专业：自动化
姓名：________________
学号：________________

浙江大学实验报告

日期：2022/07/03
地点：浙江大学玉泉校区

课程名称：机器人与智能系统综合实践 指导老师：__________成绩：________________
实验名称：机械臂运动控制 实验类型：__________同组学生姓名：

一、实验目的和要求（必填）

实验目的：

1. 掌握空间刚体的位置和姿态表示方法
2. 掌握关节型机械臂正、逆运动学求解方法
3. 掌握关节型机械臂轨迹规划方法
4. 学会使用 CoppeliaSim 仿真工具对机械臂进行运动仿真
5. 会使用 Python 等计算机编程语言控制机械臂运动

实验要求：

1. 写出 ZJU-I 型桌面机械臂的 DH 参数；
2. 写出 ZJU-I 型机械臂的正运动学解，采用 XY’Z’欧拉角表示末端执行器姿态；
3. 写出 ZJU-I 型桌面机械臂的逆运动学解（只需解析解或数值解其中一个）；
4. 设计合理的轨迹规划方案，在仿真环境中控制机械臂依次抓取 4 个目标物，然后按照装配关系放置到装配区域，要求除抓取点和放置点外，各个关节的位置、速度连续且平滑；
5. 完成实验后需提交实验报告电子版 1 份，页数不超过 8 页 A4 纸，报告命名规则为：学号-1-姓名.docx；
6. 完成实验后需提交 Python 实验代码文件 1 份，命名规则为：学号-1-姓名.py

装 订 线

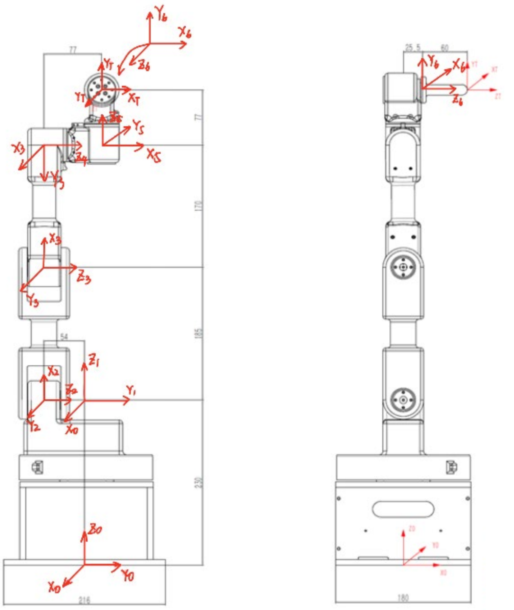
二、主要仪器设备

1. ZJU-I 型桌面机械臂
2. CoppeliaSim
3. Python + VScode

三、实验内容和原理（必填）

1. ZJU-I 型桌面机械臂的 DH 参量表如下表所示：

关节 i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0.23	θ_1
2	-90°	0	-0.054	$\theta_2 - 90°$
3	0	0.185	0	θ_3
4	0	0.170	0.077	$\theta_4 + 90°$
5	90°	0	0.077	$\theta_5 + 90°$
6	90°	0	0.0255	θ_6



2.正运动学解

先求${}^{i-1}_{i}T$：

$$ {}_{1}^{0}T=\begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0\\ s_1 & c_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0.23\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad {}_{2}^{1}T=\begin{bmatrix} s_2 & c_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -0.054\\ c_2 & -s_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad {}_{3}^{2}T=\begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0.185\\ s_3 & c_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}_{4}^{3}T=\begin{bmatrix} -s_4 & -c_4 & 0 & 0.17\\ c_4 & -s_4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0.077\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad {}_{5}^{4}T=\begin{bmatrix} -s_5 & -c_5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -0.077\\ c_5 & -s_5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad {}_{6}^{5}T=\begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -0.0255\\ s_6 & c_6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

则有：

$$ {}_{6}^{0}T={}_{1}^{0}T\,{}_{2}^{1}T\,{}_{3}^{2}T\,{}_{4}^{3}T\,{}_{5}^{4}T\,{}_{6}^{5}T=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x\\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y\\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

其中：$r_{11}=c_1s_6s_{234}-c_1s_5c_6c_{234}-s_1c_5c_6$; $r_{12}=c_1c_6s_{234}+c_1s_5s_6c_{234}+s_1c_5s_6$;

