\text{稀疏波波尾速度 } D_{Rb} = U + c_{*R}$$

**步骤 3 (求整体解)** 对于任意给定点  $(x, t)$ , 根据黎曼问题的解沿特征线 (欧拉方程组特征线为  $w = \frac{x}{t}$ ) 为常数来计算, 以下以图 (3.1) 为例。

若  $w \leq D_L$ , 此时  $(x, t)$  在左激波波前区域, 故  $(u, \rho, p) = (u_L, \rho_L, p_L)$ 。

若  $D_L < w \leq U$ , 即  $(x, t)$  在左激波波后区域内, 则  $(u, \rho, p) = (U, R_L, P)$ 。

若  $U < w \leq D_{Rb}$ , 此时  $(x, t)$  在右中心稀疏波波后区域, 则  $(u, \rho, p) = (U, R_R, P)$ 。

若  $D_{Rb} < w \leq D_{Rh}$ , 此时  $(x, t)$  在右中心稀疏波区域,

$$\begin{aligned}\beta_R &= u_R + \frac{2}{\gamma - 1} c_L \\ c &= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (\beta_R - w)\end{aligned}$$

$$u = w - c$$

$$\begin{aligned}p &= p_R \left( \frac{c}{c_R} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \\ \rho &= \frac{\gamma p}{c^2}\end{aligned}$$

若  $D_{Rh} < w$ , 此时  $(x, t)$  在右中心稀疏波波前区域, 则  $(u, \rho, p) = (u_R, \rho_R, p_R)$ 。

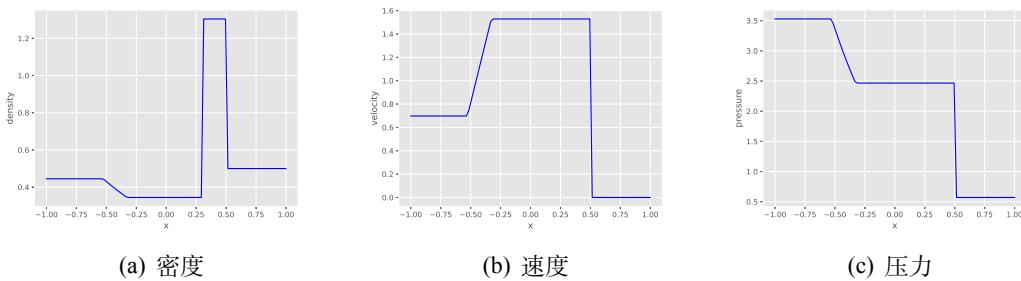
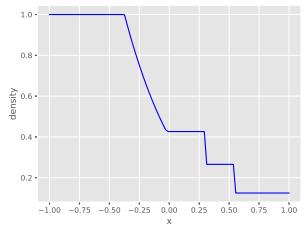
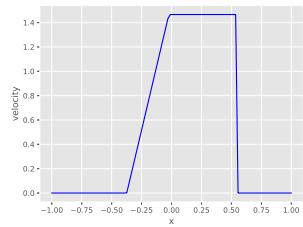


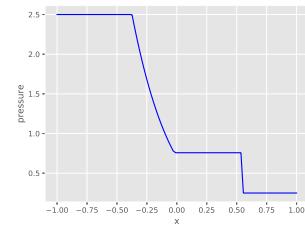
图 3.2 lax 算例



(a) 密度



(b) 速度



(c) 压力

图 3.3 sod 算例

其他情况可做类似讨论，算例 (2.8)、(2.9) 结果见上图。

## 第4章 通量方法

本章主要涉及两个守恒型有限差分格式，Lax-Friedrichs 格式和 Lax-Wendoff 格式，其中后者其实是一类格式的总称，除了介绍其最简单的格式外，还涉及该类格式的一个简单变形，Mac-Cormack 格式。本章中每小节的结构为先简单推导出针对标量方程的格式，并对其特点进行介绍，再将这些标量格式推广到向量格式，一般只需要将标量换成对应的欧拉方程组中的向量，然后给出数值结果和对结果的分析，对本章的记号有以下统一说明，

