第 19 卷第 6 期
2003 年 12 月

德 州 学 院 学 报
Journal of Dezhou University

Vol.19, No.6
Dec.2003

文章编号:1004-9444(2003)06-0025-03

常微分方程中的齐次化原理与 Green 函数

阿布力米提.阿布都热衣木

(西北大学数学系,陕西西安 710069)

摘 要:通过介绍齐次线性微分方程的通解及求非齐次微分方程的特解的一种方法,定义了 Green 函数.

关键词:齐次化原理,Green 函数,Wronsky 行列式

中图分类号: O175.1 **文献标识码**: A

1 设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是 n 阶齐次线性微分方程

$$\sum_{i=0}^{n} P_i(x) \frac{d^{n-i} - y}{dx^{n-i}} = f(x) \quad (其中\ P_0(x) = 1) \tag{1}$$

相应齐次方程的基本解组,那么我们通过常数变易法得到(1)的解的表达式

$$y = [y_1(x), y_2(x), \cdots y_n(x)][c_1, c_2, \cdots c_n]^T \tag{2}$$

其中 $[c_1, c_2, \cdots, c_n]^T = \int Y^{-1}[0,0,0,\cdots,0,f(x)]^T dx$, 而且 Y 是由 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 组成的 Wronsky 行列式.

下面求(1)的一个特解.

第一步:引入参数 ζ,求下面的齐次线性微分方程初值问题

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} P_i(x) y^{(n-i)} = 0 \\ y(\zeta) = 0, y'(\zeta) = 0, \cdots, y^{(n-2)}(\zeta) = 0, Y^{(n-1)}(\zeta) = f(\zeta) \end{cases} \tag{3}$$

的解(其中 $P_0(x) = 1$),若(3)的基本解组为 $Y(x) = [y_1, y_2, \cdots, y_n]$, 则它的通解为

$$Z(x) = [y_1, y_2, \cdots y_n][C_1, C_2, \cdots, C_n]^T \tag{4}$$

式中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 由式(3)的初始条件决定,即

$$[C_1, C_2, \cdots C_n]^T = Y^{-1}(\zeta) F(\zeta) \tag{5}$$

$$F(\zeta) = [0,0,\cdots,f(\zeta)]^T \tag{6}$$

这里的 Y 由 $y_1, y_2, \cdots y_n$ 的 Wronsky 行列式定义,所以得到(3)的解为 (x,ζ) 的函数

$$Z(x,\zeta) = [y_1, y_2, \cdots, y_n][C_1, C_2, \cdots, C_n]^T = Y(x) Y^{-1}(\zeta) F(\zeta)$$

第二步:对参数 ζ 积分,

收稿日期:2003-11-28

作者简介:阿布力米提.阿布都热衣木,男,新疆疏附人,硕士研究生,新疆喀什师范学院数学系讲师,从事常微分方程方面的研究.

$$y=\int_{x_0}^{x}Z(x,\zeta)d\zeta=Y(x)\int_{x_0}^{x}Y^{-1}(\zeta)F(\zeta)d\zeta \tag{7}$$

很容易证明式(7)就是非齐次线性微分方程(1)的解.

这里若令 $f(x)\equiv 1$,或(3)的解是

$$Z(x,\zeta)=Y(x)Y^{-1}(\zeta)\begin{bmatrix}0\\M\\0\\1\end{bmatrix}$$

如令

$$G(x,\zeta)=\begin{cases}0 & (x<\zeta)\\ Z(x,\zeta) & (x\geq\zeta)\end{cases}$$

则称 G 为初值问题(3)的 Green 函数、从上面的讨论可见,由它可以得到一般初值 $f(x)$ 时式(3)的解为

$$y=\int_{x_0}^{x}G(x,\zeta)f(\zeta)d\zeta$$

上面我们通过齐次线性分方程(3)的解来得到了非齐次微分方程组(1)的特解,称此方法为齐次化原理.

2 讨论第一边值问题

$$\begin{cases}y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \qquad a\leq x\leq b & (8)\\ y(a)=0,y(b)=0 & (9)\end{cases}$$

假定它有唯一解(即齐次边值问题仅有零解).

设函数 $p(x),q(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,$y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是式(8)相应的齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{10}$$

的基本解组,由假定可知该问题有唯一解,根据边值问题解的存在唯一性定理(见文献[1])得

$$\Delta=\begin{vmatrix}y_1(a) & y_2(a)\\ y_1(b) & y_2(b)\end{vmatrix}\neq 0 \tag{11}$$

定义:若函数 $z(x,\zeta)$ $(\zeta\in(a,b))$ 满足下列条件,称它为边值问题(8)和(9)的 Green 函数:

$Z(x,\zeta)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且当 $x\neq\zeta$ 时是方程(10)的解,它还有如下的形式

$$Z(x,\zeta)=\begin{cases}z_1(x) & (x<\zeta)\\ z_2(x) & (x>\zeta)\end{cases} \tag{12}$$

式中 $z_1(x)$ 与 $z_2(x)$ 满足下列条件

① $z_1(a)=z_2(b)=0$ ② $z'_1(\zeta+)-z'_2(\zeta-)=1$

(导数在 $x=\zeta$ 处有间段).