$r_{13}=-s_1s_5+c_1c_5c_{234}$; $r_{21}=s_1s_6s_{234}-s_1s_5c_6c_{234}+c_1c_5c_6$;

$r_{22}=s_1c_6s_{234}+s_1s_5s_6c_{234}-c_1c_5s_6$; $r_{23}=c_1s_5+s_1c_5c_{234}$;

$r_{31}=s_6c_{234}+s_5c_6s_{234}$; $r_{32}=c_6c_{234}-s_5s_6s_{234}$; $r_{33}=-c_5s_{234}$;

$p_x=0.0255c_1c_5c_{234}-0.0255s_1s_5+0.077c_1s_{234}-0.023s_1+0.185c_1s_2+0.17c_1s_{23}$;

$p_y=0.0255s_1c_5c_{234}+0.0255c_1s_5+0.077s_1s_{234}+0.023c_1+0.185s_1s_2+0.17s_1s_{23}$;

$p_z=-0.0255c_5s_{234}+0.077c_{234}+0.17c_{23}+0.185c_2+0.23$;

则末端吸盘位姿矩阵为：

$$ {}_{T}^{0}T={}_{6}^{0}T\,{}_{T}^{6}T={}_{6}^{0}T\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0.06\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x+0.06r_{13}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y+0.06r_{23}\\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z+0.06r_{33}\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & x\\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & y\\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & z\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

故：

$$ \boldsymbol{x=p_x+0.06r_{13};\ y=p_y+0.06r_{23};\ z=p_z+0.06r_{33}} $$

接下来求解欧拉角，用欧拉角表示旋转矩阵：

$$ R_{XY'Z'}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & c\alpha & -s\alpha\\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0\\ s\gamma & c\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ =\begin{bmatrix} c\beta c\gamma & -c\beta s\gamma & s\beta\\ c\alpha s\gamma+c\gamma s\alpha s\beta & c\alpha c\gamma-s\alpha s\beta s\gamma & -c\beta s\alpha\\ s\alpha s\gamma-c\alpha c\gamma s\beta & c\gamma s\alpha+c\alpha s\beta s\gamma & c\alpha c\beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23}\\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} $$

不妨规定$(\alpha,\beta,\gamma)\in(-\pi,\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\times(-\pi,\pi]$；

因为$c\beta\geq 0$，故$c\beta=\sqrt{r_{11}^2+r_{12}^2}$；又$s\beta=r_{13}$，有：

$$ \boldsymbol{\beta=Atan2(r_{13},\sqrt{r_{11}^2+r_{12}^2})} $$

若$c\beta>0$，则显然可以得到：

$$ \boldsymbol{\alpha=Atan2(-r_{23},r_{33})，\gamma=Atan2(-r_{12},r_{11})} $$

若$c\beta=0$，当$\boldsymbol{\beta=\frac{\pi}{2}}$时，$R_{XY'Z'}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1\\ r_{21} & r_{22} & 0\\ r_{31} & r_{32} & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1\\ s(\alpha+\beta) & c(\alpha+\beta) & 0\\ -c(\alpha+\beta) & s(\alpha+\beta) & 0 \end{bmatrix}$；

可得$\boldsymbol{\alpha+\gamma=Atan2(r_{32},r_{22})}$，对应该姿态的 XY’Z’欧拉角不唯一。

当$\boldsymbol{\beta=-\frac{\pi}{2}}$时，同理可得$\boldsymbol{\alpha-\gamma=Atan2(r_{32},r_{22})}$，对应该姿态的 XY’Z’欧拉角不唯一。

装
订
线

装
订
线

3.逆运动学解

已知吸盘末端位姿(x, y, z, rx, ry, rz)，可得关节 6 转移矩阵：

$$ {}_{6}^{0}T = \begin{bmatrix} R_x(rx)R_y(ry)R_z(rz) & [x,y,z]^T \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.06 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