- $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$
- 数值格式的原始方程为  $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$

### 4.1 Lax-Friedrichs 格式

本小节介绍 Lax-Friedrichs 格式，被发现于 1954 年，该格式不仅是一个解法，而且可以用于证明解的存在性 [21]，它可以看作是将如下向前时间、中心空间格式的改造，

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\lambda}{2} (f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)) \quad (4.1)$$

该格式是无条件不稳定的，但是将等式左边第一项进行简单替换后就得到 Lax-Friedrichs 格式，

$$u_i^{n+1} = \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2} - \frac{\lambda}{2} (f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)) \quad (4.2)$$

其针对欧拉方程组的向量格式即把上式中的  $u$  替换为  $\mathbf{u}$  即可，该格式的特点是具有 CFL 条件所允许的最大粘性项，也因此在面对激波时，至少稳定性较好，代价是在连续区域精度会降低，只有一阶时、空精度，同时，它并不满足 range diminishing 条件，因此它允许非物理振荡存在，尤其在  $\lambda$  较小的情况下。在结果图中可以看到，即使已经网格点被划分为  $10^4$  个，该方法对稀疏波和间断位置仍有小偏移，且在间断处，解被抹平了，而在网格点为  $10^3$  个时，该方法表现出相当大的耗散和每

对相邻两点组成一个“小平台”的现象。

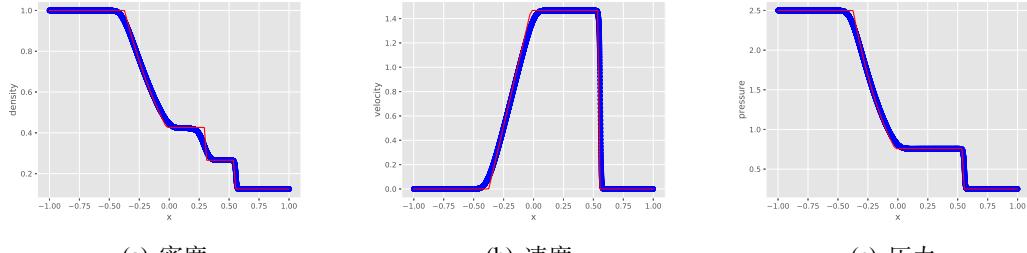


图 4.1 sod 算例

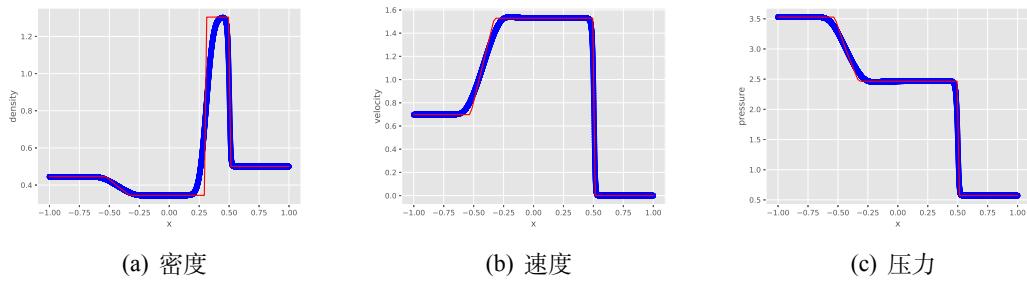


图 4.2 lax 算例

## 4.2 Lax-Wendoff 格式

Lax-Wendoff 格式被发现于 1960 年，采用了一种称为 Cauchy-Kowalewski 方法生成，该方法主要思想就是通过控制方程通过空间导数表示时间导数，考虑泰勒展开

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} (x, t) + O(\Delta t^3) \quad (4.3)$$

将其中的关于时间  $t$  的导数替换为关于  $x$  的导数

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial f(u)}{\partial x} = -\frac{\partial f(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = -a(u) \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial f(u)}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f(u)}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( a(u) \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( a(u) \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