现在我们的目的就是通过 Green 函数来表示边值问题(8)和(9)的解.

为了满足条件①与②,令

$$z_1(x)=c_1u_1(x),\qquad z_2(x)=c_2u_2(x) \tag{13}$$

式中

$$\begin{cases}u_1(x)=y_1(a)y_2(x)-y_2(a)y_1(x)\\ u_2(x)=y_1(b)y_2(x)-y_2(b)y_1(x)\end{cases} \tag{14}$$

由于式(11)成立,又根据上式

$$\begin{cases}\Delta=u_1(b)=-u_2(a),\\ z_1(b)=c_1\Delta\neq 0\\ z_2(a)=-c_2\Delta\neq 0\end{cases} \tag{15}$$

由 $z_1(\zeta)=c_1u(\zeta)$ 和 $z_2(\zeta)=c_2u(\zeta)$,在 $x=\zeta$ 处要求函数 $Z(x,\zeta)$ 连续

即

$$c_1u_1(\zeta)-c_2u_2(\zeta)=0 \tag{16}$$

而由条件②,导数在 $x=\zeta$ 处有间断,左右极限的跳跃值为1,又因为 $u_1(x)$ 与 $u_2(x)$ 是 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 的线性组合而且由解对初值问题的可微性 $u'(x)$ 在 $x=\zeta$ 连续的,从而

$$\begin{cases} z'_1(\zeta-)=c_1u'_1(\zeta) \\ z'_2(\zeta+)=c_2u'_2(\zeta) \\ z'_2(\zeta+)-z'_1(\zeta-)=1 \\ -c_1u'_1(\zeta)+cu'_2(\zeta)=1 \end{cases} \tag{17}$$

式(16)与式(17)的系数行列式为

$$W^*(\zeta)=\begin{vmatrix} u_1(\zeta) & -u_2(\zeta) \\ -u'_1(\zeta) & u'_2(\zeta) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1(a)y_2(\zeta)-y_2(a)y_1(\zeta) & -y_1(b)y_2(\zeta)+y_2(b)y_1(\zeta) \\ -y_1(a)y'_2(\zeta)+y_2(a)y'_1(\zeta) & y_1(b)y'_2(\zeta)-y_2(b)y'_1(\zeta) \end{vmatrix}=\Delta W(x)$$

式中 $W(x)$ 是 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 的 Wronsky 行列式,即

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}$$

因 $W(x)\neq 0$,从而 $W^*(x)=\Delta W(x)$,因此

$$\begin{cases} c_1u_1(\zeta)-c_2u_2(\zeta)=0 \\ -c_1u'_1(\zeta)+c_2u'_2(\zeta)=1 \end{cases}$$

有唯一解

$$c_1=\frac{u_2(\zeta)}{\Delta W(\zeta)},\quad c_2=\frac{u_2(\zeta)}{\Delta W(\zeta)}$$

所以得到 Green 函数 $Z(x,\zeta)$ 为

$$Z(x,\zeta)=\begin{cases} z_1(x) \\ z_2(x) \end{cases}=\begin{cases} \dfrac{u_2(\zeta)}{\Delta W(\zeta)}u_1(x) & (x<\zeta) \\ \dfrac{u_1(\zeta)}{\Delta W(\zeta)}u_2(x) & (x>\zeta) \end{cases}$$

这就是我们想要的 Green 函数.有了 Green 函数 $Z(x,\zeta)$ 以后,可以构造另一个函数

$$y^*(x)=\int_a^b f(\zeta)Z(x,\zeta)d\zeta=u_2(x)\int_a^x f(\zeta)\frac{u_1(\zeta)}{\Delta W(\zeta)}d\zeta+u_1(x)\int_x^b f(\zeta)\frac{u_2(\zeta)}{\Delta W(\zeta)}d\zeta$$

容易验证 $y^*(x)$ 是非齐次方程边值问题(8)与(9)的特解.

参考文献

[1] 管志成,李俊杰.常微分方程与偏微分方程[M].杭州:浙江大学出版社,2001.
[2] 陈庆益,柳训明.常微分方程及其应用武汉[M].武汉:华中工学院出版社,1983.

Homogeneitisation principle and Green's function in ordinary differential equations

Ablimit·Abdiryim
(Department of Mathematics Northwest University, Xi'an Shaanxi 710069, China)

Abstract: In this paper, we introduce Green's function and homogeneitisation principle from which we can earn the specific solution of nonhomogeneous normal differential equations by solving homogeneous ones with boundary values or initial values.

Key words: homogeneitisation principle; Green's function; Wronsky determinant