考虑到：

$$ {}_{6}^{0}T = {}_{1}^{0}T\,{}_{2}^{1}T\,{}_{3}^{2}T\,{}_{4}^{3}T\,{}_{5}^{4}T\,{}_{6}^{5}T \ (*) $$

将含有θ_1的部分移到方程的左边，有：

$$ {}_{1}^{0}T^{-1}\,{}_{6}^{0}T = {}_{1}^{0}T\,{}_{2}^{1}T\,{}_{3}^{2}T\,{}_{4}^{3}T\,{}_{5}^{4}T\,{}_{6}^{5}T $$

即：

$$ \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}_{6}^{1}\mathrm{T} $$

令上式两边(2,3)和(2,4)相等，有：

$$ -s_1 r_{13} + c_1 r_{23} = s_5,\ \ -s_1 x + c_1 y = d_2 + d_4 + d_6\, s_5 $$

联立，消去s_5，可得：

$$ (d_6 r_{23} - y)c_1 - (d_6 r_{13} - x)s_1 = -d_2 - d_4 $$

令

$$ \begin{cases} d_6 r_{13} - x = \rho cos\varphi \\ d_6 r_{23} - y = \rho sin\varphi \end{cases} $$

满足：

$$ \begin{cases} \rho = \sqrt{(d_6 r_{13} - x)^2 + (d_6 r_{23} - y)^2} \\ \varphi = Atan2(d_6 r_{23} - y, d_6 r_{13} - x) \end{cases} $$

回代，有：

$$ \rho \sin(\varphi - \theta_1) = -d_2 - d_4 $$

则有：

$$ \varphi - \theta_1 = Atan2\left(\frac{-d_2 - d_4}{\rho}, \pm\sqrt{1 - \left(\frac{-d_2 - d_4}{\rho}\right)^2}\right) $$

故：

$$ \boldsymbol{\theta_1 = Atan2(d_6 r_{23} - y, d_6 r_{13} - x) - Atan2\left(-d_2 - d_4, \pm\sqrt{(d_6 r_{23} - y)^2 + (d_6 r_{13} - x)^2 - (d_2 + d_4)^2}\right)} $$

$$ \boldsymbol{\theta_5 = \mathrm{Asin}(-s_1 r_{13} + c_1 r_{23})} $$

由 sin 函数性质可知，$\boldsymbol{\theta_5 = \begin{cases} -\pi - \theta_5 & \theta_5 < 0 \\ \pi - \theta_5 & \theta_5 > 0 \end{cases}}$**也成立**。

再令两边(2,1)和(2,2)分别相等，有：

$$ -s_1 r_{11} + c_1 r_{21} = \mathrm{c}_5 c_6,\ \ -s_1 r_{12} + c_1 r_{22} = \mathrm{c}_5 s_6 $$

得：

$$ \boldsymbol{\theta_6 = atan2((-s_1 r_{12} + c_1 r_{22})c_5, (-s_1 r_{11} + c_1 r_{21})c_5)} $$

当$c_5 = 0$时，操作臂处于**奇异位形**，此时关节轴 4、关节轴 5 和关节轴 6 两两垂直，引起机器人末端连杆相同的运动。在这种情况下，所有结果（所有可能的解）都是θ_6和$\theta_2 + \theta_3 + \theta_4$的和或差。当操作臂处于奇异位形时，则$\theta_6$可以任意选取（通常取关节 6 的当前值），当计算出θ_6时，相应地选取$\theta_2 + \theta_3 + \theta_4$，并进行下一步计算。

解出$\theta_1 \theta_5 \theta_6$之后，重新整理$(*)$式，有：

$$ {}^0_1T^{-1}\,{}^0_TT\,{}^5_6T^{-1}\,{}^4_5T^{-1} = {}^1_2T\,{}^2_3T\,{}^3_4T\,{}^4_5T \quad (\#) $$

其中，(#)式左边${}^0_1T^{-1}\,{}^0_TT\,{}^5_6T^{-1}\,{}^4_5T^{-1}$已知，记为：

$$ {}^0_1T^{-1}\,{}^0_TT\,{}^5_6T^{-1}\,{}^4_5T^{-1} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} r'_{11} & r'_{12} & r'_{13} & x' \\ r'_{21} & r'_{22} & r'_{23} & y' \\ r'_{31} & r'_{32} & r'_{33} & z' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

令(#)式两边元素(1,4)和(3,4)相等，得到：

$$ x' = a_2c_2 + a_3c_{23} \quad (1) $$

$$ z' = -a_2s_2 - a_3s_{23} \quad (2) $$

$(1)^2 + (2)^2$可得：

$$ c_3 = (x'^2 + y'^2 - a_2^2 - a_3^2)/2a_2a_3 $$

则：

$$ \boldsymbol{\theta_3 = \pm Acos\left((x'^2 + y'^2 - a_2^2 - a_3^2)/2a_2a_3\right)} $$