将该式带入泰勒展开并对导数驶入中心差分便得到 Lax-Wendoff 格式，

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\lambda}{2} (f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)) \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{2} \left[ a_{i+\frac{1}{2}}^n (f(u_{i+1}^n) - (u_i^n)) - a_{i-\frac{1}{2}}^n (f(u_i^n) - (u_{i-1}^n)) \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

因其空间导数均采用中心差分，故该方法在时、空均达到二阶精度，注意该式中的  $a_{i+\frac{1}{2}}^n$  可以有多种表示方式，比如

$$\begin{aligned} a_{i+\frac{1}{2}}^n &= a \left( \frac{u_{i+1}^n + u_i^n}{2} \right) \\ a_{i+\frac{1}{2}}^n &= \frac{a(u_{i+1}^n) + a(u_i^n)}{2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

针对欧拉方程组的 Lax-Wendoff 格式为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^{n+1} &= \mathbf{u}_i^n - \frac{\lambda}{2} (\mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i-1}^n)) \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{2} [A_{i+1/2}^n (\mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_i^n)) - A_{i-1/2}^n (\mathbf{f}(\mathbf{u}_i^n) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i-1}^n))] \end{aligned} \quad (4.7)$$

其中  $A_{i+1/2}^n$  也可以有多种选择比如 Roe 平均格式，或者相对简单的

$$A_{i+1/2}^n = A \left( \frac{\mathbf{u}_{i+1}^n + \mathbf{u}_i^n}{2} \right)$$

由于 Lax-Wendoff 格式具有 cfl 条件所允许的最小粘性，稳定性不足，这导致了面对存在较强激波的问题时，该方法在激波附近会产生偏离甚至是负值的情况，比如对本文的两例，该格式就失效了。即使采用相对简单的 Jacobi 矩阵 (2.5) 的估计，其运算量也相当可观。为了避开计算 Jacobi 矩阵，同时又能产生二阶精度，从该格式衍生出了一些预测-修正两步算法，比如 Mac-Cormack 格式，其推导方法类似于常微分方程中的 Runge-Kutta 方法。

首先将 Lax—Wendoff 格式 (4.5) 改写为

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial f^n}{\partial x_i} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( f + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t \right)_i^n \quad (4.8)$$

由泰勒展开

$$\begin{aligned} \left( f + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t \right)_i^n &= \left( f + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t \right)_i^n = \\ &f \left( u + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t \right)_i^n + O(\Delta t^2) = \\ &f \left( u_i^n - \frac{\partial f}{\partial x} \Delta t \right) + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (4.9)$$

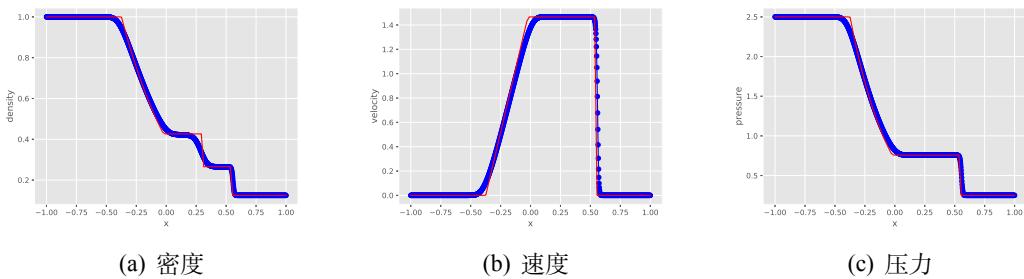
由此继续将式 (4.8) 变形

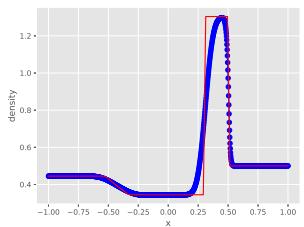
$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= \frac{1}{2} u_i^n + \frac{1}{2} \left( u_i^n - \frac{\lambda}{2} (f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)) \right) - \\ &\frac{\lambda}{2} \left( f \left( u_i^n - \frac{\lambda}{2} (f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)) \right) - f \left( u_{i-1}^n - \frac{\lambda}{2} (f(u_i^n) - f(u_{i-2}^n)) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

经简化并将标量改为向量便可得如下针对一维欧拉方程的 Mac-Cormack 格式

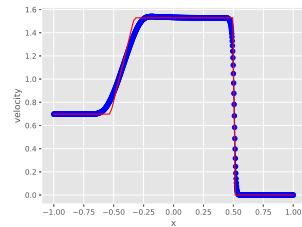
$$\bar{\mathbf{U}}_i = \mathbf{U}_i^n - \frac{\lambda}{2} (\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1}^n) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i-1}^n)) \quad (4.11)$$

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_i^n + \bar{\mathbf{U}}_i) - \frac{\lambda}{2} (\mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}}_i) - \mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}}_{i-1})) \quad (4.12)$$

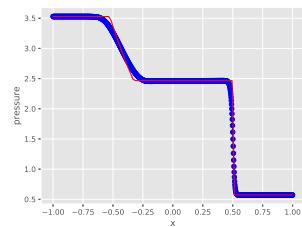




(d) 密度



(e) 速度



(f) 压力

该方法避开了计算量大的问题，但是稳定性不强的问题仍需解决，添加人工粘性项即可，本文添加的粘性项为  $0.04(U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n)$ 。具体数值结果如下，可以看到，Mac-Cormack 在处理简单问题时精度高，对间断位置和稀疏波的模拟都很精准，加入粘性项后，激波的位置和大小也很准确。

## 第5章 波方法

### 5.1 通量差分分裂

通量差分分裂也称为 Godunov 方法，是一类将每个单元都当作本地 Riemann 问题，先解出  $\mathbf{u}$  后，将其带入通量的积分平均，作为对通量的近似的方法。根据解出  $\mathbf{u}$  的方法的不同、空间重构方法的不同以及时间推进的不同方法，产生不同种的 Godunov 方法，Van Leer[12] 称 Godunov 方法为一类将黎曼求解器应用于黎曼问题的非振荡的有限体积法。

#### 5.1.1 Godunov 一阶迎风格式

1959 年，Godunov 在他的博士论文中提出了第一个版本的 Godunov 格式，该格式只有一阶精度而且具有保单调性，同时 Godunov 提出了著名的 Godunov 定理，表示常系数的保单调性数值格式最多只有一阶精度，而后他又在 70 年代提出了第二版本，该版本相比第一版更具现实意义，无论是第一版本还是第二版本其基本思路都是，

**步骤 1** 将空间域划分为格点  $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ ， $i = 1, \dots, M$ ，若已知  $n$  时刻的解  $\tilde{\mathbf{U}}(x, t^n)$ ，对其进行分段常数插值

$$\mathbf{U}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \tilde{\mathbf{U}}(x, t^n) dx \quad (5.1)$$

如图 (5.1)

**步骤 2** 将两个相邻单元看作本地黎曼问题，得出时间范围在  $n$  和  $n+1$  时刻、空间范围为两单元之间的精确解  $\mathbf{U}(x, \tilde{t}^{n+1})$ ，以单元  $i$  为例，如图 (5.2)，在  $i$  时刻和  $i+1$  时刻的  $\mathbf{U}$  已由上一步骤求出。