回代，可得：

$$ \boldsymbol{\theta_2 = atan2\left((a_2 + a_3c_3)x - (a_3s_3)y, (a_3s_3)x + (a_2 + a_3c_3)y\right)} $$

令(#)式两边元素(1,1)和(1,2)相等，得到：

$$ r'_{11} = c_{234}，\ r'_{12} = -s_{234} $$

则：

$$ \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = Atan2(-r'_{12}, r'_{11}) $$

因此：

$$ \boldsymbol{\theta_4 = Atan2(-r'_{12}, r'_{11}) - \theta_2 - \theta_3} $$

其中，$a_2 = 0.185, a_3 = 0.17, d_1 = 0.23, d_2 = -0.054, d_3 = 0, d_4 = d_5 = 0.077, d_6 = 0.0855$。

对于以上求解过程，我们使用 Python 编写了自己的逆运动学求解器 myIKSolver.py，其中除了完成了逆运动学求解，还加入了根据各个关节角的范围筛选可行解的部分，使得求解器的输出即为可行解。

在对各个中间点求解逆运动学解时，我们引入了最近邻匹配算法，以保证当前中间点的关节角和上一中间点的关节角改变量尽可能小。其中，匹配指标为关节角之间的欧氏距离。

```
def near_match(angles, last_q):
    if angles.shape[0] == 1:
        return angles[0]
    else:
        min = 10000000000
        res = angles[0]
        for angle in angles:
            sum = 0
            for i in range(6):
                sum += (angle[i]-last_q[i])**2
            if sum < min:
                min = sum
                res = angle
        return res
```

4.四元数转欧拉角

Demo 程序已经实现了这四个物块的四元数姿态读取，所以我们只需要把四元数转为欧拉角即可。转换原理如下：

对于四元数$[\eta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3]$，其对应的旋转矩阵为：

$$ \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 2(\eta^2 + \varepsilon_1^2) - 1 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \eta\varepsilon_3) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \eta\varepsilon_2) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \eta\varepsilon_3) & 2(\eta^2 + \varepsilon_2^2) - 1 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 - \eta\varepsilon_1) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 - \eta\varepsilon_2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \eta\varepsilon_1) & 2(\eta^2 + \varepsilon_3^2) - 1 \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

装 订 线

则对应的欧拉角为：

$$\alpha = Atan2(-r_{23}, r_{33})$$

$$\beta = Atan2(r_{13}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{12}^2})$$

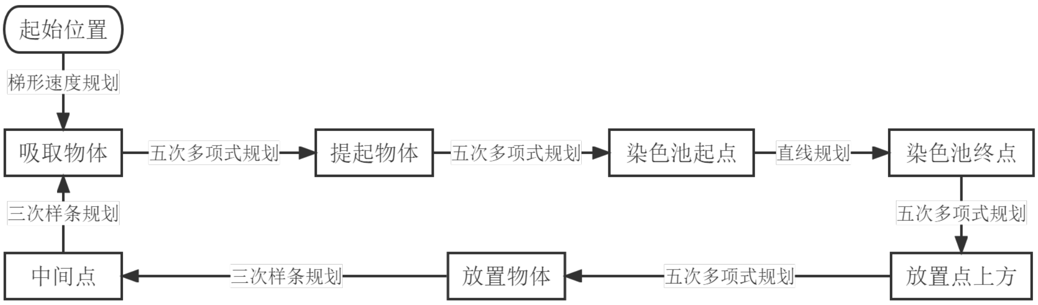
$$\gamma = Atan2(-r_{12}, r_{11})$$

程序实现如下图所示：

```
def convert(b, a1, a2, a3):
    r11=2*(b**2+a1**2)-1
    r12=2*(a1*a2-b*a3)
    r13=2*(a1*a3+b*a2)
    r21=2*(a1*a2+b*a3)
    r22=2*(b**2+a2**2)-1
    r23=2*(a2*a3-b*a1)
    r31=2*(a1*a3-b*a2)
    r32=2*(a2*a3+b*a1)
    r33=2*(b**2+a3**2)-1
    alpha = math.atan2(-r23,r33)
    beta = math.atan2(r13,math.sqrt(r11**2+r12**2))
    gamma = math.atan2(-r12,r11)
    return alpha,beta,gamma
```

5.轨迹规划

整体流程图如下所示：



装

订

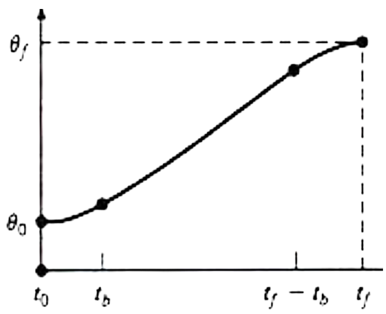
线

5.1 梯形速度规划（带抛物线拟合的线性函数）

主要用于开始段和结束段，因为这两段的关节转动角度大，采用梯形速度规划可以有效减少所需时间。假设两端的抛物线拟合区段具有相同的持续时间，因此在这两个拟合区段中采用相同的恒定加速度（符号相反）。

这种规划方法存在多个解，每个结果都对称于时间中点$\mathrm{t_h}$和位置中点θ_h，拟合区段终点的速度必须等于直线段的速度，即$\ddot{\theta}t_b = \frac{\theta_\mathrm{h}-\theta_\mathrm{b}}{\mathrm{t_h}-\mathrm{t_b}}$，式中，$\theta_b = \theta_\mathrm{o} + \frac{1}{2}\ddot{\theta}\mathrm{t_b^2}$是拟合段终点的$\theta$值，$\ddot{\theta}$是拟合段的加速度，联立上式并考虑$t_h = \frac{t_f}{2}$及$\theta_\mathrm{h} = \frac{\theta_\mathrm{o}+\theta_\mathrm{f}}{2}$，有$\ddot{\theta}\mathrm{t_b^2} - \ddot{\theta}\mathrm{t_f t_b} + (\theta_\mathrm{f} - \theta_\mathrm{o}) = 0$，选取$\ddot{\theta}$使得$\ddot{\theta} \geq \frac{4(\theta_\mathrm{f}-\theta_\mathrm{o})}{\mathrm{t_f^2}}$，则$t_b = \frac{t_f}{2} - \frac{\sqrt{\ddot{\theta}^2 t_f^2 - 4\ddot{\theta}(\theta_f-\theta_0)}}{2\ddot{\theta}}$。于是，在开始控制的 t 时刻，有：

$$\theta(t) = \begin{cases} \theta_o + \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2, t < t_b \\ \theta_o + \frac{1}{2}\ddot{\theta}t_b^2 + \ddot{\theta}t_b(t - t_b), t_b \leq t < t_f - t_b \\ \theta_f - \frac{1}{2}\ddot{\theta}(t_f - t)^2, t_f - t_b \leq t < t_f \\ \theta_f, t \geq t_f \end{cases}$$



$$\dot{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{t}) = \begin{cases} \ddot{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t} < \boldsymbol{t_b} \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{t_b}, \boldsymbol{t_b} \le \boldsymbol{t} < \boldsymbol{t_f} - \boldsymbol{t_b} \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{t_f} - \boldsymbol{t}), \boldsymbol{t_f} - \boldsymbol{t_b} \le \boldsymbol{t} < \boldsymbol{t_f} \\ \boldsymbol{0}, \boldsymbol{t} \ge \boldsymbol{t_f} \end{cases}$$

装

订

线

5.2 五次多项式关节空间规划

在目标物转移段和拿起放下段，我们采用了五次多项式关节空间规划方法，指定运动段起点和终点的位置、速度和加速度。主要是为了与与直线段平滑过渡且做到轻拿轻放。

设五次曲线为：

$$\theta(\mathrm{t}) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

则对应的速度和加速度曲线分别为：

$$\dot{\theta}(\mathrm{t}) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4；\ddot{\theta}(\mathrm{t}) = 2a_2 t + 6a_3 t^2 + 12a_4 t^3 + 20a_5 t^3$$

约束条件为：

$$\theta_0 = \theta(0)，\theta_f = \theta(\mathrm{t}_f)，\dot{\theta_0} = \dot{\theta}(0)，\dot{\theta_f} = \dot{\theta}(\mathrm{t}_f)，\ddot{\theta_0} = \ddot{\theta}(0)，\ddot{\theta_f} = \ddot{\theta}(\mathrm{t}_f)$$