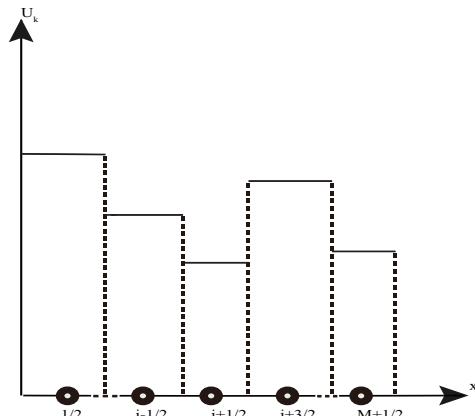


图 5.1  $\tilde{\mathbf{U}}$  的某分量在  $n$  时刻的分段常数插值

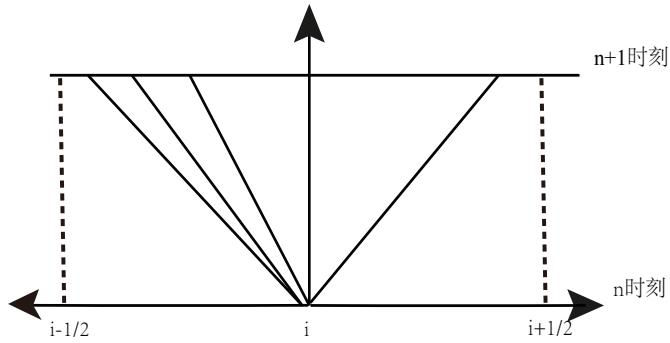


图 5.2 求解本地黎曼问题

**步骤 3** 利用求出的精确解，表示  $n+1$  时刻的解，可以用积分平均表示也可以是取某点的值直接表示，前一种办法就是第一个版本的 Godunov 格式，具体如下，解释见图 (5.3)

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\frac{1}{2}\Delta x} \mathbf{U}_{i-\frac{1}{2}} \left( \frac{x}{\Delta t} \right) dx + \frac{1}{\Delta x} \int_{-\frac{1}{2}\Delta x}^0 \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}} \left( \frac{x}{\Delta t} \right) dx \quad (5.2)$$

这种方法，需要特别注意一点，为了避免两个相邻单元的波相交，每一步的 cfl 数要小于 0.5，因此，这种方法限制了时间步长而且在涉及稀疏波时计算量很大。

第二个版本的 Godunov 格式，是直接将第二步求得的黎曼精确解应用到守恒

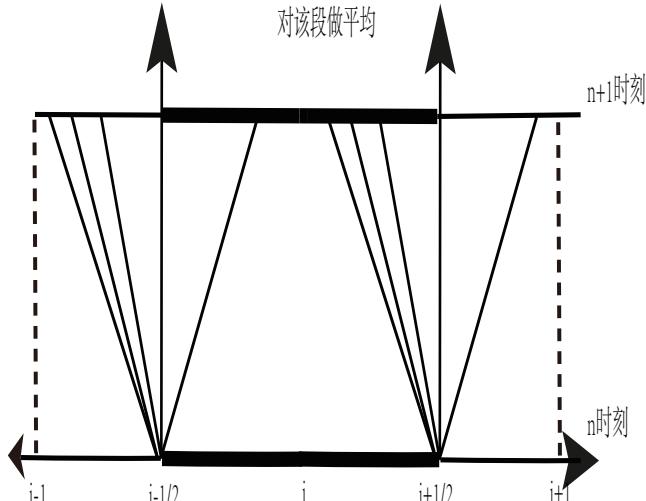


图 5.3 对  $n+1$  时刻积分平均

律 (2.2) 中, 即在图 (5.3) 中对  $i - \frac{1}{2} - i + \frac{1}{2}$ 、 $t^n - t^{n+1}$  中积分

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \tilde{\mathbf{U}}(x, t^{n+1}) dx &= \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \tilde{\mathbf{U}}(x, t^n) dx \\ &\quad + \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}[\tilde{\mathbf{U}}(x_{i-\frac{1}{2}}, t)] dt - \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}[\tilde{\mathbf{U}}(x_{i+\frac{1}{2}}, t)] dt \end{aligned} \quad (5.3)$$