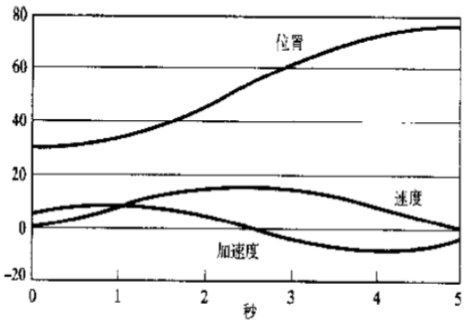
根据方程组可以解得：

$$\boldsymbol{a_0 = \theta_0} \quad \boldsymbol{a_1 = \dot{\theta_0}} \quad \boldsymbol{a_2 = \frac{\ddot{\theta_0}}{2}}$$

$$\boldsymbol{a_3 = \frac{2o\theta_f - 2o\theta_o - (8\dot{\theta_f} + 12\dot{\theta_o})t_f - (3\ddot{\theta_0} - \ddot{\theta_f})t_f^2}{2t_f^3}}$$

$$\boldsymbol{a_4 = \frac{3o\theta_f - 3o\theta_o + (14\dot{\theta_f} + 16\dot{\theta_o})t_f - (3\ddot{\theta_0} - 2\ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^4}}$$

$$\boldsymbol{a_5 = \frac{12\theta_f - 12\theta_o - (6\dot{\theta_f} + 6\dot{\theta_o})t_f - (\ddot{\theta_0} - \ddot{\theta_f})t_f^2}{2t_f^5}}$$



5.3 三次样条规划

在放置点 A 经中间点 B 到下一个目标物的拿起点 C 的路径中，我们采用了三次样条规划方法，无需在中间点 B 停下，保证流畅性和效率。

分别设 A-B 段、B-C 段的三次曲线为

$$\theta_{AB}(\mathrm{t}) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$
$$\theta_{BC}(\mathrm{t}) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$$

约束条件 1：经过 A 点，且 A 点速度、加速度为零

$$a_0 = \theta_A$$
$$a_1 = 0$$

约束条件 2：经过 B 点，且 B 点平滑过渡，即当$t = t_{AB}$时位置、速度、加速度一致

$$a_0 + a_1 t_{AB} + a_2 {t_{AB}}^2 + a_3 {t_{AB}}^3 = \theta_B$$
$$b_0 + b_1 t_{AB} + b_2 {t_{AB}}^2 + b_3 {t_{AB}}^3 = \theta_B$$
$$a_1 + 2a_2 t_{AB} + 3a_3 {t_{AB}}^2 = b_1 + 2b_2 t_{AB} + 3b_3 {t_{AB}}^2$$
$$2a_2 + 6a_3 t_{AB} = 2b_2 + 6b_3 t_{AB}$$

约束条件 3：经过 C 点，且 C 点速度为零。

$$b_0 + b_1 t_{AC} + b_2 {t_{AC}}^2 + b_3 {t_{AC}}^3 = \theta_C$$
$$b_1 + 2b_2 t_{AC} + 3b_3 {t_{AC}}^2 = 0$$

根据该线性方程组解出 8 个系数即可

5.4 直线段笛卡尔空间规划

装

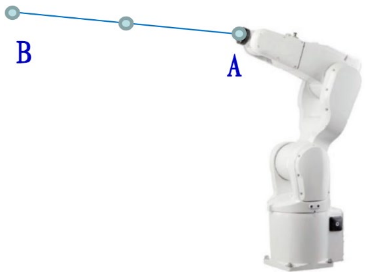
订

线

本次任务所要求的直线规划仅在 X 位置方向上有变化，而在 YZ 位置方向和姿态上均无变化，因此只需在 X 方向上对位置进行线性插补即可。插补公式为：

$$x = x_0 + (x_1 - x_0) \times \frac{t}{time}$$

每经过一个控制周期计算一次插补值，通过逆运动学求解器求解关节角，输入至 API 接口中，完成匀速直线运动控制。



同时，为了保证转移段和直线段之间的非静止平滑过渡，我们计算出直线段前三个控制周期和末三个控制周期的关节角值（逆运动学解），使用后向差分计算出直线段各个关节角的起始速度、加速度，代入至前转移段的五次多项式规划的终点速度、加速度指定中；使用前向差分计算出直线段各个关节角的末尾速度、加速度，代入至后转移段的五次多项式规划的起点速度、加速度指定中。最终实现目标物从拿起点上方经染色池至放置点上方的平滑运动。公式如下：

$$\boldsymbol{\omega_1} = \frac{\boldsymbol{\theta_2 - \theta_1}}{\boldsymbol{\Delta t}}, \boldsymbol{\omega_2} = \frac{\boldsymbol{\theta_3 - \theta_2}}{\boldsymbol{\Delta t}}, \boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{\omega_2 - \omega_1}}{\boldsymbol{\Delta t}}$$

其中，$\theta_1, \theta_2, \theta_3$为直线段前三个控制周期或末三个控制周期的关节角值（逆运动学解）

示例代码如下：

```
vel_tmp = (line_q2-line_q1)/0.05
vel_tmp2 = (line_q3-line_q2)/0.05
acc_tmp = (vel_tmp2-vel_tmp)/0.05
q = trajPlaningfive(q4, q17 ,vel_tmp2,np.zeros(6),acc_tmp, np.zeros(6), t-61, 3)
```

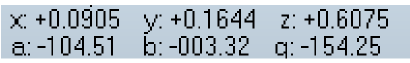
四、实验结果与分析（必填）

1.正运动学验证

取关节角为$(\frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{3}, 0)$，代入正运动学公式，可得：

$$[x, y, z, \alpha, \beta, \gamma] = [0.0905, 0.1643, 0.6075, -104.5025°, -3.3258°, -154.2947°]$$

仿真结果如下图所示:，二者基本一致。



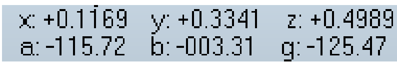
2.逆运动学验证

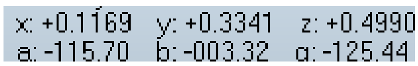
取末端位姿为$[0.117, 0.334, 0.499, -115.68°, -3.32°, -125.47°]$，代入以上公式可得 2 组可行的关节角：

$$[1.04691599, 0.5432342, 0.53145443, -0.55151197, 0.52390861, 0.69854057]$$

$$[1.04691599, 1.05168991, -0.53145443, 0.00294118, 0.52390861, 0.69854057]$$

将以上两个关节角代入仿真，仿真结果如下图所示，二者基本一致。

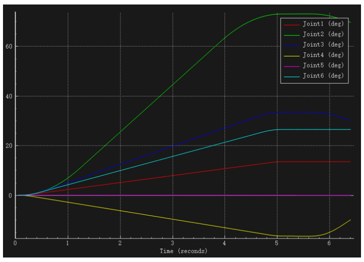




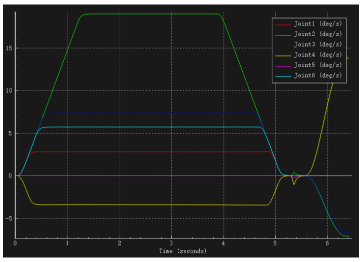
3.轨迹规划

3.1 梯形速度规划

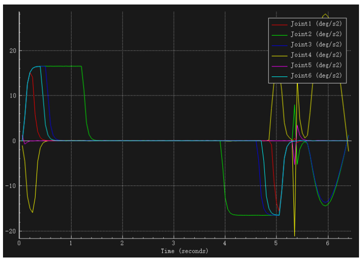
机械臂六个关节的角度、角速度、角加速度曲线如下图所示：



关节角曲线图



角速度曲线图

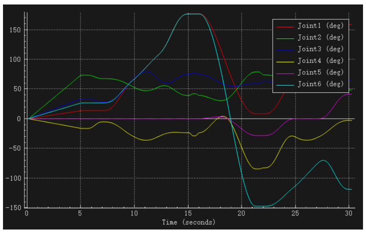


角加速度曲线图

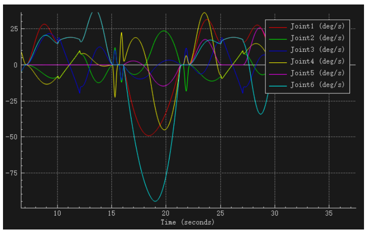
【分析】从图中可以看到，我们较好地实现了梯形速度规划，角度、角速度曲线都连续且平滑。