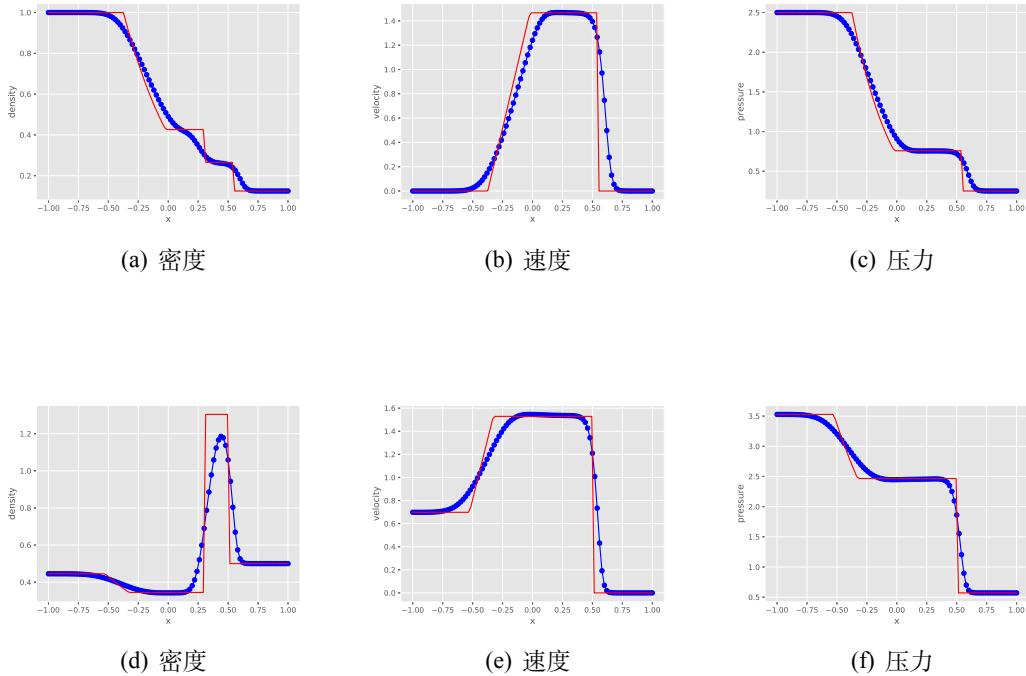
而由第三章黎曼解特性可知上式中

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}\left(x_{i-\frac{1}{2}}, t\right) &= \mathbf{U}_{i-\frac{1}{2}}(0) \\ \tilde{\mathbf{U}}\left(x_{i+\frac{1}{2}}, t\right) &= \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}(0) \end{aligned} \quad (5.4)$$

且均为常数, 故将其带入并由式 (5.1) 可得

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i-\frac{1}{2}}(0)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}(0))] \quad (5.5)$$

该方法的 cfl 数小于 1 即可, 使得时间步长相对第一版本可以大一些



该方法只有一阶精度，本文采用的时间离散方法为三阶 Runge-Kutta 格式，无斜率限制器，在计算过程中发现，网格点为 1000 时，该方法对间断位置的判断还不如 100 个网格点，该方法对激波和间断的模拟都存在抹平现象。

### 5.1.2 Roe 一阶迎风格式

Roe 方法即使将上一小节步骤二中的精确黎曼求解器改为 Roe 近似黎曼求解器，Roe 近似黎曼求解器的想法来自于将 Jacobi 矩阵 (2.5) 线性化，且满足以下等式

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) = A(\mathbf{U}_{RL})(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) \quad (5.6)$$

该方程解出的 ( $\mathbf{U}_{RL}$ ) 称为 Roe 平均，具体如下

$$\rho_{RL} = \sqrt{\rho_R \rho_L} \quad (5.7)$$

$$u_{RL} = \frac{\sqrt{\rho_R} u_R + \sqrt{\rho_L} u_L}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}} \quad (5.8)$$

$$h_{RL} = \frac{\sqrt{\rho_R} h_{TR} + \sqrt{\rho_L} h_{TL}}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}} \quad (5.9)$$

$$a_{RL} = \sqrt{(\gamma - 1) \left( h_{RL} - \frac{1}{2} u_{RL}^2 \right)} \quad (5.10)$$