3.2 五次多项式规划及三次样条规划

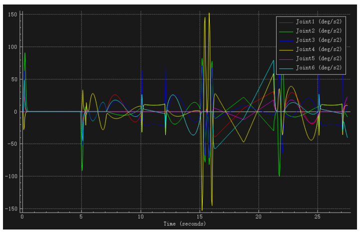
机械臂六个关节的角度、角速度、角加速度曲线如下图所示：



关节角曲线图



角速度曲线图



角加速度曲线图

装

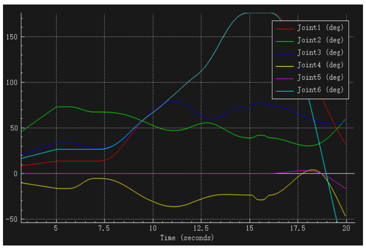
【分析】从图中可以看到，采用关节空间多项式规划的各个关节的关节角、角速度、角加速度都连续且平滑，这对机械臂的控制是有利的。

订

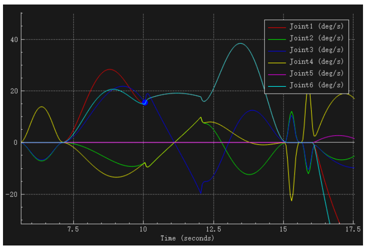
线

3.3 直线段笛卡尔空间规划

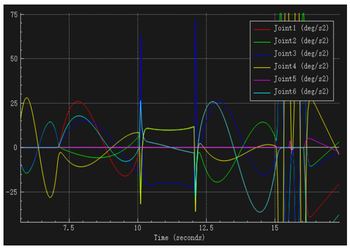
机械臂六个关节的角度、角速度、角加速度曲线如下图所示：



关节角曲线图



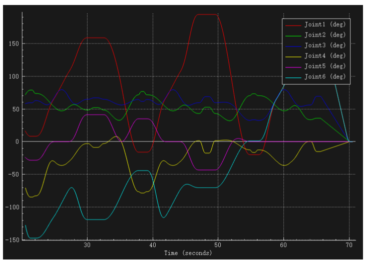
角速度曲线图



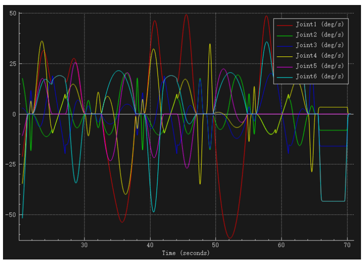
角加速度曲线图

【分析】从图中可以看到，在 10s 和 12s 处加速度曲线出现了尖峰，这正是数值差分近似计算速度和加速度的缺点：差分近似微分有误差存在，该误差经二阶求导后会显著放大，因此在加速度曲线上会有尖峰出现。

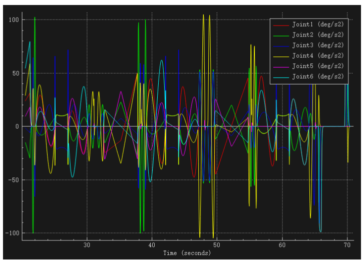
3.4 总曲线图



关节角曲线图



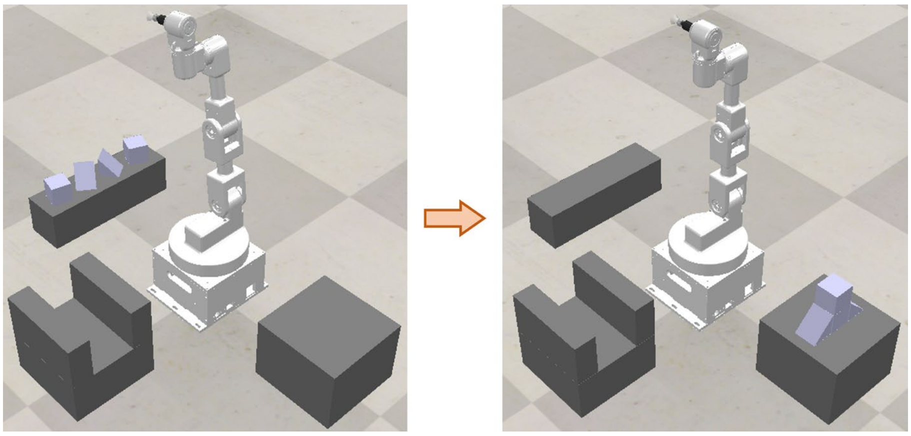
角速度曲线图



角加速度曲线图

3.5 摆放效果

我们最终用 70s 实现了四个物块的摆放，结果如下图所示：



装

订

线