由上一小节步骤三，我们只需要本地黎曼问题在“ $x = 0$ ”处的解，在 Roe 近似黎曼求解器中其表达式为

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}(0)) \approx A(\mathbf{U}_{RL}) \mathbf{U}(0) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_L)) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i |\lambda_i| \Delta v_i \quad (5.11)$$

其中  $r_i$  为 A 的右特征向量， $\lambda_i$  为 A 的特征值

$$\lambda_1 = u_{RL} \quad (5.12)$$

$$\lambda_2 = u_{RL} + a_{RL} \quad (5.13)$$

$$\lambda_3 = u_{RL} - a_{RL} \quad (5.14)$$

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u_{RL} \\ \frac{1}{2} u_{RL}^2 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{\rho_{RL}}{2a_{RL}} \begin{bmatrix} 1 \\ u_{RL} + a_{RL} \\ h_{RL} + a_{RL} u_{RL} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$\mathbf{r}_3 = -\frac{\rho_{RL}}{2a_{RL}} \begin{bmatrix} 1 \\ u_{RL} - a_{RL} \\ h_{RL} - a_{RL} u_{RL} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$\Delta v_i$  为左右特征变量的差值，特征变量与守恒变量有如下关系

$$u = Qv \quad (5.18)$$

其中  $\mathbf{Q}$  为  $\mathbf{A}$  的右特征向量组成的矩阵,  $\mathbf{v}$  的表达式如下

$$\Delta v_1 = \Delta \rho - \frac{\Delta p}{a_{RL}^2} \quad (5.19)$$

$$\Delta v_2 = \Delta u + \frac{\Delta p}{\rho_{RL} a_{RL}} \quad (5.20)$$

$$\Delta v_3 = \Delta u - \frac{\Delta p}{\rho_{RL} a_{RL}} \quad (5.21)$$

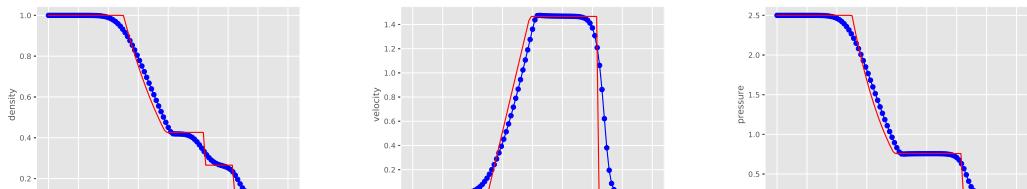
式 (5.11) 在具体计算中通常写为矩阵形式

$$\hat{\mathbf{F}}_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} (\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1}^n) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_i^n)) - \frac{1}{2} |A_{i+1/2}^n| (\mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n) \quad (5.22)$$

其中  $\mathbf{U}$  为上述 Roe 平均后的表达式,  $|A_{i+1/2}^n|$  为

$$\mathbf{G}^{-1} \Lambda \mathbf{G} \quad (5.23)$$

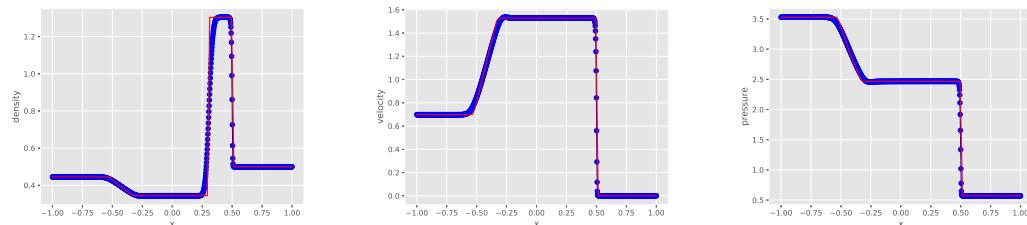
$\mathbf{G}$  为 Jacobi 矩阵 (2.5) 的右特征向量组成的矩阵,  $\Lambda$  为特征值绝对值组成的对角矩阵。



(g) 密度

(h) 速度

(i) 压力



(j) 密度

(k) 速度

(l) 压力

时间离散方法同样选用三阶 Runge-Kutta 方法，可以看到，对这两个案例，近似黎曼求解器的表现比精确黎曼求解器的表现还要好。

## 第6章 结论

在计算中发现，想要达到看起来相同的精度，Lax-Friedrichs 格式由于精度低，需要更精细的网格点，大的时间步长下，基本波形都刻画不了；Lax-Wendoff 由于粘性低，在间断附近产生非物理振荡，密度会出现负值，导致计算无法进行，使用它的变式 Mac-Cormack 格式并加入人工粘性项后得到了较好的结果。Godunov 类格式在使用简单的时间推进方案时，求解本地黎曼问题的牛顿迭代法会发散，换成 Runge-Kutta 格式就可以解决，对本文的两个算例，精确求解器的表现明显不如 Roe 近似求解器，且网格精细程度在超过一定范围后精确求解器的表现更差。本文中的 Godunov 类格式更具现实意义，但对激波的处理并不十分理想，会出现抹平现象，软件中的 Godunov 类格式还会使用斜率限制器技术提高算法在间断附近的表现和更多元的求解器、时间推进方法、重构方法来处理现实中更复杂的问题。

## 参考文献

- [1] J. P. Boris. A fluid transport algorithm that works. Technical report, NAVAL RESEARCH LAB WASHINGTON DC, 1971.
- [2] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM journal of Research and Development*, 11(2):215–234, 1967.
- [3] R. Courant, E. Isaacson, and M. Rees. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences. *Communications on pure and applied mathematics*, 5(3):243–255, 1952.
- [4] S. K. Godunov. A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. *Matematicheskii Sbornik*, 89(3):271–306, 1959.
- [5] F. H. Harlow. The particle-in-cell computing method for fluid dynamics. *Methods Comput. Phys.*, 3:319–343, 1964.
- [6] A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. Technical report, 1982.
- [7] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, and S. R. Chakravarthy. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, iii. In *Upwind and high-resolution schemes*, pages 218–290. Springer, 1987.
- [8] A. Harten, P. D. Lax, and B. v. Leer. On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM review*, 25(1):35–61, 1983.
- [9] T. Y. Hou and P. G. LeFloch. Why nonconservative schemes converge to wrong solutions: error analysis. *Mathematics of computation*, 62(206):497–530, 1994.
- [10] P. Lax and B. Wendroff. Systems of conservation laws. Technical report, Los Alamos Scientific Lab., N. Mex., 1958.
- [11] P. D. Lax. *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*, volume 11. SIAM, 1973.
- [12] B. v. Leer. Godunov’s method for gas-dynamics. *Journal of Computational Physics*, 134(1):199, 1997.

- [13] X.-D. Liu, S. Osher, T. Chan, et al. Weighted essentially non-oscillatory schemes. *Journal of computational physics*, 115(1):200–212, 1994.
- [14] R. W. MacCormack. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. *Journal of spacecraft and rockets*, 40(5):757–763, 2003.
- [15] P. Roe. Some contributions to the modeling of discontinuous flows,” large scale computations in fluid mechanics. *Large Scale Computations in Fluid Mechanics*, 22:163–193, 01 1985.
- [16] P. L. Roe. Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of computational physics*, 43(2):357–372, 1981.
- [17] C.-W. Shu. Tvb uniformly high-order schemes for conservation laws. *Mathematics of Computation*, 49(179):105–121, 1987.
- [18] P. K. Sweby. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM journal on numerical analysis*, 21(5):995–1011, 1984.
- [19] E. F. Toro, M. Spruce, and W. Speares. Restoration of the contact surface in the hll-riemann solver. *Shock waves*, 4(1):25–34, 1994.
- [20] B. Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. ii. monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. *Journal of computational physics*, 14(4):361–370, 1974.
- [21] 应隆安, 滕振寰. 双曲型守恒律方程及其差分方法, 1991.
- [22] 水鸿寿. 一维流体力学差分方法. 国防工业出版社, 1998.